

www.toanmath.com

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm miền giá trị của hàm số : $f(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x^2+1}}$

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z = 5(2+i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = z^2 + z$

b) Giải phương trình : $\log_9 x (\log_3 x + 3) = 2$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân sau : $I = \int_1^e \frac{xe^x + 1}{x(e^x + \ln x)} dx$

Câu 5 (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 3z + 1 = 0$ và điểm $I(3; -5; -2)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm..

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Cho biết $\tan a = -2, \left(-\frac{\pi}{2} < a < 0\right)$. Tính giá trị của biểu thức : $A = \cos a (2 \sin a + \sqrt{3})$

b) Một chi đoàn có 15 đoàn viên trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 1 nữ.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$; $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

Câu 8 (1,0 điểm)..

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $(\Delta): x + y + 1 = 0$. Từ điểm A thuộc (Δ) kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (C) tại B và C . Tìm tọa độ điểm A biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 8.

Câu 9 (1,0 điểm).

Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + \sqrt{21} = \sqrt{y^2-3x} + \sqrt{31} \\ \sqrt{y-1} + 2y^2 + 1 = \sqrt{x} + x^2 + xy + 3y \end{cases}$$

Câu 10 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là độ dài của ba cạnh của tam giác ABC có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $F = 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 6abc$

-----Hết-----

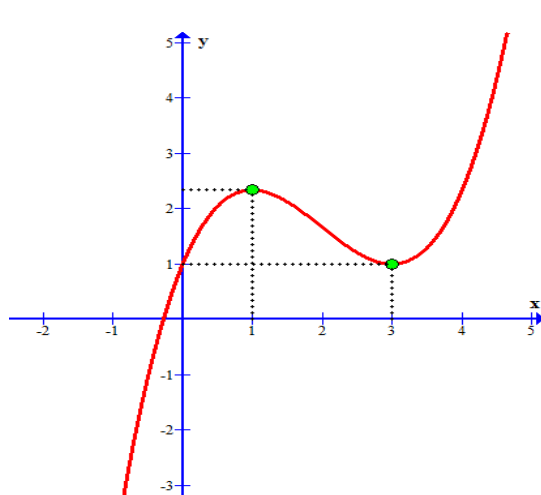
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

I. LƯU Ý CHUNG:

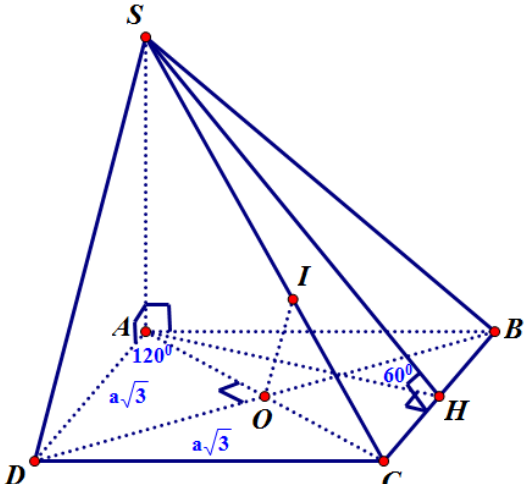
- Đáp án trình bày một cách giải gồm các ý bắt buộc phải có trong bài làm của học sinh. Khi chấm nếu học sinh bỏ qua bước nào thì không cho điểm bước đó.
- Trong lời giải câu 7, câu 8 nếu học sinh không vẽ hình thì không cho điểm.
- Nếu học sinh giải cách khác, giám khảo căn cứ các ý trong đáp án để cho điểm.
- Trong bài làm, nếu ở một bước nào đó bị sai thì các phần sau có sử dụng kết quả sai đó không được điểm.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

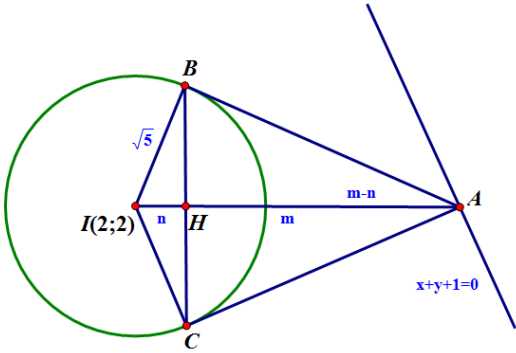
II. ĐÁP ÁN:

Câu	Ý	Nội dung trình bày	Điểm																
1		Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$	1,0																
		* Tập xác định: $\mathbb{R}$ * Chiều biến thiên: Ta có $y' = x^2 - 4x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$; nghịch biến trên $(1; 3)$.	0,25																
		* Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow y_{CD} = \frac{7}{3}$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3 \Rightarrow y_{CT} = 1$. * Giới hạn: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.	0,25																
		* Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{7}{3}$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	y	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	1	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	1	3	$+\infty$														
y'	+	0	-	0	+														
y	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	1	$+\infty$															
	* Đồ thị: 	0,25																	

2		Tìm miền giá trị của hàm số : $f(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x^2+1}}$	1,0												
		Miền xác định $D = \mathbb{R}$ (do $x^2+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$) Ta có : $f'(x) = \frac{1-5x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} > 0$	0,25												
		$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-5x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{ x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{ x } = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \rightarrow +\infty \\ -1 & \text{khi } x \rightarrow -\infty \end{cases}$	0,25												
		Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{1}{5}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-1</td><td>$\sqrt{26}$</td><td>1</td></tr></table>	x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$	$f'(x)$	+	0	-	$f(x)$	-1	$\sqrt{26}$	1	0,25
	x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$											
$f'(x)$	+	0	-												
$f(x)$	-1	$\sqrt{26}$	1												
	Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ Miền giá trị của hàm số là $(-1; \sqrt{26}]$	0,25													
3	3.a	Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z = 5(2+i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = z^2 + z$	0,5												
		Ta có $z = \frac{5(2+i)^2}{1+2i} = \frac{5(3+4i)}{1+2i} = \frac{5(3+4i)(1-2i)}{5} = 11-2i$	0,25												
		Suy ra $w = z^2 + z = (11-2i)^2 + 11-2i = 128-46i$, Vậy w có phần thực bằng 128, phần ảo bằng -46	0,25												
	3.b	Giải phương trình : $\log_9 x(\log_3 x + 3) = 2$	0,5												
		Điều kiện $x > 0$. Phương trình tương đương với $\log_{3^2} x(\log_3 x + 3) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 x(\log_3 x + 3) = 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 3\log_3 x - 4 = 0$	0,25												
		$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{81} \end{cases}$ Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 3; x = \frac{1}{81}$	0,25												
4		Tính tích phân sau : $I = \int_1^e \frac{xe^x + 1}{x(e^x + \ln x)} dx$	1,0												
		Đặt $t = e^x + \ln x \Rightarrow dt = \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{(xe^x + 1)}{x} dx$	0,25												
		Đổi cận : Khi $x = 1$ thì $t = e$ Khi $x = e$ thì $t = e^e + 1$	0,25												

		$I = \int_e^{e^e+1} \frac{dt}{t} = \ln \left t \right _e^{e^e+1} = \ln \frac{e^e+1}{e}$	0,25
		Đáp số : $I = \ln \frac{e^e+1}{e}$	0,25
		Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - y - 3z + 1 = 0$ và điểm $I(3; -5; -2)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Tìm tọa độ tiếp điểm..	1,0
		Bán kính mặt cầu $R = d(I; (P)) = \frac{ 2 \cdot 3 - (-5) - 3 \cdot (-2) + 1 }{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{18}{\sqrt{14}}$.	0,25
5		Phương trình mặt cầu: $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = \frac{162}{7}$.	0,25
		- Tiếp điểm chính là hình chiếu vuông góc H của I xuống mặt phẳng (P) đã cho - Đường thẳng IH qua I và nhận PVT $\vec{n} = (2; -1; -3)$ của mặt phẳng (P) làm VTCP có phương trình là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -5 - t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$	0,25
		- Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -5 - t \\ z = -2 - 3t \\ 2x - y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ - Hệ này có nghiệm $t = -\frac{9}{7}, x = \frac{3}{7}, y = -\frac{26}{7}, z = \frac{13}{7}$ - Do đó tiếp điểm H có tọa độ là $H\left(\frac{3}{7}; -\frac{26}{7}; \frac{13}{7}\right)$.	0,25
		Cho biết $\tan a = -2, \left(-\frac{\pi}{2} < a < 0\right)$. Tính giá trị của biểu thức : $A = \cos a (2 \sin a + \sqrt{3})$	0,5
6.a		Ta có : $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} < a < 0 \Rightarrow \cos a > 0; \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin a = \cos a \cdot \tan a = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$	0,25
6		Vì vậy $A = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \sqrt{3} \right] = \frac{-4 + \sqrt{15}}{5}$	0,25
		Một chi đoàn có 15 đoàn viên trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 1 nữ.	0,5
6.b		Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365$ Gọi A là biến cố "trong 4 người được chọn có ít nhất 1 nữ"	0,25

		Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = C_{15}^4 - C_7^4 = 1330$	
		Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1330}{1365} = \frac{38}{39}$.	0,25
		Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$; $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.	1,0
		 - Do đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$; $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên các tam giác ABC, ADC là các tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Suy ra: $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \frac{(a\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$ - Gọi H là trung điểm của BC. Suy ra $AH \perp BC \Rightarrow SH \perp BC$ Do đó $[(SBC); (ABCD)] = (\widehat{AH; SH}) = \widehat{SHA} = 60^\circ$	0,25
7		Xét tam giác SAH ta có: $SA = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{(a\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$	0,25
		Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{4}$.	
		- Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $DB \perp AC$, $BD \perp SC$ nên $BD \perp (SAC)$ tại O. - Kẻ $OI \perp SC \Rightarrow OI$ là đường vuông góc chung của BD và SC.	0,25
		Sử dụng hai tam giác đồng dạng ICO và ACS hoặc đường cao của tam giác SAC suy ra được $OI = \frac{3a\sqrt{39}}{26}$. Vậy $d(BD, SC) = \frac{3a\sqrt{39}}{26}$	0,25
		Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $(\Delta): x+y+1=0$. Từ điểm A thuộc (Δ) kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (C) tại B và C. Tìm tọa độ điểm A biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 8.	1,0

8	 • (C) có tâm $I(2;2)$, $R = \sqrt{5}$, $A \in (\Delta) \Rightarrow A(a; -a-1)$ • Từ tính chất tiếp tuyến $\Rightarrow IA \perp BC$ tại H là trung điểm của BC. Giả sử $IA = m, IH = n$ ($m > n > 0$) $\Rightarrow HA = m - n, BH = \sqrt{IB^2 - IH^2} = \sqrt{5 - n^2}$ • Suy ra: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = BH \cdot AH = (m - n)\sqrt{5 - n^2} = 8$ (1)	0,25
	• Trong tam giác vuông IBA có $BI^2 = IH \cdot IA \Leftrightarrow 5 = m \cdot n \Leftrightarrow m = \frac{5}{n}$ (2) Thay (2) vào (1) ta có: $\left(\frac{5}{n} - n\right)\sqrt{5 - n^2} = 8 \Leftrightarrow n^6 - 15n^4 + 139n^2 - 125 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (n^2 - 1)(n^4 - 14n^2 + 125) = 0$ Suy ra $n = 1, m = 5$.	0,25
	$IA = 5 \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (-a - 3)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2; -3) \\ A(-3; 2) \end{cases}$	0,25
9	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{21} = \sqrt{y^2 - 3x} + \sqrt{31} & (1) \\ \sqrt{y - 1} + 2y^2 + 1 = \sqrt{x} + x^2 + xy + 3y & (2) \end{cases}$	1,0
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 1 \\ y^2 \geq 3x \end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow (\sqrt{y - 1} - \sqrt{x}) + [(y - 1)^2 - x^2] + y(y - x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (y - x - 1) \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{y - 1} + \sqrt{x}} + 2y + x - 1}_{>0, \forall x \geq 0, y \geq 1} \right) = 0 \Leftrightarrow y - x - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$ (3)	0,25
	Thế (3) vào (1) ta được: $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{21} = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{31}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{31} - \sqrt{21}$ (4) Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}, \forall x \geq 0$ Có: $f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}, \forall x \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{(2x + 1)^2 + 3}} - \frac{2x - 1}{\sqrt{(2x - 1)^2 + 3}}, \forall x \geq 0$ Xét hàm số $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(t) = \frac{3}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà	0,25

	$2x+1 > 2x-1, \forall x \geq 0 \Rightarrow g(2x+1) > g(2x-1), \forall x \geq 0$ $\Rightarrow f'(x) = g(2x+1) - g(2x-1) > 0, \forall x \geq 0$	
	Nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập $[2; +\infty)$ Mặt khác: $\begin{cases} 5 \in [2; +\infty) \\ f(5) = \sqrt{31} - \sqrt{21} \end{cases}$ Phương trình (4) $\Leftrightarrow f(x) = f(5) \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 6$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 6)$	0,25
10	Cho a, b, c là độ dài của ba cạnh của tam giác ABC có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 6abc$	1,0
	Theo giả thiết cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow$ nên trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1. Giả sử đó là số $a \Rightarrow a \geq 1$ Theo tính chất ba cạnh của tam giác ta luôn $b + c > a \Leftrightarrow 3 - a > a \Rightarrow a < \frac{3}{2}$ Như vậy $1 \leq a < \frac{3}{2}$	0,25
	Ta có $F = 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 6abc = 5a^2 + 5[(b+c)^2 - 2bc] + 6abc$ $= 5a^2 + 5(3-a)^2 - 2bc(5-3a)$ Theo bất đẳng thức AM-GM ta có $2bc \leq \frac{1}{2}(b+c)^2 = \frac{1}{2}(3-a)^2$ Mặt khác $1 \leq a < \frac{3}{2} < \frac{5}{3} \Rightarrow 5-3a > 0 \Rightarrow -2bc(5-3a) \geq -\frac{1}{2}(3-a)^2(5-3a)$	0,25
	Do đó $F = 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 6abc \geq 5a^2 + 5(3-a)^2 - \frac{1}{2}(3-a)^2(5-3a)$ $= \frac{3}{2}(a^3 - a^2 - a + 15)$ Xét hàm số $f(a) = \frac{3}{2}(a^3 - a^2 - a + 15)$ với $1 \leq a < \frac{3}{2}$	0,25
	$f'(a) = \frac{3}{2}(3a^2 - 2a - 1) = \frac{3}{2}(a-1)(3a+1) \geq 0, \forall a \in \left[1; \frac{3}{2}\right)$, nên hàm số $f(a)$ đồng biến trên khoảng $\left[1; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow f(a) \geq f(1) = 21, \forall 1 \leq a < \frac{3}{2}$ $F \geq f(a) \geq f(1) = 21, \forall a \in \left[1; \frac{3}{2}\right)$ Dấu bằng khi $\begin{cases} a=1; b=c \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$ Vậy giá trị nhỏ nhất của F bằng 21 đạt được khi tam giác ABC đều có cạnh bằng 1	0,25