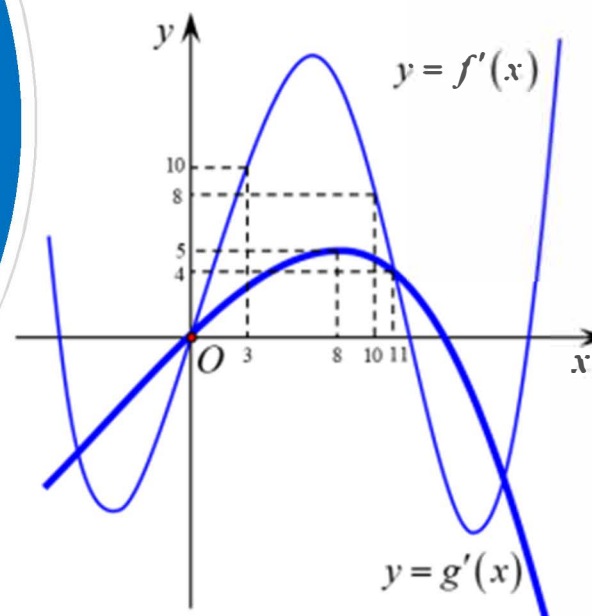
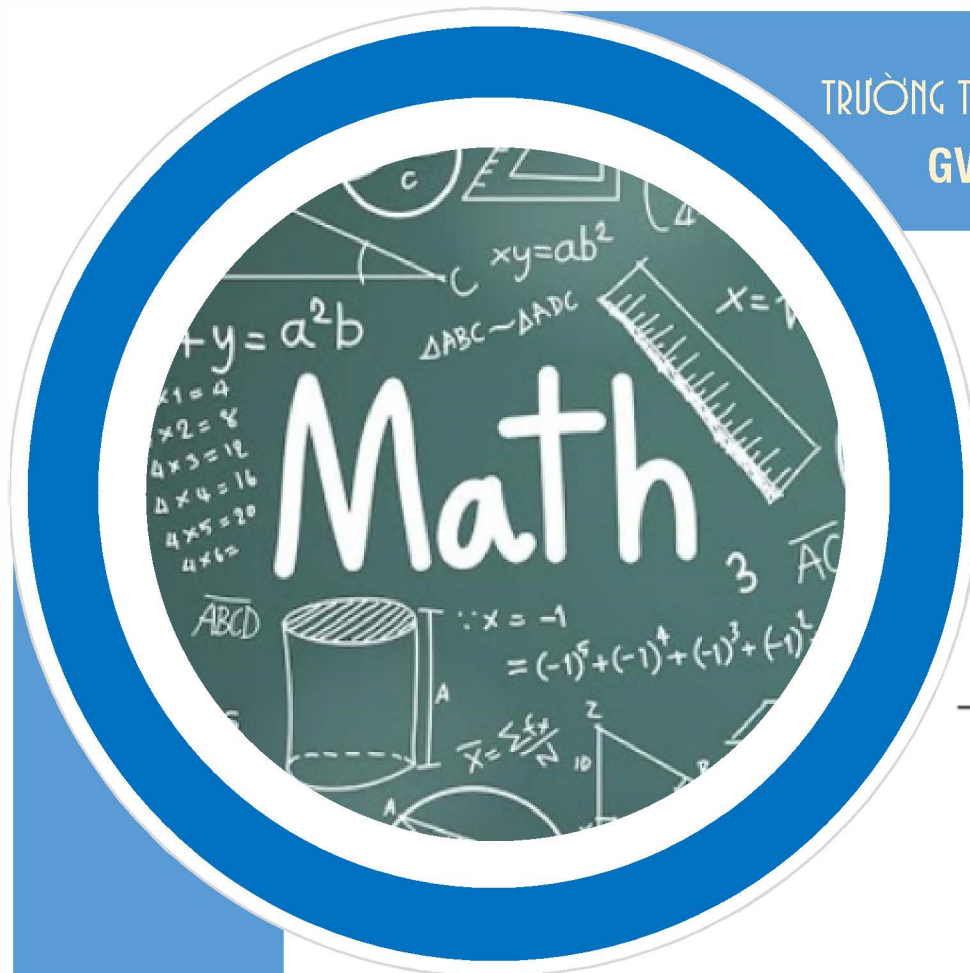


TRƯỜNG THPT LƯƠNG THẾ VINH - QUẢNG BÌNH
GV: NGUYỄN HOÀNG VIỆT



218 BÀI TOÁN HÀM ẨN

Hệ thống kiến thức trọng tâm cần nhớ

Tổng hợp các kết quả tính nhanh

Hướng dẫn sử dụng máy tính cầm tay

TOÁN
MÔN

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

Chủ đề 1.	1
Dạng 1.1	1
Dạng 1.2	26
Dạng 1.3	52
Dạng 1.4	58
Dạng 1.5	67
Dạng 1.6	78
Chủ đề 2.	82
Dạng 2.1	82
Dạng 2.2	85
Dạng 2.3	93
Dạng 2.4	99
Dạng 2.5	103
Dạng 2.6	114
Chủ đề 3.	123
Dạng 3.1	123
Dạng 3.2	126
Dạng 3.3	132

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.



CHỦ ĐỀ 1

Biết đồ thị đạo hàm của hàm số

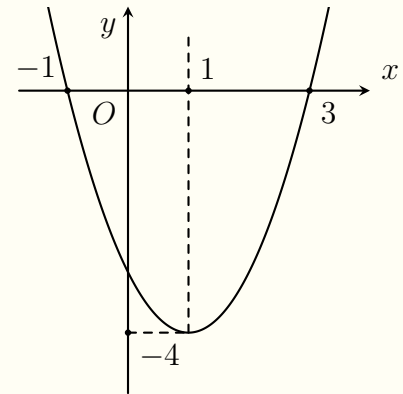
DẠNG 1.1

Đơn điệu

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- (B) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.
- (C) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
- (D) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.



Lời giải.

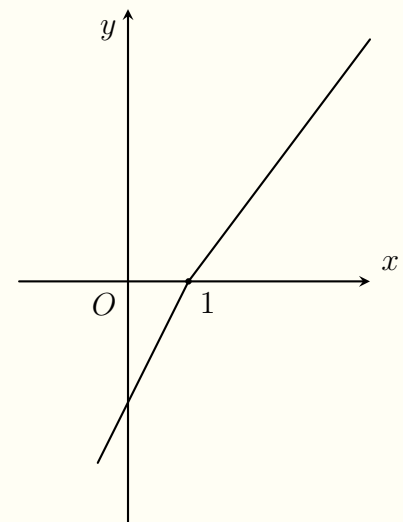
Trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.
- (B) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- (C) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- (D) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Lời giải.

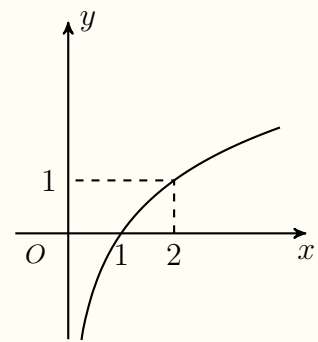
Trên khoảng $(1; +\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 (B) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 (C) Hàm số $f(x)$ chỉ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
 (D) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.



Lời giải.

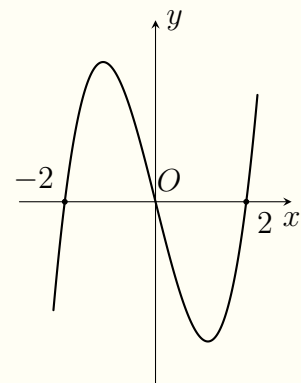
Trong khoảng $(0; 1)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

❖ Câu 4.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 (B) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
 (C) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.
 (D) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.



Lời giải.

Cách 1: sử dụng bảng biến thiên. Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g								

Cách 2: Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ đồng biến trên K .

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ nghịch biến trên K .

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ vừa có phần nằm dưới trục hoành vừa có phần nằm trên trục hoành thì loại phương án đó.

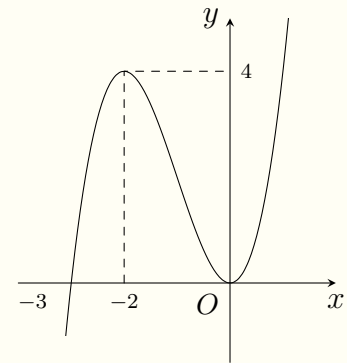
Trên khoảng $(0; 2)$ ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành.

Chọn đáp án (D) □

❖ Câu 5.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2); (0; +\infty)$.
- ☐ B Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- ☐ C Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.
- ☐ D Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.



💬 Lời giải.

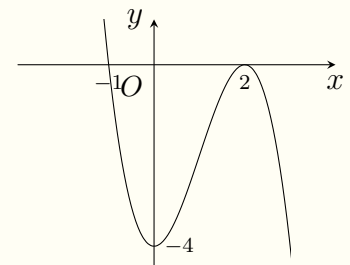
Trên khoảng $(-3; +\infty)$ ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành.

Chọn đáp án ☒ C

❖ Câu 6.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4; 2)$.
- ☐ B Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- ☐ C Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- ☐ D Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -4)$ và $(2; +\infty)$.



💬 Lời giải.

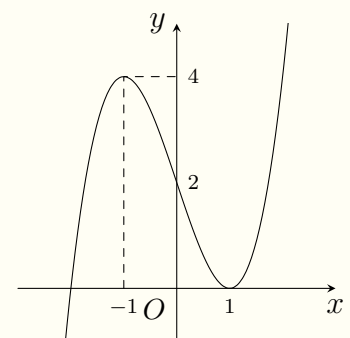
Trong khoảng $(-\infty; -1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án ☒ B

❖ Câu 7.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$). Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?

- ☐ A Trên $(-2; 1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.
- ☐ B Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1; 1]$.
- ☐ C Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- ☐ D Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.



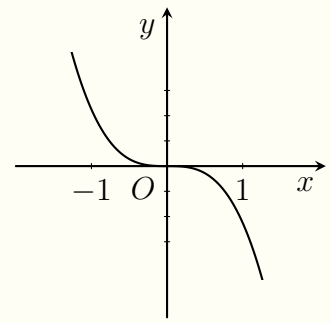
💬 Lời giải.

Trên khoảng $[-1; 1]$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Chọn đáp án ☒ B

❖ Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, khẳng định nào sau đây đúng?



- ☐ A Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- ☐ B Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- ☐ C Hàm số $f(x)$ chỉ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- ☐ D Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

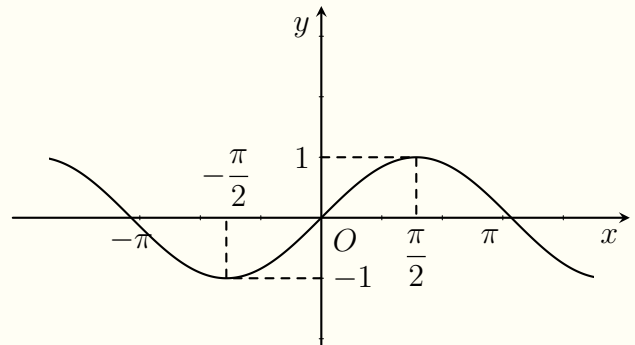
Trong khoảng $(0; +\infty)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

⇒ Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét trên $(-\pi; \pi)$, khẳng định nào sau đây đúng?



- ☐ A Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; \pi)$.
- ☐ B Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi; \pi)$.
- ☐ C Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi; \frac{-\pi}{2})$ và $(\frac{\pi}{2}; \pi)$.
- ☐ D Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Lời giải.

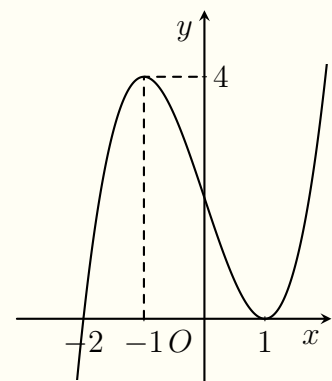
Trong khoảng $(0; \pi)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Chọn đáp án **D**

□

⇒ Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây sai?



- ☐ A Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2; 1)$.
- ☐ B Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- ☐ C Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.
- ☐ D Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên các khoảng } (-2; 1), (1; +\infty).$$

Suy ra A đúng, B đúng.

$f'(x) < 0$ khi $x < -2 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Suy ra D đúng.

Vậy C sai.

Chọn đáp án **C**

❖ Câu 11.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

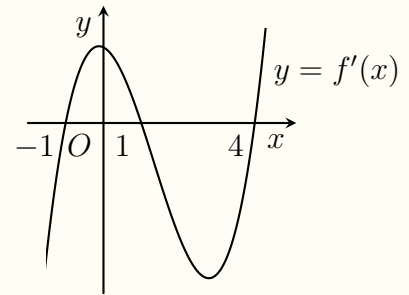
Hàm số $y = g(x) = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

A $(1; 3)$.

B $(2; +\infty)$.

C $(-2; 1)$.

D $(-\infty; -2)$.



💬 Lời giải.

Ta có: $g'(x) = (2 - x) \cdot f'(2 - x) = -f'(2 - x)$

$$\text{Hàm số đồng biến khi } g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(2 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **C**

❖ Câu 12.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

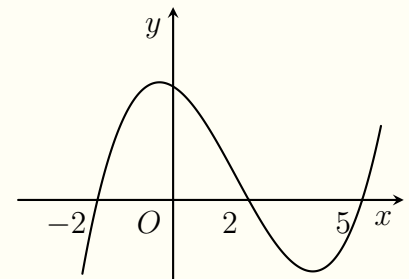
Hàm số $g(x) = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(0; 2)$.

B $(1; 3)$.

C $(-\infty; -1)$.

D $(-1; +\infty)$.



💬 Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{cases}$. Ta có $g'(x) = -2f'(3 - 2x)$.

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3 - 2x < 2 \\ 3 - 2x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{cases}.$$

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ và $(-\infty; -1)$.

$$\text{Cách 2. Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) = 0 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} 3 - 2x = -2 \\ 3 - 2x = 2 \\ 3 - 2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0.5	2.5	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$f(0.5)$		$+\infty$		
		$f(-1)$		$f(2.5)$			

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ ta chọn $x = 0 \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, suy ra $3 - 2x = 3$

theo đồ thị $f'(x) \rightarrow f'(3 - 2x) = f'(3) < 0$. Khi đó $g'(0) = -f'(3) > 0$.

Nhận thấy các nghiệm của $g'(x)$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

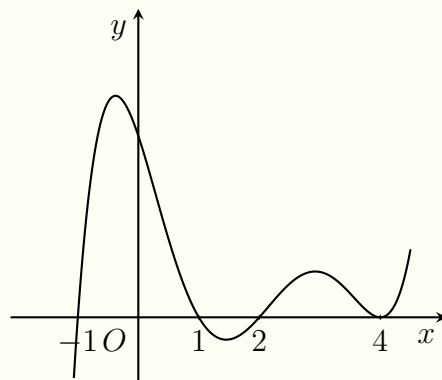
Chọn đáp án **C**



❖ Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Hàm số $g(x) = f(1 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A** $(-1; 0)$. **B** $(-\infty; 0)$. **C** $(0; 1)$. **D** $(1; +\infty)$.



💬 Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$. Ta có $g'(x) = -2f'(1 - 2x)$.

Xét $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x < -1 \\ 1 < 1 - 2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và $(1; +\infty)$.

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(1 - 2x) = 0$

$$\text{theo đồ thị } f'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = -1 \\ 1 - 2x = 1 \\ 1 - 2x = 2 \\ 1 - 2x = 4 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1.5	0.5	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$					$+\infty$

$f(-0.5)$ $f(0)$ $f(1)$

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta

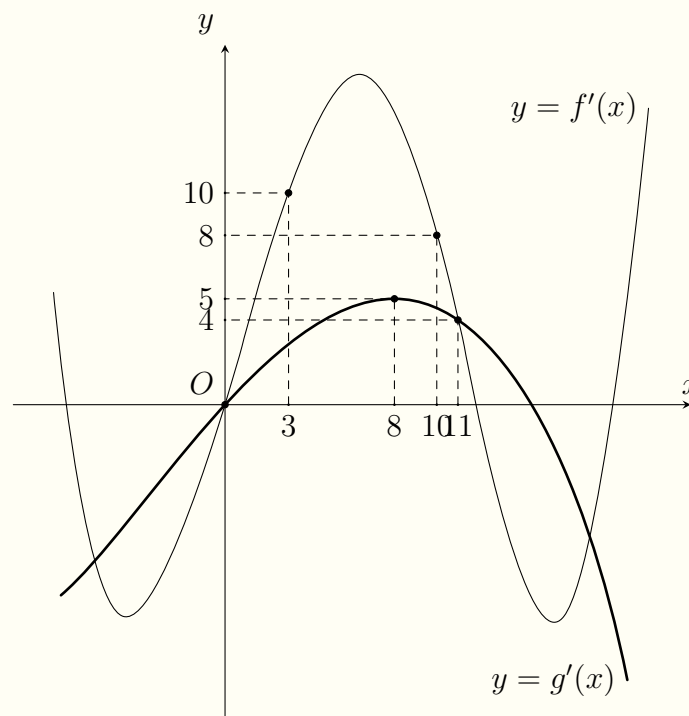
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x = 2 \in (1; +\infty)$, suy ra $1 - 2x = -3$
 theo đồ thị $f'(x) \rightarrow f'(1 - 2x) = f'(-3) < 0$. Khi đó $g'(2) = -2f'(-3) > 0$.

Nhận thấy các nghiệm $x = -\frac{1}{2}$; $x = 0$ và $x = 1$ của $g'(x)$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu;
 nghiệm $x = -\frac{3}{2}$ là nghiệm kép nên qua nghiệm không đổi dấu.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 14. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x + 4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(5; \frac{31}{5}\right)$.

(B) $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$.

(C) $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$.

(D) $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.

Lời giải.

Cách 1 Đặt $X = x + 4$, $Y = 2x - \frac{3}{2}$. Ta có $h'(x) = f'(X) - 2g'(Y)$.

Để hàm số $h(x) = f(x + 4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến thì $h'(x) \geq 0$

$$\Rightarrow f'(X) \geq 2g'(Y) \text{ với } X, Y \in [3; 8] \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x+4 \leq 8 \\ 3 \leq 2x - \frac{3}{2} \leq 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ \frac{9}{2} \leq 2x \leq \frac{19}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{19}{4}. \text{ Vì } \left(\frac{9}{4}; 3\right) \subset \left(\frac{9}{4}; \frac{19}{4}\right) \text{ nên}$$

Cách 2 Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(a; 10)$, $a \in (8; 10)$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} f(x+4) > 10, \text{ khi } 3 < x+4 < a \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \leq 5, \text{ khi } 0 \leq 2x - \frac{3}{2} < 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4) > 10, \text{ khi } -1 < x < 4 \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \leq 5, \text{ khi } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0 \text{ khi } \frac{3}{4} \leq x < 4.$$

Cách 3 Kiểu đánh giá khác: Ta có $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, $\forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right)$, ta có $\frac{25}{4} < x+4 < 7$, $f(x+4) > f(3) = 10$;

$$3 < 2x - \frac{3}{2} < \frac{9}{2}, \text{ do đó } g\left(2x - \frac{3}{2}\right) < f(8) = 5.$$

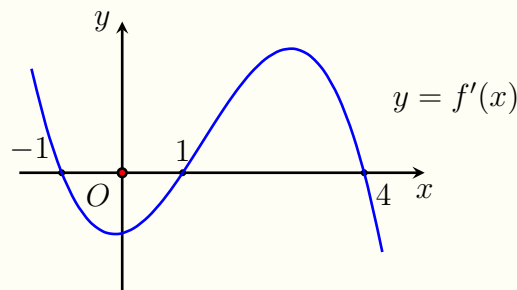
$$\text{Suy ra } h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0, \forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right).$$

Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$.

Chọn đáp án (B)



❖ **Câu 15.** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trong khoảng?

(A) $\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

(B) $(0; 2)$.

(C) $\left(\frac{-1}{2}; 0\right)$.

(D) $(-2; -1)$.

💬 **Lời giải.**

Đặt $g(x) = f(u)$, $u = x^2 \geq 0$ thì $g'(x) = 2x \cdot f'(u)$ nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1; u = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1; x = \pm 2 \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu của hàm số $g'(x)$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Lưu ý: Cách xét dấu của $g'(x)$

B1: Xét dấu $f'(u)$:

Ta có $f'(u) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < u < 4 \\ u < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x^2 < 4 \\ x^2 < -1 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < |x| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 2 \\ |x| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x < -1 \cup x > 1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow x \in (-2; -1) \cup (1; 2)$ và ngược lại tức là những khoảng còn lại $f'(u) < 0$.

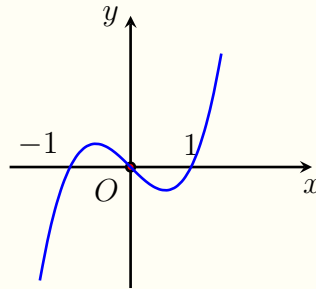
B2: xét dấu x .

B3: Lập bảng xét dấu rồi nhân dấu của $f'(u)$ và x ta được như bảng trên.

Chọn đáp án **C**

□

⇒ **Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(-\infty; -1)$.

B $(-1; +\infty)$.

C $(-1; 0)$.

D $(0; 1)$.

💬 **Lời giải.**

Cách 1. Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2) > 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'x} \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x^2 < 0 \vee x^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \\ x^2 < -1 \vee 0 < x^2 < 1 \end{cases}$
 $\begin{cases} x > 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'x} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$+$
g					

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(1; +\infty)$

☑ $x \in (1; +\infty) \rightarrow x > 0$. (1)

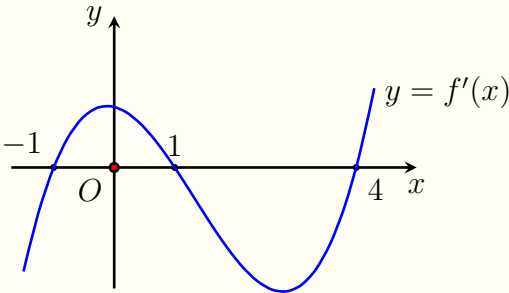
☑ $x \in (1; +\infty) \rightarrow x^2 > 1$. Với $x^2 > 1 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(x^2) > 0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2) > 0$ trên khoảng $(1; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu +. Nhận thấy các nghiệm của $g'(x)$ là nghiệm bội lẻ nên qua nghiệm đổi dấu.

Chọn đáp án **C**



Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?

A 5.

B 3.

C 4.

D 2.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $y' = [f(x^2)]' = 2x \cdot f'(x^2)$

$$\text{Hàm số nghịch biến} \Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2) < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < -1 \vee 1 < x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < -2 \vee -1 < x < 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 3 khoảng nghịch biến.

$$\text{Cách 2.} \text{ Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

Chú ý: Dấu của y' được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2; +\infty)$

☒ $x \in (2; +\infty) \rightarrow x > 0. \quad (1)$

☒ $x \in (2; +\infty) \rightarrow x^2 > 4. \text{ Với } x^2 > 4 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(x^2) > 0. \quad (2)$

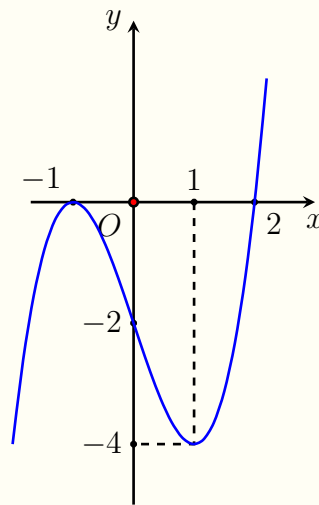
Từ (1) và (2), suy ra $y' = 2x \cdot f'(x^2) > 0$ trên khoảng $(2; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu +.

Nhận thấy các nghiệm của y' là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Chọn đáp án **B**



⇒ **Câu 18.** Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.



Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- C** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- D** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

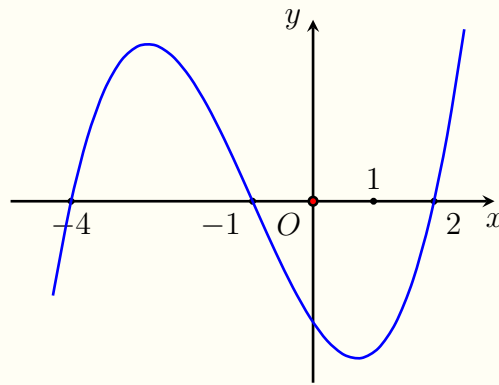
Từ đồ thị của $y = f'(x)$ suy ra $f'(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ và ngược lại.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$2x$	$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$+$
$f'(2 - x^2)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$

Chọn đáp án **A**



⇒ **Câu 19.** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 5)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 5) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = -4 \\ x^2 - 5 = -1 \\ x^2 - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{7} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

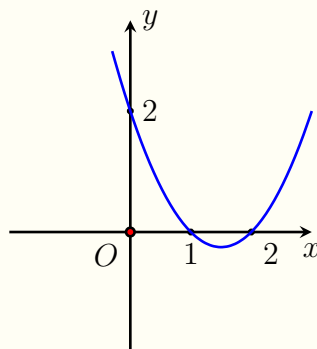
x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	-2	-1	0	1	2	$\sqrt{7}$	$+\infty$		
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g											

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x) = f(1 - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

(A) (1; 2).

(B) (0; $+\infty$).

(C) (-2; -1).

(D) (-1; 1).

Lời giải.

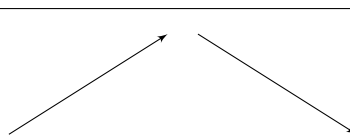
Cách 1. Ta có $g'(x) = -2x \cdot f'(1 - x^2)$. Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x > 0 \\ f'(1 - x^2) < 0 \end{cases}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} -2x > 0 \\ f'(1 - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1 < 1 - x^2 < 2: \text{ vô nghiệm} \end{cases}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} -2x < 0 \\ f'(1 - x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 - x^2 < 1 \vee 1 - x^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(1 - x^2) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{Theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 = 1 \\ 1 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g			

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x = 1 \in (0; +\infty)$.

☑ $x = 1 \rightarrow -2x < 0$. (1)

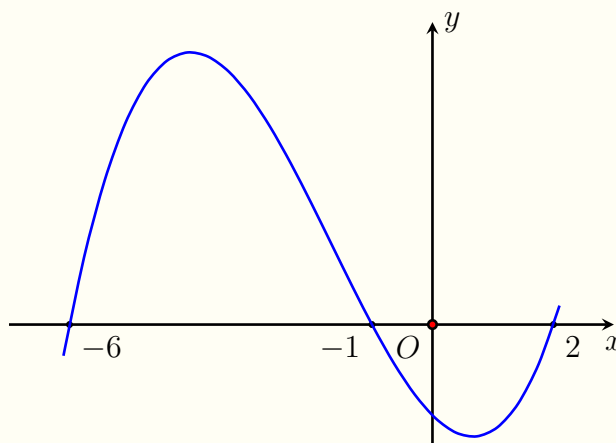
☑ $x = 1 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow f'(1 - x^2) = f'(0) \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(0) = 2 > 0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(1) < 0$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Nhận thấy nghiệm của $g'(x) = 0$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Chọn đáp án **(B)**

🔗 **Câu 21.** Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng

(A) $(0; 1)$.

(B) $(-1; 0)$.

(C) $(2; 3)$.

(D) $(-2; -1)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = -2x \cdot f'(3 - x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(3 - x^2) \cdot (-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đồ thị hàm số suy ra } f'(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x^2 = -6 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y												

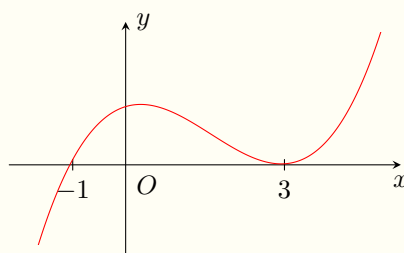
Lập bảng xét dấu của hàm số $y = f(3 - x^2)$ ta được hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Xét hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A)** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.
(B) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; 3)$.
(C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.
(D) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.



Lời giải.

☑ Ta có $g'(x) = -2x \cdot f'(3 - x^2)$; $f'(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 3 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases}$

☑ Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$-x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$f'(3-x^2)$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$+$

☑ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 23.

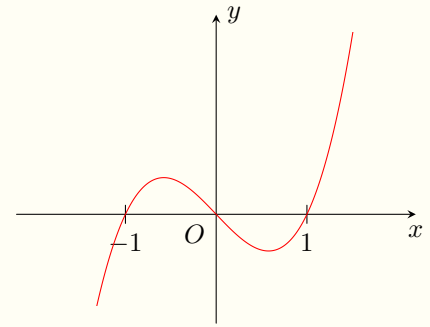
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

(A) $(-\infty; -1)$.

(B) $(-1; 1)$.

(C) $(1; +\infty)$.

(D) $(0; 1)$.



Lời giải.

☑ Ta có $g'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ f'(x^3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \\ x^3 = -1 \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

☑ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$+\infty$

☑ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 24.

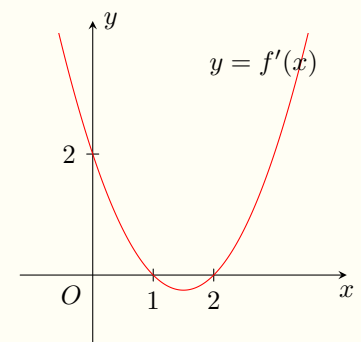
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng?

(A) $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

(B) $(-\frac{3}{2}; +\infty)$.

(C) $(-\infty; \frac{3}{2})$.

(D) $(\frac{1}{2}; +\infty)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = (1 - 2x) \cdot f'(x - x^2)$.

Cách 1 Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ f'(x - x^2) > 0 \end{cases}$.

☑ Trường hợp 1: $\begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ f'(x - x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x - x^2 < 1 \\ x - x^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

☑ Trường hợp 2: $\begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ f'(x - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 1 < x - x^2 < 2 \end{cases} \text{ (Bpt vô nghiệm).}$

Kết hợp hai trường hợp ta được $x > \frac{1}{2}$.

Cách 2 Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ f'(x - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x - x^2 = 1 \\ x - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\infty$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Cách 3 Vì $x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{theo đồ thị của } f'(x)} f'(x - x^2) > 0$.

Suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của $1 - 2x$. Do đó $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

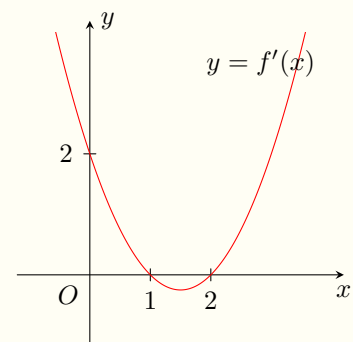
Chọn đáp án **(D)**



❖ Câu 25.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(1 + 2x - x^2)$ đồng biến trên khoảng dưới đây?

- (A)** $(-\infty; 1)$. **(B)** $(1; +\infty)$. **(C)** $(0; 1)$. **(D)** $(1; 2)$.



💬 Lời giải.

Ta có $y' = (2 - 2x) \cdot f'(1 + 2x - x^2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + 2x - x^2 = 1 \\ 1 + 2x - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0. \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	$y(0)$	$y(1)$	$y(2)$	$-\infty$

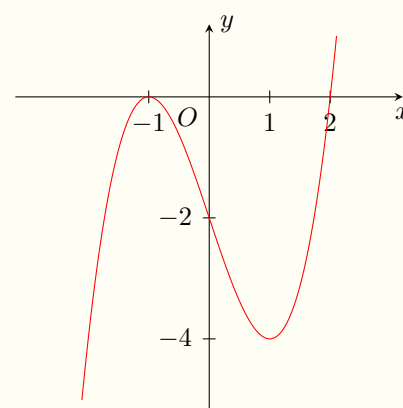
Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 26.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)** $(-\infty; 1)$. **(B)** $(1; +\infty)$. **(C)** $(0; 2)$. **(D)** $(-1; 0)$.



Lời giải.

$$\text{Ta có } g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x - 1); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 2; x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-1)$	$g(1)$	$g(3)$	$+\infty$		

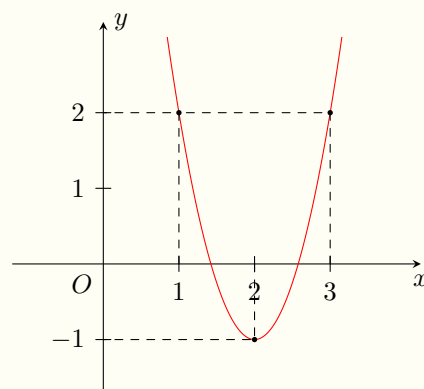
Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x - 2) + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- Ⓐ $(-\infty; 2)$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Ⓓ $(2; +\infty)$.



Lời giải.

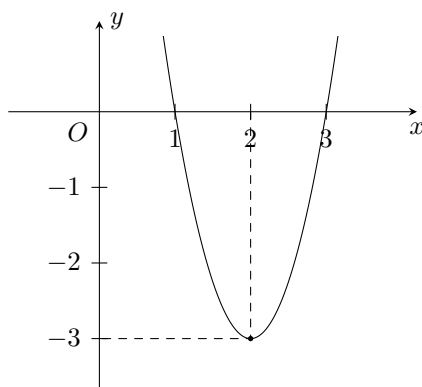
Cách 1: Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x - 2) + 2 < 2, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow f'(x - 2) < 0, \forall x \in (1; 3)$.

Đặt $x^* = x - 2$ thì $f'(x^*) < 0, \forall x^* \in (-1; 1)$.

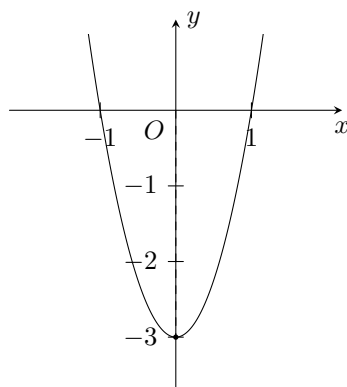
Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Cách 2: Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

* **Bước 1:** Từ đồ thị hàm số $f'(x - 2) + 2$ tịnh tiến xuống dưới 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x - 2)$ như sau



* **Bước 2:** Tiếp tục tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x - 2)$ sang trái 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x)$ như sau

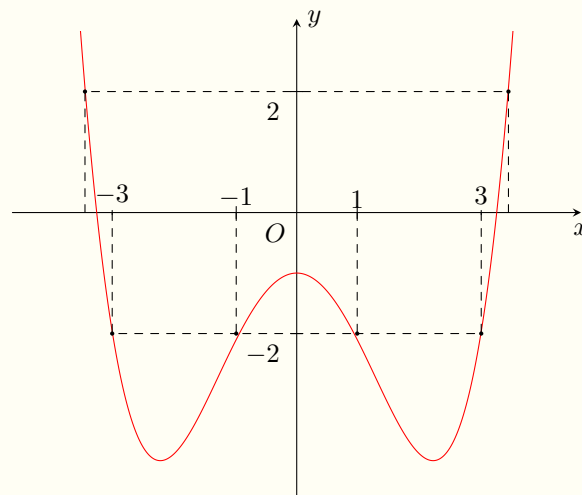


* **Bước 3:** Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy $f'(x) < 0$ khi $x \in (-1; 1)$.

Chọn đáp án Ⓑ



⇒ **Câu 28.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x+2) - 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- (A) $(-3; -1), (1; 3)$. (B) $(-1; 1), (3; 5)$. (C) $(-\infty; -2), (0; 2)$. (D) $(-5; -3), (-1; 1)$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $f'(x+2) - 2 < -2, \forall x \in (-3; -1) \cup (1; 3) \Leftrightarrow f'(x+2) < 0, \forall x \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.

Đặt $x^* = x + 2$ suy ra $f'(x^*) < 0, \forall x^* \in (-1; 1) \cup (3; 5)$.

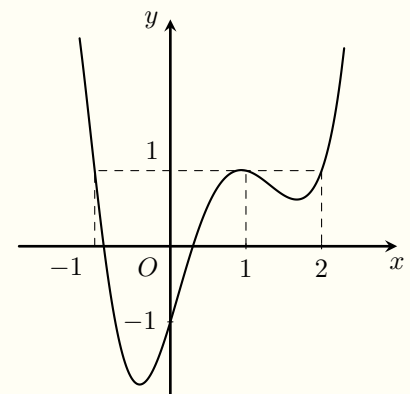
Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1), (3; 5)$.

Chọn đáp án (B) □

⇒ **Câu 29.**

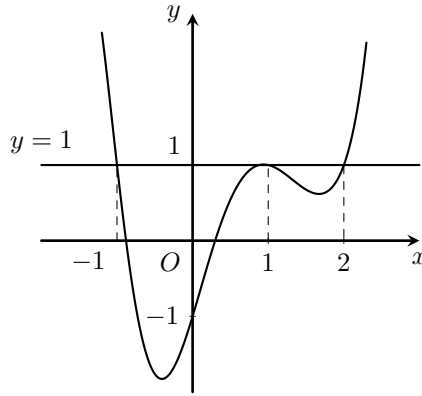
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới. Đặt $g(x) = f(x) - x$, khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $g(2) < g(-1) < g(1)$. (B) $g(-1) < g(1) < g(2)$.
(C) $g(-1) > g(1) > g(2)$. (D) $g(1) < g(-1) < g(2)$.



🗨️ **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $d: y = 1$ (như hình vẽ bên dưới)



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$	
g'		$+$	0	$-$	0	$+$
g						

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(2) < g(-1) < g(1)$.

⚠ Lưu ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2; +\infty)$, ta thấy đồ thị hàm số nằm phía trên đường thẳng $y = 1$ nên $g'(x) = f'(x) - 1$ mang dấu +.

Chọn đáp án **(C)**

□

❖ Câu 30.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3	1	-1	2	4

- (A)** $(2; 4)$. **(B)** $(0; 2)$. **(C)** $(-2; 0)$. **(D)** $(-4; -2)$.

💬 Lời giải.

Hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ có $y' = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1$.

Để hàm số nghịch biến thì $y' < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1 < 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2$.

Khi đó, dựa vào bảng biến thiên ta có $2 < 1 - \frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$.

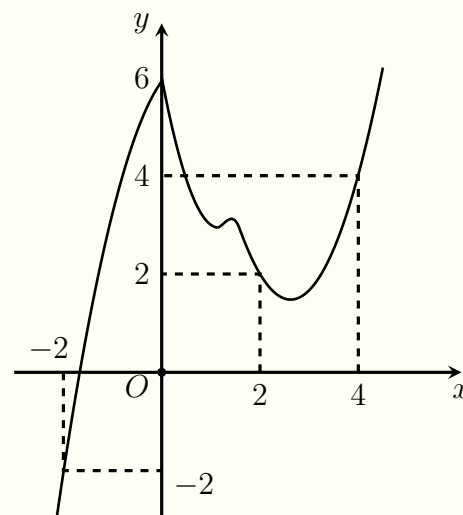
Chọn đáp án **(D)**

□

❖ Câu 31.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- (A) $(-\infty; -2)$. (B) $(-2; 2)$.
 (C) $(2; 4)$. (D) $(2; +\infty)$.



💬 Lời giải.

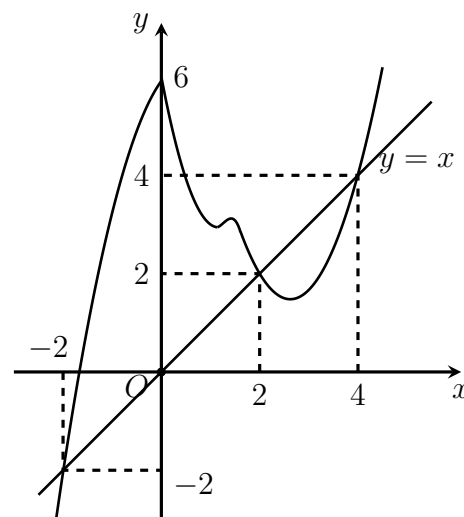
Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x.$$

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là số giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và đường thẳng $d: y = x$ (như hình vẽ bên).

Dựa vào đồ thị, ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên (hoặc ta thấy với $x \in (-2; 2)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = x$ nên $g'(x) > 0$), ta suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2; 2)$.

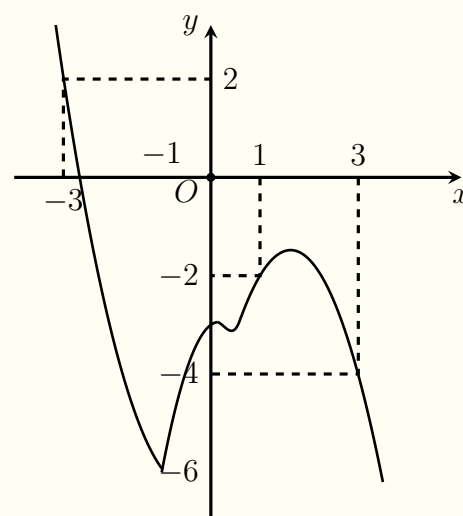


Chọn đáp án (B) □

❖ Câu 32.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- (A) $(-3; 1)$. (B) $(1; 3)$. (C) $(-\infty; 3)$. (D) $(3; +\infty)$.



💬 Lời giải.

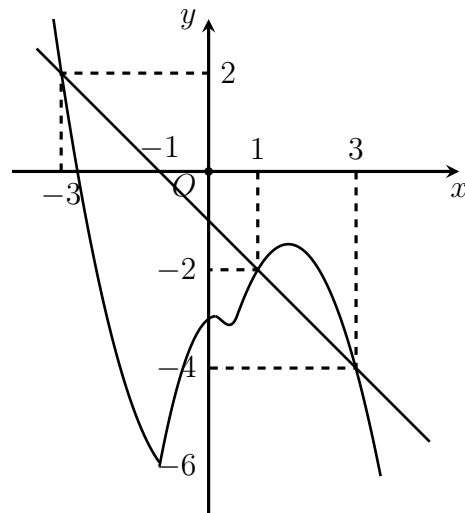
Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + 2(x+1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x - 1.$$

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là số giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và đường thẳng $d: y = -x - 1$ (như hình vẽ bên).

$$\text{Dựa vào đồ thị, ta suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên (hoặc ta thấy với $x \in (1; 3)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = -x - 1$ nên $g'(x) > 0$), ta suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1; 3)$.

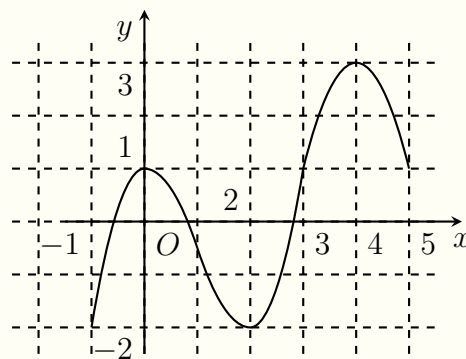


Chọn đáp án **(B)**

Câu 33.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $g(x) = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng

- (A)** $(-1; 0)$. **(B)** $(0; 2)$.
(C) $(-2; -1)$. **(D)** $(-3; -2)$.

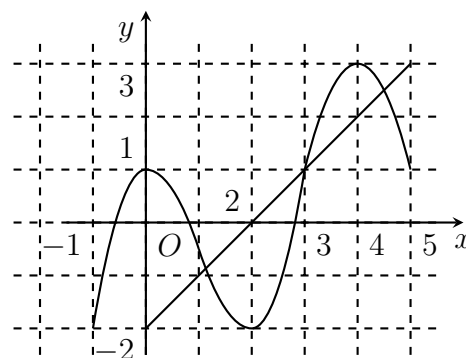


Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(2-x) + 2x = 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) = -x \Leftrightarrow f'(2-x) = (2-x) - 2$.

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có $f'(x) < x - 2 \Leftrightarrow 2 < x < 3$ (vì phần đồ thị $f'(x)$ nằm dưới đường thẳng $y = x - 2$, chỉ xét trên khoảng $(2; 3)$).

Do đó hàm số $g(x)$ nghịch biến khi $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < (2-x) - 2 \Leftrightarrow 2 < 2-x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$. Vậy hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$.



Lưu ý: Dựa vào đồ thị ta thấy rằng, đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại hai điểm

$$\begin{cases} 1 < x_1 < 2 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Và cũng từ đồ thị ta có $f'(x) < x - 2$ trên khoảng $(2; 3)$ do đó $f'(2-x) < (2-x) - 2 \Leftrightarrow 2 < 2-x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 34.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

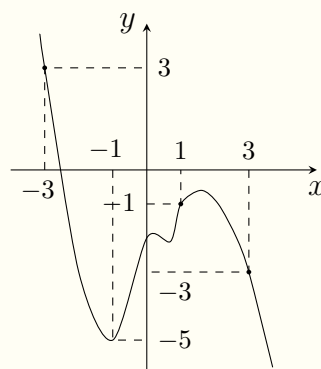
Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

(A) $(-3; 1)$.

(B) $(-2; 0)$.

(C) $(1; 3)$.

(D) $(-1; \frac{3}{2})$.



Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$.

Đặt $t = 1-x \Rightarrow x = 1-t$. Thu được

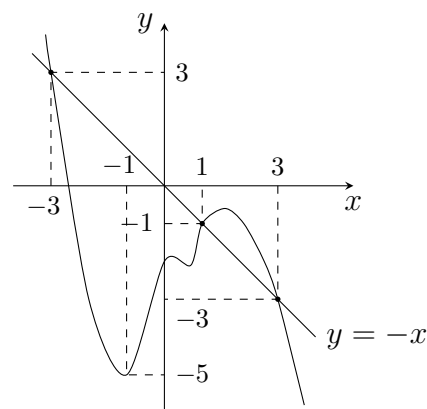
$$h(t) = f(t) + \frac{(1-t)^2}{2} - (1-t) = f(t) + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Nhận xét rằng, nếu hàm số $h(t)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1-b; 1-a)$.

Ta có $h'(t) = f'(t) + t$. Xét $h'(t) > 0 \Leftrightarrow f'(t) > -t$. (1)

Dựa vào đồ thị ta thấy (1) đúng khi $t \in (1; 3)$ nên hàm số $h(t)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Từ nhận xét trên suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.



Chọn đáp án (B)

❖ Câu 35.

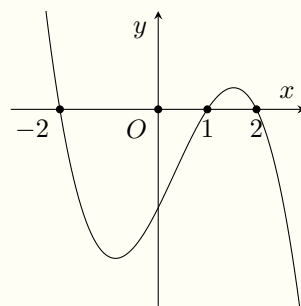
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

(A) $(-1; \frac{3}{2})$.

(B) $(-1; 1)$.

(C) $(-2; -1)$.

(D) $(1; 2)$.



Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \pm 2, f(2) = f(-2) = 0$. Ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

Xét $y = (f(x))^2 \Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 1; x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0; \forall x \neq \pm 2.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$
$y = (f(x))^2$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hoặc ta có $g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$. Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 2. \end{cases}$

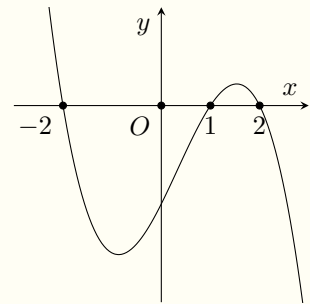
Chọn đáp án (D)

□

❖ Câu 36.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên và $f(-2) = f(2) = 0$. Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- (A) $(-2; -1)$.
 (B) $(1; 2)$.
 (C) $(2; 5)$.
 (D) $(5; +\infty)$.



💬 Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow 0 \searrow$		$y(1)$	$\nearrow 0 \searrow$		$-\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(3-x) \cdot f(3-x)$.

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) \cdot f(3-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(3-x) < 0 \\ f(3-x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x < 1. \end{cases}$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(2; 5)$.

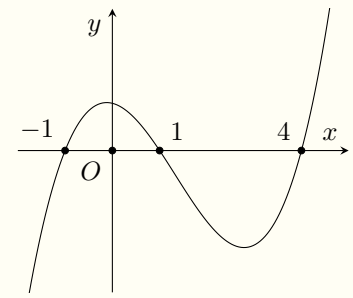
Chọn đáp án (C)

□

❖ Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(|3 - x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- Ⓐ $(-\infty; -1)$.
 Ⓑ $(-1; 2)$.
 Ⓒ $(2; 3)$.
 Ⓓ $(4; 7)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

Với $x > 3$ khi đó $g(x) = f(x - 3) \Rightarrow g'(x) = f'(x - 3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x - 3 < 1 \\ x - 3 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(3; 4)$, $(7; +\infty)$.

Với $x < 3$ khi đó $g(x) = f(3 - x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3 - x) > 0 \Leftrightarrow f'(3 - x) < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x < -1 \\ 1 < 3 - x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \text{ (loại)} \\ -1 < x < 2 \end{cases}$.

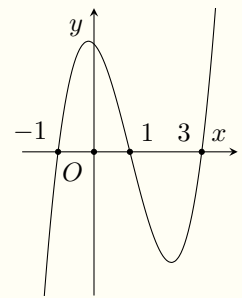
$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Chọn đáp án Ⓑ

❖ Câu 38.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- Ⓐ $(-\infty; -1 - 2\sqrt{2})$.
 Ⓑ $(-\infty; 1)$.
 Ⓒ $(1; 2\sqrt{2} - 1)$.
 Ⓓ $(2\sqrt{2} - 1; +\infty)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$. Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'(\sqrt{x^2+2x+2})$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+2})=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ (nghiệm bội ba)} \\ x=-1-2\sqrt{2} \\ x=-1+2\sqrt{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	$-1 - 2\sqrt{2}$	-1	$-1 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+

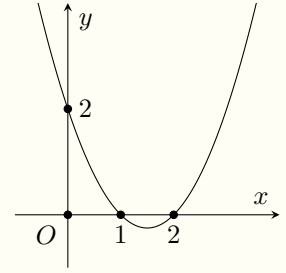
Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$ như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(-1; -1 + 2\sqrt{2})$ ta chọn $x = 0$. Khi đó $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f'(\sqrt{2}) < 0$ vì dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy tại $x = \sqrt{2} \in (1; 3)$ thì $f'(\sqrt{2}) < 0$. Các

nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là nghiệm bội lẻ nên qua nghiệm đổi dấu.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



- (A)** $(-\infty; -1)$. **(B)** $(-\infty; \frac{1}{2})$.
(C) $(\frac{1}{2}; +\infty)$. **(D)** $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (x + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \right) f'(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$.

$$\textcircled{v} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$\textcircled{v} 0 < u = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 2} + \sqrt{(x+1)^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} < 1$$

$\xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(u) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của nhị thức $x + 1$ (ngược dấu)
 Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Chọn đáp án **(A)**

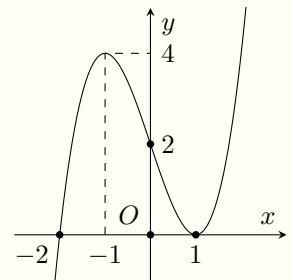


DẠNG 1.2

Cực trị

Câu 40.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- (A)** Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.
(B) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
(C) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
(D) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.

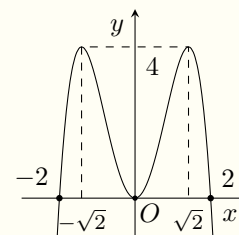
Lời giải.

Giá trị của hàm số $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = -2$.

Chọn đáp án **C**

❖ **Câu 41.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A** Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.
B Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
C Hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị.
D Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = \sqrt{2}$.



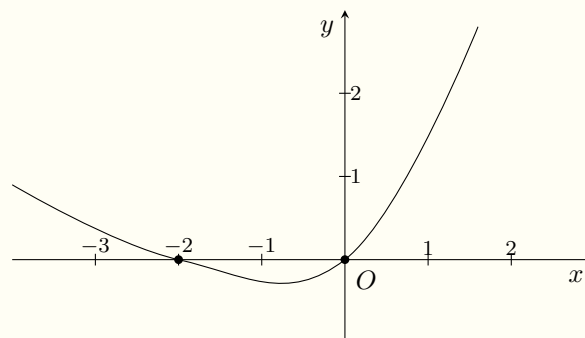
Lời giải.

Giá trị của hàm số $y = f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = 2$.

Chọn đáp án **A**

❖ **Câu 42.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A** $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
B $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.
C $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.
D Giá trị cực tiểu của $f(x)$ nhỏ hơn giá trị cực đại của $f(x)$.

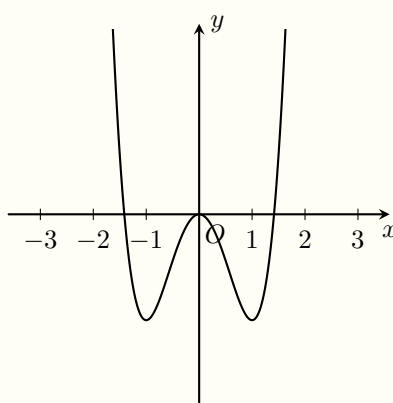


Lời giải.

Giá trị hàm số $y = f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = -2$.

Chọn đáp án **B**

❖ **Câu 43.** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K , biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên K như hình vẽ bên. Tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên K .



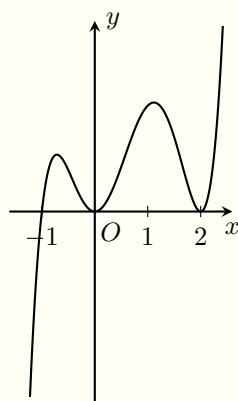
- A** 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Đối với dạng này ta chỉ cần tìm xem đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại mấy điểm mà thôi, không kể các điểm mà đồ thị $y = f'(x)$ tiếp xúc với trục Ox (vì đạo hàm ko đổi dấu).

Chọn đáp án **B**

⇒ **Câu 44.** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K . Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K . Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

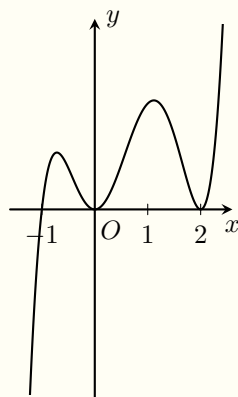
💬 **Lời giải.**

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm $x = -1$.

Chọn đáp án (B)

□

⇒ **Câu 45.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- (A) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $x = 0$.
 (B) Hàm số $y = f(x)$ có 4 cực trị.
 (C) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
 (D) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.

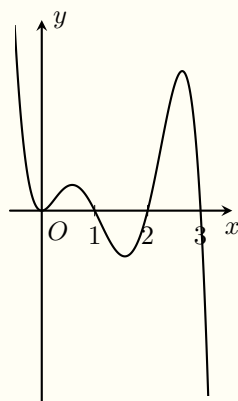
💬 **Lời giải.**

Giá trị của hàm số $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = -1$.

Chọn đáp án (C)

□

⇒ **Câu 46.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$?



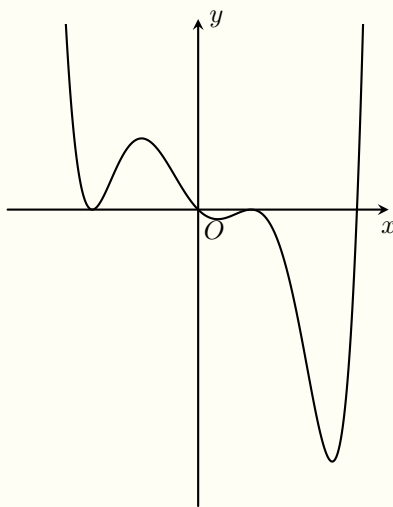
- (A) $x = 0$ và $x = 2$. (B) $x = 1$ và $x = 3$. (C) $x = 2$. (D) $x = 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ có 4 điểm chung với trục hoành, nhưng cắt trục hoành tại 3 điểm trong đó $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 2$.

Chọn đáp án (C) □

❖ Câu 47. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ có 4 điểm chung với trục hoành $x_1; 0; x_2; x_3$ nhưng chỉ cắt thực sự tại hai điểm là 0 và x_3 . Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	x_3	$+\infty$				
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
y										

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Cách trắc nghiệm. Ta thấy đồ thị của $f'(x)$ có 4 điểm chung với trục hoành nhưng cắt và băng qua trục hoành chỉ có 2 điểm nên có hai cực trị.

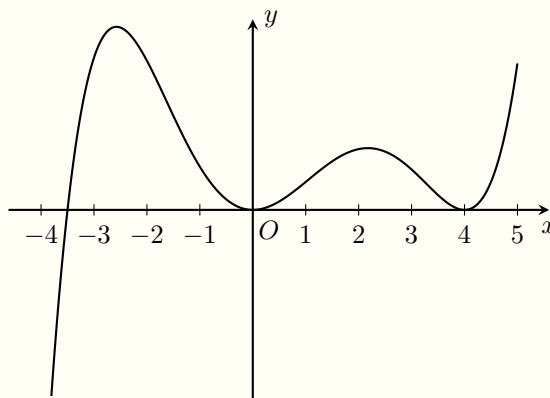
Cắt và băng qua trục hoành từ trên xuống thì đó là điểm cực đại.

Cắt và băng qua trục hoành từ dưới lên thì đó là điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (A)



❖ **Câu 48.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K , hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



(A) 1.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 2.

💬 **Lời giải.**

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 1 điểm x_0 và đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 .

Chọn đáp án (A)



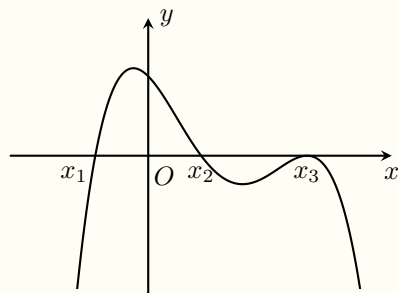
❖ **Câu 49.** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.

Trong các khẳng định sau, có tất cả bao nhiêu khẳng định đúng?

(I). Trên K , hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

(II). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_3 .

(III). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 .



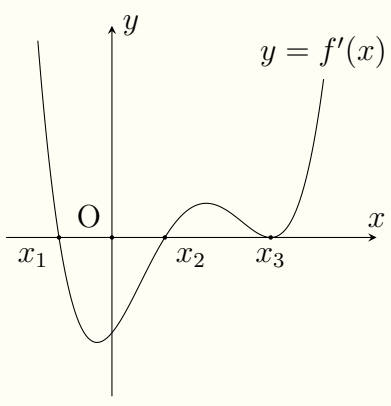
- ☐ A. 3.
- ☐ B. 0.
- ☐ C. 1.
- ☐ D. 2.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng xét dấu:
Như vậy: trên K , hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là x_1 và điểm cực đại là x_2, x_3 không phải là điểm cực trị của hàm số.
Chọn đáp án ☒ D



Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ



- Trong các khẳng định sau, có tất cả bao nhiêu khẳng định đúng?
- (I). Trên K , hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.
 - (II). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_3 .
 - (III). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_2 .

- ☒ A. 3.
- ☐ B. 0.
- ☐ C. 1.
- ☐ D. 2.

Lời giải.

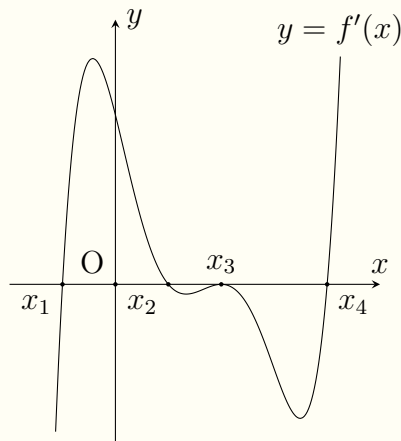
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+

Như vậy, trên K , hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại là x_1 và điểm cực tiểu là x_2 , điểm x_3 không phải là điểm cực trị của hàm số.
Chọn đáp án ☒ C



❖ **Câu 51.** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.



Chọn khẳng định đúng?

- ☒ A) Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực đại và 2 cực tiểu.
- ☐ B) Hàm số $y = f(x)$ có 3 cực đại và 1 cực tiểu.
- ☒ C) Hàm số $y = f(x)$ có 1 cực đại và 2 cực tiểu.
- ☐ D) Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực đại và 1 cực tiểu.

💬 **Lời giải.**

Qua x_3 thì $y = f'(x)$ không đổi dấu, nên ta coi như không xét x_3 .

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng xét dấu:

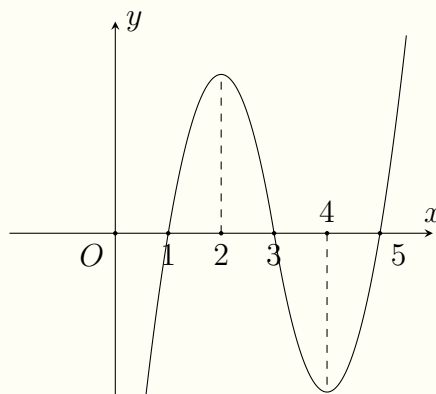
x	$-\infty$	x_1		x_2		x_4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Như vậy, trên K , hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại là x_2 và điểm cực tiểu là x_1, x_4 .

Chọn đáp án ☒ C

□

❖ **Câu 52.** Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x - 1)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- ☒ A) $x = 2$.
- ☐ B) $x = 4$.
- ☐ C) $x = 3$.
- ☐ D) $x = 1$.

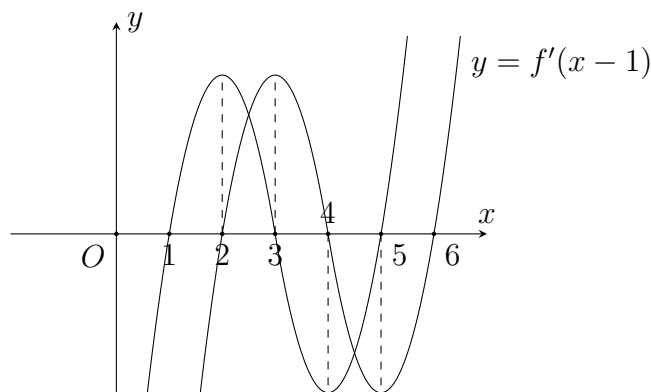
 Lời giải.

Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= f'(x-1) = 0 \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} x-1=1 \\ x-1=3 \\ x-1=5 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} x=2 \\ x=4 \\ x=6. \end{cases} \\
 g'(x) &= f'(x-1) > 0 \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} 1 < x-1 < 3 \\ x-1 > 5 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} 2 < x < 4 \\ x > 6. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ta chọn đáp án B.

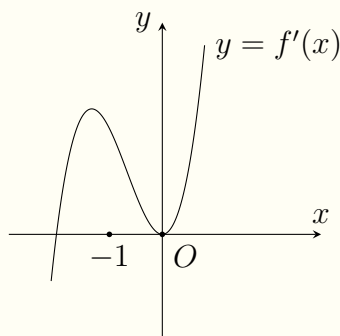
Cách 2: Đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x-1)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ theo phương trục hoành sang phải 1 đơn vị. Hình vẽ



Đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x-1)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x=2$; $x=4$; $x=6$ và giá trị hàm số $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x=4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K , biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên K như hình vẽ.



Tìm số cực trị của hàm số $g(x) = f(x+1)$ trên K ?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

 Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x+1)$ có đồ thị là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ theo phương trục hoành sang trái 1 đơn vị. Khi đó đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x+1)$ vẫn cắt trục hoành tại hai điểm. Dựa vào đồ thị ta có bảng xét dấu của $g'(x) = f'(x+1)$:

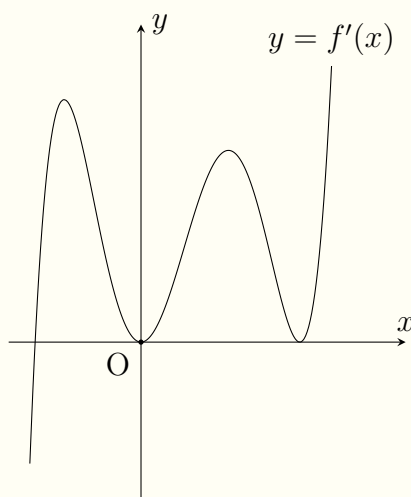
x	$-\infty$	x_1	0	$+\infty$	
$f'(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy hàm số $g(x) = f(x+1)$ có 1 cực trị.

Chọn đáp án **(B)**



 **Câu 54.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ.



Khi đó trên K , hàm số $y = f(x-2018)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 2.

 Lời giải.

Đồ thị hàm số $f'(x-2018)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương trục hoành nên dựa vào đồ thị ta có bảng xét dấu của $f'(x-2018)$:

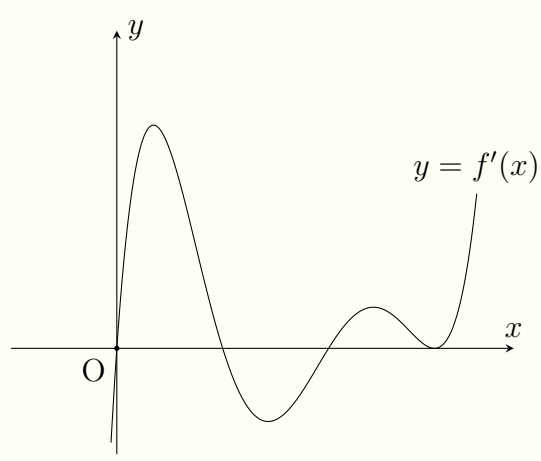
x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
$f'(x-2018)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy hàm số $g(x) = f(x-2018)$ có 1 cực trị.

Chọn đáp án **(A)**



 **Câu 55.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $f(x + 2018)$ có mấy điểm cực trị?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $f'(x + 2018)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương trục hoành nên đồ thị hàm số $f'(x + 2018)$ vẫn cắt trục hoành tại các điểm như đồ thị hàm $f'(x)$. Dựa vào đồ thị ta có bảng xét dấu của $f'(x - 2018)$:

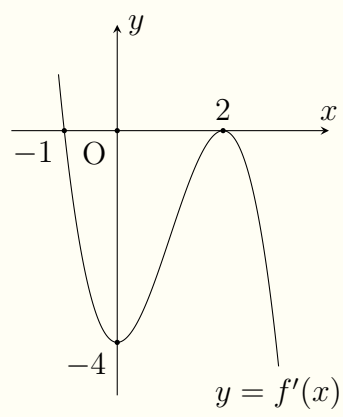
x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	$+\infty$			
$f'(x + 2018)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy hàm số $g(x) = f(x - 2018)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án (C)



Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(x) + 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Số cực trị của hàm $g(x)$ bằng số nghiệm bội lẻ của phương trình

$$g'(x) = f'(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -4$$

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta thấy phương trình trên có một nghiệm đơn.

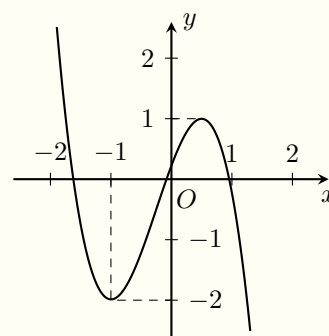
Chọn đáp án (A)



❖ Câu 57.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là

- (A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.



💬 Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + 2x$. Ta có $g'(x) = f'(x) + 2$. Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy:

- ✓ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \alpha \quad (\alpha > 0). \end{cases}$
- ✓ $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \alpha \\ x \neq -1. \end{cases}$
- ✓ $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < -2 \Leftrightarrow x > \alpha.$

Từ đó suy ra hàm số $y = f(x) + 2x$ liên tục và có đạo hàm chỉ đổi dấu khi qua giá trị $x = \alpha$.

Từ đó ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	$0 \quad -$

Vậy hàm số đã cho có đúng một cực trị.

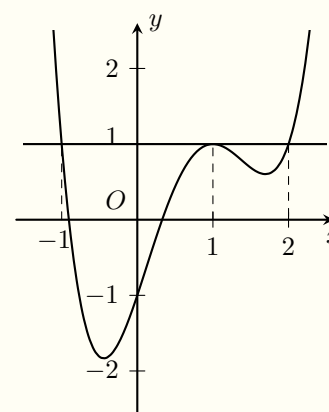
Chọn đáp án (B)



❖ Câu 58.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x) + x$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$?

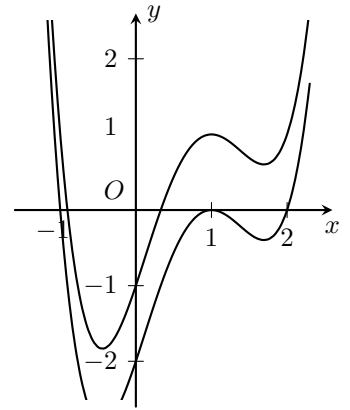
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.



💬 Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 1$.

Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ theo phương Oy lên trên 1 đơn vị, khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.



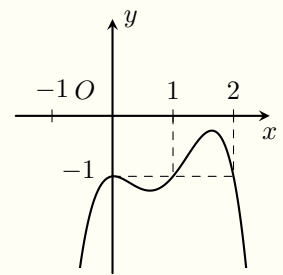
Chọn đáp án (B)

□

❖ Câu 59.

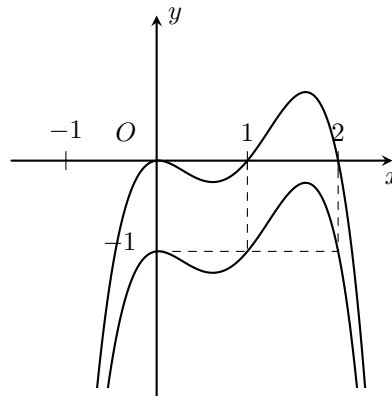
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm

- (A) $x = 0$. (B) $x = 1$.
(C) $x = 2$. (D) Không có điểm cực tiểu.



💬 Lời giải.

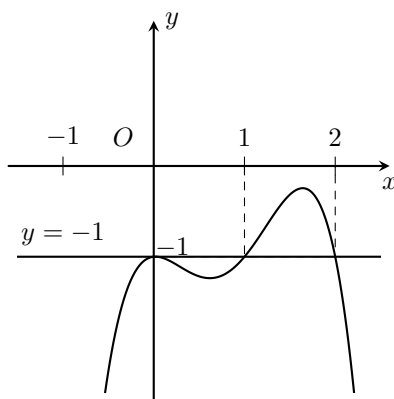
☑ **Cách 1:** $g'(x) = f'(x) + 1$. Tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x)$ lên trên 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $g'(x)$.



Từ đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	0	-
y								

☑ **Cách 2:** Ta có $g'(x) = f'(x) + 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1$. Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \\ x = 2 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên cho hàm $g(x)$ ta thấy $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

⚠ Lưu ý: Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; 0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía dưới đường $y = -1$ nên $g'(x)$ mang dấu “-”.

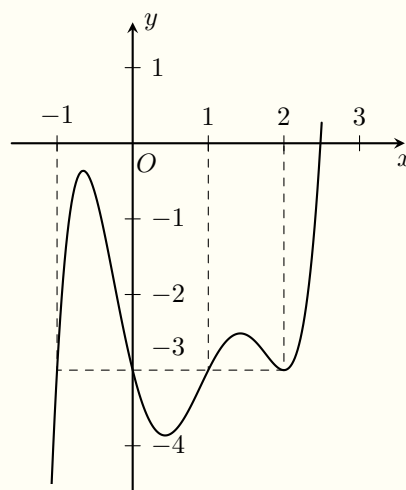
Chọn đáp án (B)

□

🔗 Câu 60.

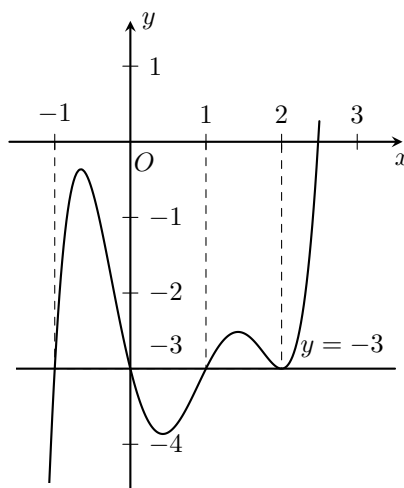
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 7.



💬 Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$. Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -3$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Ta thấy $x = -1, x = 0, x = 1$ là các nghiệm đơn và

$x = 2$ là nghiệm kép nên đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

🔗 Câu 61.

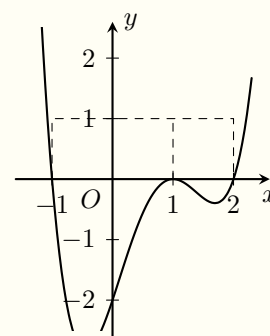
Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ đạt cực đại tại

(A) $x = -1$.

(B) $x = 0$.

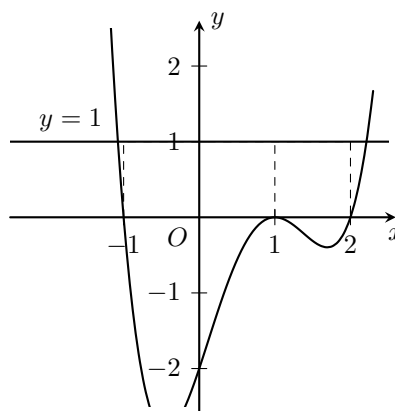
(C) $x = 1$.

(D) $x = 2$.



💬 Lời giải.

🔗 **Cách 1:** Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$. Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = 1$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

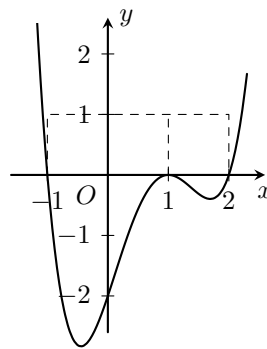
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	$+$
y						

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.

⚠ Lưu ý: Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; -1)$ ta thấy hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = 1$ nên $g'(x)$ mang dấu “+”.

☑ **Cách 2:** Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$. Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới 1 đơn vị.



Ta thấy giá trị hàm số $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$.

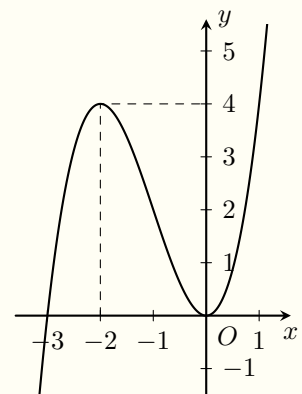
Chọn đáp án **(A)**



🔗 **Câu 62.**

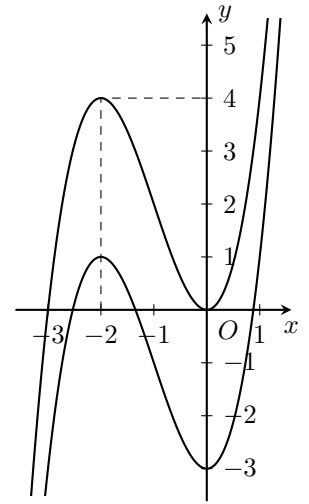
Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = g(x) = f(x) - 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A)** 1. **(B)** 2. **(C)** 3. **(D)** 4.



💬 **Lời giải.**

Ta có $y' = g'(x) = f'(x) - 3$ có đồ thị là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới 3 đơn vị. Khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm.



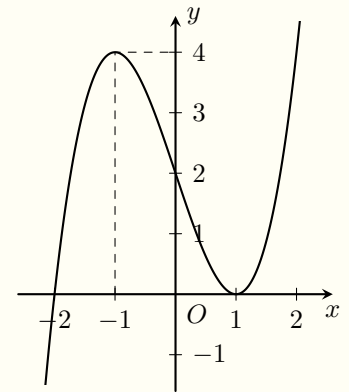
Chọn đáp án **C**



Câu 63.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - 5x$ là

- A** 2. **B** 3. **C** 4. **D** 1.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 5$. Khi đó đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ dịch chuyển theo phương trục Oy xuống dưới 5 đơn vị ta được đồ thị hàm số $g'(x)$.

Khi đó: $g'(x) = 0$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất. Vậy số điểm cực trị là 1.

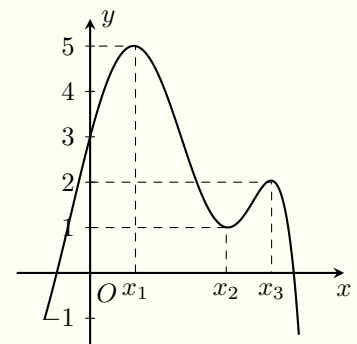
Chọn đáp án **D**



Câu 64.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = g(x) = f(x) + \frac{2017 - 2018x}{2017}$ có bao nhiêu cực trị?

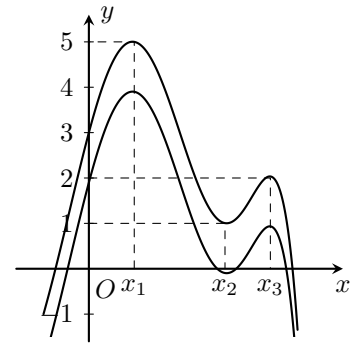
- A** 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.



Lời giải.

Ta có $y' = g'(x) = f'(x) - \frac{2018}{2017}$. Suy ra đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới $\frac{2018}{2017}$ đơn vị.

Ta có $1 < \frac{2018}{2017} < 2$ và dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta suy ra đồ thị của hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm.



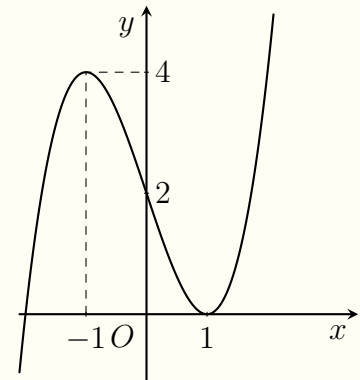
Chọn đáp án **(D)**



Câu 65.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

- (A)** 1. **(B)** 2. **(C)** 3. **(D)** 4.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x - 2017) - 2018$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x - 2017) = 2018$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x - 2017) = 2018$ có 1 nghiệm đơn duy nhất. Suy ra hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị.

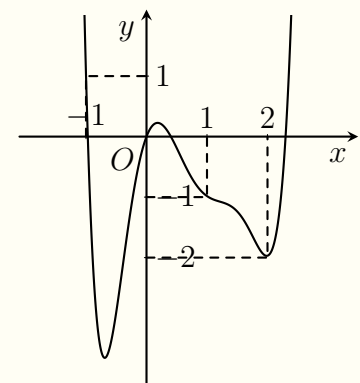
Chọn đáp án **(A)**



Câu 66.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực tiểu tại điểm

- (A)** $x = -1$. **(B)** $x = 0$. **(C)** $x = 1$. **(D)** $x = 2$.

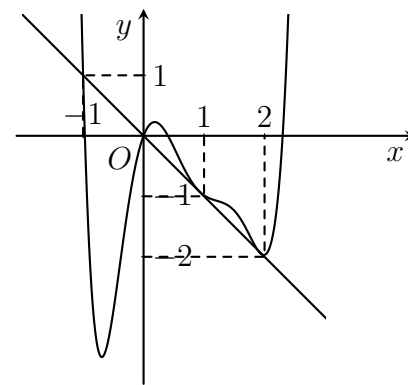


Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -x$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
g								

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

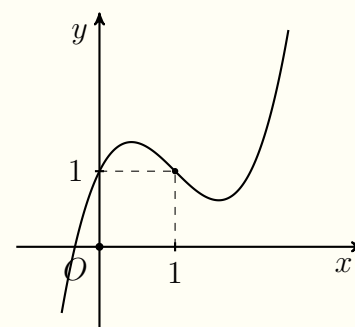
⚠ Lưu ý: Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; -1)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y = -x$ nên $g'(x)$ mang dấu “+”.

Chọn đáp án **(B)**

🔗 Câu 67.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{9}x^3$ là

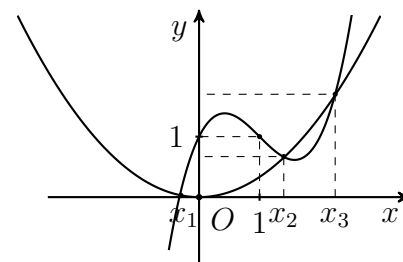
- (A)** 1. **(B)** 2. **(C)** 3. **(D)** 4.



💬 Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{3}x^2$. Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ trên mặt phẳng tọa độ đã có đồ thị $f'(x)$.



Dựa vào hình vẽ trên ta thấy phương trình $f'(x) = \frac{1}{3}x^2$ có ba nghiệm đơn $x_1 < x_2 < x_3$.

Ta lập được bảng xét dấu của g' như sau

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$			
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g								

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy dấu của g' thay đổi từ “-” sang “+” hai lần. Vậy có hai điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (B)



⇒ Câu 68.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

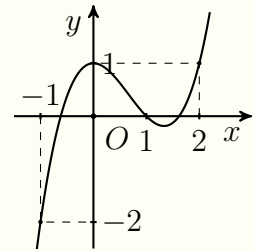
Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại

(A) $x = -1$.

(B) $x = 0$.

(C) $x = 1$.

(D) $x = 2$.

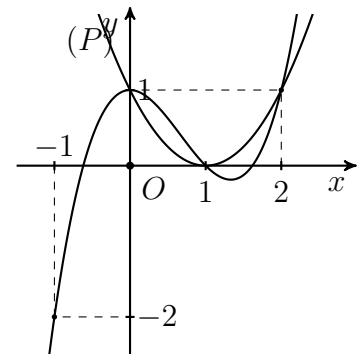


💬 Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x - 1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và parabol $(P): y = (x - 1)^2$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
g'		-	0	+	0	-	0	+
g								

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

⚠ Lưu ý: Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; 0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y = (x - 1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu “-”.

Nhận thấy các nghiệm $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm $g'(x)$ đổi dấu.

Chọn đáp án (C)



⇨ Câu 69.

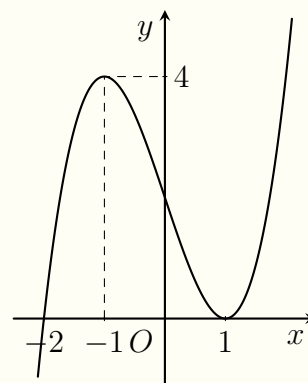
Cho hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$.
 Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$.

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

Theo đồ thị $f'(x)$ ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases}$

$$\text{Do đó: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$	
g'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
g								

Dựa vào bảng biến thiên kết luận số điểm cực trị là 3.

⚠ Lưu ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2; +\infty)$
 $x \in (2; +\infty) \rightarrow x > 0$. (1)

$$x \in (2; +\infty) \rightarrow x^2 > 4 \rightarrow x^2 - 3 > 1 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(x^2 - 3) > 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3) > 0$ trên khoảng $(2; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu “+”.

Nhận thấy các nghiệm $x = \pm 1$ và $x = 0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu; các nghiệm $x = \pm 2$ là nghiệm bội chẵn (lí do dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1) nên qua nghiệm không đổi dấu.

Chọn đáp án (B)

□

⇨ Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$			
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

$$g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x);$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào bảng xét dấu của hàm $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)}. \end{cases}$

$$\text{Do đó: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \text{ (nghiệm kép)}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	3	$+\infty$			
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g										

Dựa vào bảng biến thiên kết luận hàm số $g(x)$ một điểm cực tiểu.

⚠ Lưu ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(3; +\infty)$

$$x \in (3; +\infty) \rightarrow 2x - 2 > 0. \quad (1)$$

$$x \in (3; +\infty) \rightarrow x^2 - 2x > 3 \xrightarrow{\text{theo BBT của } f'(x)} f'(x^2 - 2x) < 0. \quad (2)$$

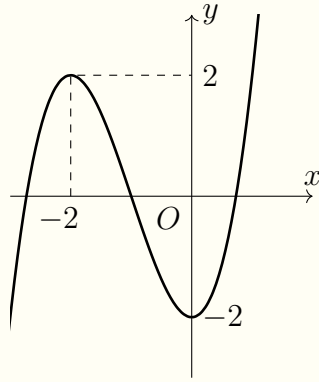
Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x) < 0$ trên khoảng $(3; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu “-”.

Nhận thấy các nghiệm $x = \pm 1$ và $x = 3$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Chọn đáp án (A)

□

🔗 Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (-2x + 3) \cdot f'(-x^2 + 3x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 0 \\ f'(-x^2 + 3x) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ -x^2 + 3x = -2 \\ -x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0	1.5	3	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
y									

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn A.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau:

Ví dụ chọn $x = 4 \in \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$

☑ $-2x + 3 = -5 < 0. \quad (1)$

☑ $-x^2 + 3x = -4 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} f'(-4) > 0 \text{ (vì } f \text{ đang tăng)}. \quad (2)$

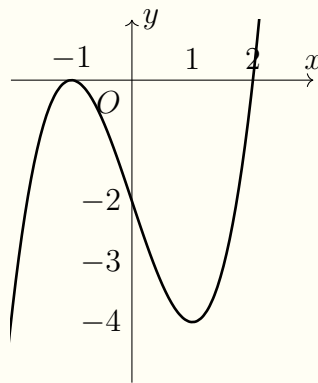
Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = (-2x + 3)f'(-x^2 + 3x) < 0$ trên khoảng $\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Chọn đáp án (A)

□

↔ **Câu 72.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☒ **A** Hàm số có sáu cực trị. ☐ **B** Hàm số có năm cực trị.
☐ **C** Hàm số có bốn cực trị. ☐ **D** Hàm số có ba cực trị.

💬 **Lời giải.**

Ta có: $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x - 1)$.

Nhận xét: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 2; x = 3. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

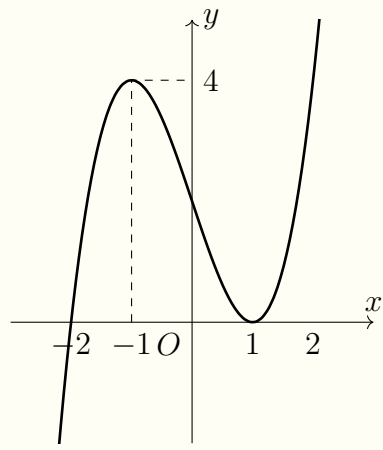
x	-1			0			1			2			3		
y'	-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	-	0	+	0	+
y															

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có đúng ba cực trị.

Chọn đáp án ☒ **D**

□

↔ **Câu 73.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) < 0$, đồng thời đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f^2(x)$ là

- A 1.
- B 2.
- C 3.
- D 4.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$ (nghiệm kép).

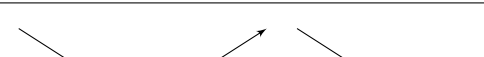
Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
y						

Xét $g'(x) = 2f'(x)f(x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo BBT } f(x)} \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = a \ (a < -2) \\ x = b \ (b > 0) \end{cases} \text{ (nghiệm kép)}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	a		-2	b		$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau:
Ví dụ chọn $x = 0 \in (-1; b)$
 $x = 0 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(0) > 0. \quad (1)$
Theo giả thiết $f(0) < 0. \quad (2)$



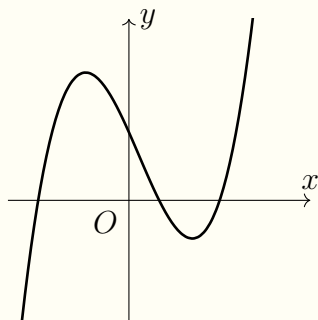
Từ (1) và (2), suy ra $g'(0) < 0$ trên khoảng $(-1; b)$.

Nhận thấy $x = -2; x = a; x = b$ là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này. Nghiệm $x = 1$ là nghiệm kép nên $g'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm này, trong bảng biến thiên ta bỏ qua nghiệm $x = 1$ vẫn không ảnh hưởng đến quá trình xét dấu của $g'(x)$.

Chọn đáp án **C**



⇒ **Câu 74.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x) = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A 2.

B 3.

C 5.

D 7.

💬 **Lời giải.**

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

→ $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

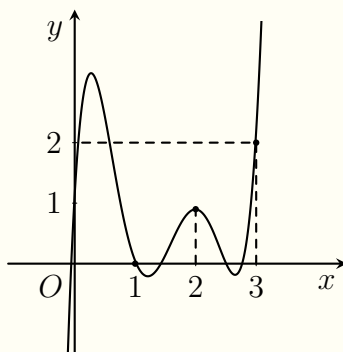
→ $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

→ $f(|x|) + 2018$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến lên trên hay xuống dưới không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Chọn đáp án **C**



⇒ **Câu 75.** Cho hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x) = |2f(x) - (x - 1)^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A 9.

B 11.

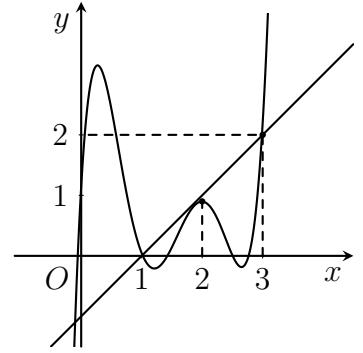
C 8.

D 7.

💬 **Lời giải.**

Đặt $h(x) = 2f(x) - (x - 1)^2 \Rightarrow h'(x) = 2f'(x) - 2(x - 1)$.

Ta vẽ thêm đường thẳng $y = x - 1$.



Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = a (a \in (1; 2)) \end{cases}$.

Theo đồ thị $h'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > x - 1 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (a; 2) \cup (3; +\infty)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

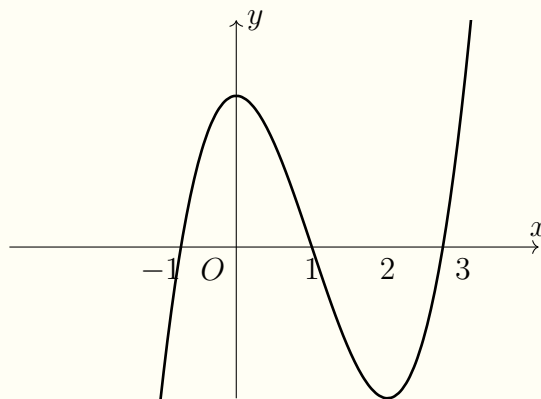
x	$-\infty$	0		1	a		2	3		$+\infty$			
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$													

Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất. Vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 6 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(B)**

□

❖ Câu 76. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có bao nhiêu điểm cực trị?



(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \cdot f'(\sqrt{x^2+2x+2})$.

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+2})=0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1+\sqrt{2} \\ x=-1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-1	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ có 1 điểm cực đại.

Chú ý: Cách xét dấu $-$ hay $+$ của $g'(x)$ để cho nhanh nhất ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$.

Chẳng hạn với khoảng $(-1; -1+\sqrt{2})$ ta chọn $x_0 = 0 \rightarrow g'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f'(\sqrt{2}) < 0$ vì dựa vào đồ thị ta thấy $f'(\sqrt{2}) < 0$.

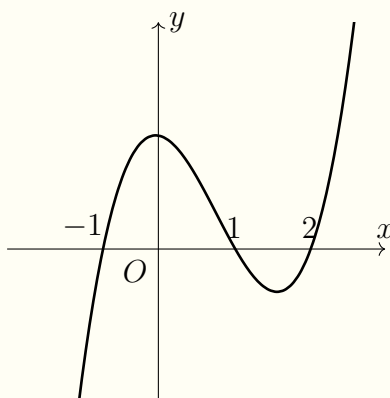
Chọn đáp án **A**



DẠNG 1.3

Cực trị và đồng biến

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



- A** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- B** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- C** Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.
- D** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Lời giải.

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$, $(2; +\infty)$.

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; 2)$.

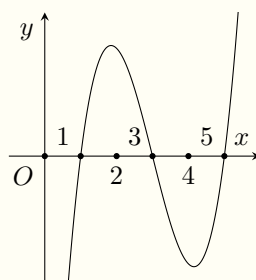
Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm.

Chọn đáp án **C**

❖ Câu 78.

Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A** Hàm số $y = f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị.
- B** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- C** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- D** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.



Lời giải.

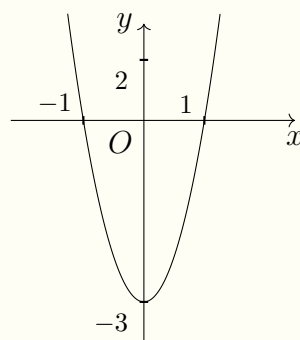
Trên khoảng $(1; 3)$ ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Chọn đáp án **B**

❖ Câu 79.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A** Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.
- B** $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
- C** Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-1; 1)$.
- D** Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty; -1)$.



Lời giải.

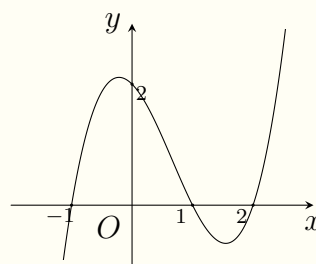
Trên khoảng $(-\infty; -1)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số $y = f(x)$ tăng trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án **D**

❖ Câu 80.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- B** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- C** Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.
- D** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.



Lời giải.

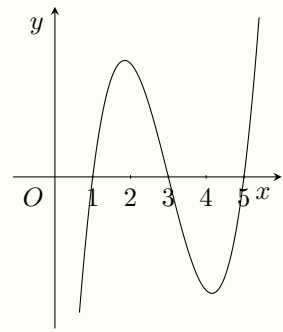
Do đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt nên hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án **C**

❖ Câu 81.

Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Kết luận nào sau đây đúng?

- ☐ A) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.
- ☐ B) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- ☐ C) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- ☐ D) Đồ thị hàm số $f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành.



Lời giải.

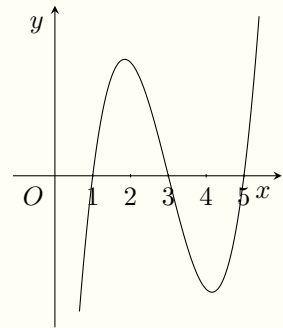
Trong khoảng $(1; 3)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên $f'(x) > 0, \forall x \in (1; 3)$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Chọn đáp án ☒ B

Câu 82.

Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x+1)$. Kết luận nào sau đây đúng?

- ☐ A) Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.
- ☐ B) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- ☐ C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.
- ☐ D) Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.



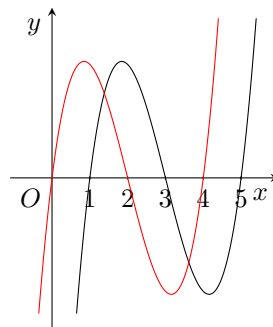
Lời giải.

Cách 1: Từ đồ thị ta có

$$\begin{aligned} +) \quad g'(x) = f'(x+1) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x+1 < 3 \\ x+1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x > 4. \end{cases} \\ +) \quad g'(x) = f'(x+1) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x+1 < 5 \\ x+1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ các kết quả trên suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.

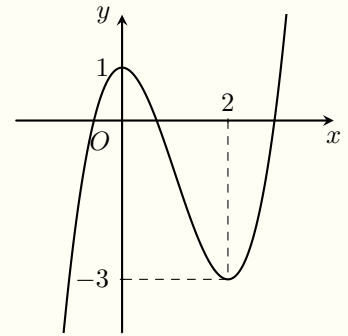
Cách 2: Đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x+1)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ theo phương trục hoành sang trái 1 đơn vị.



Ta thấy trên khoảng $(2; 4)$ đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x+1)$ nằm bên dưới trục hoành nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.

Chọn đáp án ☒ C

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Khi đó phát biểu nào là đúng đối với hàm số $g(x) = f(x+1) - 2$ trong các phát biểu sau:



- A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 B. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 C. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
 D. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Cách 1: Thực hiện các phép biến đổi đồ thị

Thực hiện các phép biến đổi đồ thị lần lượt là:

1. Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ theo vec tơ $-\vec{i}$.
 2. Sau đó tịnh tiến đồ thị theo vec tơ $-2\vec{j}$.

Ta được đồ thị hàm số $y = g(x)$ như hình vẽ.

Do đó hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Cách 2: Ta có $g'(x) = f'(x+1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên

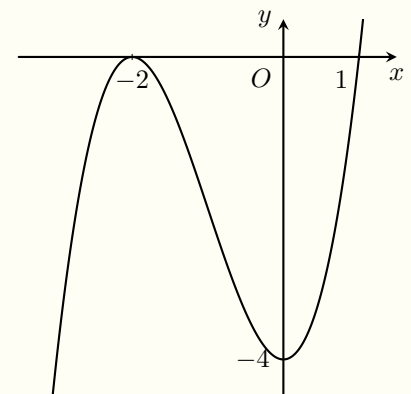
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

Do đó hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Chọn đáp án B



Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ và các mệnh đề sau:



- I. Hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.
 II. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 III. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.
 IV. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
 V. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề trên?

A 1.

B 4.

C 3.

D 2.

Lời giải.

Cách 1: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x^2 - 3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
x	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$	$ $	$+$
$f'(x^2 - 3)$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Suy ra các mệnh đề I và IV đúng, còn lại sai.

Cách 2: Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{nghiệm đơn}) \\ x = -2 & (\text{nghiệm kép}). \end{cases}$

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 & (\text{nghiệm kép}) \\ x = \pm 2 & (\text{nghiệm đơn}). \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$			
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
g	$+\infty$									$+\infty$

Suy ra các mệnh đề I và IV đúng, còn lại sai.

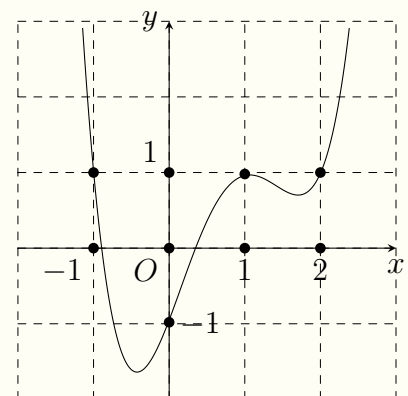
Chọn đáp án **D**



Câu 85.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A** $g(-1) < g(1) < g(2)$. **B** $g(2) < g(1) < g(-1)$.
C $g(2) < g(-1) < g(1)$. **D** $g(1) < g(-1) < g(2)$.

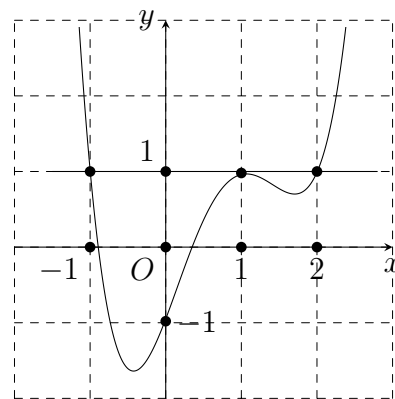


Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$

tại 3 điểm là $x = -1$; $x = 1$ và $x = 2$. Vậy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $g(2) < g(1) < g(-1)$.

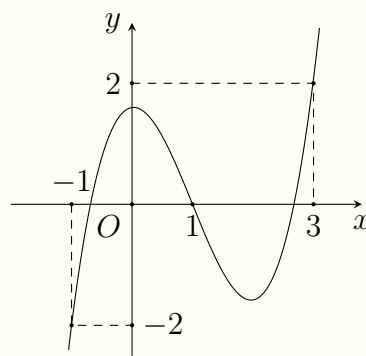
Chọn đáp án **(B)**

❖ Câu 86.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2017$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1; 3)$.
- (B)** Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.
- (C)** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 1)$.
- (D)** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(3; +\infty)$.



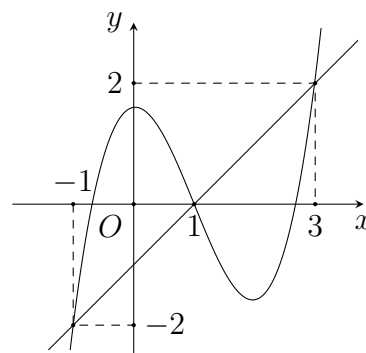
Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2 = 2[f'(x) - (x - 1)]$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại 3 điểm: $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$.

Dựa vào đồ thị ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x - 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$



Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$.

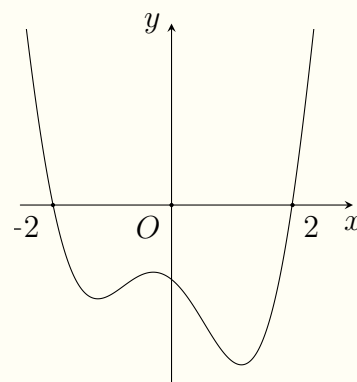
Chọn đáp án **C**



❖ Câu 87.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2) < 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A** Hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B** Hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ có hai cực tiểu.
- C** Hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ có hai cực đại và một cực tiểu.
- D** Hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.



💬 Lời giải.

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$f(-2)$		$f(2)$		$+\infty$
	$-\infty$						

Từ giả thiết $f(-2) < 0$ và $1 - x^{2018} \leq 1 \Rightarrow f(1 - x^{2018}) < 0$ với mọi x .

Đặt $t = 1 - x^{2018}$, ta có $\begin{cases} f'_t(t) < 0 \text{ khi } t \in (-2; 1) \Leftrightarrow x \in (-\sqrt[2018]{3}; \sqrt[2018]{3}) \\ f'_t(t) > 0 \text{ khi } t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[2018]{3}) \cup (\sqrt[2018]{3}; +\infty) \end{cases}$

Đặt $g(x) = |f(1 - x^{2018})|$, ta có $g'(x) = -\frac{2018 \cdot x^{2017} \cdot f'_t(t) \cdot f(t)}{2\sqrt{f^2(t)}}$

Do đó, ta có bảng biến thiên của $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[2018]{3}$	0	$\sqrt[2018]{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có “hàm số $y = |f(1 - x^{2018})|$ có hai cực đại và một cực tiểu”.

Chọn đáp án **C**



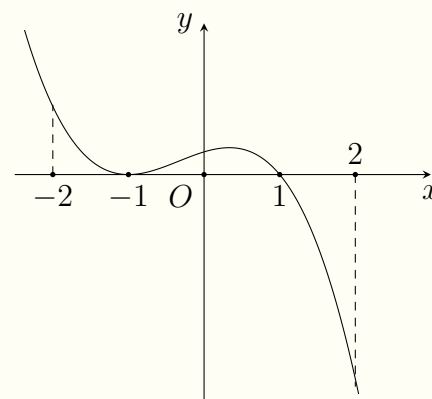
📌 DẠNG 1.4

Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất

⇨ Câu 88.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 2]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$.

- (A) $x_0 = 2$. (B) $x_0 = -1$. (C) $x_0 = -2$. (D) $x_0 = 1$.



⇨ Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	-2	-1	1	2	
y'	+	0	+	0	-
y	$f(1)$ 				

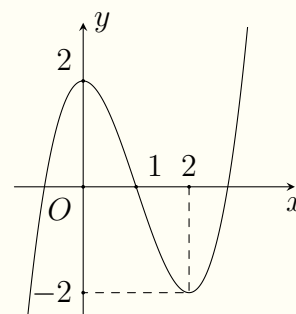
Từ bảng biến thiên, ta có $x_0 = 1$.

Chọn đáp án (D)

⇨ Câu 89.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0; 2]$. Khi đó $M + m$ là

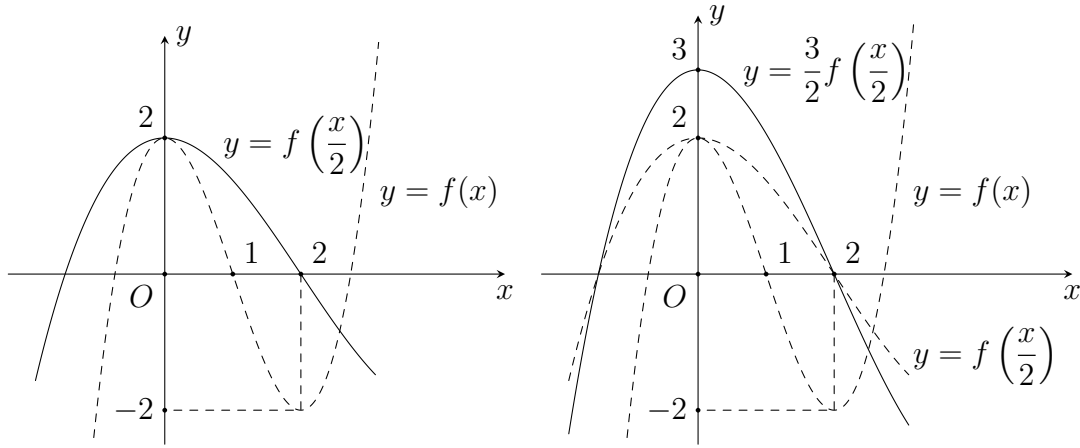
- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.



⇨ Lời giải.

Cách 1: Thực hiện các phép biến đổi đồ thị:

Ta suy ra đồ thị hàm số $y = 3f\left(\frac{x}{2}\right)$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách thực hiện phép dẫn theo trục hoành với hệ số dẫn 2. Sau đó thực hiện phép dẫn theo trục tung với hệ số dẫn $\frac{3}{2}$.



Vậy $M = 3, m = 0 \Rightarrow M + m = 3$.

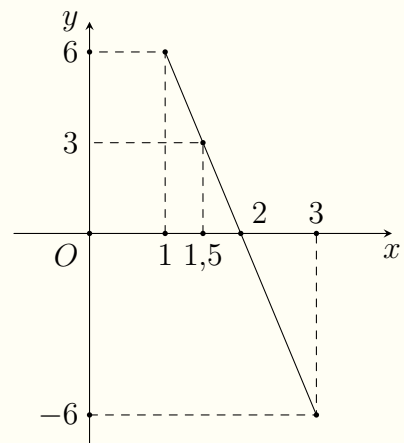
Cách khác: Ta có $g'(x) = \frac{3}{4}f'\left(\frac{x}{2}\right)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. Từ đó lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

Chọn đáp án (A)

□

❖ Câu 90.

Người ta khảo sát gia tốc $a(t)$ của một vật thể chuyển động (t là khoảng thời gian tính bằng giây từ lúc vật thể chuyển động) từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 và ghi nhận được $a(t)$ là một hàm số liên tục có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi trong thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 được khảo sát đó, thời điểm nào vật thể có vận tốc lớn nhất?



- (A) giây thứ 2. (B) giây thứ nhất.
(C) giây thứ 1,5. (D) giây thứ 3.

💬 Lời giải.

Phương pháp: $a(t) = v'(t)$. Từ đồ thị ta có: $a(t) = 0 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

t	1	1,5	2	3
$a(t) = v'(t)$	+	+	0	-
$v(t)$	$v(1)$	$v(1,5)$	$v(2)$	$v(3)$

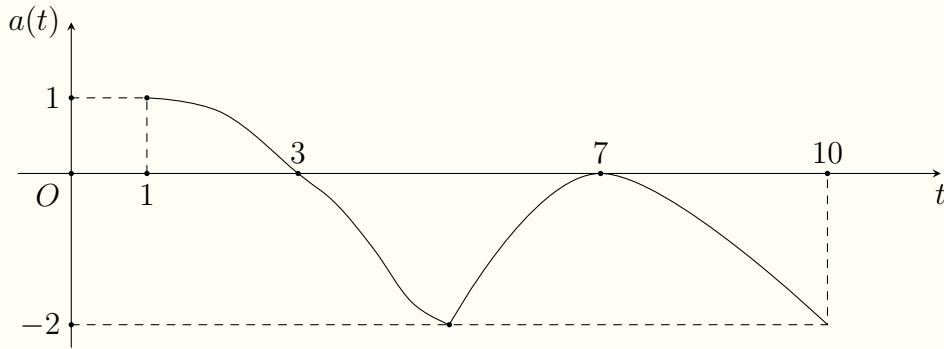
Chọn đáp án (A)

□

❖ Câu 91. Người ta khảo sát gia tốc $a(t)$ của một vật thể chuyển động (t là khoảng thời gian tính bằng giây từ lúc vật thể chuyển động) từ giây thứ nhất đến giây thứ 10 và ghi nhận được $a(t)$ là một hàm số liên tục có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi trong thời gian từ giây thứ nhất đến

giây thứ 10 được khảo sát đó, thời điểm nào vật thể có vận tốc lớn nhất?

- A** giây thứ 7. **B** giây thứ nhất. **C** giây thứ 10. **D** giây thứ 3.



Lời giải.

Phương pháp: $a(t) = v'(t)$. Từ đồ thị ta có bảng biến thiên sau:

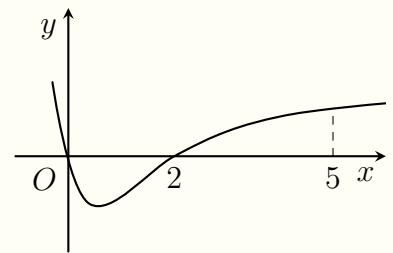
t	1	3	7	10
$a(t) = v'(t)$	+	0	-	-
$v(t)$	$v(1)$	$v(3)$	$v(7)$	$v(10)$

Chọn đáp án **D**

Câu 92.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$?

- A** $m = f(0), M = f(5)$. **B** $m = f(2), M = f(0)$.
C $m = f(1), M = f(5)$. **D** $m = f(2), M = f(5)$.



Lời giải.

x	0	2	3	5
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(5)$

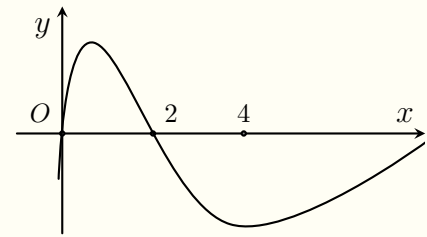
$$\min_{[0;5]} f(x) = f(2) \text{ và } f(3) > f(2)$$

$$\text{Mà } f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(0) - f(5) = f(2) - f(3) < 0 \Rightarrow f(0) < f(5).$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 93.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$?



- (A)** $m = f(4), M = f(2)$. **(B)** $m = f(4), M = f(1)$.
(C) $m = f(0), M = f(2)$. **(D)** $m = f(1), M = f(2)$.

Lời giải.

x	0	1	2	3	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$

Dựa vào BBT ta có $M = f(2)$, GTNN chỉ có thể là $f(0)$ hoặc $f(4)$

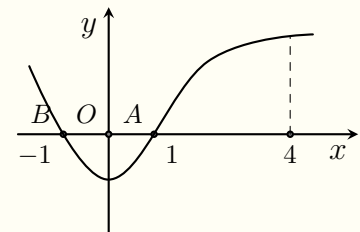
Ta lại có: $f(1); f(3) < f(2) \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) > 0$

$f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3) \Leftrightarrow f(0) - f(4) = 2f(2) - f(3) - f(1) > 0 \Rightarrow f(0) > f(4)$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 94.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên R và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(-1) + f(2) = f(1) + f(4)$, các điểm $A(1; 0), B(-1; 0)$ thuộc đồ thị. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$ lần lượt là



- (A)** $f(1); f(-1)$. **(B)** $f(0); f(2)$.
(C) $f(-1); f(4)$. **(D)** $f(1); f(4)$.

Lời giải.

Bảng biến thiên:

x	-1	1	2	4
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(4)$

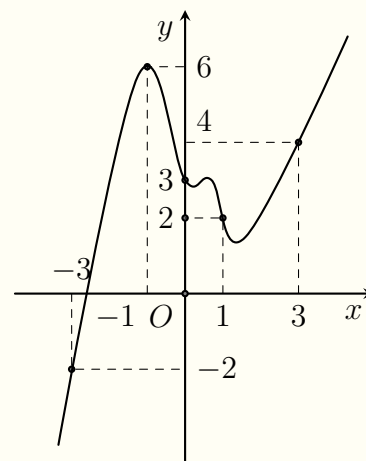
Ta có: $f(1) < f(-1), f(1) < f(2), f(1) < f(4)$ mà $f(-1) + f(2) = f(1) + f(4) \Rightarrow f(2) - f(1) = f(4) - f(-1) > 0 \Rightarrow f(4) > f(-1)$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 95.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

- A** $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
B $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
C $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.
D Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[-3;3]$.



Lời giải.

Ta có $y = g'(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $g'(x) = 2(f'(x) - (x+1))$. Để xét dấu $g'(x)$ ta xét vị trí tương đối giữa $y = f'(x)$ và $y = x+1$.

Từ đồ thị ta thấy $y = f'(x)$ và $y = x+1$ có ba điểm chung là $A(-3; -2)$, $B(1; 2)$, $C(3; 4)$; đồng thời $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 1) \cup (3; +\infty)$ và $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; 3)$. Trên đoạn $[-3; 3]$ ta có BBT:

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-3)$ $g(1)$ $g(3)$				

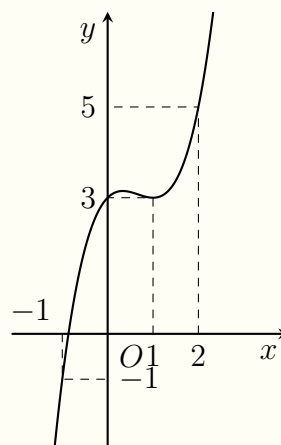
Từ BBT suy ra B đúng.

Chọn đáp án **B**

Câu 96.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A** $g(-1) > g(1)$.
B $g(-1) = g(1)$.
C $g(1) = g(2)$.
D $g(1) > g(2)$.

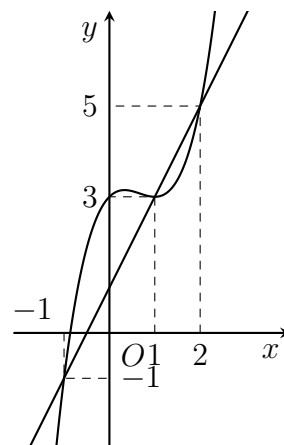


Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x - 1$. Ta thấy đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường thẳng đi qua các điểm $A(-1; -1)$, $B(1; 3)$, $C(2; 5)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-1)$	$g(1)$	$g(2)$	$+\infty$



Suy ra đáp án đúng là D.

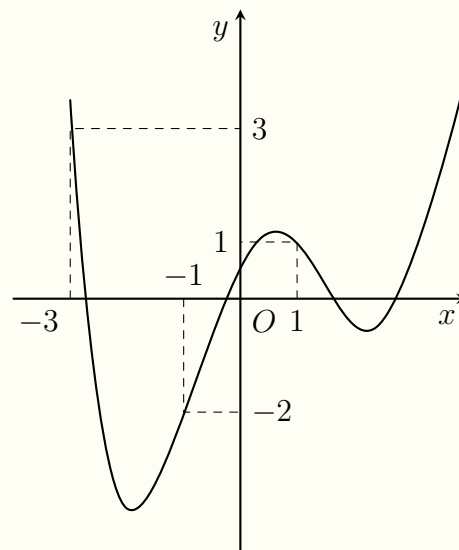
Chọn đáp án **(D)**



❖ Câu 97.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)** $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.
- (B)** $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.
- (C)** $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.
- (D)** $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.



Lời giải.

Ta có: $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

Căn cứ vào đồ thị $y = f'(x)$,

$$\text{ta có: } \begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 1 \\ f'(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g'(-3) = 0 \end{cases}$$

Ngoài ra, vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ bên (đường nét đứt), ta thấy (P) đi qua các điểm $(-3; 3)$, $(-1; -2)$, $(1; 1)$ với đỉnh $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16}\right)$.

Rõ ràng

o Trên khoảng $(-1; 1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$

o Trên khoảng $(-3; -1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (-3; -1)$

Từ những nhận định trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$ trên $[-3; 1]$ như sau:

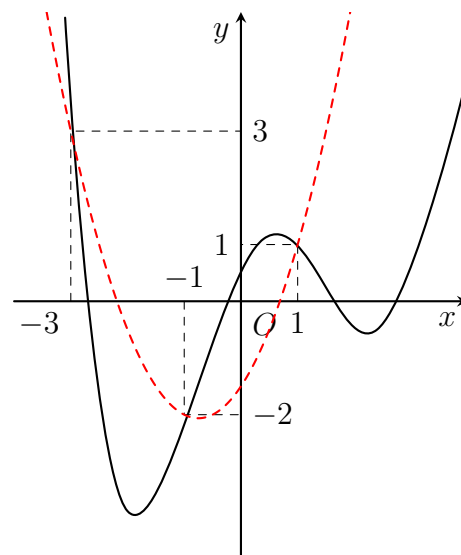
x	-3		-1		1
$g'(x)$	0	–	0	+	0
$g(x)$	$g(-3)$	$\searrow \quad \nearrow$ $g(-1)$			$g(1)$

Vậy $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-1)$.

Chọn đáp án **(A)**



❖ Câu 98.



Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2017$. Trong các mệnh đề dưới đây:

(I) $g(0) < g(1)$

(II) $\min_{x \in [-3; 1]} g(x) = g(-1)$

(III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3; -1)$

(IV) $\max_{x \in [-3; 1]} g(x) = \max\{g(-3); g(1)\}$

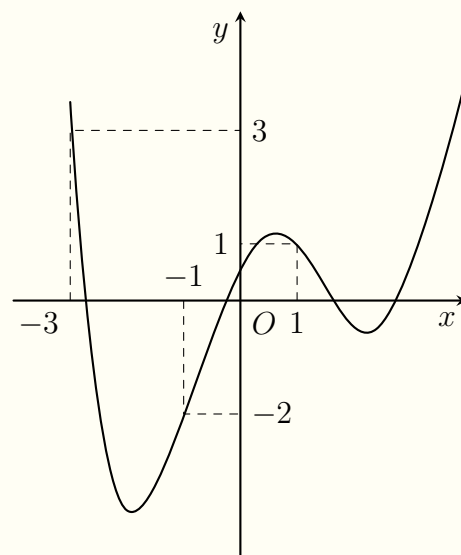
Số mệnh đề đúng là:

A 2.

B 1.

C 3.

D 4.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)$

Trên mặt phẳng tọa độ đã có đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đồ thị hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

Khi $x \in (-3; -1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, khi $x \in (-1; 1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$. Do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[-3; 1]$ như sau

x	-3	-1	0	1
$g'(x)$	0	-	0	0
$g(x)$	$g(-3)$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Vì trên $[0; 1]$ hàm số $g(x)$ đồng biến nên $g(0) < g(1)$, do đó (I) đúng.

Dựa vào bảng biến thiên dễ thấy $(-3; -1)$ hàm $g(x)$ nghịch biến nên $\min_{x \in [-3; -1]} g(x) = g(-1)$, do đó (II), (III) đúng.

Và dễ thấy rằng $\max_{x \in [-3; 1]} g(x) = \max\{g(-3); g(1)\}$.

DẠNG 1.5: ĐỒ THỊ

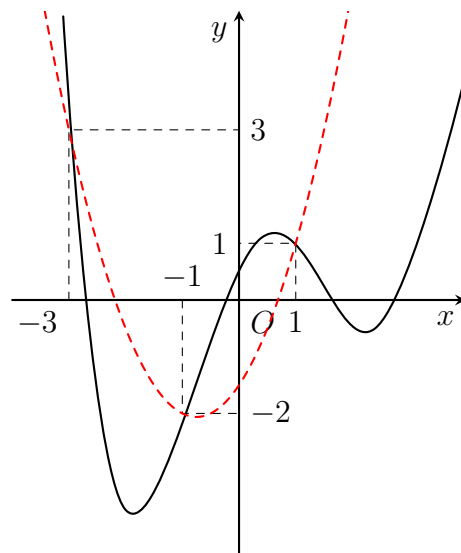
Phương pháp: sử dụng 1 trong 2 phương pháp hoặc kết hợp cả 2 phương pháp.

PP1: Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại những điểm là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$.

PP2: Tìm giao điểm của các đồ thị hàm số với trục hoành (nếu có). Sau đó dựa vào tính chất sau.

$f'(x) > 0, \forall x \in K \Rightarrow f(x)$ tăng trên K .

$f'(x) < 0, \forall x \in K \Rightarrow f(x)$ giảm trên K .



Minh họa bằng hàm số $y = \sin x$.

Chọn đáp án **(D)**



DẠNG 1.5

Đồ thị

Phương pháp: sử dụng 1 trong 2 phương pháp hoặc kết hợp cả 2 phương pháp.

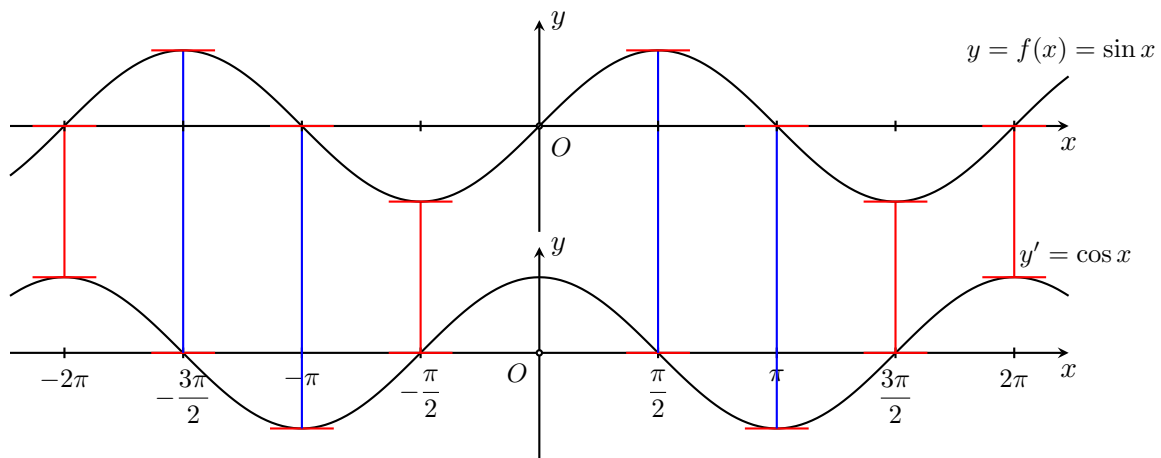
PP1: Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại những điểm là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$.

PP2: Tìm giao điểm của các đồ thị hàm số với trục hoành (nếu có). Sau đó dựa vào tính chất sau

$f'(x) > 0, \forall x \in K \Rightarrow f(x)$ tăng trên K .

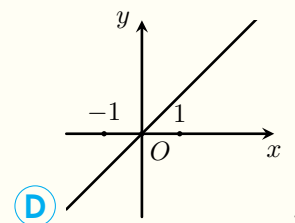
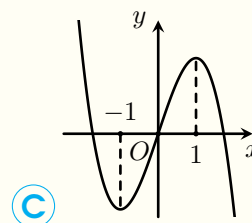
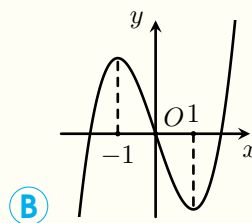
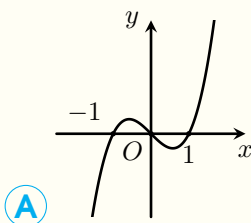
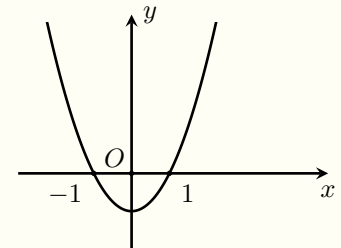
$f'(x) < 0, \forall x \in K \Rightarrow f(x)$ giảm trên K .

Minh họa bằng hàm số $y = \sin x$.



Câu 99.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, sao cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là parabol như trong hình dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nào trong bốn đáp án sau



 **Lời giải.**

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ suy ra hàm $y = f(x)$ có $x_{CD} = -1, x_{CT} = 1$.

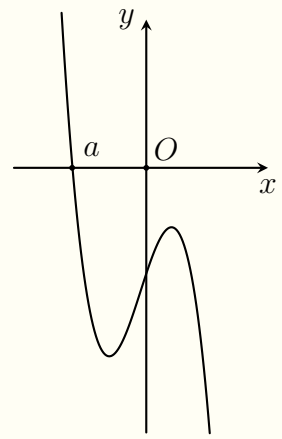
Chọn đáp án **(B)**



Câu 100.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ dưới. Biết $f(a) < 0$ hỏi phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	$+\infty$
y'		0	
y	$-\infty$	$f(a)$	$-\infty$

Do $f(a) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

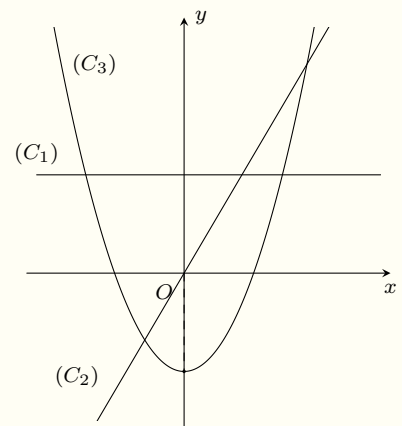
Chọn đáp án (A).



❖ Câu 101.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- (A) (C_3) , (C_2) , (C_1) . (B) (C_2) , (C_1) , (C_3) .
(C) (C_2) , (C_3) , (C_1) . (D) (C_1) , (C_3) , (C_2) .



Lời giải.

Trong khoảng $(0; +\infty)$, (C_2) nằm trên trục hoành và (C_3) “đi lên”.

Trong khoảng $(-\infty; 0)$, (C_2) nằm dưới trục hoành và (C_3) “đi xuống”.

Đồ thị (C_1) nằm hoàn toàn trên trục hoành và (C_2) “đi lên”.

Hoặc

Từ hình vẽ ta thấy, đồ thị (C_2) cắt Ox tại điểm cực trị của (C_3) . Đồ thị (C_2) đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà đồ thị (C_1) song song và nằm hoàn toàn trên trục hoành.

Suy ra, hàm số có đồ thị (C_1) là đạo hàm của hàm số có đồ thị (C_2) ; hàm số có đồ thị (C_2) là đạo hàm của hàm số có đồ thị (C_3) .

Chọn đáp án **(A)**

❖ Câu 102.

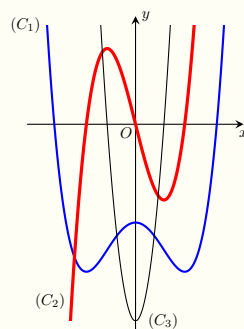
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả như ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

(A) (C_3) , (C_2) , (C_1) .

(B) (C_2) , (C_1) , (C_3) .

(C) (C_2) , (C_3) , (C_1) .

(D) (C_1) , (C_2) , (C_3) .



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta nhận xét:

Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 3 điểm có hoành độ là hoành độ ba điểm cực trị của đồ thị (C_1) . Suy ra hàm số có đồ thị (C_2) là đạo hàm của hàm số có đồ thị (C_1) .

Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại 2 điểm có hoành độ là hoành độ 2 điểm cực trị của (C_2) . Suy ra hàm số có đồ thị (C_3) là đạo hàm của hàm số có đồ thị (C_2) .

Chọn đáp án **(D)**

❖ Câu 103.

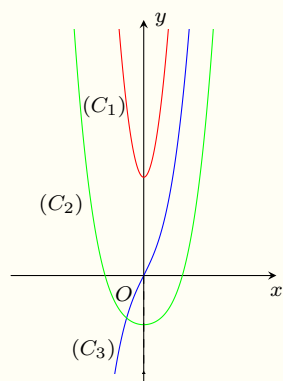
Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

(A) (C_3) ; (C_2) ; (C_1) .

(B) (C_2) ; (C_1) ; (C_3) .

(C) (C_2) ; (C_3) ; (C_1) .

(D) (C_1) ; (C_2) ; (C_3) .



Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại 1 điểm là điểm cực trị của đồ thị hàm số (C_2) . (C_3) đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà đồ thị (C_1) lại nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.

Chọn đáp án **(C)**

❖ Câu 104.

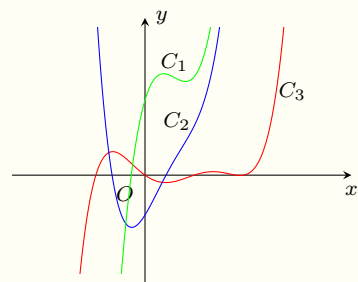
Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

(A) (C_3) ; (C_2) ; (C_1) .

(B) (C_2) ; (C_1) ; (C_3) .

(C) (C_2) ; (C_3) ; (C_1) .

(D) (C_1) ; (C_2) ; (C_3) .



Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 2 điểm là điểm cực trị của đồ thị hàm số (C_3) .

Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại 1 điểm là điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_2) .

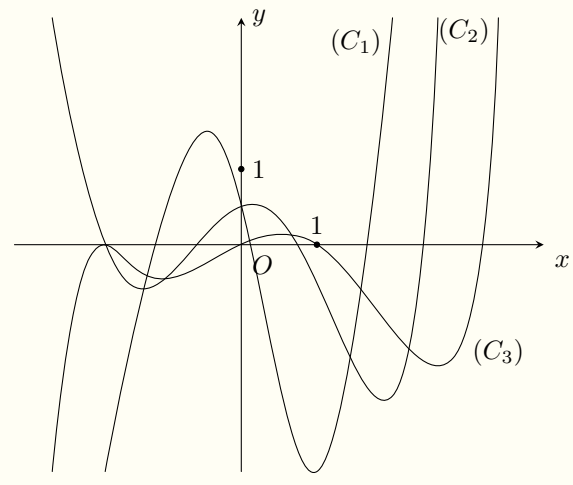
Chọn đáp án **(A)**



Câu 105.

Cho đồ thị ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- (A)** (C_3) ; (C_2) ; (C_1) .
- (B)** (C_2) ; (C_1) ; (C_3) .
- (C)** (C_2) ; (C_3) ; (C_1) .
- (D)** (C_1) ; (C_2) ; (C_3) .



Lời giải.

Từ các đồ thị bài cho ta thấy

- (C2)** cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt là 4 điểm cực trị của đồ thị $(C3)$.
- (C1)** cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt là 3 điểm cực trị của đồ thị $(C2)$.

Vậy đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong $(C3)$; $(C2)$; $(C1)$.

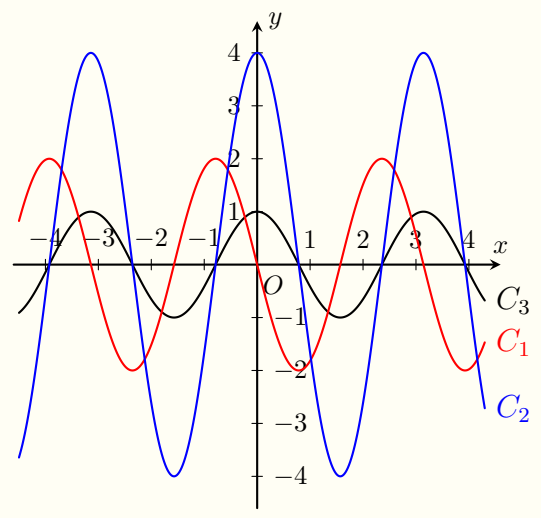
Chọn đáp án **(A)**



Câu 106.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- (A)** (C_1) ; (C_2) ; (C_3) .
- (B)** (C_2) ; (C_1) ; (C_3) .
- (C)** (C_3) ; (C_2) ; (C_1) .
- (D)** (C_3) ; (C_1) ; (C_2) .



Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = g(x)$, (C') là đồ thị hàm số $y = g'(x)$, ta có

- (C)** Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía dưới trục hoành thì (C) là đường đi xuống.

- ☑ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía trên trục hoành thì (C) là đường đi lên.

Quan sát đồ thị ta thấy ứng với các khoảng mà đồ thị (C_1) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_3) “đi lên” và ngược lại; còn ứng với các khoảng mà đồ thị (C_2) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_1) “đi lên” và ngược lại.

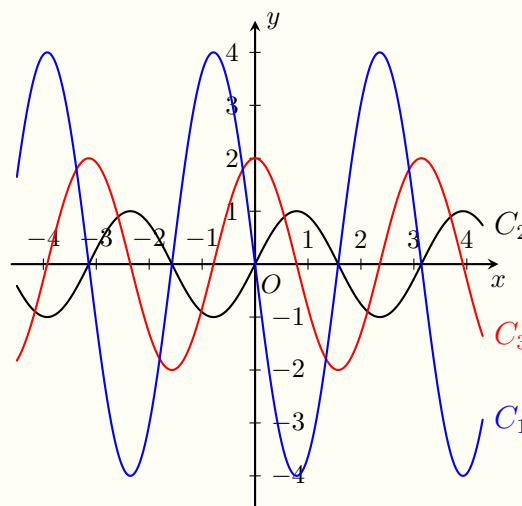
Do đó, đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong (C_3) ; (C_1) ; (C_2) .

Chọn đáp án **A** □

🔗 Câu 107.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- A** $(C_1); (C_2); (C_3)$. **B** $(C_1); (C_3); (C_2)$.
C $(C_3); (C_2); (C_1)$. **D** $(C_2); (C_3); (C_1)$.



💬 Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = g(x)$, (C') là đồ thị hàm số $y = g'(x)$, ta có

- ☑ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía dưới trục hoành thì (C) là đường đi xuống.
 ☑ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía trên trục hoành thì (C) là đường đi lên.

Quan sát đồ thị ta thấy ứng với các khoảng mà đồ thị (C_3) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_2) “đi lên” và ngược lại; còn ứng với các khoảng mà đồ thị (C_1) nằm trên trục hoành thì đồ thị (C_3) “đi lên” và ngược lại.

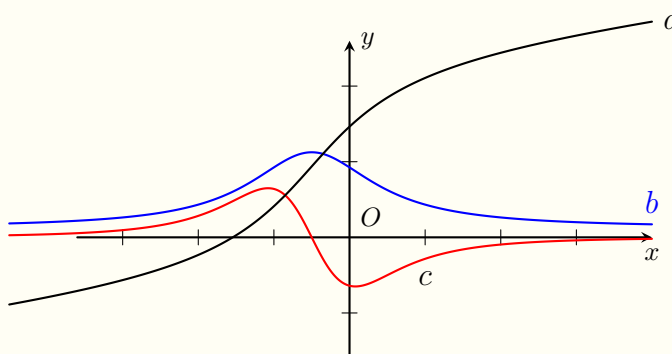
Do đó, đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong (C_1) ; (C_2) ; (C_3) .

Chọn đáp án **A** □

🔗 Câu 108.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- A** a, b, c . **B** b, a, c .
C a, c, b . **D** b, c, a .



💬 Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = g(x)$, (C') là đồ thị hàm số $y = g'(x)$, ta có

- ✓ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía dưới trục hoành (đạo hàm $g'(x) < 0$) thì (C) là đường đi xuống.
- ✓ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía trên trục hoành (đạo hàm $g'(x) > 0$) thì (C) là đường đi lên.

Trên khoảng mà đường (c) nằm trên trục hoành thì đường (b) đi lên từ trái sang phải, trên khoảng mà đường (c) nằm dưới trục hoành thì đường (b) đi xuống từ trái sang phải.

Đường (b) luôn nằm trên trục hoành và đường a luôn đi lên từ trái sang phải.

Từ đó suy ra đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong a , b , c .

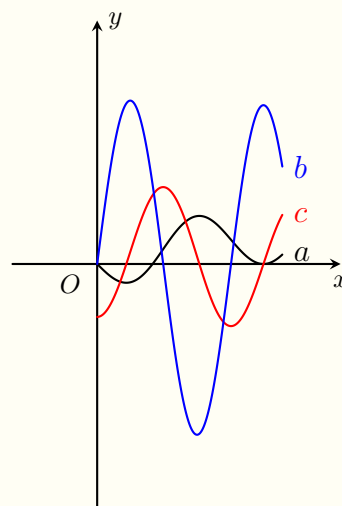
Chọn đáp án **(A)**

□

❖ Câu 109.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- (A)** a, b, c . **(B)** b, a, c . **(C)** a, c, b . **(D)** b, c, a .



💬 Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = g(x)$, (C') là đồ thị hàm số $y = g'(x)$, ta có

- ✓ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía dưới trục hoành (đạo hàm $g'(x) < 0$) thì (C) là đường đi xuống.
- ✓ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía trên trục hoành (đạo hàm $g'(x) > 0$) thì (C) là đường đi lên.

Trên khoảng mà đường (b) nằm trên trục hoành thì đường (c) đi lên từ trái sang phải, trên khoảng mà đường (b) nằm dưới trục hoành thì đường (c) đi xuống từ trái sang phải.

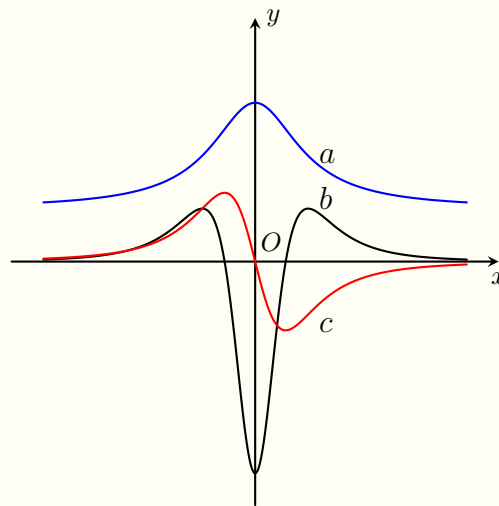
Trên khoảng mà đường (c) nằm trên trục hoành thì đường (a) đi lên từ trái sang phải, trên khoảng mà đường (c) nằm dưới trục hoành thì đường (a) đi xuống từ trái sang phải.

Từ đó suy ra đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong a , c , b .

Chọn đáp án **(C)**

□

❖ **Câu 110.** Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



A $a, b, c.$

B $b, a, c.$

C $a, c, b.$

D $b, c, a.$

Lời giải.

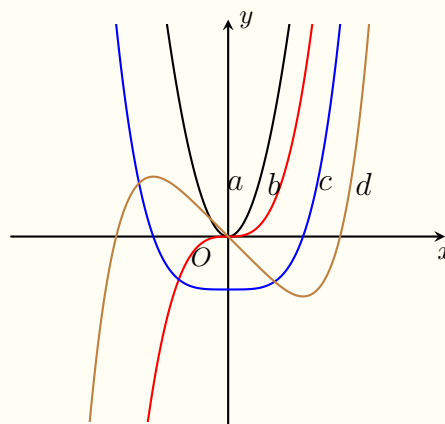
Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = g(x)$, (C') là đồ thị hàm số $y = g'(x)$, ta có

- ☑ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía dưới trục hoành (đạo hàm $g'(x) < 0$) thì (C) là đường đi xuống.
- ☑ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía trên trục hoành (đạo hàm $g'(x) > 0$) thì (C) là đường đi lên.

Do đó, đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong a, c, b .

Chọn đáp án **C**

Câu 111. Cho đồ thị của bốn hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$, $y = f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ và $y = f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



A $c, d, b, a.$

B $d, c, b, a.$

C $d, c, a, b.$

D $d, b, c, a.$

Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = g(x)$, (C') là đồ thị hàm số $y = g'(x)$, ta có

- ☑ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía dưới trục hoành (đạo hàm $g'(x) < 0$) thì (C) là

đường đi xuống.

- ☑ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía trên trục hoành (đạo hàm $g'(x) > 0$) thì (C) là đường đi lên.

Từ đó, ta suy ra đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ và $y = f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong d , c , b , a .

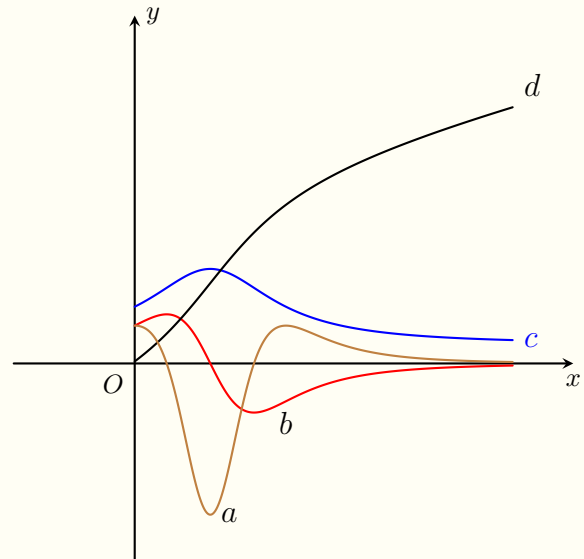
Chọn đáp án **(B)**



❖ Câu 112.

Cho đồ thị của bốn hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$, $y = f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$, $y = f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (A) $c, d, b, a.$ | (B) $d, c, a, b.$ |
| (C) $d, c, b, a.$ | (D) $d, b, c, a.$ |



💬 Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = g(x)$, (C') là đồ thị hàm số $y = g'(x)$, ta có

- ☑ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía dưới trục hoành (đạo hàm $g'(x) < 0$) thì (C) là đường đi xuống.
- ☑ Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị (C') nằm phía trên trục hoành (đạo hàm $g'(x) > 0$) thì (C) là đường đi lên.

Từ đó, ta suy ra đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$, $y = f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong d , c , b , a .

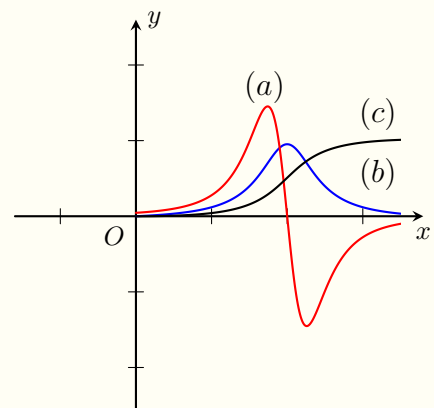
Chọn đáp án **(C)**



❖ Câu 113.

Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường, hàm vật tốc và hàm gia tốc theo thời gian được mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số trên theo thứ tự là các đường cong nào?

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (A) $(b), (c), (a).$ | (B) $(c), (a), (b).$ |
| (C) $(a), (c), (b).$ | (D) $(c), (b), (a).$ |



Lời giải.

Ta thấy

- Do (c) luôn nằm phía trên Ox , hai đường (b), (c) có cả đi lên, đi xuống nên (c) không thể là đồ thị của $f'(x)$ hay $f''(x)$. Do đó (c) là của $f(x)$.
- Đường b cũng nằm trên Ox nên (b), (a) có lúc lên lúc xuống nên b phải là của $f'(x)$. Do vậy theo thứ tự đồ thị của $f(x), f'(x), f''(x)$ là (c), (b), (a).

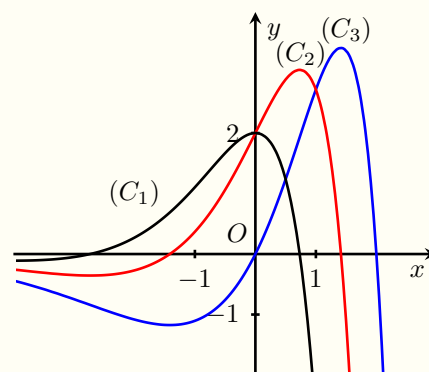
Lưu ý: Cũng có thể chú ý: hoành độ giao điểm của a với Ox là điểm cực trị của hàm số có đồ thị b nên hàm số có đồ thị a là đạo hàm của hàm số có đồ thị b. Do tính lồi lõm của a, b nên c không thể là $f''(x)$.

Chọn đáp án (D)

Câu 114.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

- (A) $(C_3), (C_2), (C_1)$.
- (B) $(C_2), (C_1), (C_3)$.
- (C) $(C_2), (C_3), (C_1)$.
- (D) $(C_1), (C_3), (C_2)$.



Lời giải.

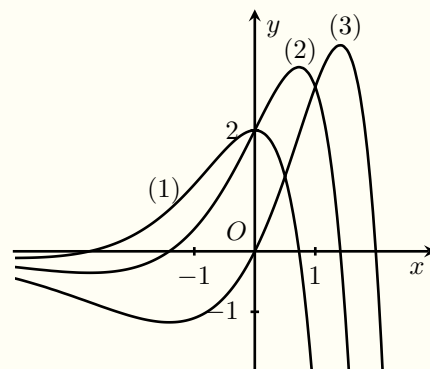
Nhìn hình vẽ ta thấy: Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại 2 điểm là điểm cực trị của đồ thị hàm số (C_2) , đồ thị (C_2) cắt Ox tại hai điểm là cực trị của (C_1) .

Chọn đáp án (B)

Câu 115.

Cho 3 hàm số $y = f(x), y = g(x) = f'(x), y = h(x) = g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $g(-1) > h(-1) > f(-1)$.
- (B) $h(-1) > g(-1) > f(-1)$.
- (C) $h(-1) > f(-1) > g(-1)$.
- (D) $f(-1) > g(-1) > h(-1)$.



Lời giải.

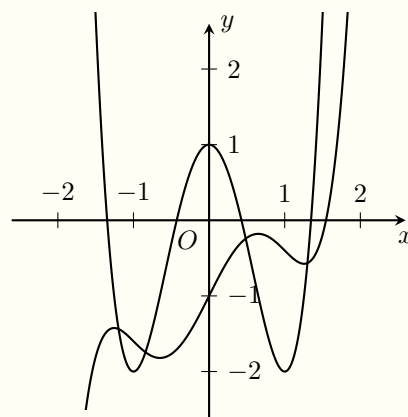
Hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ lần lượt là (1), (2), (3). Từ đồ thị ta thấy: $h(-1) > g(-1) > f(-1)$

Chọn đáp án (B)

❖ Câu 116.

Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đúng?

- (A) $f'(-1) < f''(1)$. (B) $f'(-1) > f''(1)$.
 (C) $f'(-1) = f''(1)$. (D) $f''(0) \neq f''(1)$.



💬 Lời giải.

Trước hết ta phân biệt đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$. Dễ thấy đường $y = f'(x)$ phải là đường phía trên (có đồ thị giống hàm trùng phương). Vì nếu là đường còn lại thì tính tăng giảm của hàm số không tương thích. Theo đó, $f''(1) = 0$ do $x = 1$ là điểm cực tiểu của $f'(x)$, $f'(-1) < 0$ theo đồ thị của $f'(x)$. Do đó A đúng.

Theo đó B, C sai. Còn lại D sai do $f''(0) = f''(1) = 0$ vì $x = 0, x = 1$ là các điểm cực trị của $f'(x)$.

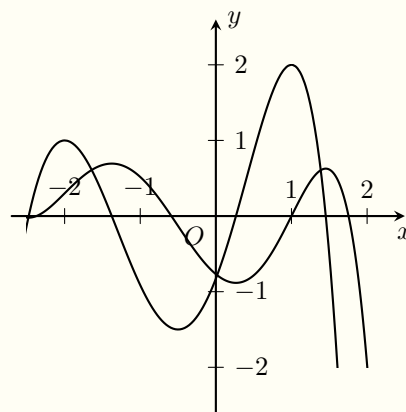
Chọn đáp án (A) □

❖ Câu 117.

Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ như hình bên.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $f'(-1) < f''(1)$. (B) $f'(-1) > f''(1)$.
 (C) $f'(-1) = f''(1)$. (D) $f'(-1) = 2f''(1)$.



💬 Lời giải.

- Phân biệt đồ thị của $f(x)$ và $f'(x)$, ta thấy: tại giao điểm của đồ thị $f'(x)$ với Ox , ứng với hoành độ điểm cực trị trên đồ thị của $f(x)$.

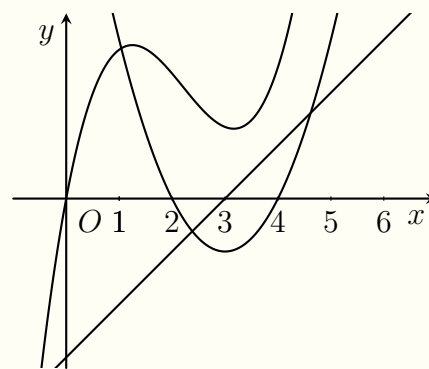
- Theo đó: $f'(-1) > 0 = f''(1)$, do đó B đúng, A, C, D sai.

Chọn đáp án (B) □

❖ Câu 118.

Cho 3 hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f'(x)$, $y = h(x) = g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $g(1) > h(1) > f(1)$. ☐ B $h(1) > g(1) > f(1)$.
☐ C $h(1) > f(1) > g(1)$. ☐ D $f(1) > g(1) > h(1)$.



Lời giải.

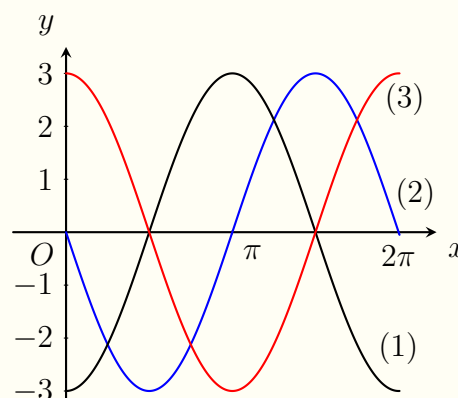
Các đường trên cùng, đường ở giữa và đường thẳng theo thứ tự là đồ thị của $y = f(x)$, $y = f'(y)$, $y = g(x)$. Do đó, xét thứ tự cao thấp của đường thẳng $x = 1$ với các đường trên ta có $f(1) > f'(1) > f''(1)$.

Chọn đáp án **D**

Câu 119.

Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vận tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $s(\pi) < v(\pi) < a(\pi)$. ☐ B $a(\pi) < v(\pi) < s(\pi)$.
☐ C $s(\pi) < a(\pi) < v(\pi)$. ☐ D $v(\pi) < a(\pi) < s(\pi)$.



Lời giải.

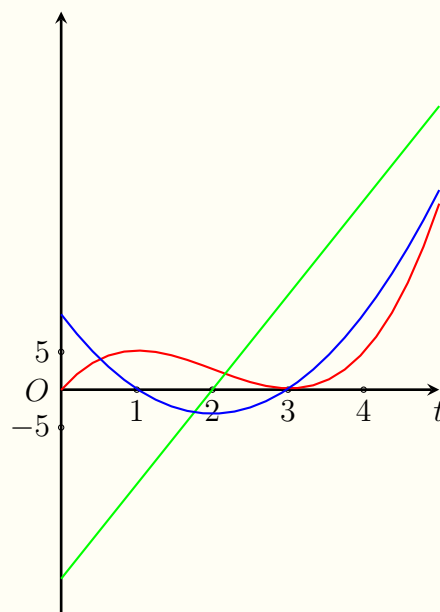
Đồ thị $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ theo thứ tự tương ứng là (3), (2), (1). Do đó $s(\pi) < v(\pi) = 0 < a(\pi)$.

Chọn đáp án **A**

Câu 120.

Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vận tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $s(4) < v(4) < a(4)$. (B) $a(4) < v(4) < s(4)$.
 (C) $s(4) < a(4) < v(4)$. (D) $v(4) < a(4) < s(4)$.



Lời giải.

Dựa trên ý nghĩa vật lý của đạo hàm, ta có $v(t_0) = s'(t_0)$ và $a(t_0) = v'(t_0)$ tại thời điểm t_0 do đó đồ thị có dạng bậc ba (màu đỏ), đồ thị có dạng bậc hai (màu xanh dương) và đồ thị có dạng đường thẳng (màu xanh lá) lần lượt là đồ thị của quãng đường, vận tốc và gia tốc.

Bằng phương pháp đồ thị, ta suy ra $s(4) < v(4) < a(4)$.

Chọn đáp án (A)



DẠNG 1.6

Tham số m

Câu 121.

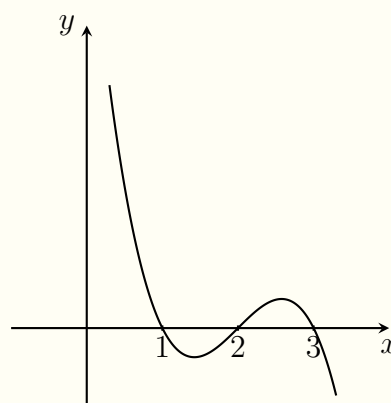
Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.

Xét các khẳng định sau

- (I) Hàm số $y = f(x)$ có ba cực trị.
 (II) Phương trình $f(x) = m + 2018$ có nhiều nhất ba nghiệm.
 (III) Hàm số $y = f(x + 1)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Số khẳng định đúng là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.



Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$								

Từ BBT ta thấy (I) đúng, (II) sai.

Với $x \in (0; 1) \Rightarrow x + 1 \in (1; 2) \Rightarrow f'(x + 1) < 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x + 1)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

$\Rightarrow$ (III) đúng. Vậy có hai khẳng định đúng.

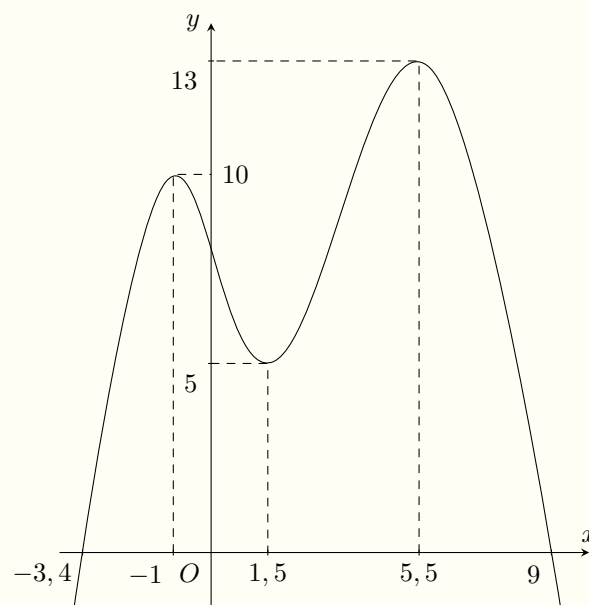
Chọn đáp án (B)

□

❖ Câu 122.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3) \cup (9; +\infty)$. Đặt $g(x) = f(x) - mx + 5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực trị?

- (A) 4. (B) 7. (C) 8. (D) 9.



💬 Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - m$, khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - m = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$.

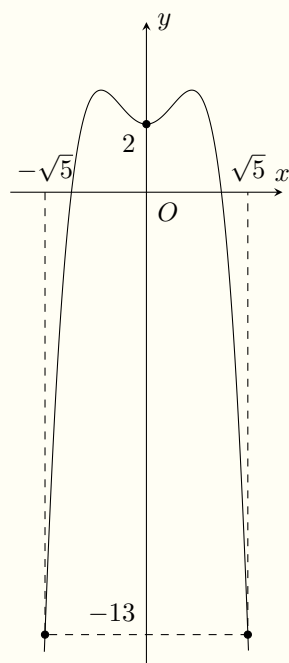
Hàm số $y = g(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt, do đó $\begin{cases} m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{cases}$. Mà m là số nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 10; 11; 12\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D)

□

❖ Câu 123. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$, $m \in \mathbb{R}$. Để $g(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì điều kiện của m là

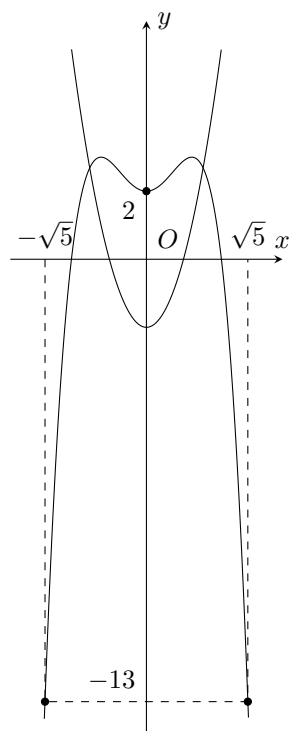
- (A) $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.
 (B) $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.
 (C) $m \leq \frac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$.
 (D) $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3x^2 - 2 = 0$.

Ta có $g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ khi và chỉ khi $\max_{x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} g(x) \leq 0$.



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = 3x^2 - 2$ ta thấy $f'(x) + 3x^2 - 2 \geq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

Vậy $g'(x) \geq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$, hay hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

Suy ra $\max_{x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} g(x) = g(\sqrt{5}) = 2f(\sqrt{5}) - 3m$.

Vậy yêu cầu đề bài tương đương với $2f(\sqrt{5}) - 3m \leq 0$, hay $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.

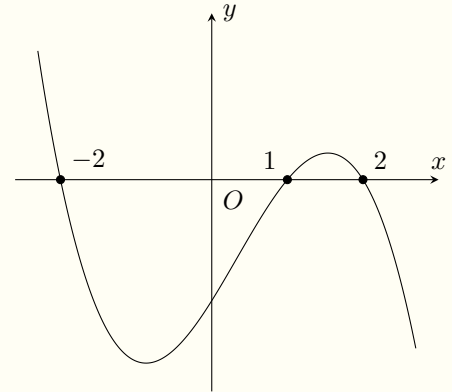
Chọn đáp án **(A)** □

❖ Câu 124.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Đặt $g(x) = f(|x + m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?

- (A)** 3. **(B)** 4. **(C)** 5. **(D)** Vô số.



💬 Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương, nên $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương. Vậy $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tịnh tiến đồ thị này sang trái hay sang phải tùy theo m ta thu được đồ thị hàm số $f(|x + m|)$ cũng có 5 điểm cực trị.

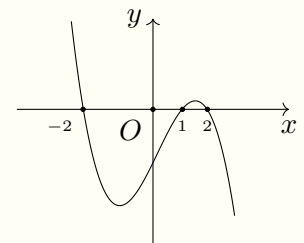
Vậy có vô số giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(D)** □

❖ Câu 125.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x| + m)$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị?

- (A)** 2. **(B)** 3. **(C)** 4. **(D)** Vô số.



💬 Lời giải.

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$.

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f								

Yêu cầu bài toán tương đương hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị).

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ suy ra $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương khi và chỉ khi tịnh tiến $f(x)$ sang trái hoặc sang phải phải thỏa mãn

- ☑ Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị suy ra $m < 1$.
- ☑ Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị suy ra $m \geq -2$.

Suy ra $-2 \leq m < 1$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0\}$.

Chọn đáp án (B) □

CHỦ ĐỀ 2

Biết đồ thị - biết bảng biến thiên - biết hàm số

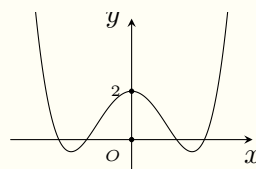
DẠNG 2.1

Tiệm cận

❖ Câu 126.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018x}{f(x)(f(x)-1)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A) 2. (B) 9. (C) 4. (D) 3.



💬 Lời giải.

Ta có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ do đó đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng một tiệm cận ngang.

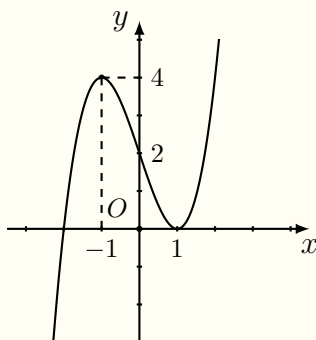
Mỗi phương trình $f(x) = 0$ và $f(x) = 1$ đều có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và không trùng nhau nên đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng 8 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

❖ Câu 127.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f(x)$ như hình vẽ.

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



- (A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

$$\text{Xét } f^2(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 4 \end{cases}.$$

Xét $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1 \neq \pm 1$ và $x_2 = 1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x = 1$). Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

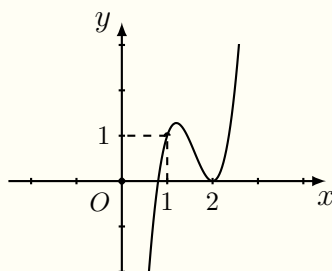
Xét $f(x) = 4$ có 2 nghiệm $x_3 \neq \pm 1$ và $x_4 = -1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại $x = -1$). Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(A)**



❖ Câu 128. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



(A) 5.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 3.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } x \geq 1. \text{ Ta có } x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f^2(x) - f(x) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (a) \\ f(x) = 1 & (b) \end{cases}. \text{ Dựa vào đồ thị ta có:}$$

+ Phương trình (a) có hai nghiệm $\begin{cases} x = x_0 < 1 \\ x = 2 \end{cases}$ (loại x_0 ; loại $x = 2$ vì $x^2 - 3x + 2 = 0$) nhưng $x = 2$ là nghiệm kép của mẫu nên $x = 2$ thỏa.

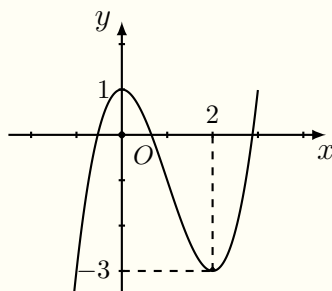
+ Phương trình (b) có ba nghiệm $x_1 = 1$ (loại), $x_2 \in (1; 2)$ (thỏa) và $x_3 \in (2; +\infty)$ (thỏa).

Vậy đồ thị $g(x)$ có ba đường tiệm cận.

Chọn đáp án **(D)**



❖ Câu 129. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{1-x}}{(x-3)[f^2(x) + 3f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A 5.

B 4.

C 6.

D 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x \leq 1$. Ta có $(x-3)[f^2(x) + 3f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ f^2(x) + 3f(x) = 0 \end{cases} \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (a) \\ f(x) = -3 & (b) \end{cases}$. Dựa vào đồ thị ta có:

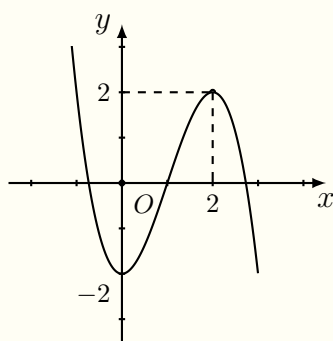
+ Phương trình (a) có ba nghiệm $\begin{cases} x = x_0 < 0 \\ x = x_1 \in (0; 1) \\ x = x_2 \in (2; +\infty) \end{cases}$ (x_0 thỏa; $x = x_1$ thỏa; $x = x_2$ loại).

+ Phương trình (b) có hai nghiệm $x = x_3 \in (-\infty; 0)$ (thỏa), $x = 2$ (thỏa) vì là nghiệm kép. Vậy đồ thị $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Chọn đáp án B

□

❖ Câu 130. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-2\sqrt{x})\sqrt{2-x}}{(x-4)[f^2(x) + 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A 5.

B 4.

C 2.

D 3.

Lời giải.

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$. Ta có $(x-4)[f^2(x) + 2f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ f^2(x) + 2f(x) = 0 \end{cases} \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (a) \\ f(x) = -2 & (b) \end{cases}$. Dựa vào đồ thị ta có:

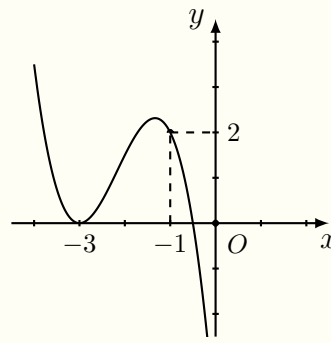
+ Phương trình (a) có ba nghiệm $\begin{cases} x = x_0 \in (-1; 0) \\ x = x_1 \in (0; 2) \\ x = x_2 \in (2; 3) \end{cases}$ (x_0 loại; $x = x_1$ thỏa; $x = x_2$ loại).

+ Phương trình (b) có hai nghiệm $x = x_3 \in (2; 3)$ (loại), $x = 0$ (thỏa) vì là nghiệm kép. Vậy đồ thị $g(x)$ có hai đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C

□

❖ Câu 131. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A 6.

B 3.

C 2.

D 4.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = x_3 \in (-1; 0) \end{cases}$.

Do đó, ta viết $f(x) = a(x+3)^2(x-x_3)$.

Đồng thời, $f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; -3) \\ x = x_2 \in (-3; -1) \\ x = -1 \end{cases}$. Do đó, ta viết $f(x) - 2 = a(x-x_1)(x-x_2)(x+1)$.

Xét hàm số $y = \frac{(x^2 + x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x-1)(x+3)\sqrt{x^2 + x}}{a^2x(x+3)^2(x+1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_2)(x-x_3)}$.

Tập xác định $D = (-\infty; x_1) \cup (x_1; -3) \cup (-3; x_2) \cup (x_2; -1) \cup (0; +\infty)$.

Từ đó suy ra đồ thị hàm số đã cho có bốn tiệm cận đứng là $x = 0, x = 3, x = x_1, x = x_2$.

Chọn đáp án D.

DẠNG 2.2

Cực trị

Câu 132. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
y'		+	0	-	0	+																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
y				-1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									</

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đối với hàm số $g(x) = f(2-x) - 2$?

(I) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4; -2)$.

(II) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

(III) Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm -2.

(IV) Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm -3.

A 3.

B 2.

C 1.

D 4.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = -f'(2-x)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = 0 \\ 2-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$.

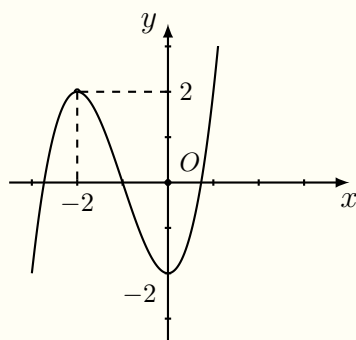
Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
g'		$-$	0	$+$	0	$-$
g	$-\infty$			-3		$+\infty$
			-4			

Chọn đáp án **C**



Câu 133. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có bao nhiêu cực đại?



A 3.

B 4.

C 5.

D 6.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (-2x + 3)f'(-x^2 + 3x)$,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 0 \\ f'(-x^2 + 3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ -x^2 + 3x = -2 \\ -x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	$\frac{3 - \sqrt{17}}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với đáp án, ta chọn đáp án A.

🔵 **Nhận xét.** Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x = 4 \in \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$

$$-2x + 3 = -5 < 0. \quad (1)$$

$$-x^2 + 3x = -4 \Rightarrow f'(-4) > 0 \text{ (vì } f \text{ đang tăng)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = (-2x + 3)f'(-x^2 + 3x) < 0$ trên khoảng $\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Chọn đáp án **(A)** □

🔗 **Câu 134.** Cho hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2, -1, 0$. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Từ giả thiết suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0. \end{cases}$$

Đặt $g(x) = f(u)$, $u = x^2 - 2x$ thì $g'(x) = 2(x - 1)f'(u)$ nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \text{ (vô nghiệm)} \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 0 \vee x = 2. \end{cases}$$

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm đơn là $x = 0, x = 2$ và một nghiệm bội ba là $x = 1$ nên hàm số đã cho có ba cực trị.

Chọn đáp án **(A)** □

🔗 **Câu 135.**

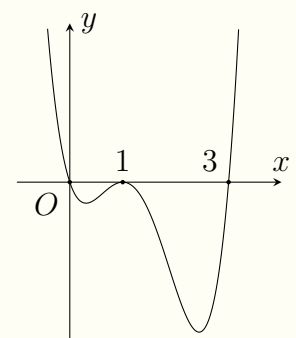
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu?

(A) 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

(B) 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

(C) 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

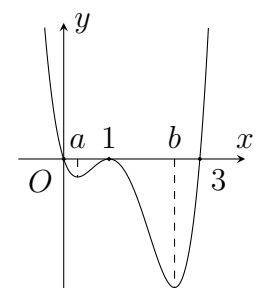
(D) 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.



💬 **Lời giải.**

$$\text{Dựa vào đồ thị, ta có } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \text{ (} 0 < a < 1 \text{)} \\ x = 1 \\ x = b \text{ (} 1 < b < 3 \text{)}. \end{cases}$$



$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a (0 < a < 1) \\ x = 1 \\ x = b (1 < b < 3) \\ x = 0 \\ x = 1 \text{ (nghịệm kép)} \\ x = 3. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ là

x	$-\infty$	0	a	1	b	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

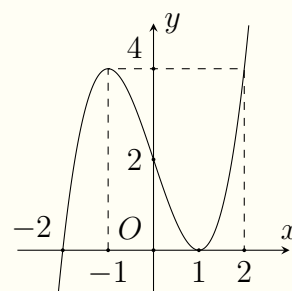
Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $g(x)$ có 2 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án **C**

❖ Câu 136.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $y = (f(x))^3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A** 1. **B** 2. **C** 3. **D** 8.



💬 Lời giải.

Ta có $y = (f(x))^3$, $y' = 3f'(x)f^2(x)$.

Từ đồ thị ta có $f'(x) = 0$ tại $x = 1$, $x = -1$.

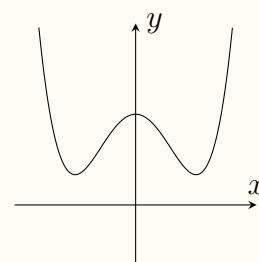
Bởi $f^2(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ suy ra $y' = (f(x))^3$ có 2 điểm cực trị là $x = 1$, $x = -1$.

Chọn đáp án **B**

❖ Câu 137.

Cho hàm số $y = f(x)$ luôn dương và có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A** 1 điểm cực tiểu, 2 điểm cực đại.
B 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C 1 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.
D 1 điểm cực tiểu, 0 điểm cực đại.



💬 Lời giải.

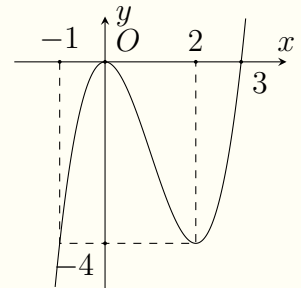
Ta có $y = \sqrt{f(x)}$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Bởi vì $\sqrt{f(x)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên ta suy ra được số điểm cực trị của $y = \sqrt{f(x)}$ bằng số điểm cực trị của $y = f(x)$.
 Từ đồ thị trên ta thu được $y = \sqrt{f(x)}$ có 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án **(B)**

❖ Câu 138.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng bao nhiêu?

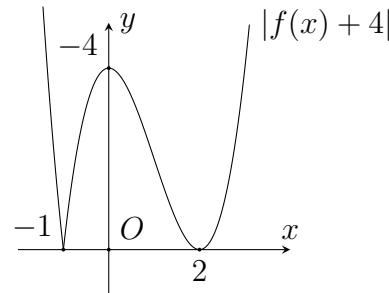
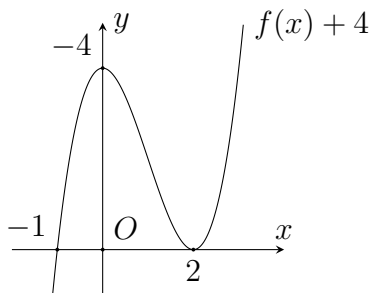
- (A)** 2. **(B)** 3. **(C)** 4. **(D)** 5.



💬 Lời giải.

Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ có được bằng cách

- ☑ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x) + 4$.
- ☑ Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số 4 qua $f(x) + 4$ ta được $|f(x) + 4|$.



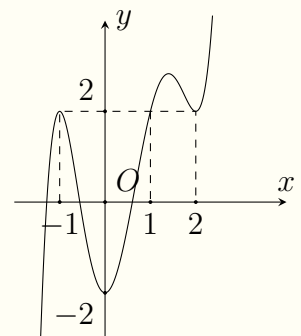
Dựa vào đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ suy ra tọa độ các điểm cực trị là $(-1; 0)$, $(0; 4)$, $(2; 0)$.
 Suy ra tổng tung độ các điểm cực trị bằng $T = 0 + 4 + 0 = 4$.

Chọn đáp án **(C)**

❖ Câu 139.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $h(x) = |2f(x) - 3|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A)** 4. **(B)** 5. **(C)** 7. **(D)** 9.



💬 Lời giải.

Xét $g(x) = 2f(x) - 3 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = a, 1 < a < 2 \\ x = 2. \end{cases}$$

Ta tính được $g(-1) = 1$, $g(0) = -7$, $g(a) > 1$, $g(2) = 1$.
Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	-1	0	a	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow -7$	$\nearrow g(a)$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra

- ☑ Đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.
- ☑ Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x) = |g(x)|$ có 7 điểm cực trị.

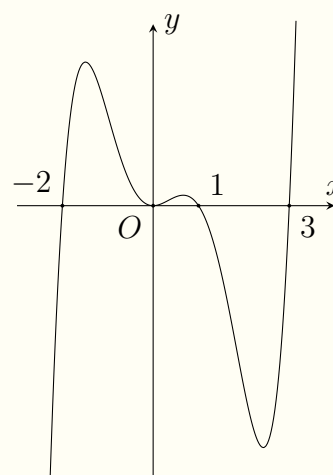
Chọn đáp án **C**



🔗 Câu 140.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $h(x) = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A** 2. **B** 3. **C** 5. **D** 7.



💬 Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\Rightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\Rightarrow$ hàm số $h(x)$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm thay đổi số điểm cực trị).

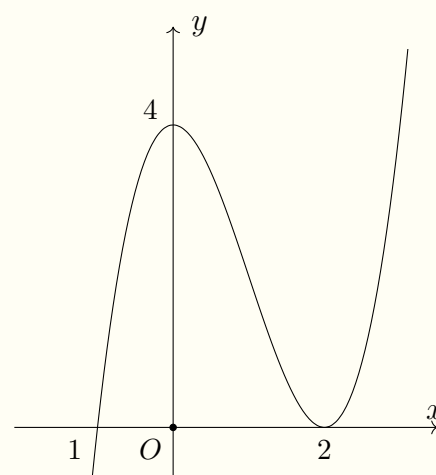
Chọn đáp án **C**



🔗 Câu 141.

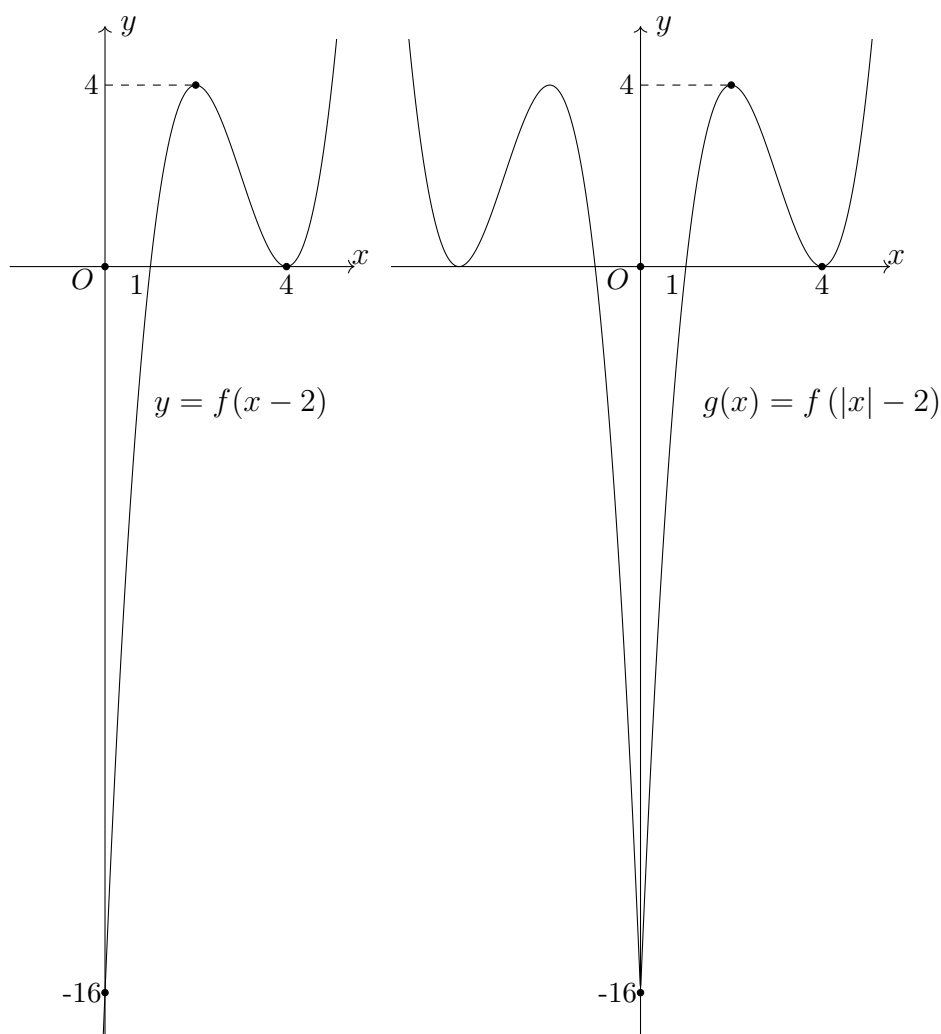
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 7.



Lời giải.

Ta biết rằng, đồ thị hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách tịnh tiến sang phải 2 đơn vị rồi mới lấy đối xứng.



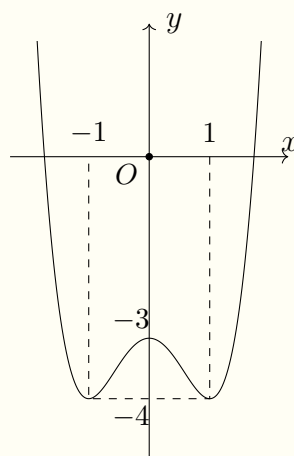
Dựa vào đồ thị hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$, suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C)

⇒ Câu 142.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - 2|) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 7.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - 2|) + 1$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

Bước 1: Lấy đối xứng qua Oy nhưng vì đồ thị đã đối xứng sẵn nên bước này bỏ qua.

Bước 2: Tịnh tiến đồ thị ở bước 1 sang phải 2 đơn vị.

Bước 3: Tịnh tiến đồ thị ở bước 2 lên trên 1 đơn vị.

Vì phép tịnh tiến không làm thay đổi số cực trị nên ta không quan tâm đến bước 2 và bước 3. Từ nhận xét bước 1 ta thấy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là 3 điểm cực trị.

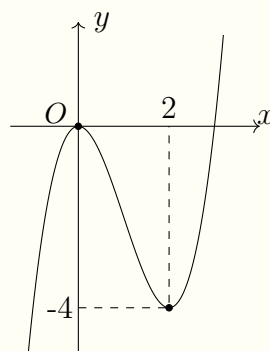
Chọn đáp án (B)

□

❖ Câu 143.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

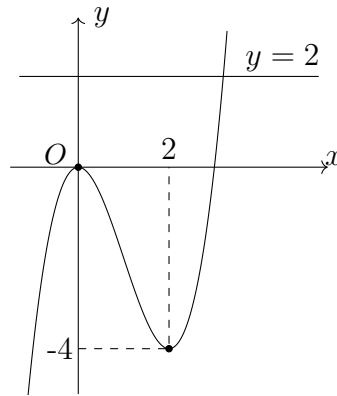


Lời giải.

Cách 1 Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$.

$$\text{Suy ra } f'(x) = \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiệm đơn)} \end{cases}. \text{ Ta có } g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$$

$$\text{nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiệm đơn)} \\ f(x) = 0 \quad (1) \\ f(x) = 2. \quad (2) \end{cases}$$



Dựa vào đồ thị ta có:

- ✔ Phương trình (1) có hai nghiệm $x = 0$ (nghiệm kép) và $x = a$ ($a > 2$).
- ✔ Phương trình (2) có một nghiệm $x = b$ ($b > a$)

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có bốn nghiệm bội lẻ là $x = 0$, $x = 2$, $x = a$ và $x = b$. Suy ra hàm số $g(x) = f(f(x))$ có 4 điểm cực trị.

Cách 2 Với $u = f(x)$ thì $f'(f(x))_x = f'_u \cdot u'_x = f'_u \cdot f'_x$

$$\Rightarrow f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_u = 0 \\ f'_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = f(x) = 0 \\ u = f(x) = 2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- ✔ Ta thấy $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_{1,2} = 0$ và $x_3 > 2$.
- ✔ Ta thấy $f(x) = 2$ có hai nghiệm $x_4 > x_3$

$\Rightarrow f'(f(x)) = 0$ có nghiệm $x = 0$ bậc 3, $x = 2, x_3, x_4$ bậc 1, suy ra hàm số có 4 cực trị.

Chọn đáp án (B)

DẠNG 2.3

Bảng biến thiên

🔗 **Câu 144.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'	$-$	$ $	$+$	0	$+$
f	$+\infty$		2		$+\infty$
		1		1	

Hàm số $g(x) = 3f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = \pm 1$. Ⓓ $x = 0$.

 **Lời giải.**

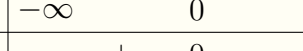
Ta có $g'(x) = 3f'(x)$.

Do đó điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trùng với điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là $x \pm 1$.

Chọn đáp án (C) □

❖ **Câu 145.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-
y						

Hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 5.

(D) 6.

💬 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

$$\textcircled{v} \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=0 \\ 3-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \quad g'(x) \text{ không xác định} \Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
g'	+	0	-	+	0	-
g						

Vậy hàm số $g(x) = f(3-x)$ có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

❖ **Câu 146.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$+\infty$	-2	2	$+\infty$	

Hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = -2 \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 0 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ (nghiệm bội 3)}$$

Vậy $g'(x) = 0$ có duy nhất nghiệm bội lẻ $x = 0$ nên hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)



Câu 147. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y								
			3			3		
	$+\infty$				-1			$-\infty$

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-2; 0)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x^2 - 2 < -2 \\ 0 < x^2 - 2 < 2 \end{cases} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^2 - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \begin{cases} x^2 - 2 > 2 \\ -2 < x^2 - 2 < 0 \end{cases} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < x < 2 \\ x < -4 \\ -\sqrt{2} < x < 0. \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = f(x^2 - 2)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -4)$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-4; -\sqrt{2})$, $(0; \sqrt{2})$, $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (B)



Câu 148.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $y = f'(x)$ như sau. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = 2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

và

$$f'(x^2 - 2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x < -2 \\ x^2 - 2x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$
$2x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2 - 2x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$(x - 2)f'(x^2 - 2x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có một cực tiểu.

Chọn đáp án **A**



Câu 149.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A** $\left(-1; \frac{1}{4}\right)$.
- B** $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.
- C** $\left(1; \frac{5}{4}\right)$.
- D** $\left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$.

Ta có $g'(x) = \left(4x - \frac{5}{2}\right) f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$. Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \end{cases}.$

✓ $\begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{8} \\ -2 < 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{9}{4}.$

$$\textcircled{C} \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f' \left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{8} \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} > 3 \\ x < \frac{5}{8} \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \end{cases}.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{5}{8}\right) \cup \left(1; \frac{9}{4}\right)$.

Chọn đáp án **C**

🔗 Câu 150.

Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3	1	-1	2	4

- A** $(-4; -2)$. **B** $(-2; 0)$.
C $(0; 2)$. **D** $(2; 4)$.

💬 Lời giải.

Ta có $g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1$. Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2$.

TH1: $f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow 2 < 1 - \frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4; -2)$.

TH2: $f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow 2 < 2 - 2a < x < 4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2 - 2a; 4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2; 4)$.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên $(-4; -2)$.

Chú ý: Từ trường hợp 1 ta có thể chọn nhưng cứ xét tiếp trường hợp 2 xem thử.

Chọn đáp án **A**

🔗 Câu 151.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$	

- A** 2. **B** 3. **C** 4. **D** 5.

💬 Lời giải.

Đồ thị hàm số $u(x) = f(x - 2017) + 2018$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2017 đơn vị và lên trên 2018 đơn vị. Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$.

x	$-\infty$	2016	2020	$+\infty$	
$u'(x)$	+	0	-	0	+
$u(x)$	$-\infty$	4036	0	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x) = |u(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)



❖ Câu 152.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Phương trình $|f(1-3x) + 3| = 3$ có bao nhiêu nghiệm.

- (A) 4. (B) 3. (C) 6. (D) 5.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

💬 Lời giải.

$$\text{Đặt } g(x) = f(1-3x) + 3 \Rightarrow g'(x) = -3 \cdot f'(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \\ 1-3x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	-2	6	$-\infty$	
$ g(x) $	$+\infty$	2	6	$+\infty$	

Vậy $|g(x)| = 3$ có bốn nghiệm.

Chọn đáp án (A)



❖ Câu 153.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ là

- (A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$				
y'	$-$		$-$	0	$+$			
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

💬 Lời giải.

Đặt $t = 2x - 1$, ta có phương trình trở thành $|f(t)| = \frac{10}{3}$. Với mỗi nghiệm của t thì có một nghiệm $x = \frac{t+1}{2}$ nên số nghiệm t của phương trình $|f(t)| = \frac{10}{3}$ bằng số nghiệm của $3|f(2x-1)| - 10 = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là

x	$-\infty$	x_0	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	$+$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

Suy ra phương trình $|f(t)| = \frac{10}{3}$ có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(C)**

❖ Câu 154.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- (A)** 5. **(B)** 7. **(C)** 11. **(D)** 13.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu nằm bên phải trục tung nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm có hoành độ dương. Khi đó

- ☑ Đồ thị hàm số $f(|x|)$ cắt trục hoành tối đa 4 điểm.
- ☑ Hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ sẽ có tối đa 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(B)**

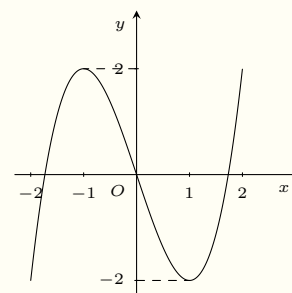
✍ DẠNG 2.4

Tương giao (chứa tham số)

❖ Câu 155.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- (A)** 3. **(B)** 7. **(C)** 9. **(D)** 5.



Lời giải.

Đặt $t = f(x)$, phương trình $f(f(x)) = 0$ trở thành $f(t) = 0$ (*) (số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox). Nhìn vào đồ thị ta thấy phương trình (*) có 3 nghiệm t thuộc khoảng $(-2; 2)$, với mỗi giá trị t như vậy phương trình $f(x) = t$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 9 nghiệm.

Lưu ý: khi t có 3 giá trị thuộc $(-2; 2)$ thì nghiệm phương trình $f(x) = t$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = t$, $t \in (-2; 2)$ (là hàm hằng song song trục Ox).

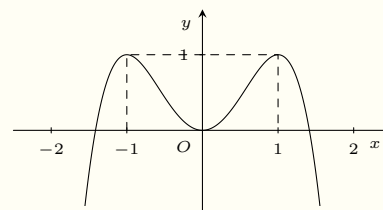
Chọn đáp án **C**



Câu 156.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f(f(\cos 2x)) = 0$?

- A** 3. **B** 4. **C** 2. **D** 1.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và suy ra được $f(\cos 2x) = \pm a (a > 1)$ hoặc $f(\cos 2x) = 0$

TH1: Nếu $f(\cos 2x) = a > 1$ thì phương trình này vô nghiệm.

TH2: Nếu $f(\cos 2x) = -a < -1$ thì $|\cos 2x| > 1$, phương trình này vô nghiệm.

TH3: Nếu $f(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \pm a$ (vô nghiệm) và $\cos 2x = 0$ có 4 điểm trên vòng tròn lượng giác.

Vậy có 4 điểm.

Chọn đáp án **B**



Câu 157. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt?

- A** 3. **B** 4. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Bảng biến thiên của hàm số } y = f(x)$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-4	0	-4	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) = -m$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $d: y = -m$ cắt đồ thị hàm số $f(|x|)$ tại 4 điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $f(|x|)$. Điều kiện là $-4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$ nên m có 3 giá trị.

Chọn đáp án **A**



❖ Câu 158.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Với các giá trị thực của tham số m , phương trình $f(|x| + m) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

- A** 4. **B** 5. **C** 6. **D**

3.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$				
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	3	$-\infty$

💬 Lời giải.

Phân tích: Vì hàm số $y = f(|x| + m)$ là hàm chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua trục Oy và đồ thị hàm số $y = f(x + m)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua trái hay qua phải $|m|$ đơn vị. Do đó, ta chỉ cần chọn giá trị tham số m để phương trình $f(x + m) = 0$ có số nghiệm $x > 0$ nhiều nhất.

Áp dụng: Phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt nên phương trình $f(x + m) = 0$ có tối đa ba nghiệm phân biệt lớn hơn 0. Do đó phương trình $f(|x| + m) = 0$ có nhiều nhất là 6 nghiệm phân biệt.

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3$. Ta chỉ cần chọn $m < x_1 < 0$. Khi đó hàm số $y = f(x + m)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$x_1 - m$	$-m$	$x_2 - m$	$1 - m$	$x_3 - m$	$+\infty$
$f(x + m)$	$-\infty$		$+\infty$		$-\infty$	3	$-\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x + m) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lớn hơn 0 và do đó phương trình $f(|x| + m) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **C**



❖ Câu 159. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt?

- A** 0. **B** 2. **C** 4. **D** 6.

💬 Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Bảng biến thiên của hàm số $f(|x|)$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	-	-
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$	

Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) = -m$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $d: y = -m$ cắt đồ thị hàm số $f(|x|)$ tại 4 điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $f(|x|)$ thì không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)**



❖ Câu 160. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số

$g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$?

(A) 0.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 6.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 1$

Bảng biến thiên của hàm số $f(|x|)$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	+	-	-	-
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$				$+\infty \searrow 1$	

Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) = -m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $d: y = -m$ cắt đồ thị hàm số $f(|x|)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $f(|x|)$. Điều kiện là $-5 \leq m < -1 \Leftrightarrow 1 < m \leq 5$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**



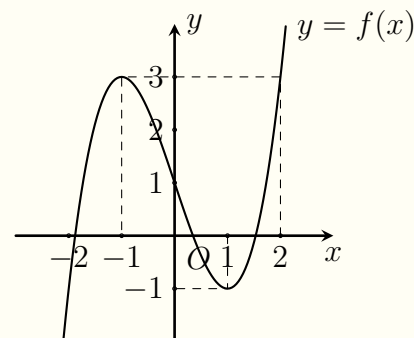
DẠNG 2.5

Đồ thị và tham số m

Câu 161.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt hàm số $y = g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

- A** $m = -13$. **B** $m = 3$. **C** $m = -12$. **D** $m = -1$.



Lời giải.

Cách 1: Hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ đồ thị ta có hai điểm $A(-1; 3)$, $B(1; -1)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có hệ

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1. \end{cases}$$

Do đó $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Mặt khác $g'(x) = (6x^2 + 1)f'(2x^3 + x - 1)$.

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x^3 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + x - 1 = 1 \\ 2x^3 + x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = x_0 \end{cases}$, với x_0 là nghiệm

của phương trình $2x^3 + x - 2 = 0$.

Ta có $g(0) = f(-1) + m = 3 + m$; $g(1) = f(2) + m = 3 + m$; $g(x_0) = f(1) + m = m - 1$.

Theo đề bài ta có $\max_{[0;1]} g(x) = -10 \Leftrightarrow 3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Cách 2: Đặt $t = 2x^3 + x - 1$, do $x \in [0; 1]$, $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0$, nên $t \in [-1; 2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max_{[-1;2]} f(t) = f(2) = 3 \Rightarrow \max_{[-1;2]} [f(t) + m] = 3 + m$.

Suy ra $\max_{[0;1]} g(x) = \max_{[-1;2]} [f(t) + m] = 3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Chọn đáp án **A**



Câu 162. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của

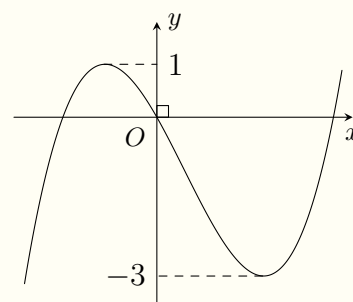
tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị là

A $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$

B $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases}$

C $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$

D $1 \leq m \leq 3$.



Lời giải.

Cách 1:

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng $A + B$ với

- ☑ A là số điểm cực trị của hàm số $f(x)$.
- ☑ B là số giao điểm của $f(x)$ với trục hoành (không tính các điểm trùng với A ở trên).

Áp dụng: Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x) + m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị. Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x) + m$ với trục hoành là 1.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x) + m$ với trục hoành là 1, ta cần.

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 1 đơn vị $\Rightarrow m \leq -1$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị $\Rightarrow m \geq 3$.

Cách 2:

- Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có được khi ta tịnh tiến (lên trên hoặc xuống dưới) đồ thị hàm số $y = f(x)$ theo phương trục tung $|m|$ đơn vị.
- Đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ gồm hai phần.

+) **Phần 1:** Là phần đồ thị nằm phía trên trục hoành của hàm số $y = f(x) + m$.

+) **Phần 2:** Lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành của hàm số $y = f(x) + m$ qua trục hoành.

Nhận xét:

- Ứng với mỗi điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ sẽ cho ta một điểm cực trị của đồ thị hàm số.
- Mỗi giao điểm của đồ thị của hàm số $y = f(x) + m = +$ với trục hoành sẽ tạo thành một điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) + m|$.

Do đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ đã có hai điểm cực trị nên để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị, xảy ra hai trường hợp sau:

- ☑ **Trường hợp 1:** Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có đúng một điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \Leftrightarrow (m + 1) \cdot (m - 3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

- ☑ **Trường hợp 1:** Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có một điểm cực trị thuộc trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} = 0 \Leftrightarrow (m + 1) \cdot (m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (A)

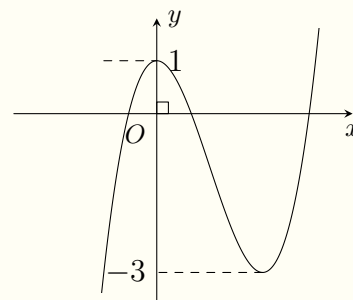
⇒ **Câu 163.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị là

(A) $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$

(B) $-1 < m < 3$.

(C) $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$

(D) $1 \leq m \leq 3$.



🗨️ **Lời giải.**

Vì hàm số $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x) + m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị. Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x) + m$ với trục hoành là 3 giao điểm. Để số giao điểm của đồ thị $f(x) + m$ với trục hoành là 3, ta cần đồng thời.

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 1 đơn vị $\Rightarrow m > -1$.
- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\Rightarrow m < 3$.

Vậy $-1 < m < 3$.

Chọn đáp án (B)

⇒ **Câu 164.** Tổng các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị bằng

(A) -2016.

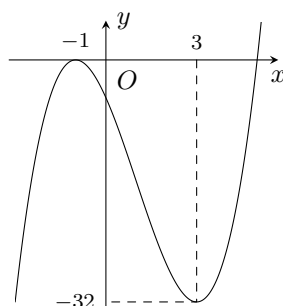
(B) -496.

(C) 1952.

(D) 2016.

🗨️ **Lời giải.**

Cách 1.



Ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị nên $f(x) + \frac{m}{2}$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x) + \frac{m}{2}$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x) + \frac{m}{2}$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhưng phải nhỏ hơn 32 đơn vị $\Rightarrow 0 < \frac{m}{2} < 32 \Leftrightarrow 0 < m < 64 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3; \dots; 63\}$

$\Rightarrow \sum m = 2016$

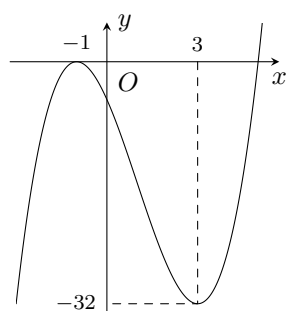
Cách 2.

Biện luận: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số

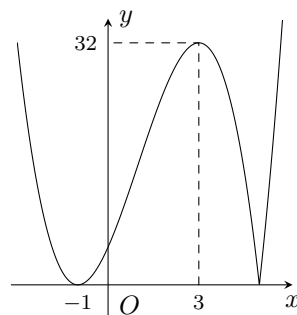
$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ lên trên $\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m > 0$ hoặc tịnh tiến xuống dưới $-\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m < 0$.

Có 3 trường hợp:

☑ **Trường hợp 1.** $m \leq 0$, ta có đồ thị sau:

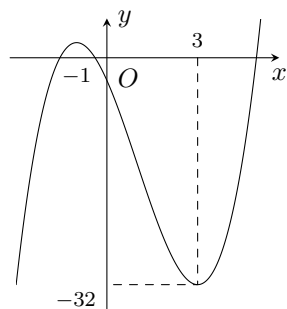


Đồ thị $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$

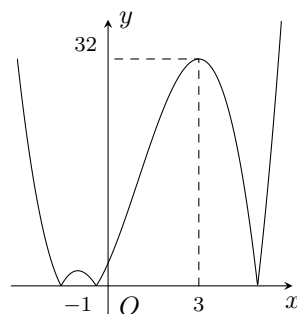


Đồ thị $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$

☑ **Trường hợp 2.** $0 < \frac{m}{2} < 32$, ta có đồ thị sau:

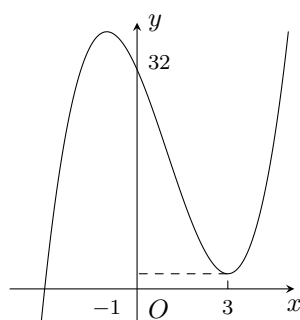


Đồ thị $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$

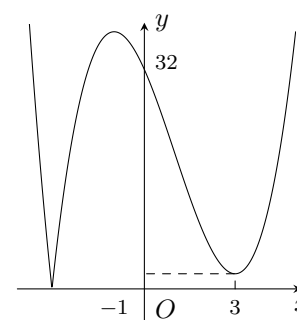


Đồ thị $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$

☑ **Trường hợp 3.** $\frac{m}{2}$, ta có đồ thị sau:



Đồ thị $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$



Đồ thị $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$

Chọn đáp án **(D)**

□

❖ **Câu 165.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 3 + m|$ có 3 điểm cực trị.

(A) $\begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases}$

(C) $1 \leq m \leq 3$.

(D) $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -1 \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

☑ **Nhận xét:** Dùng phép biến đổi đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối và nhận xét hình dạng đồ thị thông qua bảng biến thiên để kết luận về cực trị hàm số.

☑ **Phân tích:** Xét hàm số $y = g(x) = x^3 + 3x^2 - 3 + m$ trên $\mathbb{R}$. Hệ số $a = 1 > 0$.

Hàm số $y' = g'(x) = 3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$. Hàm số $y = g(x)$ luôn có hai cực trị.

Nếu $g(x) = 0$ có 3 nghiệm hay trục hoành giao với đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt thì hàm số $y = |g(x)|$ có 5 cực trị.

Nếu $g(x) = 0$ có 1 hoặc 2 nghiệm thì hàm số $y = |g(x)|$ sẽ có 3 cực trị.

Điều kiện: $g(x_{\text{CD}}) \cdot g(x_{\text{CT}}) \geq 0 \Leftrightarrow g(0) \cdot g(-2) \geq 0$ hay $(-3 + m)(1 + m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(D)**

🔗 **Câu 166.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9$. Tìm m để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có 3 cực tiểu.

(A) $m < 5$.

(B) $5 < m < 9$.

(C) $5 \leq m < 9$.

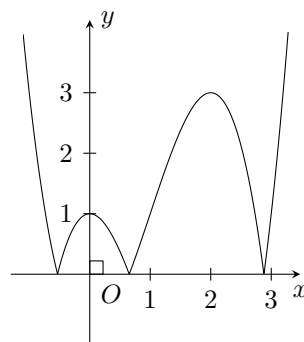
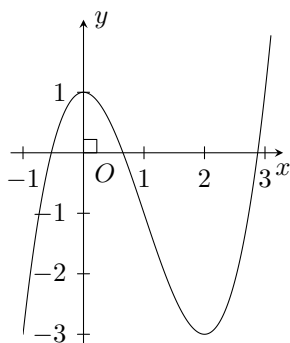
(D) $5 < m \leq 9$.

💬 **Lời giải.**

Đặt $F(x) = f(x) + m$, ta có: $\begin{cases} y_{\text{CT}} = -5 + m \\ y_{\text{CD}} = -9 + m \end{cases}$. Xét hàm số $y = |F(x)| = \begin{cases} F(x) & \text{khi } F(x) \geq 0 \\ -F(x) & \text{khi } F(x) < 0 \end{cases}$

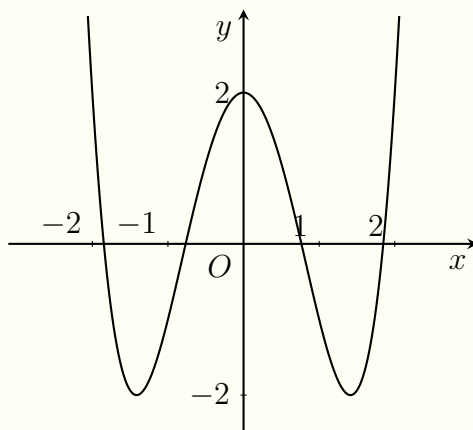
Để hàm số có 3 điểm cực tiểu $\begin{cases} y_{\text{CD}} > 0 \\ y_{\text{CT}} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 + m > 0 \\ -9 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 9$

(Minh họa đồ thị bên dưới)



Chọn đáp án **(B)**

🔗 **Câu 167.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - m|$ có 5 điểm cực trị khi

- ☐ A $-2 < m < 2$.
 ☐ B $m > 2$.
 ☒ C $m \geq 2$.
 ☐ D $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x) - m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương số giao điểm của đồ thị $f(x) - m$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x) - m$ với trục hoành là 2 ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới ít nhất 2 đơn vị (bằng 2 đơn vị vẫn được vì khi đó điểm cực trị trùng với điểm chung của đồ thị với trục hoành nên ta chỉ tính một lần), suy ra $-m \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Chọn đáp án ☒ C

❖ Câu 168. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	11	4	$+\infty$	

Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi

- ☒ A $m \in (4; 11)$.
 ☐ B $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$.
 ☐ C $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$.
 ☐ D $m = 3$.

Lời giải.

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x) - 2m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương số giao điểm của đồ thị $f(x) - 2m$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x) - 2m$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới lớn

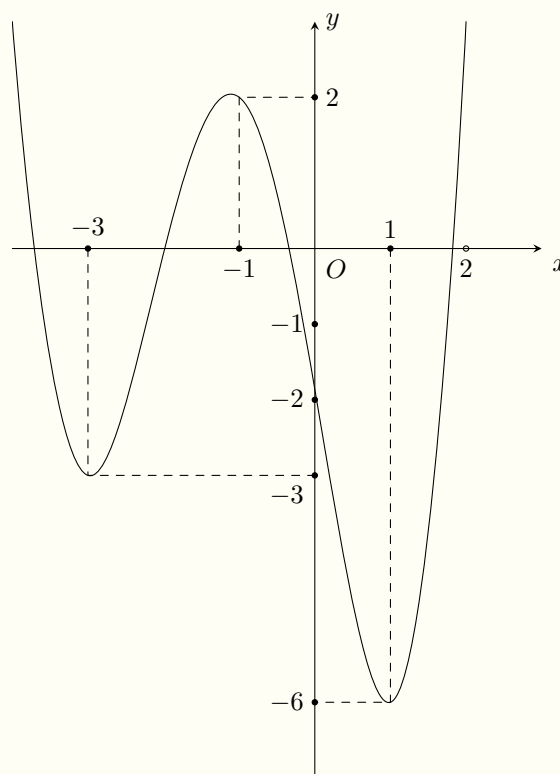
hơn 4 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 11 đơn vị, suy ra $\begin{cases} -2m < -4 \\ -2m > -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < \frac{11}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án ☒ C

Câu 169.

Hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x - 1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- (A) 9. (B) 12. (C) 18. (D) 15.



Lời giải.

Số cực trị của hàm số $y = |f(x - 1) + m|$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x - 1)$ hay $y = f(x)$ cộng với số nghiệm đơn của phương trình $f(x - 1) + m = 0$ (*).

Phương trình (*) $\Leftrightarrow f(x - 1) = -m \Leftrightarrow f(t) = -m$ với $t = x - 1$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm đơn phân biệt.

Do đó $\begin{cases} -6 < -m \leq -3 \\ 2 \leq -m \end{cases}$. Vì m nguyên dương nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

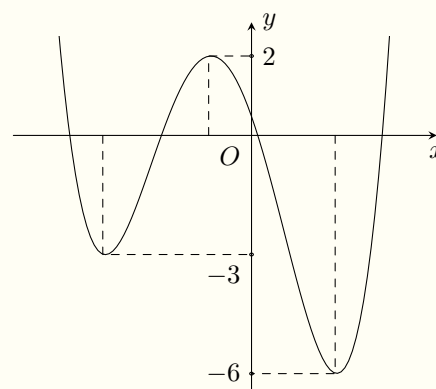
Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 12.

Chọn đáp án (B)

Câu 170.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-4; 4]$ để hàm số $g(x) = |f(x - 1) + m|$ có 5 điểm cực trị.

- (A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 7.



Lời giải.

Vì hàm $f(x)$ đã cho có ba điểm cực trị nên $f(x - 1) + m$ cũng có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x - 1) + m$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x-1) + m$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\Rightarrow m \leq -2$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị $\Leftrightarrow 3 \leq m < 6$.

Vậy $\begin{cases} m \leq -2 \\ 3 \leq m < 6 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; 3; 4\}$.

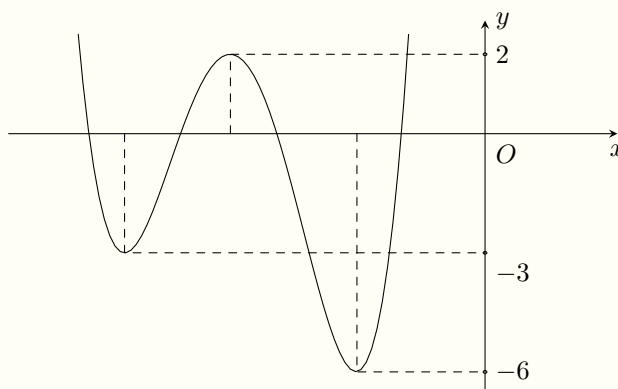
Chọn đáp án (B)

□

❖ Câu 171.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $g(x) = |f(x+2018) + m|$ có 7 điểm cực trị.

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 6.



💬 Lời giải.

Vì hàm số $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018) + m$ cũng có ba điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm thay đổi số điểm cực trị).

Do đó yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x+2018) + m$ với trục hoành là 4.

Để số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x+2018) + m$ với trục hoành là 4, ta cần

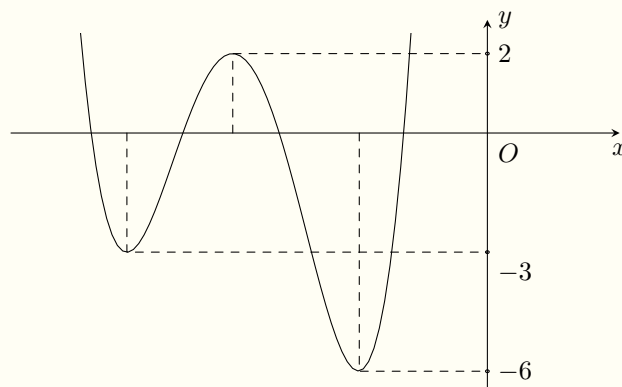
- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 2 đơn vị $\Rightarrow m > -2$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\Rightarrow m < 3$.

Vậy $-2 < m < 3$, vì $m \in \mathbf{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Chọn đáp án (A)

□

❖ Câu 172. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $g(x) = |f(x + 2018) + m|$ có 7 điểm cực trị.

A 2.

B 3.

C 4.

D 6.

Lời giải.

Vì hàm số $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x + 2018) + m$ cũng có ba điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm thay đổi số điểm cực trị).

Do đó yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x + 2018) + m$ với trục hoành là 4.

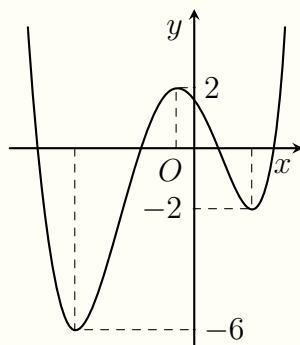
Để số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x + 2018) + m$ với trục hoành là 4, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 2 đơn vị $\Rightarrow m > -2$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\Rightarrow m < 3$.

Vậy $-2 < m < 3$, vì $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Chọn đáp án **A**

Câu 173. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = |f(x + 2018) + m^2|$ có 5 điểm cực trị?

A 2.

B 3.

C 4.

D 6.

Lời giải.

Vì hàm số $y = f(x)$ đã có 3 điểm cực trị nên hàm số $h(x) = f(x + 2018) + m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

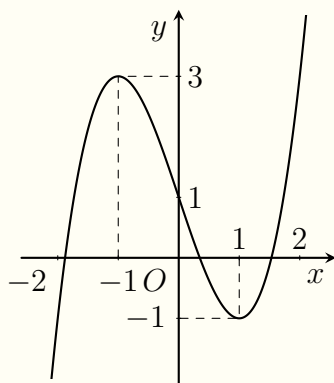
Do đó yêu cầu bài toán trở thành tìm số giá trị nguyên của tham số m để số giao điểm của đồ thị $h(x) = f(x + 2018) + m^2$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x) = f(x + 2018) + m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

- ☑ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\Rightarrow m^2 \leq -2$ (vô lý).
- ☑ Hoặc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị
 $\Rightarrow 2 \leq m^2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \leq m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \leq -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2; 2\}$ (do $m \in \mathbb{Z}$).

Chọn đáp án **A**

↔ **Câu 174.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1.

(B) 2.

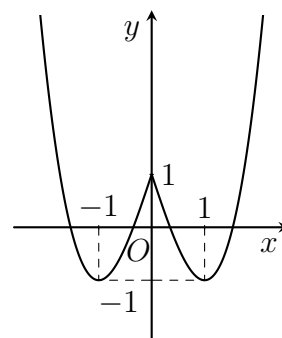
(C) 3.

(D) 5.

💬 **Lời giải.**

Đồ thị hàm số $y = f(|x + m|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình bên.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $y = f(|x + m|)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị.



Chọn đáp án (C)



↔ **Câu 175.**

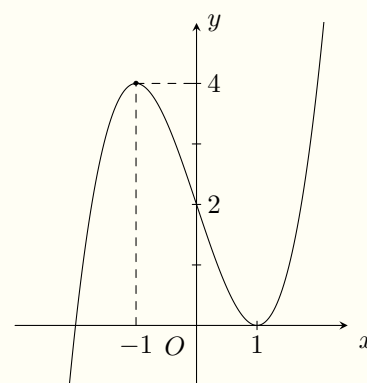
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.

(A) $m < -1$.

(B) $m > -1$.

(C) $m > 1$.

(D) $m < 1$.



💬 **Lời giải.**

Cách 1. Dễ thấy hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó đối xứng qua trục Oy , suy ra $x = 0$ một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'(x) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x| + m)$ với $x \neq 0$.

Khi đó

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + m = 1 \\ |x| + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 - m \\ |x| = -1 - m. \end{cases} \quad (*)$$

Hàm số g có năm điểm cực trị khi và chỉ khi (*) có bốn nghiệm phân biệt khác 0, tức là

$$\begin{cases} 1 - m > 0 \\ -1 - m > 0 \\ 1 - m \neq -1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Vậy $m < -1$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

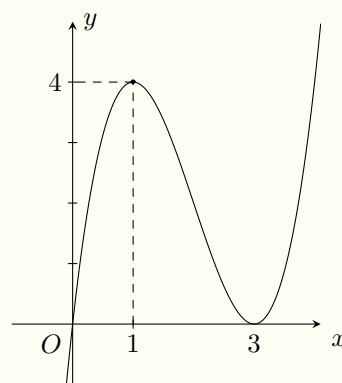
Hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ có năm điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $f(x + m)$ có hai điểm cực trị dương. Do đó ta phải tịnh tiến điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua phía bên phải trục tung nghĩa là tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang phải lớn hơn 1 đơn vị. Suy ra $m < -1$.

Chọn đáp án **(A)** □

⇨ Câu 176.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

- (A)** $m > \frac{1}{4}$. **(B)** $m \geq \frac{1}{4}$. **(C)** $m < 1$. **(D)** $m \leq 1$.



💬 Lời giải.

Xét $g(x) = f^2(x) + f(x) + m$. Ta có $g'(x) = f'(x)[2f(x) + 1]$.
Khi đó

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = a \ (a < 0). \end{cases}$$

Ta tính được $g(1) = f^2(1) + f(1) + m > m$, $g(3) = m$, $g(a) = m - \frac{1}{4}$.

Bảng biến thiên của hàm số g

x	$-\infty$	a	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	+	$\vdots$	+	0	-	0	+
$2f(x)+1$	-	0	+	$\vdots$	+	$\vdots$	+
g'	-	0	+	0	-	0	+
g	$\swarrow$ $g(a)$ $\nearrow$ $g(1)$ $\searrow$ m $\nearrow$						

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số g có ba điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m| = \left| \left(f(x) + \frac{1}{2} \right)^2 + m - \frac{1}{4} \right|$ có đúng ba điểm cực trị

khi và chỉ khi đồ thị hàm số g nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc).

Do đó $m \geq \frac{1}{4}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

DẠNG 2.6

Tìm m để đồ thị n cực trị

❖ **Câu 176.** Cho hàm số $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị?

(A) 7.

(B) 9.

(C) 10.

(D) 11.

Lời giải.

Cách 1: Để $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. (*)

$$\text{Xét } f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx^2 - 2mx + m - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m - 2) > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m > 0 \xrightarrow[m \in [-10; 10]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3; \dots; 10\}.$$

Cách 2: Hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (x - 1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = mx^2 - 2mx + m - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases}$$

Vì m nguyên và $m \in [-10; 10]$, nên $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

❖ **Câu 177.** Cho hàm số bậc ba $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$, biết $-8 + 4a - 2b + c > 0$ và $8 + 4a + 2b + c < 0$. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |f(x)|$ là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Cách 1: Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ f(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ f(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên } \mathbb{R}.$$

Khi đó đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Cách 2: Hàm số $y = f(x)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0$, $f(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0$.

Và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Do đó, đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Vậy hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(D)**

⇒ **Câu 178.** Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) biết $a > 0$, $d > 2018$ và $a + b + c + d - 2018 < 0$. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 5.

💬 **Lời giải.**

Cách 1: Hàm số $g(x) = f(x) - 2018$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \\ g(0) = d - 2018 \\ g(1) = a + b + c + d - 2018 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow g(x) = 0 \text{ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên } \mathbb{R}.$$

Khi đó đồ thị hàm số $f(x) - 2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Cách 2: Hàm số $g(x) = f(x) - 2018$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g(0) = d - 2018 > 0$; $g(1) = a + b + c + d - 2018 < 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ nên $\forall x_1 < 0$: $f(x_1) < 0$ và $\forall x_2 < 0$: $f(x_2) > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Khi đó đồ thị hàm số $g(x) = f(x) - 2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(D)**

⇒ **Câu 179.** Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ biết $a > 0$, $c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ là

(A) 1.

(B) 3.

(C) 5.

(D) 7.

💬 **Lời giải.**

Cách 1: Đặt $h(x) = f(x) - 2018 = ax^4 + bx^2 + c - 2018$.

Từ giả thiết
$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ a + b + c < 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{đồ thị hàm số } h(x) \text{ có 3 điểm cực trị} \quad (1).$$

Ta có
$$\begin{cases} h(1) = a + b + c - 2018 < 0 \\ h(0) = c - 2018 \end{cases} \Rightarrow h(1) \cdot h(0) < 0 \text{ có nghiệm thuộc } (0; 1).$$

$\Rightarrow h(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt (dạng điệu của hàm trùng phương) (2).

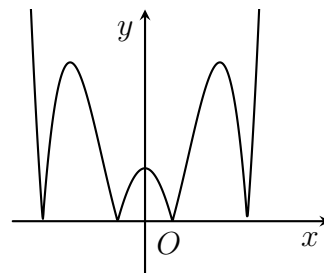
Từ (1) và (2) suy ra hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ có 7 điểm cực trị.

Cách 2. Trắc nghiệm.

Chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 2019. \end{cases}$

$\Rightarrow g(x) = |f(x) - 2018| = |x^4 - 4x^2 + 1|$.

Vẽ phát họa đồ thị ta thấy có 7 điểm cực trị.



Cách 3: Ta có $a > 0$, $c > 2018$ nên $a + c > 2018 \Rightarrow b < 2018 - a - c < 0$.

Do đó hàm số $f(x) - 2018$ có 3 cực trị.

Vì $f(0) - 2018 = c - 2018 > 0$, $f(\pm 1) - 2018 = a + b + c - 2018 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2018] = +\infty$

nên phương trình $f(x) - 2018 = 0$ có đúng 4 nghiệm.

Do đó, đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2018|$ có 7 cực trị.

Chọn đáp án **(D)**

□

❖ **Câu 180.** Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ thỏa điều kiện $\begin{cases} ab < 0 \\ ac(b^2 - 4ac) > 0 \end{cases}$. Số nghiệm lớn nhất có thể có của phương trình $|f(x)| = m$, $m \in \mathbb{R}$ là

(A) 4. **(B)** 6. **(C)** 8. **(D)** 12.

💬 **Lời giải.**

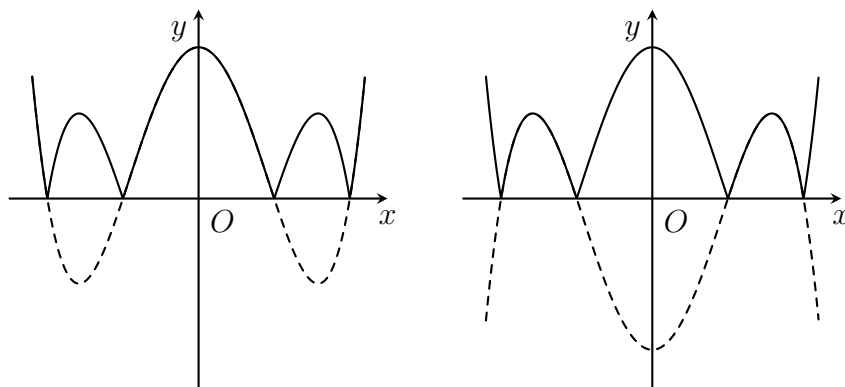
Do $ab < 0$ nên hàm số đã cho có ba điểm cực trị và tính toán được ba điểm cực trị đó lần lượt là

$$A(0; c), B\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Lại có

$$ac(b^2 - 4ac) > 0 \Leftrightarrow c \cdot \frac{b^2 - 4ac}{a} \cdot a^2 > 0 \Leftrightarrow -c \cdot \frac{\Delta}{4a} < 0.$$

Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị B, C nằm khác phía với A so với trục hoành. Suy ra dạng đồ thị của hàm số $|f(x)|$ lúc này là



Dựa vào các đồ thị trên ta thấy số nghiệm lớn nhất của phương trình $|f(x)| = m$ có thể có là 8.

Chọn đáp án **(C)**

□

⇒ **Câu 181.** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 210.

(B) -195.

(C) 105.

(D) 300.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x$, ta xét hàm $g(x) = \frac{1}{4} - \frac{19}{2}x^2 + 30x$ với $x \in [0; 2]$.

$g'(x) = x^3 - 19x + 30 = (x - 2)(x + 5)(x - 3) \geq 0; \forall x \in [0; 2]$.

Do đó $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $[0; 2]$ suy ra $t \in [0; 26]$.

Đặt $f(t) = |t + m - 20|$, khi $t \in [0; 26]$ thì $f(t)$ liên tục trên $[0; 26]$ nên

$$\max_{t \in [0; 26]} f(t) = \max \{|m - 20|; |m + 6|\}.$$

Nếu $m \geq 7$ thì $\max_{t \in [0; 26]} f(t) = \max \{|m - 20|; |m + 6|\} = |m + 6|$, do đó ta có

$$|m + 6| \leq 20 \Leftrightarrow -26 \leq m \leq 14 \text{ nên } m \in \{7; 8; \dots; 14\}.$$

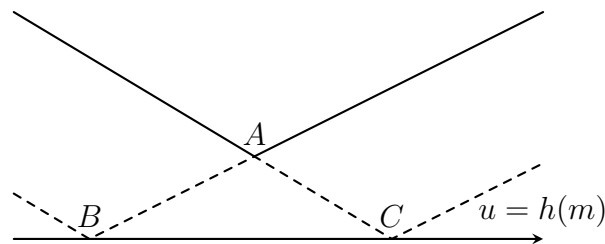
Nếu $m < 7$ thì $\max_{t \in [0; 26]} f(t) = \max \{|m - 20|; |m + 6|\} = |m - 20|$, do đó ta có

$$|m - 20| \leq 20 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 40 \text{ nên } m \in \{0; 1; \dots; 6\}.$$

Vậy tổng các giá trị nguyên thỏa mãn là

$$1 + 2 + \dots + 14 = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105.$$

Tìm công thức cho bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = |f(x) + h(m)|$ với $x \in [a; b]$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số theo m . Giả sử khi $x \in [a; b]$ thì $f(x) \in [\alpha; \beta]$ và $y = |f(x) + h(m)|$ liên tục trên $[\alpha; \beta]$ nên ta có $\max_{x \in [a; b]} y = \max \{|\alpha + h(m)|; |\beta + h(m)|\}$. Đặt $u = h(m)$, đồ thị của hàm $g(u) = \max \{|\alpha + u|; |\beta + u|\}$ được mô phỏng như hình vẽ:



Trong đó đồ thị của $g(u)$ được mô phỏng là đường liền nét; $B(-\beta; 0)$, $C(-\alpha; 0)$, $A\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}; \frac{\beta - \alpha}{2}\right)$, dễ thấy hàm số $g(u)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{\beta - \alpha}{2}$ tại $u = -\frac{\alpha + \beta}{2}$.

Cũng từ mô phỏng trên ta suy ra $g(u) = \begin{cases} |u + \alpha|; & u \leq -\frac{\alpha + \beta}{2} \\ |u + \beta|; & u \geq -\frac{\alpha + \beta}{2} \end{cases}$.

Vận dụng vào bài toán trên: $\alpha = 0$; $\beta = 26$; $u = m - 20$ ta có kết quả.

Chọn đáp án (C)



⇒ **Câu 182.** Cho hàm số $f(x) = (m^4 + 1)x^4 + (-2^{m+1} \cdot m^2 - 4)x^2 + 4^m + 16$ với m là tham số thực. Số cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ là

(A) 3.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 7.

💬 **Lời giải.**

Cách 1: Ta có: $y = |f(x) - 1| = \sqrt{(f(x) - 1)^2}$.

$$\text{Suy ra } y' = \frac{f'(x)[f(x) - 1]}{\sqrt{(f(x) - 1)^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) - 1 = 0. \end{cases}$$

Vì $-(m^4 + 1)(2^{m+1} \cdot m^2 + 4) < 0$ với mọi m .

nên $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

$$\text{Do } \Delta' = (2^m \cdot m^2 + 2)^2 - (m^4 + 1)(4^m + 15)$$

$$= 4 \cdot 2^m \cdot m^2 + 4 - 15m^4 - 4^m - 15$$

$$= -(2^m - m^2)^2 - 11m^4 - 11 < 0.$$

nên $f(x) - 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy hàm số đã cho có 3 cực trị.

Cách 2. Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị (do hệ số a và b trái dấu) $\Rightarrow f(x) - 1$ cũng có 3 điểm cực trị.

Phương trình $f(x) - 1 = 0$ vô nghiệm (đã giải thích ở trên).

Vậy hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ có 3 cực trị.

Cách 3: Đặc biệt hóa ta cho $m = 0$, khi đó ta được hàm $f(x) - 1 = x^4 - 4x^2 + 16$.

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) - 1 = x^4 - 4x^2 = 16$$

$$\Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 8x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			16			12		$+\infty$
			12					12	

Do đồ thị hàm số $y = g(x)$ nằm hoàn toàn bên trên trục hoành nên đồ thị hàm số $y = |g(x)|$ cũng chính là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = |f(x) - 1|$ là 3.

Chọn đáp án (A) □

⇒ **Câu 183.** Cho hàm số $f(x) = (m^{218} + 1)x^4 + (-2m^{2018} - 2^{2018}m^2 - 3)x^2 + (m^{2018} + 2018)$, với m là tham số. Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2017|$ là

(A) 3.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 7.

💬 **Lời giải.**

☑ **Cách 1:** Xét hàm số

$$g(x) = f(x) - 2017 = (m^{2018} + 1)x^4 + (-2m^{2018} - 2^{2018}m^2 - 3)x^2 + (m^{2018} + 1).$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) ta có $h(t) = (m^{2018} + 1)t^2 + (-2m^{2018} - 2^{2018}m^2 - 3)t + (m^{2018} + 1)$.

Nhận thấy phương trình $h(t) = 0$ có

$$\begin{cases} \Delta = (2^{2018}m^2 + 1)(4m^{2018} + 2^{2018}m^2 + 5) > 0 \\ S > 0; P > 0. \end{cases}$$

nên luôn có hai nghiệm dương phân biệt. Do đó, phương trình $g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Từ đó suy ra hàm số $y = |g(x)| = |f(x) - 2017|$ có 7 điểm cực trị.

☑ **Cách 2:** Xét hàm số

$$g(x) = f(x) - 2017 = (m^{2018} + 1)x^4 + (-2m^{2018} - 2^{2018}m^2 - 3)x^2 + (m^{2018} + 1).$$

Nhận xét rằng, vì $\begin{cases} a = m^{2018} + 1 > 0 \\ b = -2m^{2018} - 2^{2018}m^2 - 3 < 0 \end{cases}$, với mọi m nên hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $g'(x) = 4ax^3 + 2bx$. Suy ra

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow g(0) = a > 0, \forall m \\ x^2 = \frac{2m^{2018} + 2^{2018}m^2 + 3}{2(m^{2018} + 1)} = -\frac{b}{2a}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x^2) = -\frac{b^2}{4a} + a = \frac{(2a - b)(2a + b)}{4a} < 0, \forall m.$$

(Vì $2a - b = 4m^{2018} + 2^{2018}m^2 + 5 > 0$ và $2a + b = -2^{2018}m^2 - 1 < 0$).

Từ đó suy ra hàm số $y = |f(x) - 2017|$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án **D** □

🔗 **Câu 184.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A $-2 < m < \frac{5}{4}$.

B $-\frac{5}{4} < m < 2$.

C $\frac{5}{4} < m < 2$.

D $\frac{5}{4} < m \leq 2$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m - 1)x + 2 - m$.

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ có hai cực trị dương khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m - 1)^2 - 3(2 - m) > 0 \\ \frac{2(2m - 1)}{3} > 0 \\ \frac{2 - m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Chọn đáp án **C** □

🔗 **Câu 185.** Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị nhận hai điểm $A(0; 3)$ và $B(2; -1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |ax^2||x| + bx^2 + c|x| + d$ là

A 5.

B 7.

C 9.

D 11.

Lời giải.

☑ **Cách 1:** Ta có $g(x) = |ax^2|x| + bx^2 + c|x| + d| = |f(|x|)|$. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị trong đó có một điểm cực trị bằng 0 và một điểm cực trị dương $\Rightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị. (1)

Đồ thị hàm số $f(x)$ có điểm cực trị $A(0; 3) \in Oy$ và điểm cực trị $B(2; -1)$ thuộc góc phần tư thứ IV nên đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm (1 điểm có hoành độ âm, 2 điểm có hoành độ dương) $\Rightarrow$ đồ thị hàm số $f(|x|)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

☑ **Cách 2:** Vẽ phác họa đồ thị $f(x)$ rồi suy ra đồ thị $f(|x|)$, tiếp tục suy ra đồ thị $|f(|x|)|$.

Chọn đáp án **B**



🔗 **Câu 186.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m + 1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị?

A $(-\infty; \frac{1}{4})$.B $[0; \frac{1}{4}) \cup (1 + \infty)$.C $(-\infty; 0]$.D $(1; +\infty)$.

Lời giải.

(Học sinh tự vẽ hình tưởng tượng) Hàm số $y = |x|^3 - (2m + 1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + 3mx - 5$ có hai điểm cực trị **không âm**.

Vậy phương trình $3x^2 - 2(2m + 1)x + 3m = 0$ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 4m^2 - 5m + 1 > 0 \\ S = \frac{2(2m+1)}{3} > 0; P = m \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq m < \frac{1}{4} \\ m > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq m < \frac{1}{4} \\ m > 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**



🔗 **Câu 187.** Cho hàm số bậc ba $f(x) = x^3 + mx^2 + mx - 1$ với $m, n \in \mathbb{R}$, biết $m + n > 0$ và $7 + 2(2m + n) < 0$. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ là

A 2.

B 5.

C 9.

D 11.

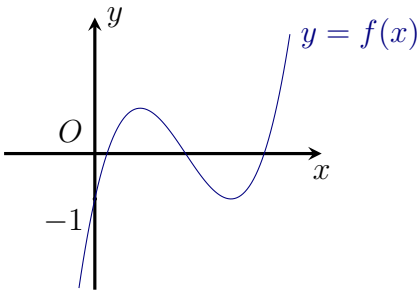
Lời giải.

☑ **Cách 1:** Ta có $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = m + n > 0 \\ f(2) = 7 + 4m + 2n < 0 \end{cases}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists p > 2$ sao cho $f(p) > 0$.

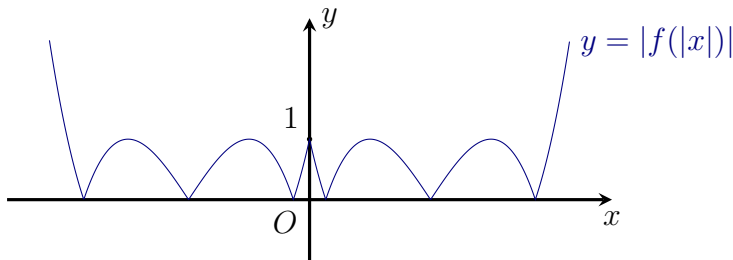
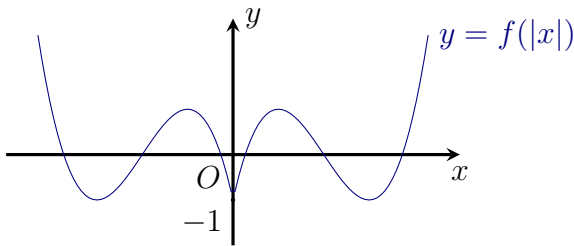
Suy ra $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1 \in (0; 1)$, $c_2 \in (1; 2)$ và $c_3 \in (2; p)$ (1)

Suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1 \in (c_1; c_2)$ và $x_2 \in (c_2; c_3)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng như hình bên dưới



Từ đó suy ra hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Rightarrow$ hàm số $|f(|x|)|$ có 11 điểm cực trị.

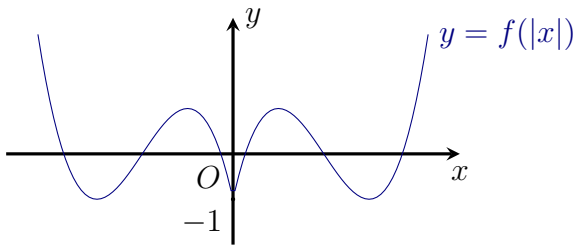
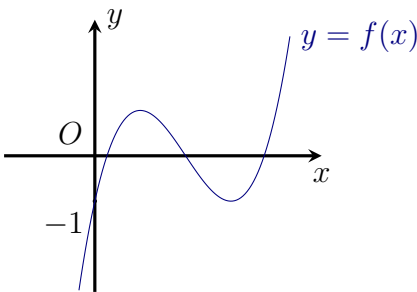


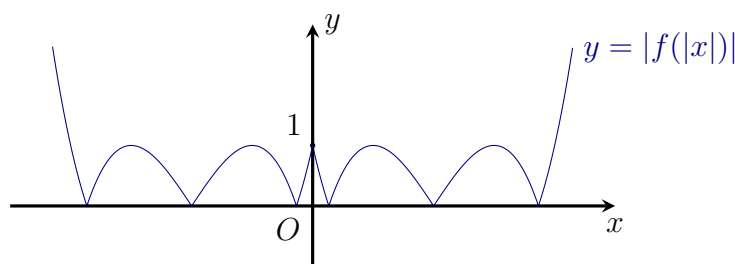
☑ **Cách 2:** Ta có $\begin{cases} m+n > 0 \\ 7+2(2m+n) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) > 0 \\ f(2) < 0. \end{cases}$

Vì $f(1) > 0 > f(2)$ nên hàm số $f(x)$ không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Ta có $f(0) = -1$, $f(1) = m+n > 0$, $f(2) = 7+4m+2n < 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists p > 2$ sao cho $f(p) > 0$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1 \in (0; 1)$, $c_2 \in (1; 2)$ và $c_3 \in (2; p)$. Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $x_1 \in (c_1; c_2)$ và $x_2 \in (c_2; c_3)$, dễ thấy x_1, x_2 là các số dương, hơn nữa hai giá trị cực trị này trái dấu $f(x_1) > 0 > f(x_2)$ (vì hệ số cao nhất là 1). Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 là các số dương nên đồ thị hàm số $f(|x|)$ sẽ có 5 điểm cực trị.





Do $f(x)$ có hai giá trị cực trị trái dấu và $f(0) = -1$ nên phương trình $f(|x|) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $|f(|x|)|$ có $5 + 6 = 11$ điểm cực trị.

Bình luận: Đây là dạng bài tập về đếm số điểm cực trị của hàm số dạng $|f(|x|)|$ trong đó số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và những điều kiện liên quan bị ẩn đi.

Để giải quyết bài toán này bạn đọc cần dựa vào giả thiết bài toán để tìm

- ✔ Số điểm cực trị n của hàm số $f(x)$;
- ✔ Số điểm cực trị dương m (với $m < n$) của hàm số;
- ✔ Số giao điểm p của đồ thị hàm số với trục hoành trong đó có q điểm có hoành độ dương.

Bây giờ giả sử ta tìm được các dữ kiện trên khi đó ta suy ra

- ✔ Đồ thị hàm số $f(|x|)$ có $2m + 1$ điểm cực trị;
- ✔ Đồ thị hàm số $|f(x)|$ có $n + p$ điểm cực trị;
- ✔ Đồ thị hàm số $|f(|x|)|$ có $2m + 2q + 1$ điểm cực trị.

Ngoài vấn đề tìm số điểm cực trị, bài toán còn có nhiều hướng để ra đề khác ví dụ như hỏi số giao điểm với trục hoành, tính đồng biến nghịch biến của hàm số.

Chọn đáp án **(D)**

□

🔗 **Câu 188.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn
$$\begin{cases} a + b + c < -1 \\ 4a - 2b + c > 8 \\ bc < 0. \end{cases}$$

Đặt $f(x) = x^3 + a^2 + bx + c$. Số điểm cực trị của hàm số $|f(|x|)|$ lớn nhất có thể có là

(A) 2.

(B) 9.

(C) 11.

(D) 5.

💬 **Lời giải.**

Từ giả thiết bài toán ta có $f(1) < 0$, $f(-2) > 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt, suy ra hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và hai giá trị cực trị trái dấu nhau.

Khi $\begin{cases} b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$ thì ta có $x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{3} < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$ và $f(0) = c > 0$ nên $f(x) = 0$ có hai nghiệm dương. Do đó đồ thị hàm số $|f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Khi $\begin{cases} b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$ thì ta có $x_1 \cdot x_2 > 0$ và $f(0) = c < 0$ nên hàm số có hai điểm cực trị dương và ba giao điểm với trục hoành có hoành độ dương. Khi đó đồ thị hàm số $|f(|x|)|$ có 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(C)**

□

- ❖ **Câu 189.** Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ thỏa mãn $\begin{cases} a + b > 1 \\ 3 + 2a + b < 0 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ bằng
- (A) 11. (B) 9. (C) 2. (D) 5.

💬 **Lời giải.**

Hàm số $y = f(x)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = -a + b - 1 > 0$, $f(2) = 2a + b + 3 < 0$.

và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên $\exists x_0 > 2$, $f(x_0) > 0$.

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn. Do đó, hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = |f(|x|)|$ có 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

- ❖ **Câu 190.** Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Khẳng định nào sau đây đúng?
- (A) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. (B) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
(C) $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$. (D) $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

💬 **Lời giải.**

Vì hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 và hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ nên suy ra $a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 \in (1; 2)$ nên suy ra $y' = 0$ có hai nghiệm cùng dấu $\Rightarrow 3ac < 0 \Rightarrow c > 0$.

Mặt khác $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 \in (1; 2)$ nên $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Chọn đáp án (A) □

📖 CHỦ ĐỀ 3

Biết hàm số của đạo hàm

📝 DẠNG 3.1

Đơn điệu

- ❖ **Câu 191.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x + 1)(5 - x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- (A) $f(1) < f(4) < f(2)$. (B) $f(1) < f(2) < f(4)$.
(C) $f(2) < f(1) < f(4)$. (D) $f(4) < f(2) < f(1)$.

💬 **Lời giải.**

Dựa vào sự so sánh ở các phương án, ta thấy chỉ cần xét sự biến thiên của hàm số trên khoảng $(1; 4)$.

Ta có $f'(x) = (x+1)^2(x-1)(5-x) > 0, \forall x \in (1; 4)$.

Nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1; 4)$ mà $1 < 2 < 4 \Rightarrow f(1) < f(2) < f(4)$.

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 192.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(x+2) \cdot t(x) + 2018$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, và $t(x) < 0$ với mọi $\mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

(A) $(-\infty; 3)$.

(B) $(0; 3)$.

(C) $(1; +\infty)$.

(D) $(3; +\infty)$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = -f'(1-x) + 2018$.

Theo giả thiết $f'(x) = (1-x)(x+2) \cdot t(x) + 2018 \Rightarrow f'(1-x) = x(3-x) \cdot t(1-x) + 2018$.

Từ đó suy ra $g'(x) = -x(3-x) \cdot t(1-x)$.

Mà $t(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -t(1-x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ cùng dấu với $x(3-x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0), (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

❖ **Câu 193.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

(A) $(-\infty; -6)$.

(B) $(-6; 6)$.

(C) $(-6\sqrt{2}; 6\sqrt{2})$.

(D) $(-6\sqrt{2}; +\infty)$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4 = -\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] + 4 = \frac{9}{2} - \frac{x^2}{8}$.

Xét $\frac{9}{2} - \frac{x^2}{8} > 0 \Leftrightarrow x^2 < 36 \Leftrightarrow -6 < x < 6$.

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 194.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(-2; 2)$.

(B) $(3; +\infty)$.

(C) $(-\infty; -3)$.

(D) $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \cdot x^4(x^2-9)(x^2-4)^2$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^5(x^2-9)(x^2-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	0	2	3	$+\infty$			
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g										

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (B)



❖ **Câu 195.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4) \cdot t(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $t(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- (A) $(-\infty; -2)$. (B) $(-2; -1)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $(1; 2)$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$.

Theo giả thiết $f'(x) = x^2(x-1)(x-4)t(x) \Rightarrow f'(x^2) = x^4(x^2-1)(x^2-4) \cdot t(x^2)$.

Từ đó suy ra $g'(x) = 2x^5(x^2-1)(x^2-4) \cdot (x^2)$.

Mà $t(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ cùng dấu $2x^5(x^2-1)(x^2-4)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$.

Chọn đáp án (B)



❖ **Câu 196.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi số thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x^2-2x+2)$?

- (A) -2 . (B) -1 . (C) $\frac{3}{2}$. (D) 3 .

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2(x-1) \cdot f'(x^2-2x+2) \\
 &= 2(x-1) \left[(x^2-2x+2-1)^2 \left((x^2-2x+2)^2 - 2(x^2-2x+2) \right) \right] \\
 &= 2(x-1)^5 [(x-1)^4 - 1].
 \end{aligned}$$

$$\text{Xét } 2(x-1)^5 [(x-1)^4 - 1] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$.

Vậy số 3 thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)$.

Chọn đáp án (B)



❖ **Câu 197.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- (A) $(-\infty; -2)$. (B) $(-2; 1)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(2; 4)$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Xét $g'(x) = \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} \cdot f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 20-5x^2 = 0 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 0 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 1 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 2 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = 1 \text{ (nghiem bội chẵn)} \\ x = 4 \text{ (nghiem bội chẵn)}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$													

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(4; +\infty)$ ta chọn $x = 5$

$$x = 5 \rightarrow \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} < 0 \quad (1)$$

$$x = 5 \rightarrow \frac{5x}{x^2+4} = \frac{25}{29} \Rightarrow f'\left(\frac{25}{29}\right) = \frac{25}{29} \left(\frac{25}{29} - 1\right)^2 \left(\frac{25}{29} - 2\right) < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $g'(x) > 0$ trên khoảng $(4; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

🔗 DẠNG 3.2

Cực trị

🔗 **Câu 198.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(3-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại

(A) $x = 0$.

(B) $x = 1$.

(C) $x = 2$.

(D) $x = 3$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$.

Chọn đáp án (D) □

❖ **Câu 199.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu cực đại?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

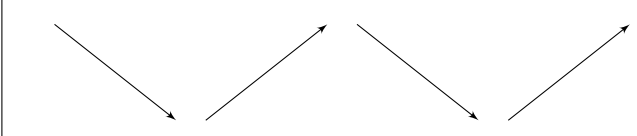
(D) 3.

💬 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = -f'(3 - x) = [(3 - x)^2 - 1] \cdot [4 - (3 - x)] = (2 - x)(4 - x)(x + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 - x)(4 - x)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$									

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 200.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 1)(x - 4)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.

💬 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = 2x \cdot y'(x^2) = 2x^5(x^2 - 1)(x^2 - 4)^2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^5(x^2 - 1)(x^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ (x - 2)^2(x + 2)^2 = 0. \end{cases}$$

Ta thấy $x = \pm 1$ và $x = 0$ là các nghiệm bội lẻ, do đó hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 201.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

💬 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = 2(x - 4)f'(x^2 - 8x) = 2(x - 4)[(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 4)[(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	0	2	$1+\sqrt{3}$	4	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(C)**

❖ **Câu 202.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2)+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

💬 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 = (x+1)(x-1)^2(x-2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$					$-\infty$

Ta thấy $x = -1$ và $x = 2$ là các nghiệm đơn còn $x = 1$ là nghiệm kép nên hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(B)**

❖ **Câu 203.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) \cdot f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $g(x) = [f'(x)]^2 - 2f(x) \cdot f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 6.

💬 **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = 2f''(x) \cdot f'(x) - 2f'(x) \cdot f''(x) - 2f(x) \cdot f'''(x) = -2f(x) \cdot f'''(x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f'''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$				$-\infty$

Ta thấy $x = 0$ và $x = -4$ là các nghiệm đơn nên hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)

⇒ **Câu 204.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $g'(x) = [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 + 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{-\frac{4}{5}} \end{cases}$$

Nhận thấy $x = 0$ và $x = \sqrt[3]{-\frac{4}{5}}$ là các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}$	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)

⇒ **Câu 205.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $g(x) = |f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 9. (B) 2018. (C) 2022. (D) 11.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = x^3(x-2)(x^2-2)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x-2)(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Xét hàm số $h(x) = f(1-2018x)$, ta có $h'(x) = (1-2018x)' \cdot f'(1-2018x) = -2018 \cdot 1 - 2018x^3(1-2018x-2)$ (1)

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2018 \cdot 1 - 2018x^3(1-2018x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2018x = 0 \\ 1-2018x = 2 \\ 1-2018x = -\sqrt{2} \\ 1-2018x = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2018} \\ x = \frac{-1}{2018} \\ x = \frac{1+\sqrt{2}}{2018} \\ x = \frac{1-\sqrt{2}}{2018} \end{cases}.$$

Các nghiệm của phương trình $h'(x) = 0$ đều là các nghiệm đơn nên $h(x)$ có 4 điểm cực trị. (1)

Mặt khác, ta có bảng biến thiên của hàm $h(x)$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2018}$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2018}$	$\frac{1}{2018}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2018}$	$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$					$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy phương trình $h(x) = 0$ có tối đa 5 nghiệm đơn. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số $g(x) = |f(1-2018x)|$ (hay $g(x) = |h(x)|$) có tối đa $4+5=9$ điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

❖ **Câu 206.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

(A) 5.

(B) 3.

(C) 1.

(D) 2.

💬 **Lời giải.**

Nhận xét. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua $x = -3$ và $x = 2$ nên hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x = -3$ và $x = 2$ trong đó chỉ có 1 điểm cực trị dương.

Do $f(|x|) = f(x)$ nếu $x \geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị $x = 2$, $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

↔ **Câu 207.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)(x - 2)^4(x^2 - 4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 5.

Lời giải.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)^4(x^2 - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$f(-2)$	$f(0)$	$f(2)$	$+\infty$	

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = (|x|)$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án **D**



↔ **Câu 208.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x + 2)^4(x^2 + 4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

A 3. **B** 2. **C** 0. **D** 1.

Lời giải.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x + 2)^4(x^2 + 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$f(0)$			$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = (|x|)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(D)**

📌 DẠNG 3.3

Tham số m

🔗 **Câu 209.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

(A) 5.

(B) 6.

(C) 7.

(D) 8.

💬 Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $f'(3-x) = (3-x)(2-x)^2[(3-x)^2 + m(3-x) + 9]$.

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(3; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$\Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2[(3-x)^2 + m(3-x) + 9] \leq 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \frac{(x-3)^2 + 9}{x-3}, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{(3; +\infty)} h(x)$ với $h(x) = \frac{(x-3)^2 + 9}{x-3}$.

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $h(x) = x-3 + \frac{9}{x-3} \geq 2\sqrt{(x-3) \cdot \frac{9}{x-3}} = 6, \forall x \in (3; +\infty)$

Suy ra $\min_{(3; +\infty)} h(x) = 6$ khi $x = 6$. Do đó $m \leq 6 \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Chọn đáp án **(B)**

🔗 **Câu 210.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2 + mx + 5), \forall x \in \mathbb{R}$ và m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 7.

💬 Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $f'(x^2) = x^4(x^2-1)(x^4 + mx^2 + 5)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow 2xf'(x^2) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 2x \cdot x^4(x^2-1)(x^4 + mx^2 + 5) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow x^4 + mx^2 + 5 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \frac{-x^4 - 5}{x^2}, \forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \geq \max_{(1; +\infty)} h(x)$ với $h(x) = \frac{-x^4 - 5}{x^2}$.

Khảo sát hàm số $h(x) = \frac{-x^4 - 5}{x^2}$ trên $(1; +\infty)$ ta được $\max_{(1; +\infty)} h(x) = -2\sqrt{5}$.

Suy ra $m \geq -2\sqrt{5} \Rightarrow m \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

Chọn đáp án (B)

□

❖ **Câu 211.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên âm để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

💬 Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $f'(x^2) = x^2(x^2 - 1)^2(3x^8 + mx^6 + 1)$.

Ta có $g'(x) = 2x f'(x^2)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 2x f'(x^2) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 2x \cdot x^2(x^2 - 1)^2(3x^8 + mx^6 + 1) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^8 + mx^6 + 1 \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{-3x^8 - 1}{x^6} \Leftrightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} h(x) \text{ với } h(x) = \frac{-3x^8 - 1}{x^6}.$$

Khảo sát hàm $h(x) = \frac{-3x^8 - 1}{x^6}$ trên $(0; +\infty)$ ta được $\max_{(0; +\infty)} h(x) = -4$. Suy ra $m \geq -4$. Vậy $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án (B)

□

❖ **Câu 212.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m < 100$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$?

(A) 18.

(B) 82.

(C) 83.

(D) 84.

💬 Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Xét hàm số $g'(x) = (2x-8)f'(x^2 - 8x + m)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x > 4$

$$\Leftrightarrow (2x-8)f'(x^2 - 8x + m) \geq 0, x > 4 \Leftrightarrow f'(x^2 - 8x + m) \geq 0, \forall x > 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + m \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ x^2 - 8x + m \geq 2, \forall x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 18.$$

Vậy $18 \leq m < 100$.

Chọn đáp án (B)

□

❖ **Câu 213.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

(A) 7.

(B) 0.

(C) 6.

(D) 5.

💬 Lời giải.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị có các trường hợp sau:

+ Phương trình (1) vô nghiệm: khi đó $m^2 - 5 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$.

+ Phương trình (1) có nghiệm kép bằng -1 : khi đó $\begin{cases} m^2 - 5 = 0 \\ -2m + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{5} \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$

+ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng -1 : $\begin{cases} m^2 - 5 > 0 \\ -2m + 6 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{5} \\ m < -\sqrt{5} \Leftrightarrow m = 3. \text{ Vậy giá trị nguyên } m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}. \\ m = 3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**



❖ **Câu 214.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

A 15.

B 16.

C 17.

D 18.

💬 **Lời giải.**

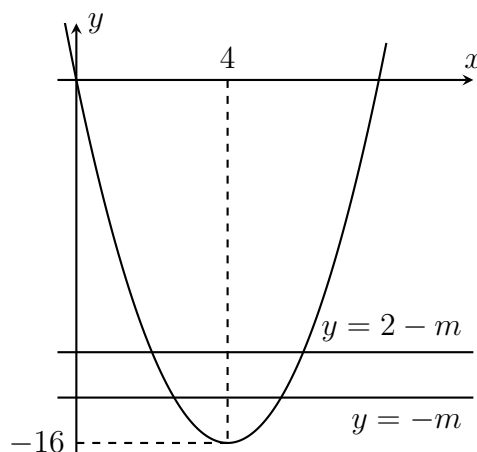
Cách 1: Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Ta có $g'(x) = 2(x - 4) \cdot f'(x^2 - 8x + m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 4) \cdot f'(x^2 - 8x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 1 \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. (*)

Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^2 - 8x$ và hai đường thẳng $d_1: y = -m$, $d_2: y = -m + 2$ (như hình vẽ).



Khi đó (*) $\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$
 Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa.

Cách 2: Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$. Ta có $f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 8)(x^2 - 8x + m - 1)^2(x^2 - 8x + m - 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 1 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 \quad (3) \end{cases} \quad \text{. Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng}$$

đôi một và $(x^2 - 8x + m - 2)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $g(x)$ có 5 cực trị khi và chỉ khi (1) và (2) có hai

$$\text{nghiệm phân biệt và khác } 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m - 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16. \text{ Vì } m \text{ nguyên dương}$$

và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Chọn đáp án **(A)** □

⇒ **Câu 215.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

(A) 6.

(B) 7.

(C) 8.

(D) 9.

🗨 **Lời giải.**

Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm số $f(|x|)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương. (*)

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 > 0 \\ S = -2m > 0 \\ P = 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\sqrt{5}.$$

Suy ra $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

⇒ **Câu 216.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.

🗨 **Lời giải.**

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Theo yêu cầu bài toán ta suy ra

$$\text{Trường hợp 1. Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 > 0 \\ S = -2m < 0 \\ P = 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt{5}$$

Trường hợp này không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$.
Suy ra $m \in \{-5; -1\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

⇒ **Câu 217.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

 Lời giải.

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2+m^2-3m-4=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \\ x^2+m^2-3m-4=0(1) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 4$.

Suy ra $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

❖ Câu 218. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

 Lời giải.

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-m=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=m \\ x=-3 \end{cases}$$

Nếu $m = -1$ thì hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị âm ($x = -3; x = -1$). Khi đó, hàm số $g(x) = f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x = 0$. Do đó $m = -1$ không thỏa yêu cầu đề bài.

Nếu $m = -3$ thì hàm số $y = f(x)$ không có cực trị. Khi đó, hàm số $g(x) = f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x = 0$. Do đó $m = -3$ không thỏa yêu cầu đề bài.

Khi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -3 \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = m$ và $x = -3$.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow m > 0$. Suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Chọn đáp án **(C)** □