

TRUNG TÂM HOÀNG GIA

ĐỀ CƯƠNG TOÁN 11

Học kì 1 – Năm học 2016 – 2017

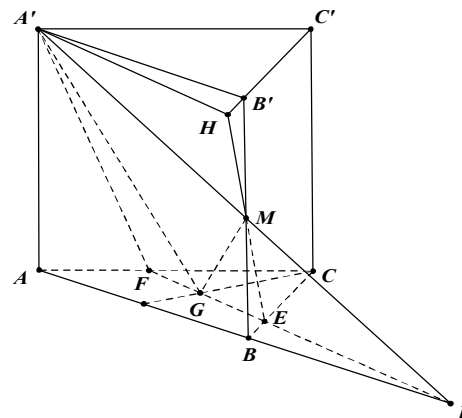
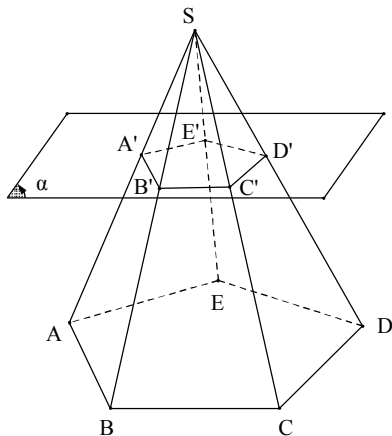
Biên soạn & Giảng dạy:

Ths. Lê Văn Đoàn

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) \right]$$

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$$

$$\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

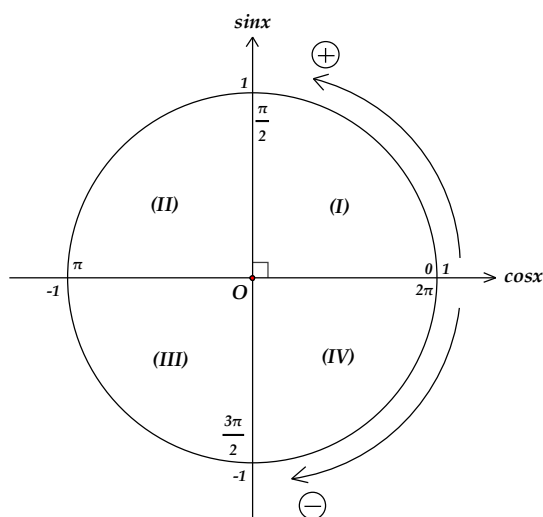


PHẦN I. GIẢI TÍCH

Chương I : HÀM SỐ LƯỢNG GÓC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GÓC

§ 0. CÔNG THỨC LƯỢNG GÓC CẦN NHỚ

1. Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác



Cung phần tư	I	II	III	IV
Giá trị LG				
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

(Nhất cả – Nhì sin – Tam tan – Tứ cos)

2. Công thức lượng giác cơ bản

$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
-------------------------------------	-------------------------------------	---	---

3. Cung góc liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Cung hơn kém π	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$

$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

4. Công thức cộng

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b.$	$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b.$
$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}.$	$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}.$
Hệ quả: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ và $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}.$	

5. Công thức nhân đôi và hạ bậc

Nhân đôi	Hạ bậc
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$	$\cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$
Nhân ba	
$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{cases}$	$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

6. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$	$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$	$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$
Đặc biệt	

$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
---	--

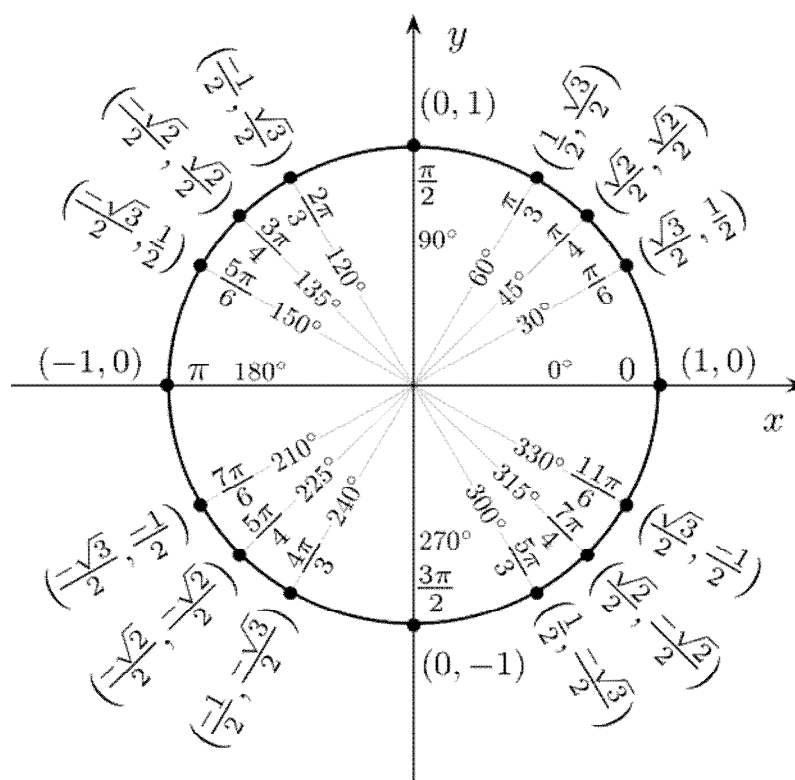
7. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$	$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cdot [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$	

Bảng lượng giác của một số góc đặc biệt

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxd	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\cot \alpha$	kxd	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxd	kxd

Một điểm M thuộc đường tròn lượng giác sẽ có tọa độ $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$



§ I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Tính chất của hàm số

a. Hàm số chẵn, hàm số lẻ:

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$. Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

b. Hàm số đơn điệu: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $(a; b) \subset \mathbb{R}$.

- $y = f(x)$ gọi là đồng biến trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

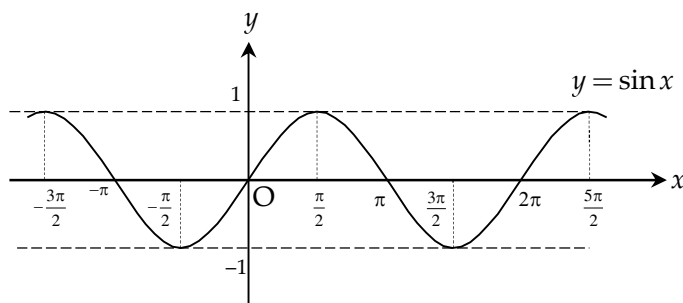
c. Hàm số tuần hoàn:

- Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D , được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có $(x + T) \in D$ và $(x - T) \in D$ và $f(x + T) = f(x)$.
- Nếu có số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn f .

2. Hàm số $y = \sin x$.

- Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \Rightarrow y = \sin[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, nghĩa là: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \end{cases}$.
- Hàm số $y = f(x) = \sin x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$. Nên đồ thị hàm số $y = \sin x$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_o = 2\pi$, nghĩa là: $\sin(x + k2\pi) = \sin x$. Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_o = \frac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng: $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng: $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt: $\begin{cases} \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

- Đồ thị hàm số:

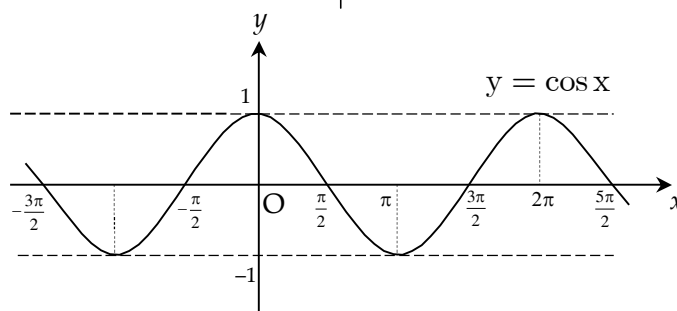


Hình dạng đồ thị hàm số $y = \sin x$

4. Hàm số $y = \cos x$.

- Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \Rightarrow y = \cos[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, nghĩa là: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \circ 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ \circ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}$.
- Hàm số $y = f(x) = \cos x$ là hàm số chẵn vì $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, nên đồ thị của hàm số nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_o = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$. Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_o = \frac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.
- Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt: $\begin{cases} \circ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \circ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}). \\ \circ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{cases}$

- Đồ thị hàm số:



4. Hàm số $y = \tan x$.

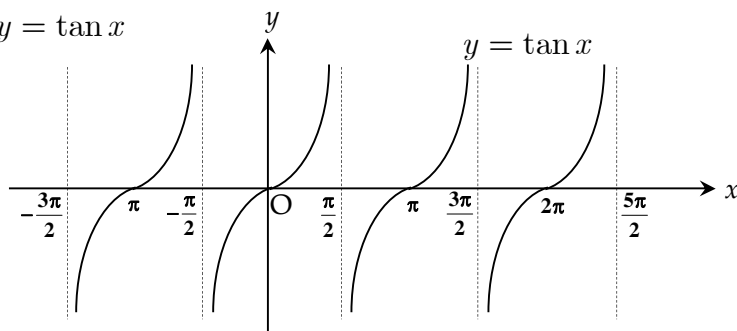
Hình dạng đồ thị hàm số $y = \cos x$

- Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, nghĩa là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$ hàm số $y = \tan[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = f(x) = \tan x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x)$ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O .

- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì $T_o = \pi \Rightarrow y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_o = \frac{\pi}{|a|}$.

- Giá trị đặc biệt:
 - $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$
 - $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
 - $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

- Đồ thị hàm số $y = \tan x$



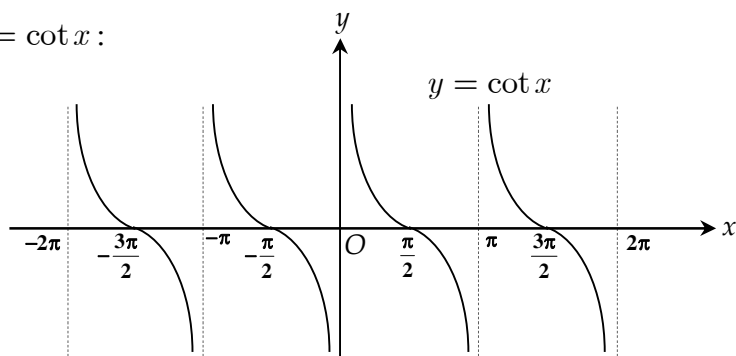
5. Hàm số $y = \cot x$.

- Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nghĩa là $x \neq k\pi; (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$ hàm số $y = \cot[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq k\pi; (k \in \mathbb{Z}).$
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}.$
- Hàm số $y = f(x) = \cot x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -f(x)$ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O .
- Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_o = \pi \Rightarrow y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_o = \frac{\pi}{|a|}$.

$$\text{kì } T_o = \frac{\pi}{|a|}.$$

- Giá trị đặc biệt:
 - $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
 - $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
 - $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

- Đồ thị hàm số $y = \cot x$:



Dạng toán 1: Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

➤ **Phương pháp giải.** Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ:

- $y = \tan f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXD}} \cos f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- $y = \cot f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXD}} \sin f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:
 - $y = \frac{1}{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXD}} P(x) \neq 0.$
 - $y = \sqrt[n]{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXD}} P(x) \geq 0.$
 - $y = \frac{1}{\sqrt[n]{P(x)}} \xrightarrow{\text{ĐKXD}} P(x) > 0.$
- Lưu ý rằng: $-1 \leq \sin f(x); \cos f(x) \leq 1$ và $A.B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}.$
- Với $k \in \mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

$\begin{aligned} &+ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \circ &+ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ &+ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{aligned}$	$\begin{aligned} &+ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \circ &+ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &+ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{aligned}$
$\begin{aligned} &+ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \circ &+ \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ &+ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$	$\begin{aligned} &+ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \circ &+ \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ &+ \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số: $y = f(x) = \frac{\sin 3x}{\tan^2 x - 1} + \sqrt{\frac{2 - \cos x}{1 + \cos x}}.$

Giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số: $y = f(x) = \frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\cos x}$.

Giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 1. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \cos \frac{4}{x}$.

b) $y = \cos \sqrt{2x}$.

c) $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$.

d) $y = \tan \left(5x + \frac{2\pi}{3} \right)$.

e) $y = \frac{2 \tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}$.

f) $y = \frac{\tan 2x}{1 + \cos^2 x}$.

g) $y = \frac{\tan 2x}{\sin x - 1}$.

h) $y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$.

i) $y = \sqrt{\frac{\cos x - 2}{1 - \sin x}}$.

j) $y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{\cos x + 1}}$.

k) $y = \frac{\cot 2x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$.

l) $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$.

m) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

n) $y = \frac{\cos 2x}{1 - \sin x} + \tan x$.

o) $y = \frac{x^2 + 1}{x \cos x}$.

p) $y = \frac{\tan 2x}{\sqrt{\sin x + 1}}$.

BT 2. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x}$.

b) $y = \sqrt{\pi^2 - 4x^2} + \tan 2x$.

c) $y = \frac{\tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{1 - \sin \left(x - \frac{\pi}{8} \right)}}$.

d) $y = \frac{\tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{1 - \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}$.

$$e) \quad y = \frac{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x - 2}.$$

$$f) \quad y = \frac{\sqrt{3 - \sin 4x}}{\cos x + 1}.$$

$$g) \quad y = \frac{3}{\cos x - \cos 3x}.$$

$$h) \quad y = \cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan 2x.$$

$$i) \quad y = \sqrt{2 + \sin x} - \frac{1}{\tan^2 x - 1}.$$

$$j) \quad y = \frac{4}{\sin^2 x - \cos^2 x}.$$

$$k) \quad y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}.$$

$$l) \quad y = \frac{1 + \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}{\tan^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Dạng toán 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Phương pháp giải.

- Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn:

$$\circ \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \end{cases} \text{ hoặc } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}.$$

- Biến đổi về dạng: $m \leq y \leq M$.

- Kết luận: $\max y = M$ và $\min y = m$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}}$.

Giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\cos 2x - 2$.

Giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 2, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Giải:

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

- | | |
|---|--|
| a) $y = 5\sqrt{3 + \cos 2x} + 4.$ | b) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}.$ |
| c) $y = 3 \sin^2 2x - 4.$ | d) $y = 4 - 5 \sin^2 2x \cos^2 2x.$ |
| e) $y = 3 - 2 \sin 4x .$ | f) $y = \sqrt{4 - 2 \sin^5 2x} - 8.$ |
| g) $y = \frac{4}{1 + 3 \cos^2 x}.$ | h) $y = \frac{4}{\sqrt{5 - 2 \cos^2 x \sin^2 x}}.$ |
| i) $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2 \sin^2 3x}}.$ | j) $y = \frac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}.$ |
| k) $y = \frac{4}{\sqrt{2 - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} + 3}.$ | l) $y = \frac{2}{\sqrt{3 \sin 2x + \cos 2x}}.$ |

BT 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

- | | |
|--|---|
| a) $y = -\sin^2 x - \cos x + 2.$ | b) $y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1.$ |
| c) $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2.$ | d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x + 4.$ |
| e) $y = \sqrt{2 - \cos 2x} + \sin^2 x.$ | f) $y = \sin^6 x + \cos^6 x.$ |
| g) $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 4.$ | h) $y = \cos^2 x + 2 \cos 2x.$ |
| i) $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x.$ | j) $y = 2 \sin 2x(\sin 2x - 4 \cos 2x).$ |
| k) $y = 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 4 \cos 2x.$ | l) $y = 4 \sin^2 x + \sqrt{5} \sin 2x + 3.$ |
| m) $y = (2 \sin x + \cos x)(3 \sin x - \cos x).$ | n) $y = \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x - 1.$ |
| o) $y = 1 - (\sin 2x + \cos 2x)^3.$ | p) $y = 5 \sin x + 12 \cos x - 10 .$ |
| q) $y = 2 \sin x + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1.$ | r) $y = 2 \left[\cos 2x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \right] + 3.$ |

BT 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \sin 2x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right), \forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

c) $y = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

f) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

g) $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

Dạng toán 3: Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số lượng giác.
Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D \Rightarrow D$ là tập đối xứng và chuyển sang bước 2.
- **Bước 2.** Tính $f(-x)$, nghĩa là sẽ thay x bằng $-x$, sẽ có 2 kết quả thường gặp sau:
 - Nếu $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

Lưu ý:

- Nếu không là tập đối xứng ($\forall x \in D \Rightarrow -x \notin D$) hoặc $f(-x)$ không bằng $f(x)$ hoặc $-f(x)$ ta sẽ kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.
- Ta thường sử dụng cung góc liên kết dạng cung đối trong dạng toán này, cụ thể:
 $\cos(-a) = \cos a, \sin(-a) = -\sin a, \tan(-a) = -\tan a, \cot(-a) = -\cot a$.

Ví dụ. Xét tính chẵn lẻ của hàm số:

a) $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$.

b) $f(x) = \cos \sqrt{x^2 - 16}$.

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 6. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \tan x + \cot x$.

b) $y = f(x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$.

c) $y = f(x) = \sin \left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$.

d) $y = f(x) = -2\cos^3 \left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$.

e) $y = f(x) = \sin^3(3x + 5\pi) + \cot(2x - 7\pi)$.

f) $y = f(x) = \cot(4x + 5\pi) \tan(2x - 3\pi)$.

g) $y = f(x) = \sin \sqrt{9 - x^2}$.

h) $y = f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$.

Cố gắng hết sức ở giây phút này sẽ đặt bạn vào vị trí tuyệt vời nhất ở những khoảng khắc sau.

O. Winfrey

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

☆☆☆

I. Phương trình lượng giác cơ bản

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có các phương trình lượng giác cơ bản sau:

- $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi \end{cases}$
- $\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi \end{cases}$
- $\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi$
- $\cot a = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi$

Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \rightarrow k360^\circ$, $k\pi \rightarrow k180^\circ$, với $\pi = 180^\circ$.

Những trường hợp đặc biệt:

- | | |
|--|--|
| $\begin{aligned} &+ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \circ &+ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ &+ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{aligned}$ | $\begin{aligned} &+ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \circ &+ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &+ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} &+ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \circ &+ \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ &+ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$ | $\begin{aligned} &+ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \circ &+ \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ &+ \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$ |

Ví dụ. Giải các phương trình:

a) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

.....

.....

c) $\tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3}$.

d) $\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 7. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định):

a) $\sin x = \sin \frac{2\pi}{3}$.

b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

c) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

d) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$.

e) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

f) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

g) $2\sin(x + 30^\circ) + \sqrt{3} = 0$.

h) $\cot(4x + 35^\circ) = -1$.

i) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$.

j) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$.

k) $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0$.

l) $\tan(x - 30^\circ) \cdot \cos(2x - 150^\circ) = 0$.

m) $\sqrt{2}\sin 2x + 2\cos x = 0$.

n) $\sin x + \sqrt{3}\sin \frac{x}{2} = 0$.

o) $\sin 2x \cdot \cos 2x + \frac{1}{4} = 0$.

p) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$.

II. Một số kỹ năng giải phương trình lượng giác

1. Sử dụng thành thạo cung liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$
Cung hơn kém π		Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + a) = -\sin a$		$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$		$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\tan(\pi + a) = \tan a$		$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$		$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$
Tính chu kỳ		
$\sin(x + k2\pi) = \sin x$		$\cos(x + k2\pi) = \cos x$
$\sin\left[x + (\pi + k2\pi)\right] = -\sin x$		$\cos\left[x + (\pi + k2\pi)\right] = -\cos x$
$\tan(x + k\pi) = \tan x$		$\cot(x + k\pi) = \cot x$

Ví dụ 1. Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định):

a) $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

b) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

Ví dụ 2. Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định):

a) $\sin 3x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0.$

b) $\tan x \cdot \tan 3x + 1 = 0.$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 8. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định):

a) $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$

b) $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{4}\right).$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x.$

d) $\cos 2x = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right).$

e) $\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0.$

f) $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{4}\right).$

g) $\cot\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$

h) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot x.$

—————> Muốn biến đổi sin thành cos, tan thành cot và ngược lại, ta sẽ làm như thế nào ?

—————> Hãy viết các công thức cung góc liên kết dạng cung góc phụ nhau ?

BT 9. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định):

- a) $\cos(3x + 45^\circ) = -\cos x$. b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$. d) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0$.
- e) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x$. f) $\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.
- g) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$. h) $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) = 0$.
- i) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$. j) $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.
- k) $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0$. l) $\tan 2x \cdot \tan 3x = 1$.

————→ Muốn bỏ dấu " – " trước sin, cos, tan, cotan ta sẽ làm như thế nào ?

————→ Hãy viết công thức cung góc liên kết dạng cung đôi nhau ?

BT 10. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\sin 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0$. b) $2\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin x = \cos 8x$.
- c) $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$. d) $\cos 2x \cos x + \cos x = \sin 2x \sin x$.
- e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$. f) $\cot 2x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$.
- f) $2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos 5x + 1$. g) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}$.
- h) $\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3}$. i) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) = 2$.

2. Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng

• $\cos a + \cos b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$.	• $\cos a - \cos b = -2\sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.
• $\sin a + \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$.	• $\sin a - \sin b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.

Khi áp dụng tổng thành tích đối với hai hàm sin và cosin thì được hai cung mới là: $\frac{a+b}{2}$; $\frac{a-b}{2}$. Do đó khi sử dụng nên nhớ (tổng và hiệu) hai cung mới này trước để nhóm hạng tử thích hợp sao cho xuất hiện nhân tử chung (cùng cung) với hạng tử còn lại hoặc cụm ghép khác trong phương trình cần giải.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0$.

Giải:

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0$.

Giải:

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 11. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|---|---|
| a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$. | b) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$. |
| c) $1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x = 0$. | d) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$. |
| e) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$. | f) $\sin x - 4 \cos x + \sin 3x = 0$. |
| g) $\cos 3x + 2 \sin 2x - \cos x = 0$. | h) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$. |

BT 12. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|--|--|
| a) $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$. | b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$. |
| c) $\cos 3x - 2 \sin 2x - \cos x - \sin x = 1$. | d) $4 \sin 3x + \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x = 0$. |
| e) $\sin 5x + \sin 3x + 2 \cos x = 1 + \sin 4x$. | f) $\cos 2x - \sin 3x + \cos 5x = \sin 10x + \cos 8x$. |
| g) $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$. | |
| h) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$. | |

3. Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của sin và cos

• $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.	• $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.
• $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.	• $\cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.
🔍 Lưu ý đối với công thức hạ bậc của sin và cosin: — Mỗi lần hạ bậc xuất hiện hằng số $\frac{1}{2}$ và cung góc tăng gấp đôi. — Mục đích của việc hạ bậc: hạ bậc để triệt tiêu hằng số không mong muốn và nhóm hạng tử thích hợp để sau khi áp dụng công thức (tổng thành tích sau khi hạ bậc) sẽ xuất hiện nhân tử chung hoặc làm bài toán đơn giản hơn.	

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \frac{1}{2} \cos 10x$.

Giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$.

Giải:

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 13. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

b) $\cos^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{4}$.

c) $\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

d) $4 \sin^2 x - 1 = 0$.

e) $\sin^2 \left(3x + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin^2 \left(\frac{7\pi}{4} - x \right)$.

f) $\cos^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}$.

g) $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$.

h) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

i) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

j) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$.

k) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$.

l) $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$.

m) $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

n) $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

BT 14. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin 10x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

b) $\cos 3x + \sin 7x = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2} \right) - 2 \cos^2 \frac{9x}{2}$.

- c) $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$. d) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.
- e) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \frac{7}{4}$. f) $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 10x\right), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- g) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$. h) $\tan^2 x + \sin^2 2x = 4\cos^2 x$.
- i) $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$. j) $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

4. Xác định nhân tử chung để đưa về phương trình tích số

Đa số đề thi, kiểm tra thường là những phương trình đưa về tích số. Do đó, trước khi giải ta phải quan sát xem chúng có những lượng nhân tử chung nào, sau đó định hướng để tách, ghép, nhóm phù hợp. Một số lượng nhân tử thường gặp:

— Các biểu thức có nhân tử chung với $\boxed{\cos x \pm \sin x}$ thường gặp là:

- $1 \pm \sin 2x = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x \pm \cos x)^2$.
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$.
- $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$.
- $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x \cos x)$.
- $1 \pm \tan x = 1 \pm \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \pm \sin x}{\cos x}$.
- $1 \pm \cot x = 1 \pm \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x \pm \cos x}{\sin x}$.
- $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$.
- $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x) \dots \dots \dots$

— Nhìn dưới góc độ hằng đẳng thức số 3, dạng $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, chẳng hạn:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1^2 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ \cos^2 x = 1^2 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x) \end{cases}$.
- $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x \cdot (1^2 - \sin^2 x) = \cos x(1 - \sin x)(1 + \sin x)$.
- $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot (1^2 - \cos^2 x) = \sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x)$.
- $3 - 4\cos^2 x = 3 - 4(1 - \sin^2 x) = (2\sin x)^2 - 1^2 = (2\sin x - 1)(2\sin x + 1)$.
- $\sin 2x = (1 + \sin 2x) - 1 = (\sin x + \cos x)^2 - 1^2 = (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1)$.
- $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = 3\cos^2 x - \sin^2 x = (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(\sqrt{3}\sin x + \cos x) \dots \dots \dots$

— Phân tích tam thức bậc hai dạng: $f(X) = aX^2 + bX + c = a \cdot (X - X_1) \cdot (X - X_2)$ với X có thể là $\sin x, \cos x, \dots$ và X_1, X_2 là 2 nghiệm của $f(X) = 0$.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $2 \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3}$.

Giải:
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos 2x - (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$.

Giải:
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Giải phương trình: $(\sin x - \cos x + 1)(2 \sin x - \cos x) - \sin 2x = 0$.

Giải:
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 4. Giải phương trình: $(2 \sin x - \sqrt{3})(\sin x \cos x + \sqrt{3}) = 1 - 4 \cos^2 x$.

Giải:
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 15. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $\sin 2x - \sqrt{3} \sin x = 0$. | b) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$. |
| c) $\sin x + \cos x = \cos 2x$. | d) $\cos 2x + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$. |

e) $(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x = 0.$ f) $\sin x.(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x.$
g) $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$ h) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\sin x} = 1 + \cot x.$
i) $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$ j) $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$

BT 16. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 1.$ b) $4\sin 2x \sin x + 2\sin 2x - 2\sin x = 4 - 4\cos^2 x.$
c) $4\sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2\cos^2 x = 4.$ d) $(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2\sin^2 x = 0.$
e) $(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2) = 4\cos^2 x - 1.$ f) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 3) = 4\sin^2 x - 1.$
g) $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) + 4\cos^2 x = 3.$ h) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x.$
i) $\sin 2x = (\sin x + \cos x - 1)(2\sin x + \cos x + 2).$ j) $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3} \cos x - \sin x.$

BT 17. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x.$ b) $\sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3} \sin x.$
c) $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x.$ d) $\sin 2x - \sin x = 2 - 4\cos x.$
e) $\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0.$ f) $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0.$
g) $\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x.$ h) $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1.$
i) $\sin 2x + 2\sin x + 1 = \cos 2x.$ j) $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x.$
l) $\sin 2x - \sin x + 2\cos 2x = 1.$ m) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x.$
n) $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x).$ o) $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x.$
p) $\sin 2x + 2\sin^2 x = \sin x + \cos x.$ q) $\cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3} \cos 2x \sin x.$
r) $\cos 3x - \cos x = 2\sin x \cos 2x.$ s) $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1.$
t) $\cos x + \tan x = 1 + \tan x \sin x.$ u) $\tan x = \sin 2x - 2\cot 2x.$

BT 18. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos x + 2\sin x.(1 - \cos x)^2 = 2 + 2\sin x.$ b) $2(\cos x + \sin 2x) = 1 + 4\sin x(1 + \cos 2x).$
c) $1 - \sin x \cos x = 2\left(\sin x - \cos^2 \frac{x}{2}\right).$ d) $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$
e) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ f) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
g) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x.$ h) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x).$
i) $2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0.$ j) $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x.$
l) $\sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2} \sin x = 0.$ m) $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x.$
n) $3\sin 3x + 2 + \sin x(3 - 8\cos x) = 3\cos x.$ o) $2\sin x(2\cos 2x + 1 + \sin x) = \cos 2x + 2.$

III. Một số dạng phương trình lượng giác thường gặp

1. Phương trình lượng giác đưa về bậc hai và bậc cao cùng 1 hàm lượng giác

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cùng góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a \sin^2 X + b \sin X + c = 0$	$t = \sin X$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \cos^2 X + b \cos X + c = 0$	$t = \cos X$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \tan^2 X + b \tan X + c = 0$	$t = \tan X$	$X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$a \cot^2 X + b \cot X + c = 0$	$t = \cot X$	$X \neq k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 X$, $\cos^2 X$ hoặc $t = |\sin X|$, $|\cos X|$ thì điều kiện là $0 \leq t \leq 1$.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $4 \cos^2 x - 4 \sin x - 1 = 0$.

Giải:

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$.

Giải:

.....

.....

Ví dụ 3. Giải phương trình: $3 \cos 2x + 7 \sin x + 2 = 0$.

Giải:

.....

.....

Ví dụ 4. Giải phương trình: $4 \sin^4 x + 5 \cos^2 x - 4 = 0$.

Giải:

.....

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$.

Giải:

Ví dụ 6. Giải phương trình: $-\frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0$.

Giải:

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 19. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|---|--|
| a) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. | b) $4 \sin^2 x + 12 \sin x - 7 = 0$. |
| c) $2\sqrt{2} \sin^2 x - (2 + \sqrt{2}) \sin x + 1 = 0$. | d) $-2 \sin^3 x + \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$. |
| e) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$. | f) $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$. |
| g) $2 \cos^2 x + (\sqrt{2} - 2) \cos x = \sqrt{2}$. | g) $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cos x = \sqrt{6}$. |
| i) $\tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$. | j) $2 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$. |
| k) $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$. | l) $3 \cot^2 x + 2\sqrt{3} \cot x + 1 = 0$. |
| m) $\sqrt{3} \cot^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cot x + 1 = 0$. | n) $\sqrt{3} \cot^2 x + (1 - \sqrt{3}) \cot x - 1 = 0$. |

BT 20. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|--|--|
| a) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$. | b) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$. |
| c) $3 - 4 \cos^2 x = \sin x(2 \sin x + 1)$. | d) $-\sin^2 x - 3 \cos x + 3 = 0$. |
| e) $-2 \sin^2 x - 3 \cos x + 3 = 0$. | f) $2 \cos^2 2x + 5 \sin 2x + 1 = 0$. |
| g) $3 \sin^2 x + 2 \cos^4 x - 2 = 0$. | h) $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7$. |
| i) $4 \cos^4 x = 4 \sin^2 x - 1$. | j) $4 \sin^4 x + 5 \cos^2 x - 4 = 0$. |

BT 21. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|--|--|
| a) $2 \cos 2x - 8 \cos x + 5 = 0$. | b) $1 + \cos 2x = 2 \cos x$. |
| c) $9 \sin x + \cos 2x = 8$. | d) $2 + \cos 2x + 5 \sin x = 0$. |
| e) $3 \sin x + \cos 2x = 2$. | f) $2 \cos 2x + 8 \sin x - 5 = 0$. |
| g) $2 \cos^2 2x + 5 \sin 2x + 1 = 0$. | g) $5 \cos x - 2 \sin \frac{x}{2} + 7 = 0$. |

h) $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2$.

k) $\cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0$.

BT 22. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $3 \cos^2 x - 2 \cos 2x = 3 \sin x - 1$.

b) $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$.

c) $\cos 4x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$.

d) $16 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos 2x = 15$.

e) $\cos 2x + 2 \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

f) $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$.

g) $1 + \cos 4x - 2 \sin^2 x = 0$.

h) $8 \cos^2 x - \cos 4x = 1$.

i) $6 \sin^2 3x - \cos 12x = 4$.

j) $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

k) $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0$.

l) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$.

BT 23. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$.

b) $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 4$.

c) $4 \cos^2(6x - 2) + 16 \cos^2(1 - 3x) = 13$.

d) $5 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 9$.

e) $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3 \cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2 \sin x$.

f) $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x + 4 = \cos x$.

g) $\sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x + \cos 2x - \cos x = 2$.

h) $2\left(\cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x}\right) + 9\left(\frac{2}{\cos x} - \cos x\right) = 1$.

i) $4\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) + 4\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = 7$.

j) $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2 = 2\left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)$.

BT 24. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\frac{3}{\cos^2 x} = 3 + 2 \tan^2 x$.

b) $\frac{1}{\cos^2 x} + 3 \cot^2 x = 5$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3 \cot x + \sqrt{3}$.

d) $9 - 13 \cos x + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 0$.

e) $2 \tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$.

f) $-\frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0$.

g) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$.

g) $2 \sin^2 x + \tan^2 x = 2$.

BT 25. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $8 \sin x \cos x - \cos 4x + 3 = 0$.

b) $2 \sin^2 8x + 6 \sin 4x \cos 4x = 5$.

c) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1 - \sin x$.

d) $\frac{1 - \cos x(2 \cos x + 1) - \sqrt{2} \cdot \sin x}{1 - \cos x} = 1$.

$$\begin{array}{ll} \text{e)} \quad \frac{3 \sin 2x - 2 \sin x}{\sin 2x \cos x} = 2. & \text{f)} \quad \frac{2 \sin^2 x + 3\sqrt{2} \sin x - \sin 2x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = -1. \\ \text{g)} \quad 2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}. & \text{g)} \quad \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} + \frac{4 + 2 \sin 2x}{\sin 2x} - 2\sqrt{3} = 2(\cot x + 1). \\ \text{h)} \quad 3 \cos 4x + 2 \cos^2 x + 3 = 8 \cos^6 x. & \text{k)} \quad 3 \cos x - 2 = -3(1 - \cos x) \cdot \cot^2 x. \\ \text{l)} \quad \sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x. & \text{m)} \quad 2 \cos 5x \cdot \cos 3x + \sin x = \cos 8x. \\ \text{n)} \quad 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4 \sin 2x. & \text{o)} \quad \sin 4x + 2 = \cos 3x + 4 \sin x + \cos x. \end{array}$$

BT 26. Giải các phương trình lượng giác sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x + \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}. & \text{b)} \quad 3 \tan 2x - \frac{3}{\cos 2x} - \frac{2 \tan x - 2}{1 + \tan x} + 4 \cos^2 x = 2. \\ \text{c)} \quad (2 \tan^2 x - 1) \cos x = 2 - \cos 2x. & \text{d)} \quad 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 \cos 3x = 4 \sin x \sin 2x. \\ \text{e)} \quad 4 \sin x + 3 = 2(1 - \sin x) \tan^2 x. & \text{f)} \quad 2 \sin^3 x - 3 = (3 \sin^2 x + 2 \sin x - 3) \tan x. \\ \text{g)} \quad 5 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - 3(1 - \cos x) \cot^2 x = 2. & \text{g)} \quad \frac{3 \sin^2 x + 2 \sin x - 3}{\cot x} + 3 = 2 \sin^3 x. \\ \text{h)} \quad 5 \sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} = 3 + \cos 2x. & \text{k)} \quad \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \tan x - 2\sqrt{3} = \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right). \end{array}$$

2. Phương trình lượng giác bậc nhất đối với sin và cosin (phương trình cổ điển)

Dạng tổng quát: $a \sin x + b \cos x = c$ (*), $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Điều kiện có nghiệm của phương trình: $a^2 + b^2 \geq c^2$, (kiểm tra trước khi giải)

Phương pháp giải:

- Chia 2 vế $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, thì (*) $\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (**)
- Giả sử: $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $(\alpha \in [0; 2\pi])$ thì:

$$(**) \Leftrightarrow \sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} : \text{dạng cơ bản.}$$

Lưu ý. Hai công thức sử dụng nhiều nhất là: $\begin{cases} \sin a \cdot \boxed{\cos b} \pm \cos a \cdot \sin b = \sin(a \pm b) \\ \cos a \cdot \boxed{\cos b} \pm \sin a \cdot \sin b = \cos(a \mp b) \end{cases}$.

Các dạng có cách giải tương tự:

$$\begin{cases} \circ a \cdot \sin mx + b \cdot \cos mx = \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} \cos nx \\ \sqrt{a^2 + b^2} \sin nx \end{cases}, (a^2 + b^2 \neq 0) & \xrightarrow{PP} \text{Chia : } \sqrt{a^2 + b^2}. \\ \circ a \cdot \sin mx + b \cdot \cos mx = c \cdot \sin nx + d \cdot \cos nx, (a^2 + b^2 = c^2 + d^2) \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sin x - \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3}$.

Giải:
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$.

Giải:
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\cos 4x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 4x)$.

Giải:
.....
.....
.....

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BT 27. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|--|--|
| a) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$. | b) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = -1$. |
| c) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$. | d) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$. |
| e) $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}$. | f) $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2}$. |
| g) $\sqrt{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \sin x = 2$. | g) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) + \sqrt{3} \sin(\pi - 2x) = 1$. |
| h) $\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2}$. | k) $4 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 3\sqrt{2}$. |
| l) $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$. | m) $\sqrt{3} \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x = \sqrt{3}$. |
| n) $\sin x(\sin x - 1) = \cos x(1 - \cos x)$. | o) $\sin x(\sqrt{3} - \sin x) = \cos x(1 + \cos x)$. |

p) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2 = 0.$ q) $\cos 7x \cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x.$
r) $\cos x \sin 3x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3} + \cos 3x \sin x.$ s) $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x + \sin x.$
t) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1.$ u) $2\sin^2 x + \sin 2x - 3\sin x + \cos x = 2.$
v) $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x = 1.$ x) $\cos x - 2\cos 2x = 2\sin x \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right).$

BT 28. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\frac{\pi}{12}.$ b) $\cos x = \sqrt{2}\sin 2x - \sin x.$
c) $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x.$ d) $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x \cos x.$
e) $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0.$ f) $(\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos x.$
g) $\sqrt{2}\cos 2x + \sin x - \cos x = 0.$ g) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x - 2\sin x = 0.$
h) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$ k) $2\cos^2\frac{x}{2} + \sqrt{3}\sin x = 1 + 2\sin 3x.$
l) $\sin x - \sqrt{3}\cos x + 2 = 4\cos^2 x.$ m) $4\sin^2 x + \sin x = 2 - \sqrt{3}\cos x.$
n) $2\cos x(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1) = 1.$ o) $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 4\sin 3x \cos x + 2.$
p) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cdot \cos 2x = \sin x.$ q) $2(\cos 6x + \cos 4x) - \sqrt{3}(1 + \cos 2x) = \sin 2x.$
r) $\sqrt{3}\sin 7x - 2\sin 4x \sin 3x = \cos x.$ s) $2\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x + \sqrt{3}\cos 3x.$
t) $\sin^2 x + \frac{\sin 2x}{2} = \sqrt{2}\sin x \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$ u) $\cos^2\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \sin^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$
v) $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x.$ x) $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}.$

BT 29. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x + \cos x = \cos 2x - \sin x.$ b) $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$
c) $\sqrt{3}(\cos 2x + \sin 3x) = \sin 2x + \cos 3x.$ d) $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x).$
e) $\sin 2x + 2\cos^2 x + \sin x - \cos x = 1.$ f) $4\sin^2 x + \tan x + \sqrt{2}(1 + \tan x)\sin 3x = 1.$
g) $\frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3}.$ g) $\frac{1 - 2\sin x}{1 + 2\sin x} = \frac{1 - \sin x}{\sqrt{3}\cos x}.$
h) $\frac{\cos x - \sin 2x}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}.$ k) $\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = \sqrt{3}.$
l) $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}.$ m) $4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos 2x \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1.$
n) $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 1.$ o) $2(\cos x + \sqrt{3}\sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1.$
p) $\sqrt{3}(\cos 2x - \sin x) + \cos x(2\sin x + 1) = 0.$ q) $\cos 2x\left(1 + \tan x \tan\frac{x}{2}\right) + \tan x = 2\sin x + 1.$

BT 30. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\sin 2x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 2 \cos x.$ b) $\sqrt{3} \sin 2x - 1 = \cos 2x - 2 \cos x.$
c) $\sin 2x - \cos x + \sin x = 1.$ d) $\cos 2x + 2 \sin x = 1 + \sqrt{3} \sin 2x.$
e) $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 4 \sin x - 1.$ f) $2 \sin 6x - 2 \sin 4x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3} + \sin 2x.$
g) $\tan \frac{\pi}{7} \cdot \sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2.$ g) $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right).$
h) $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$ k) $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2}.$

3. Phương trình lượng giác đẳng cấp (bậc 2, bậc 3, bậc 4)

Dạng tổng quát: $a \cdot \sin^2 X + b \cdot \sin X \cos X + c \cdot \cos^2 X = d$ (1) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$

Dấu hiệu nhận dạng: Đồng bậc hoặc lệch nhau hai bậc của hàm sin hoặc cosin (tan và cotan được xem là bậc 0).

Phương pháp giải:

- Bước 1.** Kiểm tra $X = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \cos X = 0 \\ \sin^2 X = 1 \end{cases}$ có phải là nghiệm hay không ?
- Bước 2.** Khi $X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos X \neq 0 \\ \sin^2 X \neq 1 \end{cases}$. Chia hai vế (1) cho $\cos^2 X$:

$$(1) \Leftrightarrow a \frac{\sin^2 X}{\cos^2 X} + b \frac{\sin X \cos X}{\cos^2 X} + c \frac{\cos^2 X}{\cos^2 X} = \frac{d}{\cos^2 X}$$

$$\Leftrightarrow a \tan^2 X + b \tan X + c = d(1 + \tan^2 X)$$

- Bước 3.** Đặt $t = \tan X$ để đưa về phương trình bậc hai theo ẩn $t \Rightarrow x$.

☞ **Lưu ý.** Giải tương tự đối với phương trình đẳng cấp bậc ba và bậc bốn.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $2 \cos^2 x + 2 \sin 2x - 4 \sin^2 x = 1.$

Giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình: $4 \sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x.$

Giải:

.....

.....
.....
.....
.....
Ví dụ 3. Giải phương trình: $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3 \sin x(\cos x - \sin x) + 3$.

Giải:

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 31. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.
- b) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.
- c) $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$.
- d) $2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \sin 2x + 4 = 4 \sin^2 x$.
- e) $\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3}$.
- f) $2 \sin^2 x + (3 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x + 1 = 0$.
- g) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$.
- h) $\cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3} \cos\left(4x - \frac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x$.

BT 32. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\sin x = 2 \cos^3 x$.
- b) $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$.
- c) $\sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0$.
- d) $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3 \sin x$.
- e) $6 \sin x + 2 \cos^3 x = 5 \sin 2x \cos x$.
- f) $\cos^3 x - 4 \sin^3 x + \sin x = 3 \cos x \sin^2 x$.
- g) $3 \cos^4 x + \sin^4 x = 4 \sin^2 x \cos^2 x$.
- g) $4 \sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x$.
- i) $2\sqrt{2} \cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \cos x = \sin x$.
- j) $\sin^2 x + \frac{(1 + \cos 2x)^2}{2 \sin 2x} = 2 \cos 2x$.
- k) $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0$.
- l) $\tan x \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$.
- m) $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$.
- n) $4 \sin^4 x + 4 \cos^4 x + 5 \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 6$.
- o) $3 \cot^2 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2}) \cos x$.

4. Phương trình lượng giác đối xứng

① **Dạng 1.** $a \cdot (\sin x \pm \cos x) + b \cdot \sin x \cos x + c = 0$ (dạng tổng/hiệu – tích)

—^{PP}→ Đặt $t = \sin x + \cos x$, $|t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow t^2 = \dots$ và viết $\sin x \cos x$ theo t .

Lưu ý, khi đặt $t = |\sin x \pm \cos x|$ thì điều kiện là: $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

② **Dạng 2.** $a \cdot (\tan^2 x + \cot^2 x) + b \cdot (\tan x \pm \cot x) + c = 0$

—^{PP}→ Đặt $t = \tan x \pm \cot x$, $|t| \geq 2 \Rightarrow t^2 = \dots$ và biểu diễn $\tan^2 x + \cot^2 x$

theo t và lúc này thường sử dụng: $\tan x \cot x = 1$, $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sin 2x + (2 - \sqrt{2})(\sin x + \cos x) + 1 - 2\sqrt{2} = 0$.

Giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình: $2 \tan^2 x + 2 \cot^2 x - (4 - \sqrt{2})(\tan x + \cot x) + 4 + 2\sqrt{2} = 0$.

Giải:

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 33. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|---|---|
| a) $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$. | b) $2(\sin x + \cos x) + 6 \sin x \cos x = 2$. |
| c) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$. | d) $(1 + \sqrt{2})(\sin x - \cos x) + 2 \sin x \cos x = 1 + \sqrt{2}$. |
| e) $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3 - \sin 2x$. | f) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x - \cos x) = \sin 2x$. |
| g) $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 2 \sin 2x = 1$. | g) $\sin x - \cos x = 2\sqrt{6} \sin x \cos x$. |

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \sin 2x + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1. & \text{j)} \quad \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}. \\ \text{k)} \quad \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right). & \text{l)} \quad 2 \sin 2x + 8 = 3\sqrt{6} |\sin x + \cos x|. \\ \text{m)} \quad |\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1. & \text{n)} \quad \cos x \sin x + |\cos x + \sin x| = 1. \end{array}$$

BT 34. Giải các phương trình lượng giác sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad 3 \tan^2 x + 4 \tan x + 4 \cot x + 3 \cot^2 x + 2 = 0. & \\ \text{b)} \quad \frac{2}{\sin^2 x} + 2 \tan^2 x + 5 \tan x + 5 \cot x + 4 = 0. & \\ \text{c)} \quad \tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x). & \text{d)} \quad 2 \sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0. \\ \text{e)} \quad 2 \cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0. & \text{f)} \quad 2 \sin^3 x - \sin x = 2 \cos^3 x - \cos x + \cos 2x. \\ \text{g)} \quad \sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \sin 2x. & \text{h)} \quad \cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x). \\ \text{i)} \quad (3 - \cos 4x)(\sin x - \cos x) = 2. & \text{j)} \quad \tan^2 x \cdot (1 - \sin^3 x) + \cos^3 x = 1. \end{array}$$

5. Một số phương trình lượng giác dạng khác

Dạng 1.

$$m \cdot \sin 2x + n \cdot \cos 2x + p \cdot \sin x + q \cdot \cos x + r = 0$$

- Ta luôn viết $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, còn: $\cos 2x = \begin{cases} = \cos^2 x - \sin^2 x & (1) \\ = 2 \cos^2 x - 1 & (2) \\ = 1 - 2 \sin^2 x & (3) \end{cases}$
- Nếu thiếu $\sin 2x$, ta sẽ biến đổi $\cos 2x$ theo (1) và lúc này thường sẽ đưa được về dạng: $A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0$.
- Nếu theo (2) được: $\sin x \cdot (2m \cdot \cos x + p) + \underbrace{(2n \cdot \cos^2 x + q \cdot \cos x + r - n)}_{(i)} = 0$ và theo (3) được: $\cos x(2m \cdot \sin x + q) + \underbrace{(-2n \cdot \sin^2 x + p \cdot \sin x + r + n)}_{(ii)} = 0$. Ta sẽ phân tích (i), (ii) thành nhân tử dựa vào: $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$ với t_1, t_2 là hai nghiệm của $at^2 + bt + c = 0$ để xác định lượng nhân tử chung.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\cos 2x - \cos x - 3 \sin x - 2 = 0$.

Giải:

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giải phương trình: $2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4$.

Giải:

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 35. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = \sin x$. b) $\frac{5 + \cos 2x}{3 + 2 \tan x} = 2 \cos x$.
- c) $3 \sin x - \cos x + 2 - \cos 2x = \sin 2x$. d) $5 \cos x + \sin x - 3 = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$.
- e) $\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x = 1$. f) $\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 3 \sin x + \cos x + 2$.
- g) $\cos x + \sin x - \sin 2x - \cos 2x = 1$. g) $\sin 2x - \cos x + 2 \sin x = \cos 2x + 3 \sin^2 x$.
- i) $\sin 2x - 2 \cos^2 x = 3 \sin x - \cos x$. j) $2\sqrt{2} \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x + 4 = 2\sqrt{2} \cos x$.
- k) $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x = 1$. l) $\sin 2x + \cos 2x - 3 \cos x + 2 = \sin x$.
- m) $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x$. n) $2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4$.
- o) $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$. p) $\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin x + 3 \cos x - 2$.
- q) $\frac{2 - \tan x}{\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1 - \tan x}{\sqrt{2} \sin x}$. r) $\sqrt{3}(\sin 2x - 3 \sin x) = 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 5$.

Dạng 2: Phương trình có chứa $R(\dots, \tan X, \cot X, \sin 2X, \cos 2X, \tan 2X, \dots)$, sao cho cung của $\sin, \cos$ gấp đôi cung của $\tan$ hoặc $\cot$. Lúc đó đặt $t = \tan X$ và sẽ biến đổi:

- $\sin 2X = 2 \sin X \cos X = 2 \cdot \frac{\sin X}{\cos X} \cdot \cos^2 X = \frac{2 \tan X}{1 + \tan^2 X} = \frac{2t}{1 + t^2}$.
- $\cos 2X = 2 \cos^2 X - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 X} - 1 = \frac{1 - \tan^2 X}{1 + \tan^2 X} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$.
- $\tan 2X = \frac{\sin 2X}{\cos 2X} = \frac{2t}{1 - t^2}$ và $\cot 2X = \frac{1 - t^2}{2t}$.

Từ đó thu được phương trình bậc 2 hoặc bậc cao theo t , giải ra sẽ tìm được $t \Rightarrow x$.

Ví dụ. Giải phương trình: $\sin 2x + 2 \tan x = 3$.

Giải:

BT 36. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $1 + 3 \tan x = 2 \sin 2x$.

b) $\cos 2x + \tan x = 1$.

c) $\sin 2x + 2 \tan x = 3$.

d) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$.

e) $1 + \cot \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1 + \tan x}{1 + \sin 2x}$.

f) $\cot x = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2 + \sin 2x}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right)$.

g) $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$.

g) $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$.

Dạng 3: Áp dụng $\begin{cases} \tan(x+a)\tan(b-x)=1 \text{ khi } a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \cot(x+a)\cot(b-x)=1 \text{ khi } a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$ hay $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$.

Ví dụ. Giải phương trình: $\sin^3 x - \cos^3 x = \cos 2x \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Giải:

BT 37. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x = \frac{\sin x - \cos 3x + 2 \cos 2x \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}$.

b) $\frac{\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x}{\tan \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} = -\frac{1}{8}$.

c) $\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)} = \cos^4 4x$.

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cot \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$.

e) $\tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \tan \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \sin 3x = \sin x + \sin 2x$.

BT 38. Giải các phương trình lượng giác sau (đặt ẩn phụ t bởi cung phức tạp):

a) $\cos \frac{4x}{3} = \cos^2 x.$

b) $\tan^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \tan x - 1.$

c) $\sin \left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2} \right).$

d) $\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$

e) $8 \cos^3 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x.$

f) $\sqrt{2} \sin^3 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin x.$

g) $\sin^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x.$

g) $\cos x - 2 \cos 3x = 1 + \sqrt{3} \sin x.$

Dạng 4. Phương trình lượng giác có cách giải đặc biệt

- Tổng các số không âm: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}.$

- Đối lập: $A = B$ mà chứng minh được $\begin{cases} A \leq M \\ B \geq M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = M \end{cases}.$

Hoặc: $A + B = M + N$ mà chứng minh được: $\begin{cases} A \leq M \\ B \leq N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}.$

- Một số trường hợp đặc biệt:

- $\sin u \pm \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = \pm 1 \end{cases}.$
- $\sin u + \sin v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}.$

- $\cos u \pm \cos v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = \pm 1 \end{cases}.$
- $\cos u + \cos v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases}.$

- $\sin u, \sin v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \\ \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}.$
- $\sin u, \sin v = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = 1 \\ \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases}.$

- $\cos u, \cos v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = 1 \\ \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases}.$
- $\cos u, \cos v = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = 1 \\ \cos u = 1 \\ \cos v = -1 \end{cases}.$

BT 39. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $4 \cos^2 x + 3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \tan x + 4 = 0.$

- b) $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 2 = 0.$
c) $2 \sin^2 x + 3 \tan^2 x - 6 \tan x - 2\sqrt{2} \sin x + 4 = 0.$
d) $8 \sin^3 x - \sin^2 2x - 6 \sin x - \cos^2 x - 1 = 0.$
e) $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0.$
f) $4 \sin^2 x + \sin^2 3x = 4 \sin x \sin^2 3x.$
g) $5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos x + 2 \sin x - 2 = 0.$
h) $\sin^2 2x + 2 \sin 2x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \tan x + 1 = 0.$
i) $-4 \cos^2 x + 3 \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x = 4 \sin x - 6.$
j) $8 \cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0.$
k) $\sin^2 x + \frac{\sin^2 3x}{3 \sin 4x} (\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x) = \sin x \sin^2 3x.$

BT 40. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\cos x \cos 2x = 1.$ b) $\sin 2x \cos 4x = 1.$
c) $\sin x \sin 3x = -1.$ d) $\cos 2x \cos 6x = 1.$
e) $(\cos^2 x - \sin^2 x) \sin 5x + 1 = 0.$ f) $(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0.$
g) $\sin 7x - \sin x = 2.$ g) $\cos 4x - \cos 6x = 2.$
i) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$ j) $\sin^5 x - \cos^3 x = 1.$

BT 41. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\cos x \cos 2x = 1.$ b) $\sin 2x \cos 4x = 1.$
c) $\sin x \sin 3x = -1.$ d) $\cos 2x \cos 6x = 1.$
e) $(\cos^2 x - \sin^2 x) \sin 5x + 1 = 0.$ f) $(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0.$
g) $\sin 7x - \sin x = 2.$ g) $\cos 4x - \cos 6x = 2.$
i) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$ j) $\sin^5 x - \cos^3 x = 1.$

BT 42. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2 \sin^5 \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$ b) $2 \cos x + \sqrt{2} \sin 10x = 3\sqrt{2} + 2 \cos 28x \sin x.$
c) $2 \sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x.$ d) $\tan 2x + \tan 3x = \frac{-1}{\sin x \cos 2x \cos 3x}.$
e) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2 \sin 3x.$ f) $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|.$
g) $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0.$ g) $\cos 2x + \cos \frac{3x}{4} - 2 = 0.$

i) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 2.$

BT 43. Tìm tham số m để các phương trình sau đây có nghiệm:

a) $\cos(2x - 15^\circ) = 2m^2 + m.$

b) $m \cos x + 1 = 3 \cos x - 2m.$

c) $(4m - 1) \sin x + 2 = m \sin x - 3.$

d) $(m^2 + m) \cos 2x = m^2 - m - 3 + m^2 \cos 2x.$

e) $m \sin x + 2 \cos x = 1.$

f) $m \cos 2x + (m + 1) \sin 2x = m + 2.$

g) $m \sin x \cos x + \sin^2 x = m.$

g) $\sin x - \sqrt{5} \cos x + 1 = m(2 + \sin x).$

i) $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m.$

j) $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + m = 1.$

k) $\sin 2x - 2\sqrt{2}m(\sin x - \cos x) + 1 = 4m.$

l) $3 \sin^2 x + m \sin 2x - 4 \cos^2 x = 0.$

m) $(m + 2) \cos^2 x + m \sin 2x + (m + 1) \sin^2 x = m - 2.$

n) $\sin^2 x + (2m - 2) \sin x \cos x - (1 + m) \cos^2 x = m.$

BT 44. Cho phương trình: $\cos 2x - (2m + 1) \cos x + m + 1 = 0.$

a) Giải phương trình khi $m = \frac{3}{2}.$

b) Tìm tham số m để phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) ?$

BT 45. Cho phương trình: $\cos 4x + 6 \sin x \cos x = m.$

a) Giải phương trình khi $m = 1.$

b) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right].$

BT 46. Tìm tham số m để phương trình $\cos^2 x - \cos x + 1 = m$ có nghiệm $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

BT 47. Tìm tham số m để phương trình $2 \sin x + m \cos x = 1 - m$ có nghiệm $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

BT 48. Tìm tham số m để $2 \cos 2x + (m + 4) \sin x = m + 2$ có 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

Chớ nên đọc sách để giúp ta suy tưởng, chớ nên đọc sách để khỏi phải suy tưởng.

K. Gibran

§ 3. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG I

☆☆☆

BT 49. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3, \forall x \in (0; 2\pi).$ (ĐH khối A năm 2002)
- b) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x.$ (ĐH khối B năm 2002)
- c) $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0, \forall x \in [0; 14].$ (ĐH khối D năm 2002)

BT 50. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x.$ (ĐH khối A năm 2003)
- b) $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}.$ (ĐH khối B năm 2003)
- c) $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$ (ĐH khối D năm 2003)

BT 51. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x.$ (ĐH khối B năm 2004)
- b) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x.$ (ĐH khối D năm 2004)

BT 52. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0.$ (ĐH khối A năm 2005)
- b) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$ (ĐH khối B năm 2005)
- c) $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0.$ (ĐH khối D năm 2005)

BT 53. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0.$ (ĐH khối A năm 2006)
- b) $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4.$ (ĐH khối B năm 2006)
- c) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0.$ (ĐH khối D năm 2006)

BT 54. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x.$ (ĐH khối A năm 2007)
- b) $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x.$ (ĐH khối B năm 2007)
- c) $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2.$ (ĐH khối D năm 2007)

BT 55. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right).$ (ĐH khối A năm 2008)

b) $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x.$ (ĐH khối B năm 2008)

c) $2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x.$ (ĐH khối D năm 2008)

BT 56. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}.$ (ĐH khối A năm 2009)

b) $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x).$ (ĐH khối B năm 2009)

c) $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0.$ (ĐH khối D năm 2009)

BT 57. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$ (ĐH khối A năm 2010)

b) $(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0.$ (ĐH khối B năm 2010)

c) $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0.$ (ĐH khối D năm 2010)

BT 58. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x.$ (ĐH khối A năm 2011)

b) $\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x.$ (ĐH khối B năm 2011)

c) $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0.$ (ĐH khối D năm 2011)

BT 59. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1.$ (ĐH khối A năm 2012)

b) $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1.$ (ĐH khối B năm 2012)

c) $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x.$ (ĐH khối D năm 2012)

BT 60. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$ (ĐH khối A năm 2013)

b) $\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1.$ (ĐH khối B năm 2013)

c) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0.$ (ĐH khối D năm 2013)

BT 61. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$. (ĐH khối A năm 2014)
b) $\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$. (ĐH khối B năm 2014)

BT 62. Giải phương trình: $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0$. (TN THPT QG năm 2016)

BT 63. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\cos x \cos 3x - \sin 2x \sin 6x - \sin 4x \sin 6x = 0$.
b) $\cos x \cos 2x \cos 3x - \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}$.
c) $\cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x \cot x + \cos x \cot x$.
d) $4 + 3 \sin x + \sin^3 x = 3 \cos^2 x + \cos^6 x$.
e) $2 \sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$.
f) $2 \cos x \cos 2x \cos 3x + 5 = 7 \cos 2x$.
g) $\sin^2 x (4 \cos^2 x - 1) = \cos x (\sin x + \cos x - \sin 3x)$.
h) $\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4 \cos 2x \cos x - 2 \cos^2 x + 2 = 0$.
i) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) \right]$.
j) $\frac{1}{2 \cot^2 x + 1} + \frac{1}{2 \tan^2 x + 1} = \frac{15 \cos 4x}{8 + \sin^2 2x}$.
k) $\frac{\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\tan x - 1} + \cos 3x = \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - 1$.
l) $3 \sin^2 x \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \cos x = \sin x \cos^2 x - 3 \sin^2 x \cos x$.
m) $\frac{(2 \sin x + 1)(\cos 2x + \sin x) - 2 \sin 3x + 6 \sin x + 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} + 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$.
n) $\sqrt{\frac{3}{4} + \cos^2 x} + \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x} = 2$.
o) $(\tan x + 1) \sin^2 x + \cos 2x + 2 = 3(\cos x + \sin x) \sin x$.
p) $\sin^3 x - \cos^3 x + 3 \sin^2 x + 4 \sin x - \cos x + 2 = 0$.
q) $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3}(\sin x - 3) = 7 \cos x$.
r) $8(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3\sqrt{3} \cos 2x = 11 - 3\sqrt{3} \sin 4x - 9 \sin 2x$.
s) $\frac{\sin 5x}{\sin x} + \frac{2 \sin 3x}{\sin x} + \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 5$.
t) $2 \cos 2x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = 2(\sin x + \cos x)$.
u) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$.
v) $1 + \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} + \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} = \cos 2x + 2 \cos x$.
w) $(2 \cos 2x - 1) \cos x - \sin x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \sin 3x$.

Chương 2 : TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

§ 1. CÁC QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

☆☆☆

① Quy tắc cộng

Ví dụ 1. Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng chọn đề tài ?

Giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa và 3 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn chuyến đi từ tỉnh A đến tỉnh B ?

Giải:

.....

.....

.....

➤ Tổng quát:

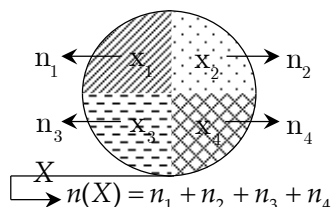
Một công việc X được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \dots, A_k$, trong đó:

Phương án A_1 có n_1 cách thực hiện.

Phương án A_2 có n_2 cách thực hiện.

.....

Phương án A_k có n_k cách thực hiện.



Số cách hoàn thành công việc X là: $n(X) = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i$ cách.

② Quy tắc nhân

Ví dụ 1. An đến nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình đến nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà đến Cường ?

Giải:

.....

.....

Ví dụ 2. Lớp 11A có 30 học sinh. Tập thể lớp muốn bầu ra một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự lớp như trên ?

Giải:
.....
.....

➤ **Tổng quát:**

Giả sử một nhiệm vụ X nào đó được hoàn thành lần lượt qua k **giai đoạn** $A_1, A_2, \dots, A_k$:
Giai đoạn A_1 có n_1 cách làm, giai đoạn A_2 có n_2 cách làm, giai đoạn A_3 có n_3 cách làm,
....., giai đoạn thứ A_k có n_k cách làm.

Khi đó công việc X có số cách thực hiện là: $n(X) = \boxed{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{i=1}^k n_i}$ cách.

③ **Qui tắc bù trừ**

Ví dụ 1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12 ?

Giải:
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2. Trong một hộp có 6 bi đỏ, 5 bi trắng và 4 bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy 3 viên bi từ hộp này sao cho chúng không đủ ba màu ?

Giải:
.....
.....
.....

➤ **Tổng quát:**

Đối tượng x cần đếm được chứa trong một đối tượng X gồm x và $\bar{x}$ đối lập nhau. Nếu X có m cách chọn, $\bar{x}$ có n cách chọn. Vậy x có $(m - n)$ cách chọn.

Về mặt thực hành, đề cho đếm những đối tượng thỏa a và b . Ta cần làm:

Bài toán 1 : Đếm những đối tượng thỏa a .

Bài toán 2 : Đếm những đối tượng thỏa a , không thỏa b .

Do đó, kết quả bài toán = kết quả bài toán 1 – kết quả bài toán 2.

☞ **Lưu ý**

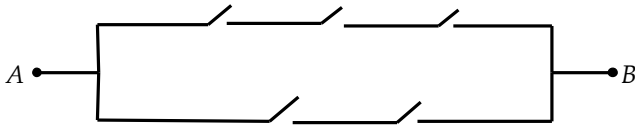
- Nếu bài toán chia ra từng **trường hợp** không trùng lặp để hoàn thành công việc thì dùng **qui tắc cộng**, nếu bài toán chia ra từng **giai đoạn** thực hiện thì ta dùng **qui tắc nhân**. Trong nhiều bài toán, ta kết hợp giữa hai qui tắc này lại với nhau để giải mà cần phải phân biệt khi nào cộng, khi nào nhân, khi nào trừ.

- "Nếu cho tập hợp hữu hạn bất kỳ A và B giao nhau khác rỗng. Khi đó thì số phần tử của $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B rồi trừ đi số phần tử của $A \cap B$, tức là: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ". Đó là quy tắc cộng mở rộng $\Rightarrow$ Khi giải các bài toán đếm liên quan đến tìm số sao cho các số đó là *số chẵn, số lẻ, số chia hết* ta nên ưu tiên việc thực hiện (*chọn*) *chúng trước* và nếu *chứa số 0 nên chia 2 trường hợp* nhằm tránh trùng lặp với nhau.
- Dấu hiệu chia hết:

Gọi $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ là số tự nhiên có $n + 1$ chữ số ($a_n \neq 0$). Khi đó:

- Dấu hiệu chia hết cho 2, 5, 4, 25, 8 và 125 của số tự nhiên N :
 - + $N : 2 \Leftrightarrow a_0 : 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
 - + $N : 5 \Leftrightarrow a_0 : 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 5\}$.
 - + $N : 4$ (hay 25) $\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 4$ (hay 25).
 - + $N : 8$ (hay 125) $\Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} : 8$ (hay 125).
- Dấu hiệu chia hết cho 3, 9 là $N : 3$ (hay 9) $\Leftrightarrow (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) : 3$ (hay 9).

BÀI TẬP ÁP DỤNG

- BT 64.** Một hộp đựng 12 viên bi trắng, 10 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Một em bé muốn chọn 1 viên bi để chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?
- BT 65.** Chợ Bến Thành có 4 cổng ra vào. Hỏi một người đi chợ:
- a) Có mấy cách vào và ra chợ ?
 - b) Có mấy cách vào và ra chợ bằng 2 cổng khác nhau ?
- BT 66.** Có 8 quyển sách Toán, 7 quyển sách Lí, 5 quyển sách Hóa. Một học sinh chọn 1 quyển trong bất kì trong 3 loại trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.
- BT 67.** Cho sơ đồ mạch điện như hình vẽ bên cạnh. Hỏi có bao nhiêu cách đóng – mở 5 công tắc để có được dòng điện đi từ A đến B .
- 
- BT 68.** Đề thi học kì môn Hóa gồm hai phần: trắc nghiệm và tự luận. Trong ngân hàng đề thi có 15 đề trắc nghiệm và 8 đề tự luận. Hỏi có bao nhiêu cách ra đề.
- BT 69.** Một ca sĩ có 30 cái áo và 20 cái quần, trong đó có 18 áo màu xanh và 12 áo màu đỏ; 12 quần xanh và 8 quần đỏ. Có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo khác màu để người ca sĩ này đi trình diễn ?
- BT 70.** Trong lớp 11A có 39 học sinh trong đó có học sinh tên Chiến, lớp 11B có 32 học sinh trong đó có học sinh tên Tranh. Có bao nhiêu cách chọn một tổ gồm 2 học sinh khác lớp mà không có mặt Chiến và Tranh cùng lúc ?
- BT 71.** Trong lớp 11A có 50 học sinh, trong đó có 2 học sinh tên Ưu và Tiên. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh đi thi mà trong đó có mặt ít nhất 1 trong 2 học sinh tên Ưu và tên Tiên ?

- BT 72.** Có 20 bông hoa trong đó có 8 bông hồng, 7 bông cúc, 5 bông đào. Chọn ngẫu nhiên 4 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong đó hoa được chọn có đủ cả ba loại ?
- BT 73.** Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh ?
- BT 74.** Có bao nhiêu biên số xe gồm hai chữ cái ở đầu (26 chữ cái) và 4 chữ số theo sau (chữ số đầu không nhất thiết khác 0 và chữ số cuối khác 0), sao cho:
- Số chữ cái tùy ý và bốn chữ số tùy ý chia hết cho 2 theo sau.
 - Số chữ cái khác nhau và 4 chữ số đôi 1 khác nhau chia hết cho 5 tiếp theo sau.
- BT 75.** Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường Đại học bằng một chữ cái (26 chữ cái) và một số nguyên dương theo sau mà không vượt quá số 100. Bằng cách ghi như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau ?
- BT 76.** Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số được lấy từ tập A , sao cho các chữ số này:
- Tùy ý.
 - Khác nhau từng đôi một.
 - Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số lẻ.
 - Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số chia hết cho 5.
 - Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số chia hết cho 2.
- BT 77.** Từ các chữ số 0, 1, 2, ..., 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau đôi một và chữ số chính giữa luôn là số 2 ?
- BT 78.** Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một từ X , sao cho một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1.
- BT 79.** Cho sáu số: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Có thể tạo ra bao nhiêu số gồm bốn chữ số khác nhau. Trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5.
- BT 80.** Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số có nghĩa đôi một khác nhau chia hết cho 5 và luôn có chữ số 0 được lấy từ tập A ?
- BT 81.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số 1 phải có mặt một trong hai vị trí đầu ?
- BT 82.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số mà trong đó có hai chữ số chẵn đứng liền nhau, còn chữ số còn lại lẻ ?
- BT 83.** Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau nằm trong khoảng (300; 500) ?
- BT 84.** Cho các số 1; 2; 5; 7; 8 có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ năm chữ số trên sao cho số tạo thành là một số nhỏ hơn 278 ?
- BT 85.** Từ các số: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số lẻ có ba chữ số khác nhau nhỏ hơn 400 ?

- BT 86.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có năm chữ số khác nhau và nhỏ hơn 34000 ?
- BT 87.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12 ?
- BT 88.** Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một được lấy từ tập A và trong đó có chứa chữ số 4 ?
- BT 89.** Hỏi từ 10 chữ số: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1 ?
- BT 90.** Từ các chữ số: 0; 1; 2; 3; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm có sáu chữ số đôi một khác nhau, trong đó phải có mặt chữ số 7.
- BT 91.** Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có chữ số 0 và 3.
- BT 92.** Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, từ các chữ số thuộc tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số và số đó chia hết cho 3 ?
- BT 93.** Từ các chữ số 0, 1, 2, ..., 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau đôi một và chữ số chính giữa luôn là số 2 ?
- BT 94.** Trong một trường THPT A, khối 11 có: 160 em tham gia câu lạc bộ Toán, 140 em tham gia câu lạc bộ Tin học, 50 em tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 12 có bao nhiêu học sinh ?
- BT 95.** Một lớp có 40 học sinh, đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả hai môn thể thao ?
- BT 96.** Có 5 học sinh, trong đó có An và Bình. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh này lên một đoàn tàu gồm 8 toa, biết rằng:
- 5 học sinh lên cùng một toa.
 - 5 học sinh lên 5 toa đầu và mỗi toa một người.
 - 5 học sinh lên 5 toa khác nhau.
 - An và Bình lên cùng toa đầu tiên.
 - An và Bình lên cùng một toa, ngoài ra không có học sinh nào khác lên toa này.
- BT 97.** Tìm tất cả những số tự nhiên có đúng năm chữ số, sao cho trong mỗi số đó: chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.
- BT 98.** Có 20 thẻ đựng trong hai hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ (mỗi hộp một thẻ) sao cho tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn.
- BT 99.** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số phân biệt khác nhau được lấy từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử. Có bao nhiêu cách lấy hai phần tử từ tập S sao cho tích của hai phần tử này là một số chẵn.
- BT 100.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số phân biệt sao cho tổng của tám chữ số này chia hết cho 9.

§ 2. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

☆☆☆

1. Hoán vị

Ví dụ 1. Giả sử muốn xếp 3 bạn A, B, C ngồi vào bàn dài có 3 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho mỗi bạn ngồi một ghế?

Giải:

.....

.....

————→ *Mỗi cách xếp chỗ cho 3 bạn trên được gọi là một hoán vị vị trí của 3 bạn.*

➤ **Tổng quát:**

— Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Khi xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập hợp A , (gọi tắt là một hoán vị của A).

— Số hoán vị của một tập hợp có n phần tử là: $P_n = n! = n.(n-1).(n-2)....3.2.1$.

Ví dụ 2. Có 5 quyển sách toán, 4 quyển sách Lý và 3 quyển sách Hóa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp số sách đó lên một kệ dài trong mỗi trường hợp sau:

a) Các quyển sách được xếp tùy ý. b) Các quyển sách cùng môn được xếp cạnh nhau.

Giải:

.....

.....

.....

.....

2. Chỉnh hợp

Ví dụ 1. Giả sử muốn chọn 3 bạn trong 5 bạn A, B, C, D, E và sắp 3 bạn này vào một bàn dài. Hỏi có bao nhiêu cách?

Giải:

.....

.....

.....

————→ *Mỗi cách chọn và sắp vị trí cho 3 bạn được gọi là một chỉnh hợp chập 3 của 5.*

➤ **Tổng quát:**

— Cho tập hợp A có n phần tử và cho số nguyên k , ($0 \leq k \leq n$). Khi lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A , (gọi tắt là một chỉnh hợp n chập k của A).

— Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

— Một số qui ước: $0! = 1$, $A_n^0 = 1$, $A_n^n = n!$.

Ví dụ 2. Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số, sao cho:

a) Đôi một khác nhau.

b) Số tự nhiên lẻ và đôi một khác nhau.

Giải:
.....
.....

3. Tổ hợp

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách lập một ban chấp hành gồm 3 người trong một chi đoàn có 14 đoàn viên ?

————→ *Mỗi cách lập một ban chấp hành gồm 3 người được gọi là một tổ hợp chập 3 của 14.*

Ví dụ 2. Vòng chung kết bóng đá Euro có 24 đội bóng thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách dự đoán 4 đội bóng vào chung kết ?

————→ *Mỗi cách dự đoán 4 đội được gọi là một tổ hợp chập 4 của 24 đội.*

➤ Tổng quát:

— Cho tập hợp A có n phần tử và cho số nguyên k , ($0 \leq k \leq n$). Mỗi tập hợp con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A .

— Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{A_n^k}{k!}$.

— Một số quy ước: $C_n^0 = 1$, $A_n^0 = 1$, với quy ước này, ta có $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ đúng với số nguyên dương k , thỏa: $1 \leq k \leq n$.

— Tính chất: $C_n^k = C_n^{n-k}$, ($0 \leq k \leq n$) và $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, ($1 \leq k \leq n$): được gọi là hằng đẳng thức Pascal).

Giải ví dụ 1:

Giải ví dụ 2:

Ví dụ 3. Một lớp học có 30 học sinh, cần lập ra một tổ công tác gồm 5 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách ?

Giải:

Ví dụ 4. Trong không gian, cho tập hợp X gồm 10 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi:

a) Có bao nhiêu đường thẳng được tạo thành ?

b) Có bao nhiêu tam giác được tạo thành ?

Giải:
.....
.....

Dạng toán 1: Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

☆☆☆

Phương pháp giải.

- Bước 1.** Tìm điều kiện. Ta có các điều kiện thường gặp sau:

Các kí hiệu và công thức	Điều kiện
$n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1.$	$n \in \mathbb{N}$
$P_n = n!$	$n \in \mathbb{N}^*$
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$
$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$
$C_n^k = C_n^{n-k}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$
$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 1 \leq k \leq n \end{cases}$

- Bước 2.** Thu gọn dựa vào những công thức trên và đưa về phương trình đại số. Giải phương trình đại số này tìm được biến.
- Bước 3.** So với điều kiện để nhận những giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BT 101. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $D = \frac{7!4!}{10!} \left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!} \right).$

b) $D = \frac{2011!}{2010! - 2009!} \cdot \frac{2009}{2011}.$

c) $D = \frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!3!}.$

d) $D = \frac{7!}{(m^2 + m)} \cdot \frac{(m+2)!}{4!(m-1)!}.$

e) $D = \frac{6!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{4!(m-1)!}.$

f) $D = \frac{(n+1)C_n^2}{n(n^2-1)}.$

BT 102. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72.$

b) $\frac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6}.$

c) $\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 3.$

d) $n^3 + \frac{n!}{(n-2)!} = 10.$

BT 103. Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|---|
| a) $P_2.x^2 - P_3.x = 8.$ | b) $A_n^3 = 20n.$ |
| c) $C_{2n}^3 = 20C_n^2.$ | d) $4C_x^8 = 5C_{x-1}^7.$ |
| e) $C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}.$ | g) $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}.$ |
| h) $C_x^x + 2C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = C_{x+2}^{2x-3}.$ | i) $A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n+15).$ |
| j) $A_n^3 + 2C_n^2 = 16n.$ | k) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x.$ |
| l) $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101.$ | m) $2C_{x-1}^2 - C_x^1 = 79.$ |
| n) $\frac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \frac{1}{6}.$ | o) $\frac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^{n-4}} = \frac{24}{23}.$ |
| p) $\frac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4} \cdot P_3} = 210.$ | q) $\frac{C_{28}^{2x}}{C_{24}^{2x-4}} = \frac{225}{52}.$ |
| r) $72A_x^1 - A_{x+1}^3 = 72.$ | s) $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2.$ |
| t) $x^2 - C_4^x \cdot x + C_3^2 \cdot C_3^1 = 0.$ | u) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1).$ |
| v) $6C_x^2 + 6C_x^3 = 7x^2 - 7x.$ | x) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$ |
| y) $2(A_n^3 + 3A_n^2) = P_{n+1}.$ | z) $2P_n + 6A_n^2 - P_n A_n^2 = 12.$ |

BT 104. Giải các phương trình sau:

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{5}{C_5^x} - \frac{2}{C_6^x} = \frac{14}{C_7^x}.$ | b) $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}.$ |
| c) $\frac{1}{C_x^1} - \frac{1}{C_{x+1}^2} = \frac{7}{6C_{x+4}^1}.$ | d) $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 = 0.$ |
| e) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x.$ | g) $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \dots + C_x^{x-10} = 1023$ |

BT 105. Giải các bất phương trình sau:

- | | |
|--|--|
| a) $A_n^3 + 15 < 15n.$ | b) $4 \leq n! + (n+1)! < 50.$ |
| c) $A_n^3 < A_n^2 + 12.$ | d) $72A_x^1 - A_{x+1}^3 \leq 72.$ |
| e) $A_n^3 + 5A_n^2 < 21n.$ | g) $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30.$ |
| h) $n^3 + \frac{n!}{(n-2)!} \leq 10.$ | i) $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}.$ |
| j) $\frac{A_{x+4}^4}{(x+1)!} \leq \frac{42}{P_x}.$ | k) $\frac{P_{n+5}}{(n-k)!} \leq 60A_{n+3}^{k+2}.$ |
| l) $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 - 20 < 0.$ | m) $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10.$ |

$$n) \frac{12}{x} C_x^3 - 3A_x^2 \geq \frac{1}{2} A_{2x}^2 - 81.$$

$$o) C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4} A_{x-2}^2 < 0.$$

$$p) \frac{A_{n+1}^{n-2}}{C_{n-1}^2} \geq 2P_n.$$

$$q) \frac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0.$$

BT 106. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}.$$

$$b) \begin{cases} 2A_x^y + C_x^y = 180 \\ A_x^y - C_x^y = 36 \end{cases}.$$

$$c) \begin{cases} \frac{A_y^x}{P_{x+1}} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}.$$

$$d) \frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}.$$

$$e) C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m-1} : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3.$$

$$g) C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2.$$

$$h) \begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \frac{1}{3} \\ C_y^x : A_y^x = \frac{1}{24} \end{cases}.$$

$$i) \begin{cases} C_{n+1}^{m+1} = C_{n+1}^m \\ \frac{C_{n+1}^m}{C_{n+1}^{m-1}} = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

$$j) \begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases}.$$

$$k) \begin{cases} \frac{A_y^{x+1}}{P_x} + C_y^{y-x-1} = 126 \\ P_{x+2} = 720 \end{cases}.$$

$$l) \begin{cases} C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 < \frac{5}{4} A_{n-2}^2 \\ C_{n+1}^{n-4} \geq \frac{7}{15} A_{n+1}^3 \end{cases}.$$

$$m) \begin{cases} 7A_{5x}^{y-3} = A_{5x}^{y-2} \\ 4C_{4x}^{y-2} = 7C_{5x}^{y-3} \end{cases}.$$

$$n) \begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}.$$

$$o) \begin{cases} (C_x^{x-1})^2 + 2(C_y^{y-1})^2 = 3A_x^{x-1} \cdot C_y^{y-1} \\ 2(C_x^{x-1})^3 = A_y^{y-1} + 1 \end{cases}.$$

Dạng toán 2: Các bài toán sử dụng hoán vị

☆☆☆

BT 107. Có bao nhiêu cách sắp xếp 12 học sinh đứng thành một hàng để chụp ảnh lưu niệm, biết rằng trong đó phải có 5 em định trước đứng kề nhau? ĐS: 5!8!

BT 108. Trên một kệ sách dài có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên:

- a) Một cách tùy ý. ĐS: 12!
b) Theo từng môn. ĐS: 3!(5!4!3!)
c) Theo từng môn và sách Toán nằm ở giữa. ĐS: 2!(5!4!3!)

BT 109. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào 2 dãy ghế trên, có bao nhiêu cách, nếu xếp:

- a) Nam và nữ được xếp tùy ý. ĐS: 10!
- b) Nam một dãy ghế, nữ một dãy ghế. ĐS: 2.5!.5!
- BT 110.** Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho:
- a) Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau. ĐS: 2.5!.5!
- b) Những học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau. ĐS: 2.5!.5!
- BT 111.** Một trường trung học phổ thông có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 20 học sinh trên thành một hàng ngang để đón đoàn đại biểu, nếu:
- a) Các học sinh được xếp bất kì. ĐS: 15!
- b) Các học sinh trong cùng một khối phải đứng kề nhau. ĐS: 3!.4!.5!.6!
- BT 112.** Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E vào một chiếc ghế dài sao cho:
- a) Bạn C ngồi chính giữa? ĐS: 1.4!
- b) Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế? ĐS: 2!3!
- BT 113.** Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một ghế dài, có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:
- a) 6 học sinh này ngồi bất kì. ĐS: 6!
- b) A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế. ĐS: 2!4!
- c) A và F luôn ngồi cạnh nhau. ĐS: 5!2!
- d) A, B, C luôn ngồi cạnh nhau. ĐS: 4!3!
- e) A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau. ĐS: 3!4!
- BT 114.** Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 cặp vợ chồng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn thỏa:
- a) Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau. ĐS: 5!.6!
- b) Mỗi bà đều ngồi cạnh chồng của mình. ĐS: 5!.2⁶
- BT 115.** Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước: Mỹ 5 người, Nga 5 người, Anh 4 người, Pháp 6 người, Đức 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch ngồi gần nhau? ĐS: 4!5!5!4!6!4!
- BT 116.** Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 được lập từ tập X ? ĐS: 24
- BT 117.** Cho tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số này bằng 9. ĐS: 18
- BT 118.** Cho tập $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau, biết tổng của 3 chữ số này bằng 18? ĐS: 3!.6
- BT 119.** Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số:
- a) Bắt đầu bằng chữ số 5? ĐS: 4!
- b) Không bắt đầu bằng chữ số 1? ĐS: 5!– 4!

- c) Bắt đầu bằng 23 ? $\underline{\text{ĐS: 3!}}$
d) Không bắt đầu bằng 234 ? $\underline{\text{ĐS: 5! - 2!}}$

BT 120. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đã thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau ? $\underline{\text{ĐS: 480.}}$

BT 121. Cho hai tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số phân biệt sao cho:

- a) Hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau được lập từ A . $\underline{\text{ĐS: 6! - 2.5!}}$
b) Chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3 được lập từ tập B . $\underline{\text{ĐS: 2(5! - 4!)}}$

BT 122. Cho các số 0; 1; 2; 3; 4; 5. Có thể lập được bao nhiêu số gồm tám chữ số trong đó chữ số 5 lặp lại ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần ? $\underline{\text{ĐS: } \frac{35820}{3!}}$

BT 123. Từ tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số đôi một khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số 1, 2, 3 và chúng đứng cạnh nhau ? $\underline{\text{ĐS: 36 + 30}}$

BT 124. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau được lấy từ tập A sao cho tổng các chữ số trong số này bằng 14 ? $\underline{\text{ĐS: 72}}$

Dạng toán 3: Các bài toán sử dụng chỉnh hợp

BT 125. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D . Từ các điểm trên ta lập các vectơ khác vectơ $\vec{0}$. Hỏi có thể có được bao nhiêu vectơ ? $\underline{\text{ĐS: } A_4^2}$

BT 126. Từ 20 học sinh cần chọn ra một ban đại diện lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thư ký. Hỏi có mấy cách chọn ? $\underline{\text{ĐS: } A_{20}^3}$

BT 127. Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang, sao cho hai vị trí đầu và cuối hàng là các em nam và không có 2 em nữ nào ngồi cạnh nhau ? $\underline{\text{ĐS: } 7!.A_6^3}$

BT 128. Có 6 nam, 6 nữ trong đó có ba bạn tên A, B, C . Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc để vào lớp sao cho:

- a) Các bạn nữ không ai đứng cạnh nhau. $\underline{\text{ĐS: } 6!.A_7^6}$
b) Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam. $\underline{\text{ĐS: } A_6^2.10!}$
c) Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái. $\underline{\text{ĐS: } 2.A_6^2.10!}$
d) Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái. $\underline{\text{ĐS: } 2.6.6.10!}$
e) A, B, C luôn đứng gần nhau. $\underline{\text{ĐS: } 10!.3!}$
f) A, B đứng cách nhau đúng một người. $\underline{\text{ĐS: } 10.10!.2!}$

- BT 129.** Một khay tròn đựng bánh kẹo ngày tết có 6 ngăn hình quạt với màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách bày 6 loại bánh kẹo vào 6 ngăn đó ? $\underline{ĐS: 5!}$
- BT 130.** Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu:
- a) Ghế xếp thành hàng ngang ? $\underline{ĐS: 6!.A_7^4}$
- b) Ghế sắp quanh một bàn tròn ? $\underline{ĐS: 5!.A_6^4}$
- BT 131.** Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 3 bạn nữ ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn, sao cho không có 2 bạn nữ nào ngồi cạnh nhau. $\underline{ĐS: 4!.A_5^3}$
- BT 132.** Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 sẽ ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 9 học sinh đó sao cho mỗi học sinh lớp 12 ngồi giữa hai học sinh lớp 11. $\underline{ĐS: 6!.A_5^2}$
- BT 133.** Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau được lập từ X mà chia hết cho 5 ? $\underline{ĐS: 1560}$
- BT 134.** Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số được tạo từ tập X , sao cho:
- a) Khác nhau từng đôi một ? $\underline{ĐS: 9.A_9^4}$
- b) Khác nhau từng đôi một và số đó là số lẻ ? $\underline{ĐS: 5.8.A_8^3}$
- c) Khác nhau từng đôi một và phải có mặt đủ 3 chữ số 1, 2, 3 ? $\underline{ĐS: A_5^3.A_7^2 - 6A_4^3}$
- BT 135.** Cho tập $X = \{0; 1; 2; 4; 5; 7; 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 5 và không lớn hơn 4000 được lập từ X ? $\underline{ĐS: 120}$
- BT 136.** Từ các số 1, 3, 5, 6, 7, có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số khác nhau và lớn hơn số 6000 ? $\underline{ĐS: 2A_4^3 + A_5^5}$
- BT 137.** Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được tạo từ X và bé hơn số 475 ? $\underline{ĐS: 268.}$
- BT 138.** Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm năm chữ số khác nhau đôi một được tạo từ X và lớn hơn 70000 ? $\underline{ĐS: 4368}$
- BT 139.** Có thể lập ra được bao nhiêu số điện thoại di động có 10 chữ số bắt đầu là 0908, các chữ số còn lại khác nhau từng đôi một, đồng thời khác với 4 chữ số đầu (0908) và nhất thiết phải có mặt chữ số 6. $\underline{ĐS: 6.A_6^5}$
- BT 140.** Từ sáu chữ số 0; 1; 3; 5; 7; 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 5 ? $\underline{ĐS: 4.4.A_4^2}$
- BT 141.** Với 6 chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau và thỏa điều kiện:
- a) Là số chẵn ? $\underline{ĐS: 312}$

- b) Bắt đầu bằng bởi 24 ? $\underline{\text{ĐS: 24}}$
c) Bắt đầu bằng bởi 345 ? $\underline{\text{ĐS: 6}}$

BT 142. Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ tập X trong mỗi trường hợp sau:

- a) n là số chẵn ? $\underline{\text{ĐS: 3000}}$
b) Một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1 ? $\underline{\text{ĐS: 2280}}$

BT 143. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3 ? $\underline{\text{ĐS: 7440}}$

BT 144. Cho tập $E = \{1; 2; 3; 4; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số:

- a) Đôi một khác nhau ? $\underline{\text{ĐS: } A_5^3}$
b) Đôi một khác nhau và chia hết cho 3 ? $\underline{\text{ĐS: 24}}$

BT 145. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt mà phải có chữ số 0 và số 3 ? $\underline{\text{ĐS: } A_5^2 \cdot A_4^3 - 4 \cdot A_4^3}$

Dạng toán 4: Các bài toán sử dụng tổ hợp

BT 146. Ông X có 11 người bạn. Ông muốn mời 5 người trong số họ đi chơi xa. Trong 11 người đó có 2 người không muốn gặp nhau. Hỏi ông X có bao nhiêu phương án mời 5 người bạn ? $\underline{\text{ĐS: } 2C_9^4 + C_9^5}$

BT 147. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

- a) Gồm 4 học sinh tùy ý. $\underline{\text{ĐS: } C_{40}^4}$
b) Có 1 nam và 3 nữ. $\underline{\text{ĐS: } C_{25}^1 \cdot C_{15}^3}$
c) Có 2 nam và 2 nữ. $\underline{\text{ĐS: } C_{25}^2 \cdot C_{15}^2}$
d) Có ít nhất 1 nam. $\underline{\text{ĐS: } C_{40}^4 - C_{15}^4}$
e) Có ít nhất 1 nam và 1 nữ. $\underline{\text{ĐS: } C_{40}^4 - C_{25}^4 - C_{15}^4}$

BT 148. Một nhóm có 6 học sinh nữ và 7 học sinh nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một tổ học tập có 5 học sinh, trong đó có một tổ trưởng, một tổ phó, một thủ quỹ và hai tổ viên, biết rằng tổ trưởng phải là nam và thủ quỹ phải là nữ. $\underline{\text{ĐS: } C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^2}$

BT 149. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh lập thành một đoàn đại biểu để tham gia tổ chức lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách:

- a) Chọn ra 5 học sinh, trong đó có không quá 3 nữ. $\underline{\text{ĐS: 620880}}$
b) Chọn ra 5 học sinh, trong đó có 3 nam và 2 nữ. $\underline{\text{ĐS: } C_{15}^2 \cdot C_{25}^3}$
c) Chọn ra 5 học sinh, trong đó có ít nhất một nam. $\underline{\text{ĐS: } C_{40}^5 - C_{15}^5}$

- d) Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh A và chị B không thể cùng tham gia cùng đoàn đại biểu.
ĐS: $C_{38}^3 + C_{38}^5$

BT 150. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập 1 đội gồm 4 học sinh trong đó có:

- a) Số nam và số nữ bằng nhau ? ĐS: $C_{14}^2 \cdot C_6^2$
b) Ít nhất một nữ ? ĐS: 3844

BT 151. Một đội văn nghệ gồm 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

- a) Có đúng 2 nam trong 5 người đó ? ĐS: $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3$
b) Có ít nhất 2 nam, ít nhất 1 nữ trong 5 người đó ? ĐS: 12900

BT 152. Một đội cảnh sát giao thông gồm 15 người trong đó có 12 nam. Hỏi có bao nhiêu cách phân đội cảnh sát giao thông đó về 3 chốt giao thông sao cho mỗi chốt có 4 nam và 1 nữ.
ĐS: 207900

BT 153. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn:

- a) 1 bó hoa trong đó có đúng một bông hồng đỏ. ĐS: $C_4^1 \cdot C_8^6$
b) 1 bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ.

BT 154. Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi sao cho:

- a) Có đúng 2 viên bi màu đỏ ? ĐS: $C_5^2 \cdot C_{13}^4$
b) Số bi xanh bằng số bi đỏ ? ĐS: 3045

BT 155. Có một hộp đựng 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng.

- a) Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi, trong đó có 2 viên bi xanh và có nhiều nhất 2 viên bi vàng và phải có đủ 3 màu. ĐS: 1700
b) Có bao nhiêu cách lấy ra 9 viên bi có đủ 3 màu. ĐS: 4984

BT 156. Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu. ĐS: 645

BT 157. Trong ngân hàng đề kiểm tra 30 phút môn Vật Lí có 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 bài tập. Người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong mỗi đề thi phải gồm 3 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi có dạng như trên ?
ĐS: $C_4^2 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_6^2$

BT 158. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.
ĐS: 56875

BT 159. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy ?
ĐS: 225

BT 160. Hội đồng quản trị của một công ty TNHH A gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu nhất thiết phải có nữ ?
ĐS: $A_{12}^2 \cdot C_{10}^2 - A_7^2 \cdot C_5^2$

BT 161. Một lớp có 50 học sinh được chia thành 5 tổ, mỗi tổ có 10 học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ ?
ĐS: $C_{50}^{10} C_{40}^{10} C_{30}^{10} C_{20}^{10} C_{10}^{10}$

BT 162. Một tổ có 8 học sinh đi trồng cây. Khi trồng cây cần có 2 em học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ thành những cặp như vậy ?
ĐS: $C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2$

BT 163. Giải bóng truyền VTV Cup gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm chia làm 3 bảng đấu A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho:

a) Mỗi bảng ba đội ?

ĐS: $C_9^3 C_6^3 C_3^3$

b) Mỗi bảng ba đội và 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau ? ĐS: 540

BT 164. Trong cuộc thi “Rung chuông vàng”, đội X có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí chơi, ban tổ chức chia các bạn thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Hỏi có bao cách chia nhóm, sao cho:

a) Thành viên trong nhóm là bất kì ?

ĐS: $C_{20}^5 C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$

b) Năm bạn nữ ở cùng một nhóm ?

ĐS: $4C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$

BT 165. Trong một hộp có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Có bao nhiêu cách lấy ra ba thẻ sao cho có đúng 2 thẻ mang số chia hết cho 8 ?
ĐS: $C_6^2 C_{44}^1$

BT 166. Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Có bao nhiêu cách chọn ra 10 tấm thẻ sao cho có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 10 ?
ĐS: $C_{15}^5 C_3^1 C_{12}^4$

BT 167. Trong một hộp có 20 viên bi được đánh số từ 1 đến 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 5 viên bi sao cho có đúng 3 viên bi mang số lẻ, 2 viên bi mang số chẵn trong đó có đúng một viên bi mang số chia hết cho 4 ?
ĐS: $C_{10}^3 C_5^1 C_5^1$

BT 168. Trong một hộp có 100 viên bi được đánh số từ 1 đến 100. Có bao nhiêu cách chọn ra ba viên bi sao cho:

a) Ba viên bi bất kì ?

ĐS: C_{100}^3

b) Tổng ba số trên ba bi chia hết cho 2 ?

ĐS: $C_{50}^3 + C_{50}^1 C_{50}^2$

BT 169. Trong một hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Có bao nhiêu cách chọn 3 tấm thẻ trong hộp đó thỏa:

- a) Ba tấm thẻ bất kì ? $\underline{\text{ĐS:}} C_{40}^3$
- b) Tổng ba số ghi trên ba thẻ chia hết cho 3 ? $\underline{\text{ĐS:}} 127$
- BT 170.** Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên bi sao cho tổng các số trên 4 bi là số lẻ ? $\underline{\text{ĐS:}} C_6^1 C_5^3 + C_6^3 C_5^1$
- BT 171.** Cho hai đường thẳng $a \parallel b$. Trên đường thẳng a có 5 điểm phân biệt và trên đường thẳng b có 10 điểm phân biệt. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác có các đỉnh là các điểm trên hai đường thẳng a và b đã cho ? $\underline{\text{ĐS:}} 325$
- BT 172.** Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2 ? $\underline{\text{ĐS:}} 5950$.
- BT 173.** Cho 10 điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.
- a) Có bao nhiêu đường thẳng được tạo thành ? $\underline{\text{ĐS:}} C_{10}^2$
- b) Có bao nhiêu vectơ được tạo thành ? $\underline{\text{ĐS:}} A_{10}^2$
- c) Có bao nhiêu tam giác được tạo thành ? $\underline{\text{ĐS:}} C_{10}^3$
- d) Nếu trong 10 điểm trên không có 4 điểm nào đồng phẳng, thì có bao nhiêu tứ diện được tạo thành ? $\underline{\text{ĐS:}} C_{10}^4$
- BT 174.** Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n ? $\underline{\text{ĐS:}} n = 20$
- BT 175.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 10 đường thẳng song song lần lượt cắt 8 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành từ các đường thẳng trên. $\underline{\text{ĐS:}} C_{10}^2 C_8^2$
- BT 176.** Cho 2 đường thẳng $d_1 \parallel d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Biết rằng có 1725 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Hãy tìm n ? $\underline{\text{ĐS:}} n = 15$
- BT 177.** Trong không gian cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Trên mỗi đường thẳng lấy 5 điểm cách đều nhau một khoảng bằng x . Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu hình bình hành tạo thành từ 10 điểm trên ? $\underline{\text{ĐS:}} 30$
- BT 178.** Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Từ tập X có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và trong mỗi số đó có đúng hai chữ số chẵn và ba chữ số lẻ ? $\underline{\text{ĐS:}} 2880 - 288$
- BT 179.** Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số có nghĩa, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần ? $\underline{\text{ĐS:}} C_7^2 C_5^3 A_8^2 - C_6^2 C_4^3 7$

§ 3. NHỊ THỨC NEWTON

☆☆☆

① **Nhị thức Newton.** Cho a, b là các số thực và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Ví dụ. Khai triển các nhị thức sau:

$$\bullet (x + 1)^4 = \dots\dots\dots$$

$$\bullet (x + 2y)^5 = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \left(2x - \frac{1}{x}\right)^6 = \dots\dots\dots$$

② **Nhân xét**

— Trong khai triển $(a \pm b)^n$ có $n + 1$ số hạng và các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

— Số hạng tổng quát dạng: $T_{n+1}^k = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ và số hạng thứ N thì $k = N - 1$.

— Trong khai triển $(a - b)^n$ thì dấu đan nhau, nghĩa là +, rồi -, rồi +,

— Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ a và b bằng n .

— Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn như:

$$\bullet (1 + x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n \xrightarrow{x=1} C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

$$\bullet (1 - x)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n \xrightarrow{x=-1} C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

③ **Tam giác Pascal**

Các hệ số của khai triển: $(a + b)^0, (a + b)^1, (a + b)^2, \dots, (a + b)^n$ có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác PASCAL.

$$\begin{array}{l} n = 0: \quad 1 \\ n = 1: \quad 1 \quad 1 \\ n = 2: \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ n = 3: \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ n = 4: \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ n = 5: \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ n = 6: \quad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ n = 7: \quad 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Hàng đẳng thức PASCAL

$$\begin{array}{c} \boxed{C_{n-1}^{k-1}} + \boxed{C_{n-1}^k} \\ \downarrow \\ \boxed{C_n^k} \end{array}$$

Câu hỏi ? Viết đầy đủ dạng khai triển của các nhị thức sau:

- $(a + b)^6 = \dots\dots\dots$
- $(a + b)^7 = \dots\dots\dots$

Dạng toán 1: Tìm hệ số hoặc số hạng thỏa mãn điều kiện cho trước

BT 180. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển:

- | | | | |
|--|------------------|---|------------------------|
| a) $(2x - 3y)^{17}$ | chứa $x^8 y^9$. | b) $(x + y)^{25}$ | chứa $x^{12} y^{13}$. |
| c) $(x - 3)^9$ | chứa x^4 . | d) $(1 - 3x)^{11}$ | chứa x^6 . |
| e) $(3x - x^2)^{12}$ | chứa x^{15} . | f) $(x^2 - 2x)^{10}$ | chứa x^{16} . |
| g) $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}, \forall x \neq 0$ | chứa x^{31} . | h) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{10}, \forall x \neq 0$ | chứa x^{11} . |
| i) $(\sqrt[3]{x^{-2}} + x)^7$ | chứa x^2 . | j) $\left(\sqrt{xy} + \frac{x}{y}\right)^{10}, \forall \begin{cases} xy \geq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ | chứa $x^6 y^2$. |
| k) $(2x + y)^{13}$ | chứa $x^6 y^7$. | l) $(x^3 - xy)^{15}$ | chứa $x^{25} y^{10}$. |
| m) $(1 + x + 3x^2)^{10}$ | chứa x^4 . | n) $(1 + x + 2x^2)^{10}$ | chứa x^{17} . |
| o) $(2 + \sqrt{x} - 3x^2)^5$ | chứa x^2 . | p) $(x^2 + x - 1)^5$ | chứa x^3 . |
| q) $(1 + x^2 - x^3)^8$ | chứa x^8 . | r) $\left(1 - x^4 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ | chứa x^8 . |

BT 181. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển của nhị thức:

- | | |
|--|--|
| a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}, \forall x \neq 0.$ | b) $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5, \forall x \neq 0.$ |
| c) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10}, \forall x \neq 0.$ | d) $\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right)^{12}, \forall x \neq 0.$ |
| e) $\left(\frac{1}{x^3} + x^2\right)^{10}, \forall x \neq 0.$ | f) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9, \forall x \neq 0.$ |
| g) $\left(x + \frac{2}{x^3}\right)^{12}, \forall x \neq 0.$ | h) $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5, \forall x \neq 0.$ |
| i) $\left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}, \forall x > 0.$ | j) $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8, \forall xy \neq 0.$ |
| k) $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}, \forall x > 0.$ | l) $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}, \forall x \neq 0.$ |

m) $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7, \forall x > 0.$

n) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}, \forall x > 0.$

BT 182. Tìm hệ số chứa x^{10} trong khai triển: $(1 + x + x^2 + x^3)^5$.

BT 183. Tìm hệ số chứa x^5 trong khai triển: $x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$.

BT 184. Tìm hệ số chứa x^5 trong khai triển: $(2x + 1)^4 + (2x + 1)^5 + (2x + 1)^6 + (2x + 1)^7$.

BT 185. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng (dạng có điều kiện)

a) Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^n, x \neq 0$, biết $C_n^4 = 13C_n^2$.

b) Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right), x \neq 0$, biết $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$.

c) Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $(x^2 + 2)^n$, biết $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$.

d) Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n, \forall x \neq 0$, biết $C_{n-4}^{n-6} + n.A_n^2 = 454$.

e) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{2}{n-5}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n, x > 0$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_n^3 = 5C_n^1$.

f) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{3}{x^3}\right)^n$, với $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$. Biết rằng $A_{n+1}^2 + C_{n+1}^2 = 18P_3$.

g) Tìm số hạng độc lập với x trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^{28}}}\right)^n, \forall x \neq 0$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

h) Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^n, \forall x \neq 0$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $3C_n^2 + 2A_n^2 = 3n^2 + 15$.

i) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển: $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n, x > 0$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$.

j) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $6C_{n+1}^{n-1} = A_n^2 + 160$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển: $(1 - 2x^3)(2 + x)^n$?

- k) Cho $n \in \mathbb{Z}^+$ và $a, b, (b > 0)$. Biết trong khai triển nhị thức Newton $\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + b\right)^n$ có hạng tử chứa $a^4 b^9$, tìm số hạng chứa tích a và b với số mũ bằng nhau ?
- l) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^{n-3} - C_{n-1}^2 = C_{n-1}^1 C_{n+3}^{n+2}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển: $x^3 \left(x^{n-8} - \frac{n}{3x}\right)^n, x \neq 0$.

BT 186. Xác định số nguyên dương n để trong khai triển $(1 + x^2)^n$ có hệ số của x^8 bằng 6 lần hệ số của x^4 .

BT 187. Tính A_{2016}^n , biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1 + 3x)^n$ là 90.

BT 188. Trong khai triển nhị thức $(1 + 2ax)^n, (x \neq 0)$ ta có được số hạng đầu là 1, số hạng thứ hai là $48x$, số hạng thứ ba là $1008x^2$. Tìm n và a ?

BT 189. Trong khai triển nhị thức $(1 + ax)^n$, ta có số hạng đầu bằng 1, số hạng thứ hai bằng $24x$, số hạng thứ ba bằng $252x^2$. Tìm n và a ?

BT 190. Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $(x - 2)^n$ bằng 220. Tìm hệ số của x^2 .

BT 191. Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm số nguyên dương n .

BT 192. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$, biết hiệu số của số hạng thứ ba và thứ hai bằng 35.

BT 193. Trong khai triển của nhị thức $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ cho biết tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97. Tìm hệ số của số hạng có chứa x^4 .

BT 194. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng (kết hợp với việc tính tổng)

- a) Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1 + x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12} ?
- b) Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$, với n là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024 ?
- c) Tìm số hạng $x^{10} y^6$ trong khai triển: $(2x^2 + y)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2047$.
- d) Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $P(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ với $x > 0$.
Biết n thỏa mãn điều kiện: $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095$.

- e) Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa: $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$.
- f) Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(\sqrt{x} - 3x^2)^n$, ($x > 0$), biết rằng n là số nguyên dương và tổng các hệ số trong khai triển bằng -2048 ?
- g) Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa: $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$.
- h) Tìm hệ số của x^{19} trong khai triển biểu thức $P = (2x-1)^9 \cdot (x+2)^n$, biết rằng n là số nguyên dương: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2048$?
- i) Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$, trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$?

BT 195. Cho $P = (1+2x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Khai triển P ta được: $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$.

Tính n và a_{11} biết rằng $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$.

BT 196. Cho khai triển nhị thức: $(1-2x+x^3)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{3n} x^{3n}$. Xác định

n và tìm a_6 , biết rằng: $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{3n}}{2^{3n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$.

Dạng toán 2: Chứng minh hoặc tính tổng

BT 197. Chứng minh:

- a) $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 4^n$.
- b) $C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0$.
- c) $3^{16} C_{16}^0 - 3^{15} C_{16}^1 + 3^{14} C_{16}^2 - \dots - 3 C_{16}^{15} + C_{16}^{16} = 2^{16}$.
- d) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$.
- e) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{2n-1} \cdot (2^{2n} + 1)$.
- f) $C_{2001}^0 + 3^2 C_{2001}^2 + 3^4 C_{2001}^4 + \dots + 3^{2000} C_{2001}^{2000} = 2^{2000} (2^{2001} - 1)$.
- g) $C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.
- h) $2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + \dots + C_n^n = \frac{3^n + 1}{2}$.
- i) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.
- j) $\left(\frac{C_n^0}{1}\right)^2 + \left(\frac{C_n^1}{2}\right)^2 + \left(\frac{C_n^2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{C_n^n}{n+1}\right)^2 = \frac{C_{2n+2}^{n+1} - 1}{(n+1)^2}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

BT 198. Tính các tổng sau:

- $S = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \dots + C_5^5.$
- $S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + \dots + 2^5 C_5^5.$
- $S = 4^0 C_8^0 + 4^1 C_8^1 + 4^2 C_8^2 + \dots + 4^8 C_8^8.$
- $S = C_{2010}^0 + C_{2010}^1 + C_{2010}^2 + \dots + C_{2010}^{2010}.$
- $S = C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 2^2 C_{2010}^2 + \dots + 2^{2010} C_{2010}^{2010}.$
- $S = C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}.$
- $S = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \dots + C_{100}^{100}.$
- $S = 2.C_{2010}^1 + 2^3.C_{2010}^3 + 2^5.C_{2010}^5 + \dots + 2^{2009}.C_{2010}^{2009}.$
- $S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \dots + (-1)^k \cdot \frac{1}{k}C_{2n}^{k-1} + \dots + (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}.$
- $S = \frac{1}{2!.2012!} + \frac{1}{4!.2010!} + \dots + \frac{1}{2012!.2!} + \frac{1}{2014!}.$
- $S = 1^2.C_{2013}^1 + 2^2.C_{2013}^2 + 3^2.C_{2013}^3 + \dots + 2013^2.C_{2013}^{2013}.$
- $S_2 = \frac{C_{2013}^0}{1} + \frac{C_{2013}^1}{2} + \frac{C_{2013}^2}{3} + \dots + \frac{C_{2013}^{2013}}{2014}.$

BT 199. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn các điều kiện sau:

- $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095.$
- $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048.$
- $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \dots + C_{2n}^{2n} = 512.$
- $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + C_{2n+1}^7 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024.$
- $C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + C_{2014}^8 + \dots + C_{2014}^{1006} = 2^{503n} - 1.$
- $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$

BT 200. Chứng minh:

- $C_n^k = C_n^{n-k}.$
- $C_{k+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$
- $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}.$
- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$
- $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$
- $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}.$

BT 201. Chứng minh: $C_n^0 C_n^1 \dots C_n^n \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1} \right)^{n-1}$ với $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$

BT 202. Cho khai triển: $\left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{3} \right)^{11} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{11} x^{11}.$ Hãy tìm hệ số lớn nhất?

BT 203. Cho khai triển: $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$ với các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_n$ thỏa mãn

hệ thức: $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096.$ Hãy tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, \dots, a_n$?



MỘT SỐ MẪU CHUYỆN VỀ NHÀ TOÁN HỌC PASCAL

Hồi nhỏ Pascal rất đam mê Hình học. Nhưng vì Pascal rất yếu nên cha ông không muốn cho ông học Toán. Cha ông giấu hết tất cả các sách vở và những gì liên quan đến toán. Thế là Pascal phải tự mày mò xây dựng nên môn hình học cho riêng mình. Ông vẽ các hình và tự đặt tên cho chúng. Ông gọi đường thẳng là “cây gậy”, đường tròn là “cái bánh xe”, hình tam giác là “thước thợ”, hình chữ nhật là “mặt bàn”,..... Ông đã tìm ra và chứng minh rất nhiều định lý hình học, trong đó có định lý: “Tổng các góc của một thước thợ bằng nửa tổng các góc của một mặt bàn”. Năm ấy Pascal mới chỉ 12 tuổi.

Năm 16 tuổi, Pascal công bố một công trình toán học: “về thiết diện của đường côníc”, trong đó ông đã chứng minh một định lý nổi tiếng (sau này mang tên ông) và gọi đó là “định lý về lục giác thần kì”. Ông rút ra 400 hệ quả từ định lý này. Nhà toán học và triết học vĩ đại lúc bấy giờ là Descartes đánh giá rất cao công trình toán học này và nói rằng: “Tôi không thể tưởng tượng nổi một người đang ở tuổi thiếu niên mà lại có thể viết được một tác phẩm lớn như vậy”.

Năm 17 tuổi, thấy cha (một kế toán) phải làm nhiều tính toán vất vả, Pascal đã nảy ra một ý định chế tạo một chiếc máy tính. Sau 5 năm lao động căng thẳng miệt mài, ông đã chế tạo xong chiếc máy tính làm được 4 phép tính cộng, trừ, nhân, chia, tuy rằng chưa nhanh lắm. Đó là chiếc máy tính đầu tiên trong nhân loại. Để ghi nhớ công lao này, tên của ông đã được đặt cho một ngôn ngữ lập trình, là ngôn ngữ lập trình Pascal.

Vào năm 1651, khi Pascal 28 tuổi và được cả Châu Âu tôn vinh là thần đồng, ông nhận được một bức thư của một nhà quý tộc Pháp De Méré nhờ ông giải đáp một số vấn đề rắc rối nảy sinh trong trò chơi đánh bạc. Pascal đã “toán học hóa” các trò chơi cờ bạc này, nâng lên những bài toán phức tạp hơn và trao đổi vấn đề này với nhà toán học Phêc – ma. Những cuộc trao đổi đó đã khai sinh ra **lý thuyết xác suất** – lý thuyết toán học về các hiện tượng ngẫu nhiên.

Sau khi cha mất, chị gái bỏ đi tu, lại thêm ốm đau bệnh tật, Pascal chán chường tất cả. Ông bỏ toán học, đắm chìm vào những suy tư về tín ngưỡng và nghiên cứu thần học. Vào một đêm vào đầu mùa xuân năm 1658, một cơn đau răng dữ dội làm Pascal không ngủ được. Để quên đau, ông tập trung suy nghĩ bài toán về đường xyclôit, một bài toán khó đang thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học lúc đó. Kỳ lạ thay, ông đã giải được bài toán này và sáng hôm sau cũng khỏi luôn bệnh đau răng. Ông nghĩ rằng đây là một thông điệp của Chúa nhắc nhở rằng ông không được quên và rời bỏ toán học. Và thế là sau 4 năm theo con đường tín ngưỡng tôn giáo, Pascal lại quay về với toán học. Không chỉ là một nhà toán học thiên tài, Pascal còn là một nhà vật lý học nổi tiếng, là nhà văn, nhà từ tưởng lớn.

Ngày nay người ta thường nhắc đến các câu nói của Pascal như: “Con người chỉ là một cây sậy, một vật rất yếu đuối của tự nhiên, nhưng là một cây sậy biết suy nghĩ” và “Trái tim có những lý lẽ mà lý trí không giải thích được”.

Pascal mất khi ông mới 39 tuổi. Ông được coi là một trong những nhà bác học lớn nhất của nhân loại.

Hãy vọng đi ảo tưởng đến đâu thì cũng giúp chúng ta đi trên đường đời một cách vui vẻ

La Rochefoucauld

§ 4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

☆☆☆

Trong thực tiễn, chúng ta thường gặp những hiện tượng ngẫu nhiên. Đó là những hiện tượng (biến cố) mà chúng ta không thể dự báo một cách chắc chắn là nó xảy ra hay không xảy ra.

Lý thuyết xác suất là bộ môn toán học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên. Sự ra đời của lý thuyết xác suất bắt đầu từ những thư từ trao đổi giữa hai nhà toán học vĩ đại người Pháp là Pascal (1623 – 1662) và Phec – ma (1601 – 1665) xung quanh các giải đáp một số vấn đề rắc rối nảy sinh trong quá trình trò chơi cờ bạc của một nhà quý tộc Pháp đặt ra cho Pascal. Năm 1812, nhà toán học Pháp La – pha – xơ đã dự báo rằng: “Môn khoa học bắt đầu từ việc xem xét các trò chơi may rủi này sẽ hứa hẹn trở thành một đối tượng quan trọng nhất của tri thức loài người”.

Này nay, lý thuyết xác suất đã trở thành một ngành toán học quan trọng, được ứng dụng trong rất nhiều lĩnh vực của khoa học tự nhiên, khoa học xã hội, công nghệ, kinh tế, y tế, sinh học,...

① Biến cố

a) Phép thử và không gian mẫu

- Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:
 - + Kết quả của nó không đoán trước được.
 - + Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.
- Tập hợp mọi kết quả của một phép thử T được gọi là **không gian mẫu** của T và được kí hiệu là Ω . Số phần tử của không gian mẫu được kí hiệu là $n(\Omega)$.

Ví dụ 1. Phép thử: “Gieo 1 con súc sắc” có không gian mẫu là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$.

Ví dụ 2. Xét phép thử: “Gieo hai đồng xu phân biệt”. Nếu kí hiệu S để chỉ đồng xu “sấp”, kí hiệu N để chỉ đồng xu “ngửa” thì không gian mẫu của phép thử trên là:

$$\Omega = \{ \dots \dots \dots \} \Rightarrow n(\Omega) = \dots \dots$$

Ví dụ 3. Xét phép thử T là: “Gieo ba đồng xu phân biệt”. Hãy cho biết không gian mẫu và số phần tử của không gian mẫu đó ?

Giải

.....

.....

b) Biến cố

Ví dụ. Xét phép thử T : “Gieo một con súc sắc” có không gian mẫu là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Xét biến cố A : “Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn”.

Biến cố A xảy ra khi kết quả của phép thử T là:

Các kết quả này được gọi là *kết quả thuận lợi cho A* được mô tả bởi: $\Omega_A = \{ \dots \dots \dots \}$ là một tập con của $\Omega \Rightarrow$ Số phần tử thuận lợi của biến cố A là $n(A) = \dots \dots$

Tổng quát:

- Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T .
- Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là một kết quả thuận lợi cho A .
- Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A .

Câu hỏi ? Xét phép thử T như trên và biến cố B : “Số chấm trên mặt xuất hiện là một số lẻ” và biến cố C : “Số chấm xuất hiện trên mặt là nguyên tố”. Hãy mô tả biến cố B và C .

Giải: $\Omega_B = \{ \dots \} \Rightarrow n(B) = \dots$

$\Omega_C = \{ \dots \} \Rightarrow n(C) = \dots$

② Xác suất

Ví dụ 1. Xét phép thử T : “Gieo hai con súc sắc”. Các kết quả xảy ra của T là các cặp $(x; y)$ được cho bởi bảng sau:

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

- Không gian mẫu T là $\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3); \dots; (6;5);(6;6)\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$.
- Các mặt của con súc sắc có cùng khả năng xuất hiện nên 36 kết quả của T là **đồng khả năng** xảy ra. Xét biến cố A : “Tổng số chấm xuất hiện trên mặt là 7”.

Lúc này ta có: $\Omega_A = \{(1;6);(2;5);(3;4);(4;3);(5;2);(6;1)\} \Rightarrow n(A) = 6$.

Khi đó tỉ số $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ được gọi là **xác suất của A** .

- **Tổng quát:** Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là một tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì xác suất của A là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác

định bởi công thức: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{Số phần tử của } A}{\text{Số phần tử của } \Omega}$.

Từ định nghĩa, suy ra: $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Ví dụ 2. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất các biến cố sau:

- (1) A : “mặt lẻ xuất hiện”.
- (2) B : “xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3”.
- (3) C : “Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2”.

Giải. Ta có các trường hợp xuất hiện khi gieo con súc sắc là: $\Omega = \dots \Rightarrow n(\Omega) = \dots$

a) Các phần tử của biến cố A là $\Omega_A = \dots \Rightarrow n(A) = \dots \Rightarrow P(A) = \dots$

b) Các phần tử của biến cố B là $\Omega_B = \dots \Rightarrow n(B) = \dots \Rightarrow P(B) = \dots$

c) Các phần tử của biến cố C là $\Omega_C = \dots \Rightarrow n(C) = \dots \Rightarrow P(C) = \dots$

Ví dụ 3. Từ một hộp chứa 4 quả cầu trắng, 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu trong hộp. Tính xác suất để:

- a) Lấy được quả cầu trắng. b) Lấy được quả cầu đỏ. c) Lấy được quả cầu xanh.

Giải. Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có: $n(\Omega) = \dots$

a) Gọi A là biến cố lấy được quả cầu trắng. Ta có: $n(A) = \dots \Rightarrow P(A) = \dots$

b)

c)

Ví dụ 4. Trong một đợt kiểm tra về vệ sinh an toàn thực phẩm của ngành y tế tại chợ X. Ban quản lý chợ lấy ra 15 mẫu thịt lợn trong đó có 4 mẫu ở quầy A, 5 mẫu ở quầy B và 6 mẫu ở quầy C. Mỗi mẫu thịt này có khối lượng như nhau và để trong các hộp kín có kích thước giống hệt nhau. Đoàn kiểm tra lấy ra ngẫu nhiên ba hộp để phân tích, kiểm tra xem trong thịt lợn có chứa hóa chất “Super tạo nạc” (Clenbuterol) hay không. Tính xác suất để 3 hộp lấy ra có đủ ba loại thịt ở các quầy A, B, C.

Giải.
.....
.....
.....

Ví dụ 5. Trong một chiếc hộp có chứa 10 quả cầu có kích thước như nhau, được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên ra 3 quả cầu trong hộp đó. Tính xác suất để các số ghi trên 3 quả cầu lấy được là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Giải.
.....
.....
.....

Ví dụ 6. Trong một chiếc hộp có 6 viên bi đỏ, 5 viên bi vàng và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra không đủ cả ba màu?

Giải.
.....
.....
.....

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Nhóm bài toán chọn hoặc sắp xếp đồ vật

- BT 204.** Một bình đựng 6 viên bi khác về màu có 2 xanh, 2 vàng, 2 đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để được:
- a) 2 viên bi xanh. b) 2 viên bi khác màu.
- BT 205.** Một chiếc hộp đựng 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ và 2 quả cầu đen. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu đen.
- BT 206.** Cho một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tính xác suất trong 2 trường hợp sau:
- a) Lấy được 3 viên bi màu đỏ. b) Lấy được ít nhất 2 viên bi màu đỏ.
- BT 207.** Một hộp chứa các quả cầu kích thước khác nhau gồm 3 quả cầu đỏ , 6 quả cầu xanh và 9 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để 2 quả cầu được chọn khác màu.
- BT 208.** Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự ra khỏi hộp). Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi đỏ.
- BT 209.** Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi một cách ngẫu nhiên rồi cộng các số trên 6 bi được rút ra với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là số lẻ.
- BT 210.** Từ 1 hộp chứa 4 bi xanh, 3 bi đỏ, 2 bi vàng, lấy ngẫu nhiên 2 bi. Tính xác suất các biến cố:
- a) A : “hai bi cùng màu xanh”. b) B : “hai bi cùng màu đỏ”.
c) C : “hai bi cùng màu”. d) D : “hai bi khác màu”.
- BT 211.** Từ một hộp có 13 bóng đèn, trong đó có 6 bóng hỏng, lấy ngẫu nhiên 5 bóng ra khỏi hộp. Tính xác suất sao cho:
- a) Có nhiều nhất hai bóng hỏng. b) Có ít nhất một bóng tốt.
- BT 212.** Trong một hộp đựng 8 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp trên. Tìm xác suất để 4 viên bi được lấy ra có cả bi xanh và bi đỏ ?
- BT 213.** Trong chiếc hộp có 6 bi đỏ, 5 bi vàng và 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra không đủ cả ba màu ?
- BT 214.** Một hộp chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 bi. Tính xác suất để bốn bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất ?
- BT 215.** Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp. Tính xác suất để trong 5 bi lấy ra có đủ 3 màu và số bi xanh bằng bi đỏ ?
- BT 216.** Cho hai hộp bi, hộp thứ nhất của 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng. Hộp thứ hai có 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Chọn ngẫu nhiên mỗi hộp 1 viên. Tính xác suất để hai viên bi được chọn ra có cùng màu ?

- Page - 67 -*

Nhóm bài toán chọn hoặc sắp xếp người

- BT 228.** Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội. Tính xác suất để:
- Cả 3 em đều là học sinh giỏi.
 - Có ít nhất 1 học sinh giỏi.
 - Không có học sinh trung bình.
- BT 229.** Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà toán học nam, 5 nhà vật lý nữ và 3 nhà hóa học nữ. Chọn ra từ đó 4 người đi công tác. Tính xác suất trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ cả ba bộ môn ?
- BT 230.** Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ ?
- BT 231.** Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất để trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam ?
- BT 232.** Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một lớp học có 15 nam và 10 nữ để tham gia đồng diễn. Tính xác suất sao cho 5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam ?
- BT 233.** Một chi đoàn có 15 đoàn viên, trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn có ít nhất một nữ ?
- BT 234.** Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm chọn ra 5 học sinh để lập một tổp ca chào mừng ngày 22 tháng 12. Tính xác suất sao cho trong tổp ca có ít nhất một học sinh nữ ?
- BT 235.** Một đội văn nghệ của trường THPT Năng Khiếu gồm 5 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh trong đội văn nghệ để lập một tổp ca. Tính xác suất để tổp ca có ít nhất 3 học sinh nữ ?
- BT 236.** Một tổ có 11 học sinh, trong đó có 5 nam và 6 nữ. Giáo viên chọn 5 học sinh làm trực tuần. Tính xác suất để chọn được nhiều nhất 2 học sinh nam ?
- BT 237.** Trong kì thi thử TN THPT QG lần I năm 2017 tại trường THPT X có 13 học sinh đạt điểm 9,0 môn Toán, trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để trong 3 học sinh chọn có cả nam và nữ, có cả khối 11 và khối 12.
- BT 238.** Tổ một có 3 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Tổ hai có 5 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất sao cho chọn được hai học sinh có cả nam và nữ ?
- BT 239.** Trong một tổp lớp 12A có 12 học sinh gồm có 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ, trong đó có A (nam) là tổ trưởng và B (nữ) là tổ phó. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong tổp để tham gia hoạt động tập thể của trường nhân dịp ngày thành lập Đoàn 26 tháng 3. Tính xác suất để sao cho nhóm học sinh được chọn có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ, trong đó phải có bạn A hoặc bạn B nhưng không có cả hai ?

- BT 240.** Một đồn cảnh sát gồm có 9 người, trong đó có 2 trung tá An và Bình. Trong một nhiệm vụ cần huy động 3 đồng chí thực hiện nhiệm vụ ở địa điểm C, 2 đồng chí thực hiện nhiệm vụ ở địa điểm D và 4 đồng chí còn lại trực ở đồn. Tính xác suất sao cho hai trung tá An và Bình không ở cùng một khu vực làm nhiệm vụ ?
- BT 241.** Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hàng ngang, trong 8 bạn có hai bạn tên An và Bình. Tìm xác suất sao cho:
- Nam nữ ngồi xen kẽ nhau.
 - Bốn bạn nam luôn ngồi cạnh nhau.
 - Đầu ghế và cuối ghế bắt buộc phải là nam.
 - Các bạn nữ không ngồi cạnh nhau.
 - Hai đầu ghế phải khác giới.
 - Các bạn nam luôn ngồi cạnh nhau và các bạn nữ luôn ngồi cạnh nhau.
 - An và Bình luôn ngồi gần nhau.
 - An và Bình không ngồi cạnh nhau.
- BT 242.** Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, 2 người đàn bà và một đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho:
- Đứa bé ngồi giữa hai người đàn bà.
 - Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông.
- BT 243.** Trong giờ Thể dục, tổ I lớp 11A có 12 học sinh gồm 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ tập trung ngẫu nhiên theo một hàng dọc. Tính xác suất để người đứng ở đầu hàng và cuối hàng đều là học sinh nam ?
- BT 244.** Đội tuyển học sinh giỏi của trường THPT X có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Trong buổi lễ trao phần thưởng, các học sinh trên được xếp thành một hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho hai học sinh nữ không đứng cạnh nhau ?
- BT 245.** Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có 2 học sinh nữ đứng cạnh nhau ?
- BT 246.** Một tổ học sinh có 5 em nữ và 8 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để không có hai em nữ nào đứng cạnh nhau ?
- BT 247.** Một tổ học sinh có 4 em nữ và 5 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để chỉ có hai em nữ A, B đứng cạnh nhau, còn các em nữ còn lại không đứng cạnh nhau và cũng không đứng cạnh A, B.
- BT 248.** Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, 2 người đàn bà và một đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp quanh bàn tròn. Tính xác suất sao cho:
- Đứa bé ngồi giữa hai người đàn bà.
 - Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông.
- BT 249.** Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ xếp ngồi ngẫu nhiên quanh một bàn tròn. Tính xác suất sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.
- BT 250.** Trong một giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh – sinh viên có 8 người tham gia, trong đó có 2 bạn tên Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai

bảng A và B , mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng bằng việc bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để cả hai bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đấu ?

BT 251. Chuẩn bị đón tết Bính Thân 2016, đội thanh niên tình nguyện của trường THPT X gồm 9 học sinh, trong đó có 3 học sinh nữ chia thành 3 tổ đều nhau làm công tác vệ sinh môi trường tại nghĩa trang liệt sĩ huyện. Tính xác suất để mỗi tổ có đúng 1 nữ ?

BT 252. Trong giải bóng truyền VTV Cup gồm 12 đội bóng tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm để chia thành 3 bảng A , B , C , mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng Việt Nam ở 3 bảng khác nhau.

BT 253. Trong cuộc thi “Tìm kiếm tài năng Việt”, có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí thi đấu, Ban tổ chức chia thành 4 nhóm A , B , C , D , mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm ?

BT 254. Để chuẩn bị tiêm phòng dịch Sởi – Rubella cho học sinh khối 11 và khối 12. Bệnh viện tỉnh A điều động 12 bác sỹ đến trường THPT B để tiêm phòng dịch gồm 9 bác sỹ nam và 3 bác sỹ nữ. Ban chỉ đạo chia 12 bác sỹ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 bác sỹ làm 3 công việc khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 bác sỹ nữ.

BT 255. Trong một giải thể thao cấp toàn quốc, có 17 thí sinh tham gia và trong đó có 5 thí sinh nữ. Ban tổ chức tiến hành chia thí sinh vào 2 bảng A và B , mỗi bảng có 8 thí sinh, còn lại 1 thí sinh được đặc cách vào vòng trong. Tính xác suất để thí sinh được đặc cách là nữ và 4 thí sinh nữ còn lại đều nằm ở bảng A .

BT 256. Trong một buổi giao lưu văn nghệ, có 5 giáo viên Toán, 3 giáo viên Văn, 2 giáo viên Ngoại Ngữ đăng kí hát song ca. Nhằm tạo không khí giao lưu thân mật, ban tổ chức tiến hành bốc thăm ngẫu nhiên được chia thành 5 cặp được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 5. Tính xác suất để cả 5 cặp đều gồm 2 giáo viên dạy khác môn.

BT 257. Trong một giải quần vợt quốc tế, có 16 vận động viên mà trong đó có 3 vận động viên là các “hạt giống” số 1, 2, 3 của mùa giải. Vận động viên X là một trong số 16 vận động viên đó và không phải là hạt giống. Ban tổ chức chia ngẫu nhiên các vận động viên vào bốn bảng A , B , C , D và mỗi bảng có 4 vận động viên. Tính xác suất để X không chung bảng với bất kì vận động viên hạt giống nào.

BT 258. Một tàu điện gồm 3 toa tiến vào một sân ga, ở đó đang có 12 hành khách chờ lên tàu. giả sử hành khách lên tàu một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau, mỗi toa còn ít nhất 12 chỗ trống. Tìm xác suất xảy ra các tình huống sau:

- Tất cả cùng lên toa thứ II.
- Tất cả cùng lên một toa.
- Toa I có 4 người, toa II có 5 người, còn lại toa III.
- Toa I có 4 người.
- Hai hành khách A và B cùng lên một toa.
- Một toa 4 người, một toa 5 người, một toa 3 người.

BT 259. Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho:

- Nam nữ ngồi đối diện nhau.
- Nữ ngồi đối diện nhau.

Nhóm bài toán chọn hoặc sắp xếp số

- BT 260.** Cho tập hợp A gồm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau đôi một được lập từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của A . Tính xác suất để phần tử đó là số chẵn.
- BT 261.** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để chọn được là số chẵn ?
- BT 262.** Cho tập hợp A gồm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên từ A hai phần tử. Tính xác suất để hai phần tử được lấy ra từ A có một số chẵn và một số lẻ.
- BT 263.** Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn ?
- BT 264.** Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Lấy ngẫu nhiên 2 phần tử của X . Tính xác suất để 2 số lấy được đều là số chẵn ?
- BT 265.** Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm có 2 chữ số. Chọn ngẫu nhiên 1 số từ S . Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng đơn vị và hàng chục đều là số chẵn ?
- BT 266.** Cho E là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau đôi một được lấy từ: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên 1 phần tử của E . Tính xác suất để phần tử được chọn là số có 3 chữ số đều chẵn.
- BT 267.** Có 20 thẻ đựng trong 2 hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ từ 2 hộp (mỗi hộp 1 thẻ). Tính xác suất lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn ?
- BT 268.** Một chiếc hộp gồm có 9 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ (không kể thứ tự), rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn ?
- BT 269.** Gọi S là tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau lập từ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S . Tính xác suất để tích 2 số được chọn là số chẵn ?
- BT 270.** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S . Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ ?
- BT 271.** Cho 100 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2.
- BT 272.** Trong hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 thẻ lấy được là một số chia hết cho 3.
- BT 273.** Trong hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50, chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3.
- BT 274.** Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm có 4 chữ số khác nhau đôi một được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên từ tập X một số. Hãy tính xác suất để lấy được số tự nhiên từ tập X có tổng các chữ số bằng 14 ?

- BT 275.** Chọn ngẫu nhiên 3 số bất kỳ từ tập $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$. Tính xác suất để tổng 3 số được chọn bằng 12 ?
- BT 276.** Cho tập hợp $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và M là tập hợp tất cả các số gồm 2 chữ số phân biệt thuộc tập E . Lấy ngẫu nhiên một số thuộc M . Tính xác suất để tổng hai chữ số của số được chọn có giá trị lớn hơn 7 ?
- BT 277.** E là tập các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ngẫu nhiên một số trong E tính xác suất để lấy được số chia hết cho 5.
- BT 278.** Gọi E là tập hợp số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau thuộc tập E . Tính xác suất để hai số được chọn có đúng một số có chữ số 5 ?
- BT 279.** Gọi E là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 7. Tập E có bao nhiêu phần tử ? Chọn ngẫu nhiên một phần tử của E , tính xác suất được chọn chia hết cho 3 ?
- BT 280.** Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Hãy tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 ?
- BT 281.** Có 40 tấm thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 40. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một thẻ mang số chia hết cho 6.
- BT 282.** Có 20 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 5 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 5 tấm thẻ được chọn ra có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 4 ?
- BT 283.** Gọi X là tập hợp các số có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập X . Tính xác suất để chọn được một số thuộc X và số đó chia hết cho 9 ?
- BT 284.** Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 4; 5; 7; 8\}$. Ký hiệu G là tập hợp tất cả các số có bốn chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập X , chia hết cho 5. Tính số phần tử của G . Lấy ngẫu nhiên một số trong tập G , tính xác suất để lấy được một số không lớn hơn 4000.
- BT 285.** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ các số mới lập đó. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng nghìn nhỏ hơn 5 ?
- BT 286.** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S . Tính xác suất để số được chọn là số lớn hơn số 2016 ?
- BT 287.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 1 số trong các số được lập, tính xác suất để số được lấy có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ ?
- BT 288.** Lập số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số có mặt chữ số 6.
- BT 289.** Cho tập A gồm các số có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Lấy ngẫu nhiên 2 số từ A . Tìm xác suất để 2 số được lấy có ít nhất 1 số chẵn ?

- BT 290.** Gọi M là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ M . Tính xác suất để số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa 2 chữ số lẻ (các chữ liền trước và liền sau của chữ số 0 là các chữ số lẻ) ?
- BT 291.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần. Trong các số tự nhiên nói trên, chọn ngẫu nhiên một số, tìm xác suất để số chọn chia hết cho 3.
- BT 292.** Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số trong đó chữ số 4 có mặt đúng 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. Trong các số tự nhiên trên, chọn ngẫu nhiên 1 số, tìm xác suất để số được chọn không bắt đầu bởi số 12.
- BT 293.** Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập A . Tìm xác suất để phần tử đó là một số không chia hết cho 5.
- BT 294.** Có 12 số tự nhiên khác nhau trong đó có 5 số chẵn và 7 số lẻ, chọn ngẫu nhiên 3 số. Tính xác suất để tổng 3 số được chọn là số chẵn.
- BT 295.** Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho:
- Tổng số chấm trong 2 lần gieo là số chẵn.
 - Tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 6.
 - Ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt 1 chấm.
 - Tổng số chẵn bằng 7.
 - Tổng số chấm nhỏ hơn 6.
 - Tổng số chấm chia hết cho 5.
 - Lần đầu là số nguyên tố, lần sau là số chẵn.
 - Có đúng 1 mặt 6 chấm xuất hiện.
- BT 296.** Gọi A là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà mỗi chữ số đều lớn hơn 4. Hãy xác định số phần tử của tập A . Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập A , tính xác suất để số được chọn có ba chữ số lẻ đứng kề nhau.
- BT 297.** Cho tập hợp $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có nhiều nhất ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được thành lập từ tập E . Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập hợp M . Tính xác suất lấy được một số thuộc tập M , sao cho tổng các chữ số của số đó bằng 10.
- BT 298.** Gọi A là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp A , tính xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4.

Thông minh nghĩa là biết tôn trọng và rõ ràng, hơn là chỉ biết đúng hoặc sai.

R. Kiyosaki

§ 5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

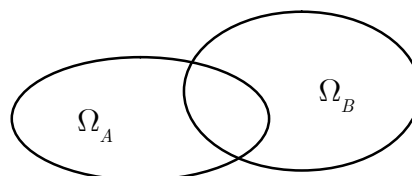
☆☆☆

① Quy tắc cộng xác suất

a) Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B . Biến cố “ A hoặc B xảy ra”, kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là hợp của hai biến cố A và B .

Khi đó: $\Omega_A \cup \Omega_B \subset \Omega$.

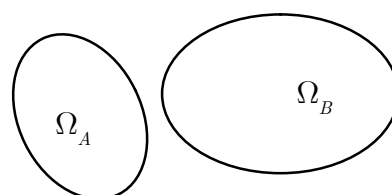


Ví dụ. Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi toán” và B là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi Lý”.

Khi đó: $A \cup B$ là biến cố: “.....”

b) Biến cố xung khắc

Cho hai biến cố A và B . Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Khi đó: $\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset$.



Ví dụ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: “Bạn đó là học sinh lớp 11C₁” và gọi B là biến cố: “Bạn đó là học sinh lớp 11C₂”. Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc.

c) Quy tắc cộng xác suất hai biến cố xung khắc

- Nếu A và B là biến cố xung khắc thì xác suất biến cố $A \cup B$ là $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Cho n biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ đôi một là các biến cố xung khắc với nhau.

Khi đó: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$.

Ví dụ 1. Một hộp đựng 4 bi xanh và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để có ít nhất 2 bi xanh.

.....
.....
.....
.....
.....

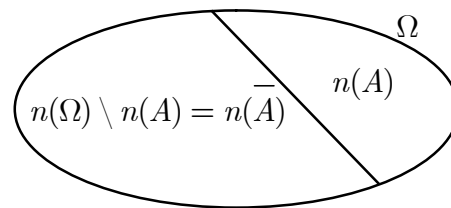
Ví dụ 2. Trên một kệ sách có 7 quyển sách Toán, 6 quyển sách Lí và 4 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên từ kệ sách đó ra hai quyển sách. Tính xác suất để lấy được hai quyển sách cùng một môn.

.....
.....
.....
.....

d) Biến cố đối

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố “không A ”, kí hiệu là $\bar{A}$, được gọi là biến cố đối của A . Ta nói A và $\bar{A}$ là hai biến cố đối của nhau.

Khi đó: $\Omega_{\bar{A}} = \Omega \setminus \Omega_A \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.



Câu hỏi 1. Hai biến cố đối nhau có phải là hai biến cố xung khắc ?

Câu hỏi 2. Hai biến cố xung khắc có phải là hai biến cố đối ?

Ví dụ 1. Một xạ thủ bắn vào bia một viên đạn với xác suất $\frac{2}{7}$. Khi đó xác suất bắn trượt là bao nhiêu ?

Ví dụ 2. Từ một hộp có 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên cùng một lúc ra 4 quả. Tính xác suất sao cho:

a) Bốn quả lấy ra cùng màu.

b) Bốn quả lấy ra có đủ hai màu.

Giải

.....

.....

.....

.....

.....

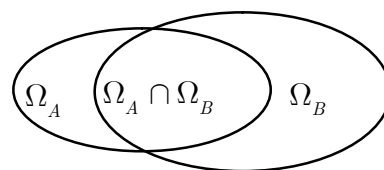
.....

.....

② Quy tắc nhân xác suất

(1) Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B . Biến cố “ A và B cùng xảy ra”, kí hiệu $A \cap B$ (hay AB), gọi là giao của hai biến cố A và B .



Ví dụ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường.

Gọi A là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi toán” và gọi B là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi Lý”.

Khi đó: $A \cap B$ là biến cố: “.....”

(2) Hai biến cố độc lập

Ví dụ. Gieo một đồng xu liên tiếp 2 lần. Gọi A là biến cố: “Lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt sấp” và gọi B là biến cố: “Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt ngửa” là 2 biến cố độc lập.

- Hai biến cố được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng xác suất xảy ra của biến cố kia.
- Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì A và $\bar{B}$, $\bar{A}$ và B , $\bar{A}$ và $\bar{B}$ cũng là độc lập.

- Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì ta luôn có: $P(AB) = P(A).P(B)$.
- Cho n biến cố $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$ độc lập với nhau từng đôi một. Khi đó:

Ví dụ 1. Một cầu thủ sút bóng vào cầu môn hai lần. Biết rằng xác suất sút vào cầu môn là $\frac{3}{8}$. Tính xác suất để cầu thủ đó sút hai lần bóng đều vào được cầu môn ?

- Cả hai xạ thủ đều bắn trúng bia.
- Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia.
- Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

Áp dụng các nguyên tắc tính xác suất để giải bài toán, thường ta làm theo các bước sau:

- **Bước 1.** Gọi A là biến cố cần tính xác suất và A_i , ($i = \overline{1, n}$) là các biến cố liên quan đến A sao cho:
 - + Biến cố A biểu diễn được theo các biến cố A_i , ($A_1, A_2, \dots, A_n$).
 - + Hoặc xác suất của các biến cố A_i tính toán dễ dàng hơn so với A .
- **Bước 2.** Biểu diễn biến cố A theo các biến cố A_i .
- **Bước 3.** Xác định mối liên hệ giữa các biến cố và áp dụng các nguyên tắc:
 - + Nếu A_1, A_2 xung khắc ($A_1 \cap A_2 = \emptyset$) $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.
 - + Nếu A_1, A_2 bất kỳ $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1.A_2)$.
 - + Nếu A_1, A_2 độc lập $\Rightarrow P(A_1.A_2) = P(A_1).P(A_2)$.
 - + Nếu A_1, A_2 đối nhau $\Rightarrow P(A_1) = 1 - P(A_2)$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

- BT 299.** Một cặp vợ chồng mong muốn sinh bằng được con trai (sinh được con trai rồi thì không sinh nữa, chưa sinh được thì sẽ sinh tiếp). Xác suất sinh được con trai trong mỗi lần sinh là $0,51$. Tìm xác suất sao cho cặp vợ chồng đó mong muốn sinh được con trai ở lần sinh thứ 2.
- BT 300.** Ba xạ thủ độc lập cùng bắn vào một cái bia. Xác suất bắn trúng mục tiêu của mỗi xạ thủ là $0,6$.
- a) Tính xác suất để trong 3 xạ thủ bắn có đúng một xạ thủ bắn trúng mục tiêu.
 - b) Muốn mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn phải có ít nhất hai xạ thủ bắn trúng mục tiêu. Tính xác suất để mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn.
- BT 301.** Hai xạ thủ A và B cùng bắn vào tấm bia mỗi người mỗi phát. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ A là $0,7$. Tìm xác suất bắn trúng bia của xạ thủ B . Biết xác suất có ít nhất một người bắn trúng bia là $0,94$.
- BT 302.** Hai người độc lập nhau cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Xác suất bắn trúng bia của họ lần lượt là $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$. Tính xác suất của các biến cố sau:
- a) A : “cả hai đều bắn trúng”.
 - b) B : “cả hai đều bắn trượt”.
 - c) C : “ít nhất một người bắn trúng”.
 - d) D : “có đúng một người bắn trúng”.
- BT 303.** Có 3 người cùng đi câu cá; xác suất câu được cá của người thứ nhất là $0,5$; xác suất câu được cá của người thứ hai là $0,4$; xác suất câu được cá của người thứ ba là $0,2$. Tính xác suất biến cố:
- a) Có đúng 1 người câu được cá.
 - b) Có đúng 2 người câu được cá.
 - c) Người thứ 3 luôn luôn câu được cá.
 - d) Có ít nhất 1 người câu được cá.
- BT 304.** Một xạ thủ bắn vào bia 4 lần độc lập; xác suất bắn trúng một lần là $0,3$. Tính xác suất biến cố:

- a) Cả 4 lần đều bắn trượt.
- b) Có đúng 3 lần bắn trúng.
- c) Lần thứ 1 bắn trúng, lần thứ 2 bắn trượt.
- d) Ít nhất 2 lần bắn trúng.

BT 305. Có 2 hộp đựng thẻ, mỗi hộp đựng 12 thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Từ hộp rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong 2 thẻ rút ra có ít nhất 1 thẻ đánh số 12.

BT 306. Có ba xạ thủ cùng bắn vào một tấm bia. Xác suất trúng đích lần lượt của mỗi người là 0,6; 0,7 và 0,8.

- a) Tính xác suất để có ít nhất một người bắn trúng bia.
- b) Giả sử ba xạ thủ này bắn vào bia đến khi bắn trúng bia thì thôi. Tính xác suất để tấm bia được bắn trúng ở viên đạn thứ 5.

BT 307. Có một xạ thủ bắn mới tập bắn, bắn vào tấm bia. Xác suất trúng đích là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn:

- a) Ít nhất một lần trúng bia.
- b) Bắn trúng bia đúng lần thứ nhất.

BT 308. Việt và Nam thi đấu với nhau một trận bóng bàn, người nào thắng trước 3 séc thì thắng trận. Xác suất Nam thắng mỗi séc là 0,4 (giả sử không có séc hòa). Tính xác suất Nam thắng trận ?

BT 309. Một nhóm xạ thủ gồm có 10 người trong đó có 3 xạ thủ loại I và 7 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích trong mỗi lần bắn của một xạ thủ loại I và loại II lần lượt là 0,9 và 0,8. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ trong 10 người và cho bắn một viên đạn. Tính xác suất để viên đạn trúng đích ?

BT 310. Có ba lô hàng. Người ta lấy một cách ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Biết rằng xác suất để được một sản phẩm có chất lượng tốt ở từng lô hàng lần lượt là 0,5; 0,6 và 0,7. Tính xác suất để trong ba sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt ?

BT 311. Một hộp chứa 11 bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 bi một cách ngẫu nhiên, rồi cộng các số trên 6 bi được rút ra với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là số lẻ.

BT 312. Một hộp có đựng 4 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từng sản phẩm một, không bỏ trở lại để kiểm tra cho đến khi lấy ra hai phế thì thôi. Tính xác suất của biến cố việc kiểm tra chỉ dừng lại ở sản phẩm thứ 2.

BT 313. Một thủ kho có một chùm chìa khóa gồm 10 chiếc hình thức giống nhau nhưng trong đó chỉ có 3 chìa là mở được kho. Anh ta mở ngẫu nhiên từng chìa khóa một cho đến khi mở được kho. Tính xác suất để:

- a) Anh ta mở được kho ở lần thứ 3.
- b) Anh ta mở được kho mà không quá 3 lần mở.

BT 314. Một nồi hơi có 3 van bảo hiểm hoạt động độc lập với xác suất hỏng của van 1, van 2, van 3 trong khoảng thời gian t tương ứng là 0,1; 0,2 và 0,3. Nồi hơi hoạt động an toàn nếu ít nhất một van không hỏng. Tìm xác suất để nồi hơi hoạt động an toàn trong khoảng thời gian t .

- BT 315.** Trong thời gian có dịch bệnh ở vùng dân cư. Cứ 100 người bệnh thì phải có 20 người đi cấp cứu. Xác suất gặp người đi cấp cứu do mắc phải bệnh dịch ở vùng đó là 0,08. Tìm tỉ lệ mắc bệnh của vùng dân cư đó.
- BT 316.** Một máy bay có 5 động cơ gồm 3 động cơ bên cánh trái và hai động cơ bên cánh phải. Mỗi động cơ bên cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,09; mỗi động cơ bên cánh trái có xác suất hỏng là 0,04. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Máy bay chỉ thực hiện được chuyến bay an toàn nếu ít nhất hai động cơ làm việc. Tính xác suất để máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn.
- BT 317.** Ba cầu thủ sút phạt luân lưu 11 mét, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là x ; y và 0,6 (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn ?
- BT 318.** Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai được trừ 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hù họa một câu trả lời. Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1.
- BT 319.** Trong một lớp học có 60 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả hai tiếng Anh và Pháp. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất của các biến cố sau:
- A : “Sinh viên được chọn học tiếng Anh”.
 - B : “Sinh viên được chọn học tiếng Pháp”.
 - C : “Sinh viên được chọn học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp”.
 - D : “Sinh viên được chọn không học tiếng Anh và Tiếng Pháp”.
- BT 320.** Trong kì kiểm tra chất lượng ở hai khối lớp, mỗi khối có 25% học sinh trượt Toán, 15% trượt Lý, 10% trượt cả Lý lẫn Toán. Từ mỗi khối chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất sao cho:
- Hai học sinh đó trượt Toán.
 - Hai học sinh đó đều bị trượt một môn nào đó.
 - Hai học sinh đó không bị trượt môn nào.
 - Có ít nhất một trong hai học sinh bị trượt ít nhất một môn.
- BT 321.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, bạn X làm đề thi trắc nghiệm môn Hóa. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Bạn X trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại Khoa chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi Hóa của X không dưới 9,5 điểm ?
- BT 322.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, bạn X dự thi hai môn trắc nghiệm môn Hóa và Lí. Đề thi của mỗi câu gồm 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn, trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Mỗi môn thi bạn X làm hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại X chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để tổng hai môn thi của X không dưới 19 điểm.

§ 6. BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 2

☆☆☆

- BT 323.** Xếp ngẫu nhiên ba người nam và hai người nữ vào một dãy năm ghế kê theo hàng ngang. Tính xác suất để được kiểu xếp mà giữa hai người nam có đúng 1 người nữ.
- BT 324.** Gọi A là tập hợp tất cả các số gồm năm chữ số mà chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, hai chữ số còn lại khác nhau và thuộc tập hợp các chữ số 1, 2, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ A . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.
- BT 325.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, Thành đoàn thành lập tổ công tác gồm 5 người được chọn ngẫu nhiên từ 15 cán bộ đoàn trường học và 10 cán bộ các quận, huyện để tìm các chỗ trọ miễn phí cho những thí sinh có điều kiện khó khăn. Tính xác suất để trong 5 người được chọn có không quá 2 cán bộ đoàn trường.
- BT 326.** Trong một dự án nhà ở xã hội gồm có 5 tầng, mỗi tầng gồm có 6 căn hộ loại A và 4 căn hộ loại B . Một người mua nhà rút ngẫu nhiên căn hộ của mình. Tính xác suất để căn hộ anh ta rút được ở tầng 1 hoặc căn hộ loại A .
- BT 327.** Thực đơn ăn sáng tự chọn ở một khách sạn gồm 4 món xúp, 5 món bánh và 2 món cơm. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 3 món. Tính xác suất để 3 món được chọn có cả xúp, bánh và cơm.
- BT 328.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, một hội đồng coi thi có 216 thí sinh tham gia dự thi để xét công nhận tốt nghiệp THPT, trong đó trường X có 65 thí sinh dự thi. Sau buổi thi môn toán, một phóng viên phỏng vấn ngẫu nhiên 3 học sinh. Tính xác suất để 3 học sinh được phỏng vấn có ít nhất 2 học sinh ở trường X .
- BT 329.** Có hai đơn vị cung cấp thực phẩm phục vụ ăn trưa cho công nhân của một nhà máy. Đơn vị thứ nhất cung cấp 3 loại thực phẩm, đơn vị thứ hai cung cấp 4 loại thực phẩm. Người phụ trách bếp ăn lấy mỗi loại thực phẩm một mẫu để đi kiểm tra và người kiểm tra chọn 3 mẫu bất kỳ. Tính xác suất để cả hai đơn vị cung cấp đều có mẫu được chọn.
- BT 330.** Trong đợt tình nguyện tiếp sức mùa thi, một trường học có 4 em lớp 11A, 5 em lớp 11B, 6 em lớp 11C đăng kí tham dự. Hỏi có bao nhiêu cách cử 7 em làm nhiệm vụ tại cổng trường đại học X sao cho mỗi lớp có ít nhất một em.
- BT 331.** Ban chấp hành Đoàn của một trường THPT cần chọn ra một nhóm học sinh tình nguyện gồm 5 học sinh từ 9 học sinh lớp 10 và 7 học sinh lớp 11. Tính xác suất để trong nhóm được chọn có ít nhất một học sinh lớp 11.
- BT 332.** Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên ba người để biểu diễn tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.
- BT 333.** Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Trong buổi họp đầu năm, thầy giáo chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp gồm có lớp trưởng, lớp phó và bí thư. Tính xác suất để chọn ra 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào.
- BT 334.** Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

- BT 335.** (ĐH D – 2002) Tìm số nguyên dương n để: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$.
- BT 336.** (ĐH B – 2002) Cho đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_{2n}$, ($n > 2$, $n \in \mathbb{Z}^+$) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Tìm n ?
- BT 337.** (ĐH A – 2002) Cho khai triển nhị thức:
- $$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right) = C_n^0 2^{\frac{x-1}{2}} + C_n^1 2^{\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}} 2^{\frac{-x}{3}} + \dots + C_n^{n-1} 2^{\frac{x-1}{2}} \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n 2^{\left(\frac{-x}{3}\right)^n} \quad (\text{với } n \text{ là số nguyên dương}),$$
- biết rằng trong khai triển đó: $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tìm n và x .
- BT 338.** (ĐH A – 2003) Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$, (n là số nguyên dương và $x > 0$).
- BT 339.** (ĐH D – 2003) Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.
- BT 340.** (ĐH A – 2004) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1 + x^2(1 - x)]^8$.
- BT 341.** (ĐH B – 2004) Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập đc bao nhiêu đề để kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho mỗi đề thi nhất thiết phải có đủ 3 loại (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2 ?
- BT 342.** (ĐH D – 2004) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$.
- BT 343.** (ĐH A – 2005) Tìm số nguyên dương n , biết rằng:
- $$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$
- BT 344.** (ĐH B – 2005) Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ ?
- BT 345.** (ĐH D – 2005) Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng số nguyên dương n thỏa mãn: $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$.
- BT 346.** (ĐH A – 2006) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niuton của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.
- BT 347.** (ĐH D – 2006) Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy ?

- BT 348.** (ĐH B – 2007) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2+x)^n$, biết: $3^n C_n^0 + 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$.
- BT 349.** (ĐH D – 2007) Tìm hệ số của số x^5 trong khai triển: $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.
- BT 350.** (ĐH A – 2008) Cho khai triển: $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$.
Tìm số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.
- BT 351.** (ĐH D – 2008) Tìm số nguyên dương n thỏa $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$.
- BT 352.** (ĐH A – 2012) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton: $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n, \forall x \neq 0$.
- BT 353.** (ĐH B – 2012) Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.
- BT 354.** (ĐH A – 2013) Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn là số chẵn.
- BT 355.** (ĐH B – 2013) Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi. Tính xác suất để lấy được hai viên bi cùng màu.
- BT 356.** (ĐH B – 2014) Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.
- BT 357.** (ĐH A – 2014) Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn?
- BT 358.** (THPT QG – 2015) Trong đợt ứng phó dịch MERS – CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên ba đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất hai đội của các trung tâm y tế cơ sở được chọn.
- BT 359.** (THPT QG – 2016) Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa vào phòng học đó.

Thật nguy hiểm khi tưởng rằng mình đang suy nghĩ, nhưng thực ra lại đang sao chép câu trả lời

Kiyosaki

===== ★ ★ ★ =====

- b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

Page - 83 -

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 360. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

- a) $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$
- b) $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}.$
- c) $1.4 + 2.7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2.$
- d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
- e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$
- f) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$
- g) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$
- h) $1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1).$
- i) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$
- j) $1.2^2 + 2.3^3 + 3.4^4 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$
- k) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$
- l) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$
- m) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$

BT 361. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

- a) $u_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6. b) $u_n = n^3 - n$ chia hết cho 3.
- c) $u_n = 2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6. d) $u_n = 13^n - 1$ chia hết cho 6.
- e) $u_n = 4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9. f) $u_n = 4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9.
- g) $u_n = 7 \cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5. h) $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.
- i) $u_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133. j) $u_n = 2^{4n} - 1$ chia hết cho 15.

BT 362. Chứng minh rằng:

- a) $2^{n+2} > 2n + 5, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ b) $2^{n+1} > 2n + 3, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$
- c) $3^{n-1} > n(n+2), \forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}.$ d) $n^n \geq (n+1)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
- e) $(n!)^2 \geq n^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ f) $2^n > n^2, \forall n \geq 5, n \in \mathbb{N}.$

§ 2. Dãy số

☆☆☆

① Định nghĩa

- Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số).
- Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số. Chẳng hạn:
 - + $u_1 = u(1)$: số hạng thứ nhất (hay còn gọi là số hạng đầu).
 - + $u_2 = u(2)$: số hạng thứ hai.
 - + $u_n = u(n)$: số hạng thứ n (hay còn gọi là số hạng tổng quát).

② Cách cho một dãy số

- **Cách 1.** Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ 1. Cho dãy (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$.

Dãy số được viết dưới dạng khai triển là:

Tính: $u_{50} = \dots\dots\dots$ và tính: $u_{99} = \dots\dots\dots$

- **Cách 2.** Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (hay quy nạp):

- + Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu),
- + Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó).

Ví dụ 2. Cho dãy số u_n được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2) \end{cases}$$

Dạng khai triển của dãy số trên là:

Tính $u_8 = ?$

.....

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases}$$
 (Dãy số Phibônaxi)

Dạng khai triển của dãy số trên là:

Tính $u_7 = ?$

.....

Ví dụ 4. Tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau đây:

a) Dãy số (u_n) với
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$
 b) Dãy số (u_n) với
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

Giải

.....

.....

.....

③ Dãy số tăng, dãy số giảm

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*, u_n < u_{n+1}$.
— (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*, u_n > u_{n+1}$.

Phương pháp xét tính tăng giảm của dãy số:

————→ **Phương pháp 1.** Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

- Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n > 0$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

————→ **Phương pháp 2.** Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ thì có thể so sánh tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với số 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

————→ **Phương pháp 3.** Nếu dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$).

Ví dụ 1. Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

- a) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. b) Dãy số (v_n) với $v_n = \frac{n+2}{4^n}$.

Giải.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 363. Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau:

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$

j) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

BT 364. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với:

a) $u_n = n^2 + 4n - 3$.

b) $u_n = -n^2 - 2n + 1$.

c) $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

d) $u_n = 3^n - n$.

e) $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

f) $u_n = \frac{n-1}{n+1}$.

g) $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$.

h) $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$.

i) $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$.

j) $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$.

k) $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 - 1}$.

l) $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$.

BT 365. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với:

a) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

b) $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

c) $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

d) $u_n = \frac{n+1}{3^n}$.

e) $u_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$.

f) $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$.

g) $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{n}$.

h) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

BT 366. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_{n-1} - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 + u_n} \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$

BT 367. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với:

a) $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$

b) $u_n = \frac{3n - 1}{3n + 1}$

c) $u_n = \frac{2n + 3}{3n + 2}$

d) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

e) $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

f) $u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}$

g) $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

h) $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

BT 368. Xét tính đơn điệu và bị chặn của các dãy số (u_n) với:

a) $u_n = 1 + (n-1).2^n$

b) $u_n = \frac{7n+5}{5n+7}$

c) $u_n = \frac{2n-13}{3n-2}$

d) $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}$

e) $u_n = \frac{n^2+3n+1}{n+1}$

f) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 4 \end{cases}$

BT 369. Cho dãy số (u_n) định bởi: $u_n = \frac{an^4+2}{2n^4+5}$. Định a để dãy số (u_n) tăng.

Thành công chỉ đến khi bạn làm việc tận tâm và luôn nghĩ đến những điều tốt đẹp

A. Schwarzenegger



DẠY SỐ PH9-B0-KA-X9

Phi-bô-na-xi (Fibonacci) (còn có tên là Leonardo da Pisa) là một nhà Toán học nổi tiếng người Italia. Trong cuốn sách Liber Abacci, năm 1202, ông có viết bài toán sau:

“Một đôi thỏ (gồm một con thỏ đực và một con thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cũng gồm một thỏ đực và một thỏ cái); mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau một năm sẽ có tất cả bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm (tháng giêng) có một đôi thỏ sơ sinh”.

Rõ ràng ở tháng giêng, cũng như ở tháng 2, chỉ có một đôi thỏ. Sang tháng 3, đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ con, vì thế ở tháng thứ 3 sẽ có $1 + 1 = 2$ đôi thỏ. Sang tháng tư, vì chỉ có đôi thỏ ban đầu sinh con nên ở tháng này có $1 + 2 = 3$ đôi thỏ. Sang tháng 5, hai đôi thỏ gồm đôi thỏ ban đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng 3 cùng sinh con nên tháng này có $3 + 2 = 5$ đôi thỏ,.....

Khái quát, nếu kí hiệu F_n là số đôi thỏ có ở tháng thứ n , thì với $n \geq 3$, ta có:

$$F_n = F_{n-1} + \text{số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ } n.$$

Do đó các đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ $(n - 1)$ chưa thể sinh con ở tháng thứ n , và mỗi đôi thỏ ở tháng thứ $(n - 2)$ sẽ sinh ra một đôi thỏ con, nên số đôi thỏ con được sinh ra ở tháng thứ n chính bằng F_{n-2} (số thỏ có ở tháng thứ $(n - 2)$).

$$\text{Nhu vậy: } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Việc giải quyết bài toán trên của Fibonacci dẫn đến việc khảo sát dãy số (F_n) :

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad (n \geq 3) \end{cases}.$$

Dãy số trên sau này nhà toán học Pháp Edouard Lucas gọi là dãy số Fibonacci.

§ 3. CẤP SỐ CỘNG

☆☆☆

Câu hỏi. Nhận xét tính chất đặc biệt chung của các dãy số sau:

- a) Dãy số: 2, 4, 6, 8, 10,.....
- b) Dãy số: -5; -2; 1; 4; 7; 10.
- c) Dãy số: 20, 15, 10, 5, 0, -5, -10,.....

① Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow n \geq 2, \boxed{u_n = u_{n-1} + d}$. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Câu hỏi ? Để chứng minh một dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta sẽ làm như thế nào ?

.....
.....

Ví dụ. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số cộng. Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó ?

- a) Dãy số $u(n)$ với $u_n = 19n - 5$.
- b) Dãy số $u(n)$ với $u_n = -3n + 1$.

Giải.
.....
.....
.....
.....

② Tính chất

Định lý 1. Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong

dãy, tức là $\boxed{u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}}$.

Chứng minh:
.....
.....
.....

Hệ quả. Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

Ví dụ 1. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó ?

Giải.
.....
.....

Ví dụ 2. Một tam giác vuông có chu vi bằng 12cm và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác đó.

Giải.
.....
.....
.....

③ **Số hạng tổng quát**

Định lí 2. Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

Chứng minh:
.....
.....

Ví dụ 1. Một cấp số cộng có 10 số hạng, trong đó số hạng đầu bằng 5, số hạng cuối bằng 23. Tìm cấp số cộng đó ?

Giải.
.....
.....

Ví dụ 2. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Giải.
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Giải.
.....
.....
.....
.....

Câu hỏi ? Để tìm n số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa điều kiện, ta cần nhớ:

- + Nếu n lẻ, cần đặt số hạng cần tìm là, công sai:
- + Nếu n chẵn, cần đặt số hạng cần tìm là, công sai:

④ **Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng**

Định lí 3. Giả sử (u_n) là 1 cấp số cộng có công sai d . Gọi $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có:
$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

Chứng minh:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Giải.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Giải.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Tính các tổng sau:

a) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$. b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 370. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$.

BT 371. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21 \end{cases}$.

g) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases}$.

h) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$.

i) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$.

j) $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases}$.

k) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases}$.

l) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases}$.

m) $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$.

n) $\begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases}$.

BT 372. Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases}$.

c) $\frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2}$.

d) $\begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases}$.

BT 373. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, u_3, \dots$ có công sai d .

a) Biết $u_2 + u_{22} = 40$. Tính S_{23} .

b) Biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$. Tính $u_6 + u_{11}$ và $u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$.

c) Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính S_{19} .

d) Biết $u_{23} + u_{57} = 29$. Tính $u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$.

- BT 374.** Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:
- Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 105.
 - Tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.
 - Tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương bằng 155.
- BT 375.** Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:
- Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương 70.
 - Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66.
 - Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504.
 - Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng là 384.
 - Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên.
 - Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất.
- BT 376.** Tìm năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.
- BT 377.** Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.
- BT 378.** Một cấp số cộng có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm cấp số cộng đó.
- BT 379.** Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó.
- BT 380.** Giữa các số 7 và 35, hãy đặt thêm sáu số nữa để được một cấp số cộng.
- BT 381.** Giữa các số 4 và 67, hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.
- BT 382.** Một người trồng 3003 cây theo một hình tam giác nhau sau: “hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây,.....”. Hỏi có bao nhiêu hàng cây được trồng như thế?
- BT 383.** Một công viên hình tam giác được trồng cây xanh theo hàng có quy luật của một cấp số cộng như sau: hàng thứ nhất có 9 cây, hàng thứ 10 có 54 cây, hàng cuối cùng có 2014 cây. Hỏi công viên đó có tất cả bao nhiêu hàng cây được trồng?
- BT 384.** Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8 / 3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1 / 1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đến đúng ngày 8 / 3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1 / 1 đến ngày 8 / 3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.
- BT 385.** Một tòa nhà hình tháp có 30 tầng và tổng cộng có 1890 phòng, càng lên cao thì số phòng càng giảm, biết rằng cứ 2 tầng liên tiếp thì hơn kém nhau 4 phòng. Quy ước rằng tầng trệt là tầng số 1, tiếp theo lên là tầng số 2, 3,... Hỏi tầng số 10 có bao nhiêu phòng?
- BT 386.** Khi ký hợp đồng dài hạn (10 năm) với các công nhân được tuyển dụng. Công ty liên doanh X đề xuất hai phương án trả lương để người lao động chọn, cụ thể là:

Phương án 1: người lao động sẽ nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.

Phương án 2: người lao động sẽ nhận được nhận 7 triệu đồng cho quý đầu tiên và kể từ quý làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 500.000 đồng mỗi quý.

Biết rằng mỗi năm có 4 quý.

Nếu em là người lao động, em sẽ chọn phương án nào ?

BT 387. Tìm x để ba số a , b , c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với:

a) $a = 10 - 3x$, $b = 2x^2 + 3$, $c = 7 - 4x$. b) $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$, $z = c^2 - ab$.

BT 388. Tìm các nghiệm của phương trình: $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$, biết rằng các nghiệm này phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng.

BT 389. Giải các phương trình sau:

a) $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970$.
b) $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245$.
c) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155$.
d) $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \dots + (2x + 96) = 1010$.

BT 390. Cho a , b , c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$. b) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.
c) $2(a + b + c)^3 = 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)]$.
d) ba số: $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ cũng là một cấp số cộng.
e) ba số: $b^2 + bc + c^2$, $a^2 + ac + c^2$, $a^2 + ab + b^2$ cũng là một cấp số cộng.
e) ba số: $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$; $\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$; $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, ($a, b, c > 0$) cũng là một cấp số cộng.

BT 391. Cho ba số a^2 , b^2 , c^2 theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai khác không. Chứng minh rằng: $\frac{1}{b + c}$; $\frac{1}{c + a}$; $\frac{1}{a + b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

BT 392. Cho tam giác ABC có $\tan \frac{A}{2}$, $\tan \frac{B}{2}$, $\tan \frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

BT 393. Cho tam giác ABC có $\cot \frac{A}{2}$, $\cot \frac{B}{2}$, $\cot \frac{C}{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh: ba cạnh a , b , c theo thứ tự cũng tạo thành một cấp số cộng.

BT 394. Tìm tham số m để phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng trong các trường hợp sau:

a) $f(x) = x^2 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$. b) $f(x) = x^4 + 2(m + 1)x^2 + 4 = 0$.
c) $f(x) = x^4 + (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$. d) $f(x) = x^4 - 10mx^2 + 9m = 0$.

BT 395. Tìm tham số m để phương trình $x^3 - (3m + 1)x^2 + 2mx = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng ?

§ 4. CẤP SỐ NHÂN

☆☆☆

Câu hỏi. Nhận xét tính chất đặc biệt chung của các dãy số sau:

- a) Dãy số: 3, 6, 12, 24, 48,.....
- b) Dãy số: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
- c) Dãy số: 2, -6, 18, -54, 162, -486

① Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là:

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân } \Leftrightarrow n \geq 2, \boxed{u_n = u_{n-1} \cdot q}.$$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân $\left(q = \frac{u_{n+1}}{u_n}; n \geq 1 \right).$

Câu hỏi ? Để chứng minh một dãy số (u_n) là một cấp số nhân, ta sẽ làm như thế nào ?

.....
.....
.....

Ví dụ. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số nhân. Xác định công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó ?

- a) Dãy số $u(n)$ với $u_n = (-3)^{2n+1}$
- b) Dãy số $u(n)$ với $u_n = (-1)^n \cdot 5^{3n+2}$.

Giải.
.....
.....
.....

② Tính chất

Định lý 1. Nếu $u(n)$ là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là: $\boxed{u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}}, (k \geq 2).$

Hệ quả. Nếu a, b, c là ba số khác 0, thì "ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $b^2 = ac$ ".

Ví dụ. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Giải.
.....
.....

.....
.....
③ Số hạng tổng quát

Định lí 2. Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 0$ thì số hạng tổng quát u_n của nó được tính bởi công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $n \geq 2$.

Chứng minh:

.....

.....

.....

Ví dụ. Một cấp số nhân có tám số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm cấp số nhân đó ?

Giải.

.....

.....

④ Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

Định lí 3. Giả sử (u_n) là cấp số nhân có công bội q . Gọi $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

• Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$.

• Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Ví dụ 1. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

Giải.

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tính tổng:

a) $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$. b) $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.

Giải.

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 396. Tìm số hạng đầu tiên, công bội của cấp số nhân trong các trường hợp sau:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$

j) $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases}$

l) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}$

BT 397. Tìm a, b biết rằng $1, a, b$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

BT 398. Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

BT 399. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được 1 cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

BT 400. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

BT 401. Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

BT 402. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó.

BT 403. Tìm m để phương trình $x^3 + (5 - m)x^2 + (6 - 5m)x - 6m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân ?

BT 404. Chứng minh rằng với mọi m thì phương trình $x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0$ luôn có ba nghiệm và ba nghiệm này lập thành cấp số nhân.

BT 405. Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số còn lại và nửa quả, ... Đến người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa. Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu xoài ở đầu mùa ?

Mỗi ngày biết thêm những điều chưa biết, mỗi tháng không quên những điều đã biết, như vậy mới là người ham học

Tử Hạ

PHẦN 2. HÌNH HỌC

Chương I : PHÉP BẾN HÌNH

§ 1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BẾN HÌNH

① Định nghĩa

Phép biến hình là một quy tắc để ứng với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, ta xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

② Kí hiệu và thuật ngữ

Cho phép biến hình F .

— Nếu M' là ảnh của điểm M qua F thì ta viết $M' = F(M)$. Ta nói phép biến hình F biến điểm M thành điểm M' .

— Nếu H là một hình nào đó thì $H' = \{M' | M' = F(M), M \in H\}$ được gọi là ảnh của hình H qua F . Kí hiệu là $H' = F(H)$.

③ Phép dời hình

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Phép dời hình biến:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến tia thành tia.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính với đường tròn ban đầu.
- Biến góc thành góc bằng góc ban đầu.

§ 2. PHÉP TỊNH TIẾN

① Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

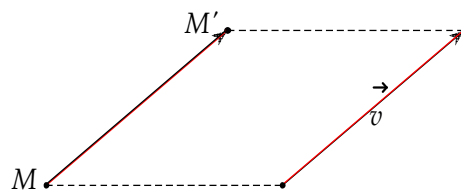
Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ được kí hiệu $T_{\vec{v}}$.

Như vậy: $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

② Tính chất

Phép tịnh tiến là phép biến hình:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.



— Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

③ **Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi $M'(x_{M'}; y_{M'})$ là ảnh của $M(x_M; y_M)$ qua phép tịnh tiến

theo $\vec{v} = (a; b)$. Khi đó:
$$\begin{cases} x_{M'} = x_M + a \\ y_{M'} = y_M + b \end{cases}$$

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

BT 406.

Trong mặt phẳng tọa độ

Oxy , cho $\vec{v} = (2; 1)$, điểm $M(3; 2)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho

a) $A = T_{\vec{v}}(M)$.

b) $M = T_{\vec{v}}(A)$.

BT 407.

Trong mặt phẳng tọa độ

Oxy , cho $\vec{v} = (-1; 3)$, điểm $M(-1; 4)$. Tìm tọa độ A sao cho

a) $A = T_{2\vec{v}}(M)$.

b) $M = T_{-\vec{v}}(A)$.

BT 408.

Trong mặt phẳng tọa độ

Oxy , cho đường thẳng d . Hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ trong các trường hợp sau:

a) $d : 2x - 3y + 12 = 0$, $\vec{v} = (4; -3)$.

b) $d : 2x - 3y + 5 = 0$, $\vec{v} = (3; 2)$.

c) $d : 3x - y + 2 = 0$, $\vec{v} = (-4; 2)$.

d) $d : 2x + y - 4 = 0$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ với $A(3; 1)$, $B(-1; 8)$.

e) $d : 3x + 4y - 5 = 0$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ với $A(0; 2)$, $B(2; 3)$.

f) $d : x + 3y - 2 = 0$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB}$ với $A(-2; 3)$, $B(0; 2)$.

g) d cắt Ox , Oy tại $A(-1; 0)$, $B(0; 5)$, $\vec{v} = (2; 2)$.

BT 409.

Trong mặt phẳng tọa độ

Oxy , cho đường tròn (C) . Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}$ trong các trường hợp sau:

a) $(C) : (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 6$, $\vec{v} = (3; 2)$.

b) $(C) : (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$, $\vec{v} = (2; -3)$.

c) $(C) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ với $A(-1; 1)$, $B(1; -2)$.

d) $(C) : (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$, $\vec{v} = -\overrightarrow{CB}$ với $B(2; -3)$, $C(-1; 5)$.

e) $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 8 = 0$, $\vec{v} = (5; -2)$.

- f) $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, $\vec{v} = (-2; 3)$.
g) $(C): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ với $A(-1; 1)$, $B(1; -2)$.
h) $(C): x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$, $\vec{v} = 3\overrightarrow{BC}$ với $B(1; -2)$, $C(-1; -5)$.

BT 410.

Trong mặt phẳng tọa độ

Oxy , cho $A(3; 5)$, $B(-1; 1)$, $\vec{v} = (-1; 2)$, đường thẳng d và đường tròn (C) có phương trình: $d: x - 2y + 3 = 0$, $(C): (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

- a) Tìm ảnh của các điểm A' , B' theo thứ tự là ảnh của A , B qua phép tịnh tiến $\vec{v}$.
b) Tìm tọa độ điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến $\vec{v}$.
c) Tìm phương trình đường thẳng d' , đường tròn (C') lần lượt là ảnh của d , (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}$.

BT 411.

Trong mặt phẳng tọa độ

Oxy , cho tam giác ABC có ảnh qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2; 5)$ là tam giác $A'B'C'$ và tam giác $A'B'C'$ có trọng tâm là $G'(-3; 4)$, biết rằng $A(-1; 6)$, $B(3; 4)$. Tìm A' , B' , C .

BT 412.

Trong mặt phẳng tọa độ

Oxy , cho $A(1; 3)$, $B(-2; 2)$, $C(3; -4)$. Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi (C) là đường tròn đi qua ba điểm A , B , C . Hãy xác định:

- a) $A' = T_{\overrightarrow{BC}}(A)$ và $B' = T_{\overrightarrow{AC}}(B)$. b) $A_1 = T_{\overrightarrow{CG}}(A)$ và $G_1 = T_{\overrightarrow{AM}}(G)$.
c) $d' = T_{\overrightarrow{BM}}(d)$ với d' là đường thẳng đi qua A_1 , M_1 và d là đường thẳng qua A , M .

BT 413.

Trong mặt phẳng tọa độ

Oxy , cho một phép tịnh tiến biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') . Hãy xác định phép tịnh tiến đó trong các trường hợp sau:

- a) $(C): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$, $(C'): (x - 10)^2 + (y + 5)^2 = 16$.
b) $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$, $(C'): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
c) $(C): (x + m)^2 + (y - 2)^2 = 5$, $(C'): x^2 + y^2 + 2(m - 2)y + 12 + m^2 = 6x$.

BT 414.

Trong mặt phẳng tọa độ

Oxy , cho $\vec{v} = (-2; 1)$ và hai đường thẳng $d: 2x - 3y + 3$ và $d_1: 2x - 3y - 5 = 0$.

- a) Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$.
b) Tìm tọa độ của $\vec{u}$ có giá vuông góc với đường thẳng d để d_1 là ảnh của d qua $T_{\vec{u}}$.

BT 415. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - y - 9 = 0$.

- a) Tìm phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ có phương song song với trục Ox , biến d thành đường thẳng d' đi qua gốc tọa độ. Khi đó hãy viết phương trình đường thẳng d' .

- b) Tìm phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ có giá song song với trục Oy , biến d thành d'' đi qua điểm $A(1;1)$.

BT 416. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ cùng phương với trục hoành biến đường thẳng $d : x - 4y + 4 = 0$ thành đường thẳng d' qua $A(1;-3)$.

BT 417. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình là $d : 3x - 5y + 3 = 0$ và $d' : 3x - 5y + 24 = 0$. Tìm $\vec{v}$, biết $|\vec{v}| = \sqrt{13}$ và $T_{\vec{v}}(d) = d'$.

BT 418. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến điểm $M(3;-1)$ thành một điểm trên đường thẳng $d : x - y - 9 = 0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$, biết rằng $|\vec{v}| = 5$.

BT 419. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-2;3)$ biến điểm M thành điểm M' nằm trên trục tung.

BT 420. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có phương trình chứa cạnh $AB : 3x - 2y + 3 = 0$ và chứa cạnh $CD : 3x - 2y - 6 = 0$. Tìm tọa độ của $\vec{v}$, biết rằng $CD = T_{\vec{v}}(AB)$ và $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$.

BT 421. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng d, d' lần lượt có phương trình là $d : 3x - y - 7 = 0, d' : 3x - y + 13 = 0$ và vectơ $\vec{u} = (1;-1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{v}$ trong phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến d thành d' , biết rằng hai vectơ $\vec{v}$ và $\vec{u}$ cùng phương.

BT 422. Tìm phương trình ảnh của các đường sau qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$:

- a) Elip $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \vec{v} = (-3,4).$ b) Parabol $(P) : y = x^2 - 2x, \vec{v} = (1;1).$

BT 423. Cho $(P) : y = x^2 - 4x + 7$ và $(P') : y = x^2$. Tìm phép tịnh tiến biến (P) thành (P') .

BT 424. Cho tam giác ABC có $A(-1;2), B(-3;1), C(2;-4)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC .

- a) Tìm $A' = T_{\vec{v}}(A).$ b) Chứng minh: A', P, N thẳng hàng.
c) Tìm Q để $MNPQ$ là hình bình hành. d) Tìm $A'M' = T_{\vec{v}}(AM).$

BT 425. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 150^\circ, \widehat{D} = 90^\circ, AB = 6\sqrt{3}, CD = 12$. Tính độ dài các cạnh AD và BC .

BT 426. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a, \widehat{BAD} = 75^\circ, \widehat{ADC} = 45^\circ$. Tính AD .

BT 427. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M sao cho C nằm trong tam giác MBD , giả sử $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$. Chứng minh: $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$.

BT 428. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh A cố định, BD có độ dài không đổi bằng $2a$, ba điểm A, B, D nằm trên một đường tròn cố định $(O;R)$. Tìm quỹ tích điểm C .

BT 429. Cho đoạn thẳng AB và đường tròn (C) tâm O bán kính R nằm về một phía của đường thẳng AB . Lấy điểm M trên (C) , rồi dựng hình bình hành $ABMM'$. Tìm tập hợp các điểm M' khi M di động trên (C) .

Thiên tài là sự kiên nhẫn lâu dài của tư tưởng

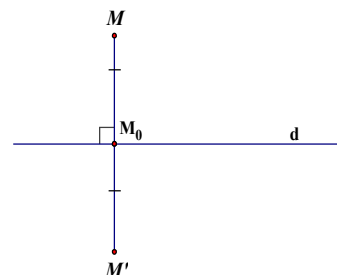
J. Newton

Bài đọc thêm

§ 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

① Định nghĩa

- Điểm M' được gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' . Khi điểm M nằm trên d thì ta xem M đối xứng với chính nó qua đường thẳng d .
- Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d , hay gọi tắt là phép đối xứng trục.
- Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng. Kí hiệu: D_d .



Như vậy: $M' = D_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0 M'} = -\overrightarrow{M_0 M}$ với M_0 là hình chiếu vuông góc của M lên d .

② Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , với mỗi điểm $M(x_M; y_M)$, gọi $M'(x_{M'}; y_{M'}) = D_d(M)$

- Nếu chọn d là trục Ox , thì ta có:
$$\begin{cases} x_{M'} = x_M \\ y_{M'} = -y_M \end{cases}.$$
- Nếu chọn d là trục Oy , thì ta có:
$$\begin{cases} x_{M'} = -x_M \\ y_{M'} = y_M \end{cases}.$$

③ Tính chất

Phép đối xứng trục là một phép dời hình nên có đầy đủ tính chất của phép dời hình:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

④ Trục đối xứng của một hình

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng trục D_d biến H thành chính nó, tức là $H = D_d(H)$.

Hãy biết cách mỉm cười khi buồn bã

A. Lincoln

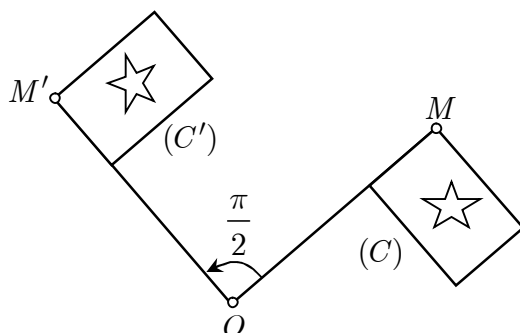
§ 4. PHÉP QUAY

① Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc quay α .

Điểm O gọi là tâm quay, α gọi là góc quay.

Phép quay tâm O góc α , kí hiệu là $Q_{(O; \alpha)}$.



📖 Câu hỏi:

- Phép quay nào biến lá cờ (C) thành lá cờ (C') :
- Phép quay nào biến lá cờ (C') thành lá cờ (C) :

② Tính chất

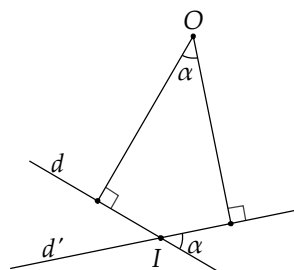
Phép tịnh tiến là phép biến hình biến:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Lưu ý. Giả sử phép quay tâm O góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d' .

Khi đó:

- Nếu $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng α .
- Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \alpha$.



③ Phương pháp xác định ảnh một điểm qua phép quay

Phương pháp 1. Sử dụng định nghĩa

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi $M'(x_{M'}; y_{M'})$ là ảnh của $M(x_M; y_M)$ qua phép quay tâm

$$I(a; b), \text{ góc quay } \alpha. \text{ Khi đó: } M'(x_{M'}; y_{M'}) = Q_{(I; \alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM & (1) \\ \widehat{MIM'} = \alpha & (2) \end{cases}$$

Từ (1), sử dụng công thức tính độ dài, sẽ tìm được phương trình thứ nhất theo 2 ẩn.

Từ (2), sử dụng định lý hàm số cos, sẽ tìm được phương trình thứ hai theo 2 ẩn.

Giải hệ phương trình này tìm được $x_{M'}$, $y_{M'}$, từ đó suy ra tọa độ điểm $M'(x_{M'}; y_{M'})$.

Phương pháp 2. Sử dụng công thức tọa độ.

$$M'(x_{M'}; y_{M'}) = Q_{(I; \alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = (x_M - a) \cos \alpha - (y_M - b) \sin \alpha + a \\ y_{M'} = (x_M - a) \sin \alpha + (y_M - b) \cos \alpha + b \end{cases}$$

- ③ **Hai hình bằng nhau.** Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 430. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;0)$, $B(0;-2)$. Tìm A' , B' lần lượt là ảnh của A , B qua phép quay tâm O , góc quay 90° .

BT 431. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O , góc quay α trong các trường hợp sau đây:

- a) $(C) : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $\alpha = 90^\circ$. b) $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$, $\alpha = 90^\circ$.
c) $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 1$, $\alpha = -90^\circ$. d) $(C) : x^2 + (y-1)^2 = 1$, $\alpha = 60^\circ$.
e) $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$, $\alpha = -30^\circ$. f) $(C) : x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$, $\alpha = 90^\circ$.

BT 432. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O , góc quay α trong các trường hợp sau đây:

- a) $d : x + y - 2 = 0$, $\alpha = 90^\circ$. b) $d : x - 3y + 11 = 0$, $\alpha = -90^\circ$.
c) $d : x - 3y + 5 = 0$, $\alpha = 60^\circ$. d) $d : 2x - y + 6 = 0$, $\alpha = 45^\circ$.

BT 433. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d : 2x - 3y + 2 = 0$ và đường tròn có phương trình là $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.

- a) Viết phương trình d' là ảnh của d qua phép $Q_{(O;90^\circ)}$.
b) Viết phương trình (C') là ảnh của (C) qua phép $Q_{(O;90^\circ)}$.

BT 434. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(2;2)$, đường thẳng $d : 2x - y - 2 = 0$ và đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Tìm ảnh của M , d , (C) :

- a) Phép quay tâm O góc quay 45° . b) Phép quay tâm $I(1;2)$ góc quay 45° .

BT 435. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(4;3)$, đường tròn $(C) : (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 5$. Tìm ảnh của A , (C) qua phép quay tâm O góc quay 60° .

BT 436. Cho tam giác ABC có các đỉnh kí hiệu theo hướng âm, dựng bên ngoài các hình vuông $ABDE$, $BCKF$. Gọi P là trung điểm của AC , H là điểm đối xứng của D qua B , M là trung điểm của FH .

- a) Xác định ảnh của $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BP}$ trong phép quay $Q_{(B;90^\circ)}$.
b) Chứng minh: $DF = 2BP$ và $DF \perp BP$.

BT 437. Cho tam giác ABC . Dựng về phía ngoài tam giác đó các tam giác BAE và CAF vuông cân tại A . Gọi I , M , J theo thứ tự là trung điểm của EB , BC , CF . Chứng minh tam giác IMJ vuông cân.

BT 438. Cho ba điểm A , B , C thẳng hàng theo thứ tự. Lấy các đoạn thẳng AB , BC làm cạnh, dựng các tam giác đều ABE và BCF nằm cùng về một phía so với đường thẳng AB . Gọi M , N lần lượt là các trung điểm của các đoạn thẳng AF và CE . Chứng minh tam giác BMN đều.

Bài đọc thêm

§ 5. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

① Định nghĩa

Cho điểm I . Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I , nghĩa là $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = \vec{0}$. Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là D_I .

② Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $I(x_I; y_I)$, $M(x_M; y_M)$ và $M'(x_{M'}; y_{M'})$ là ảnh của M qua

phép đối xứng tâm I . Khi đó:
$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M \\ y_{M'} = 2y_I - y_M \end{cases}$$

③ Tính chất

Phép đối xứng tâm:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

④ Tâm đối xứng của một hình

Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến hình H thành chính nó. Khi đó H được gọi là hình có tâm đối xứng.

§ 6. PHÉP VỊ TỰ & PHÉP ĐỒNG DẠNG

① Định nghĩa

Cho điểm O cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' , sao cho $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k và kí hiệu là $V_{(O;k)}$ (O được gọi là tâm vị tự).

② Các tính chất

- **Định lí 1.** Nếu phép vị tự tâm I tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = k \cdot MN$.
- **Định lí 2.** Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- Hệ quả:
 - + Biến đường thẳng không qua tâm vị tự thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
 - + Biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.
 - + Biến tia thành tia.
 - + Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.

- + Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.
- + Biến góc bằng góc ban đầu.

Lưu ý.

- Qua phép $V_{(O;k)}$ đường thẳng d biến thành chính nó khi và chỉ khi đường thẳng d qua tâm vị tự O .
- Nếu $M' = V_{(I;k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(I;\frac{1}{k}\right)}(M')$.

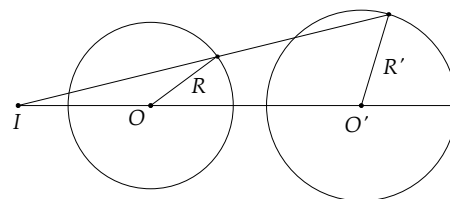
③ Ảnh của đường tròn qua phép vị tự

- **Định lí 3.** Phép vị tự tỉ số k biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = |k| \cdot R$.
- Chú ý: Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường tròn $(I; R)$ thành đường tròn $(I'; R')$ thì $|k| = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow k = \pm \frac{R'}{R}$ và $\overrightarrow{OI'} = k \cdot \overrightarrow{OI}$.

④ Tâm vị tự của hai đường tròn

- Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.
- Nếu tỉ số vị tự $k > 0$ thì tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự ngoài, nếu tỉ số vị tự $k < 0$ thì tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự trong.
- Cách xác định tâm vị tự:

- Nếu I là tâm vị tự ngoài, ta có: $\overrightarrow{IO} = \frac{R}{R'} \cdot \overrightarrow{IO'}$.
- Nếu I là tâm vị tự trong, ta có: $\overrightarrow{IO} = -\frac{R}{R'} \cdot \overrightarrow{IO'}$.



⑤ Phép đồng dạng

- Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỉ số k , ($k > 0$) nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta luôn có $M'N' = k \cdot MN$.
- Mọi phép đồng dạng tỉ số k đều là hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình D .

BÀI TẬP VẬN DỤNG

BT 439. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét phép vị tự tâm $O(0;0)$ sau:

- a) Cho $A(1;-1)$, $B(2;3)$. Tìm $A' = V_{(O;k)}(A)$ và $B' = V_{(O;k)}(B)$ với $k = -3$.
- b) Cho $M'(3;-1)$ và $M' = V_{(O;k)}(M)$ với $k = 3$. Tìm M .

BT 440. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường thẳng d trong các trường hợp:

- a) Cho $d: 2x - y + 3 = 0$. Tìm $d' = V_{(O;k)}(d)$ với $O(0;0)$ và $k = 2$.
- b) Cho $d: 3x + 2y - 6 = 0$. Tìm $d' = V_{(I;k)}(d)$ với $I(1;2)$ và $k = -2$.
- c) Cho $d: 2x - 3y + 6 = 0$. Tìm $d' = V_{(I;k)}(d)$ với $I(2;-1)$ và $k = -2$.

BT 441. Trong mặt phẳng Oxy , hãy tìm ảnh của đường thẳng (C) trong các trường hợp:

- a) $(C) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$. Tìm $((C')) = V_{(O;k)}((C))$ với $k = 3$.
- b) $(C) : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$. Tìm $((C')) = V_{(M;k)}((C))$ với $M(1;2)$, $k = -2$.
- c) $(C) : x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Tìm $((C')) = V_{(M;k)}((C))$ với $M(2;1)$, $k = 3$.

BT 442. Cho đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Gọi f là phép biến hình có được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$; rồi đến phép vị tự tâm $M\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ với tỉ số $k = 2$. Viết phương trình đường tròn (C') qua phép biến hình f .

BT 443. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $B(4;-2)$, đường thẳng $d : x - y + 2 = 0$ và đường tròn $(C) : (x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$.

- a) Tìm tọa độ điểm B_1 là ảnh của B qua phép quay tâm O , góc quay 90° và điểm B_2 , biết B là ảnh của B_2 qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;-3)$.
- b) Viết phương trình (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O , tỉ số -3 .
- c) Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O , tỉ số $= 2$.

BT 444. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d : 3x - 4y - 8 = 0$ và đường tròn có phương trình $(C) : x^2 + y^2 - 18x + 4y + 36 = 0$.

- a) Tìm ảnh của d qua phép quay tâm O , góc quay 90° .
- b) Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-4;3)$ và phép vị tự tâm $I(0;-2)$, $k = -2$.

BT 445. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $B(-2;3)$, $I(3;-1)$, đường thẳng $d : 2x + y = 1$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$.

- a) Tìm ảnh của điểm B qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O , góc quay -90° và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1;2)$.
- b) Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O , tỉ số -2 .
- c) Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I , tỉ số 3 và phép quay tâm O , góc quay 90° .

BT 446. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d : 2x - 3y + 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(2;-1)$ tỉ số vị tự $k = -2$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1;1)$.

BT 447. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai parabol có $y = ax^2$, $y = bx^2$, ($a \neq b$). Chứng minh rằng có một phép vị tự biến parabol này thành parabol kia.

BT 448. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ tâm vị tự của hai đường tròn $(A;2)$ và $(B;4)$.

Chương 2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

§ I. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

☆☆☆

① Mở đầu về hình học không gian

— Đối tượng cơ bản:

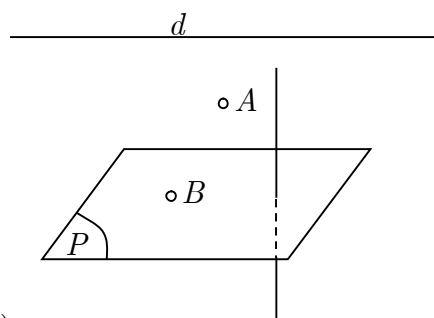
- Điểm: kí hiệu $A, B, C, \dots$
- Đường thẳng: kí hiệu $a, b, c, d, \dots$
- Mặt phẳng: kí hiệu $(P), (Q), (\alpha), (\beta), \dots$

— Quan hệ cơ bản:

- Thuộc: kí hiệu $\in$. Ví dụ: $A \in d, M \in (P)$.
- Chứa, nằm trong: kí hiệu $\subset$. Ví dụ: $d \subset (P), b \subset (\alpha)$.

— Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

- Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng biểu diễn bởi đoạn thẳng.
- Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
- Hai đoạn thẳng song song hoặc bằng nhau được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng song song và bằng nhau.
- Dùng nét vẽ liền (—) để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (---) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.



② Các tính chất thừa nhận trong hình học không gian

- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng cho trước.
- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

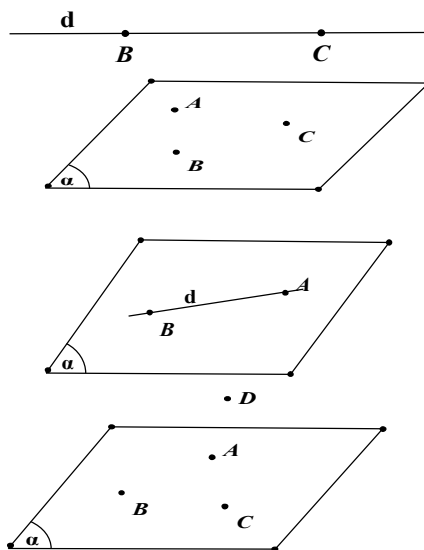
— Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

— Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

— Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

— Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.



③ Điều kiện xác định mặt phẳng

- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
 - Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
 - Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.
- Mặt phẳng hoàn toàn có thể mở rộng ra đến vô cực.

④ Hình chóp và hình tứ diện

— Cho đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm $S \notin (\alpha)$. Lần lượt nối điểm S với các đỉnh $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu hình chóp này là $S.A_1A_2A_3...A_n$. Khi đó ta gọi:

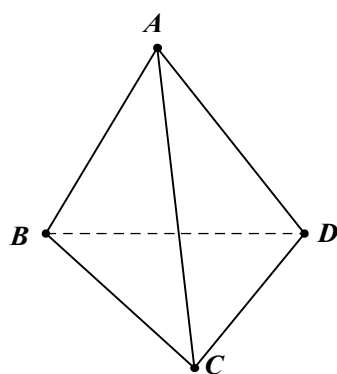
- S là đỉnh của hình chóp.
- $A_1A_2A_3...A_n$ là mặt đáy của hình chóp.
- Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là mặt bên.
- $SA_1, SA_2, SA_3, ..., SA_n$ được gọi là các cạnh bên.

Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,

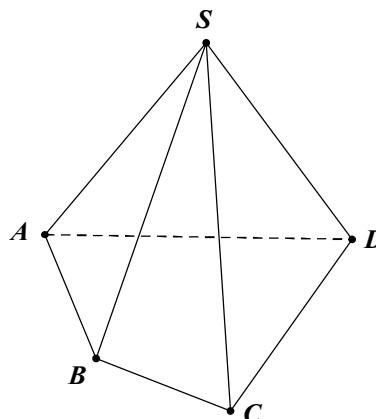
— Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm 4 tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn gọi là tứ diện) và được kí hiệu là $ABCD$.

- Các điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.
- Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện.
- Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện của tứ diện.
- Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các mặt của tứ diện.

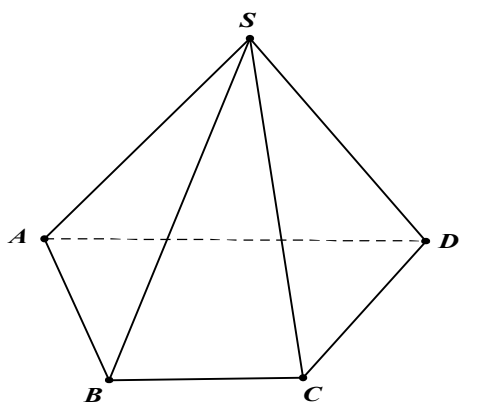
Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.



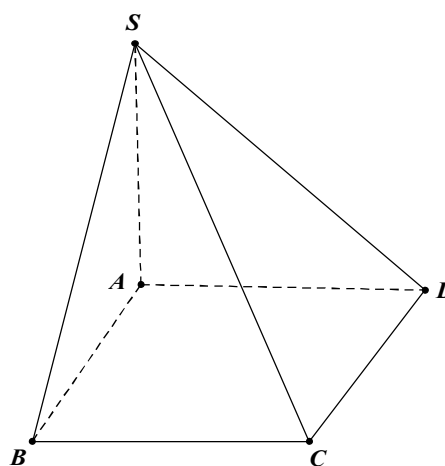
Hình chóp tam giác (tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

⑤ Các dạng toán thường gặp

a) Dạng toán 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

— Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.

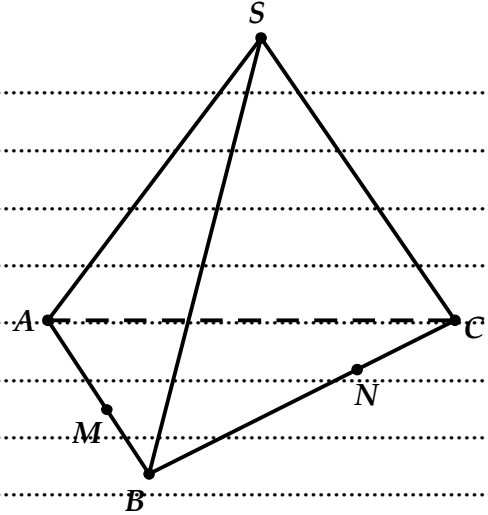
— Đường thẳng nối hai điểm chung đó là giao tuyến của chúng.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SMN) và (SAC) .

b) (SAN) và (SCM) .

Giải.

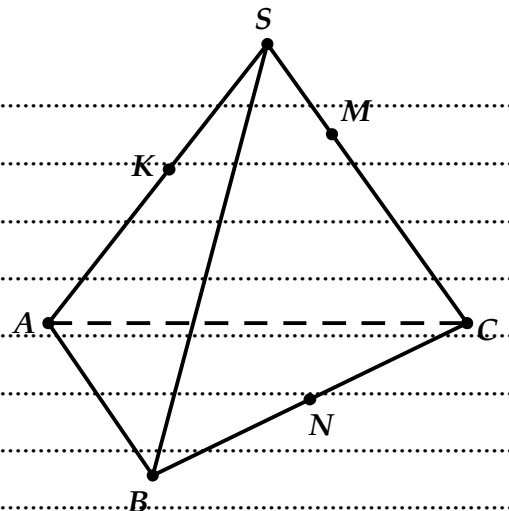


Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi K, M lần lượt là hai điểm trên cạnh SA và SC . Gọi N là trung điểm của cạnh BC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAN) và (ABM) .

b) (SAN) và (BCK) .

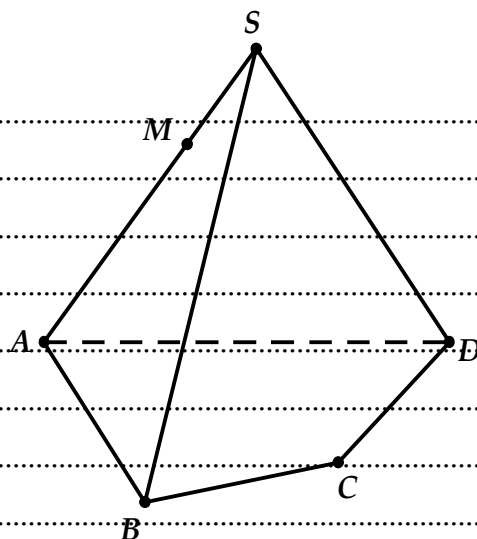
Giải.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó mặt đáy $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Gọi điểm M thuộc cạnh SA . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

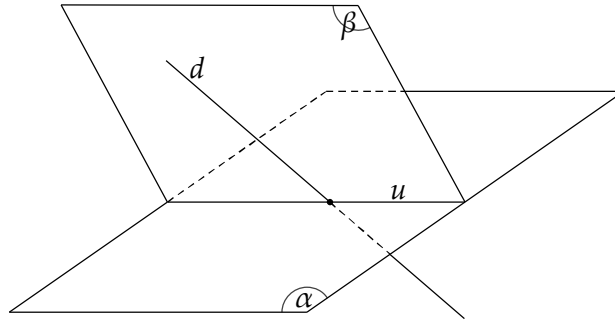
- (SAC) và (SBD) .
- (SAB) và (SCD) .
- (MBC) và (SAD) .

Giải.



b) Dạng toán 2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

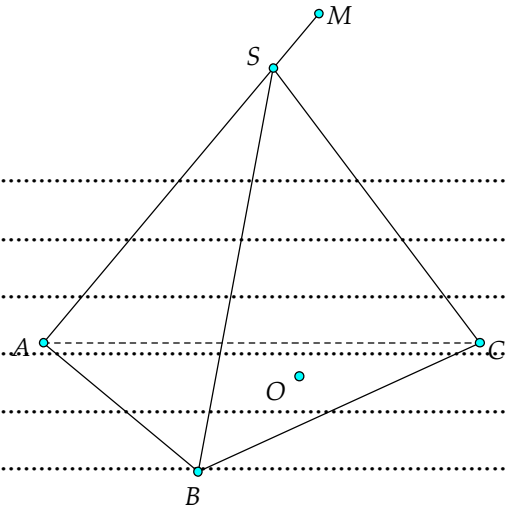
- **Bước 1.** Tìm một mặt phẳng phụ (β) chứa d sao cho dễ tạo giao tuyến với (α) . Mặt phẳng này thường xác định bởi d và một điểm của (α) .
- **Bước 2.** Tìm giao tuyến u của (α) và (β) .
- **Bước 3.** Trong (β) , d cắt u tại I , mà $I \in (\alpha)$. Vậy d cắt (α) tại I .



Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$ có M là điểm nằm trên tia đối của tia SA , O là điểm nằm trong tam giác ABC . Tìm các giao điểm của đường thẳng:

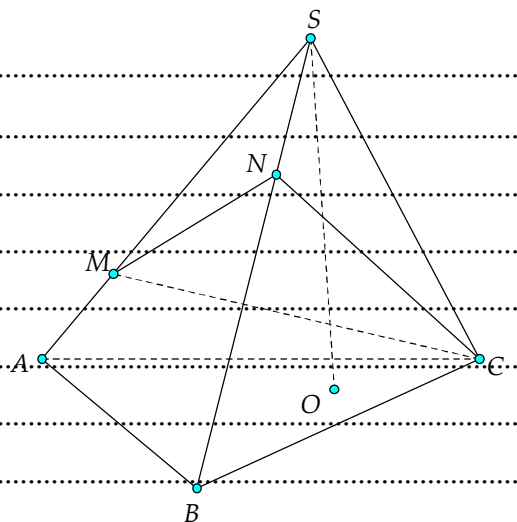
- a) BC với (SOA) .
- b) MO với (SBC) .
- c) AB với (MOC) .
- d) SB với (MOC) .

Giải.



Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$ có hai điểm M, N lần lượt thuộc hai cạnh SA, SB và O là điểm nằm trong tam giác ABC . Xác định các giao điểm sau:

a) AB với (SOC) .



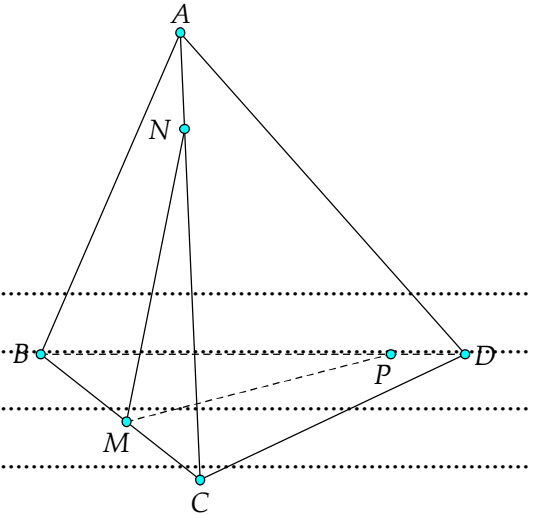
b) $MN \cap (SOC)$.

c) $SO \cap (CMN)$.

c) **Dạng toán 3.** Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) .

Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

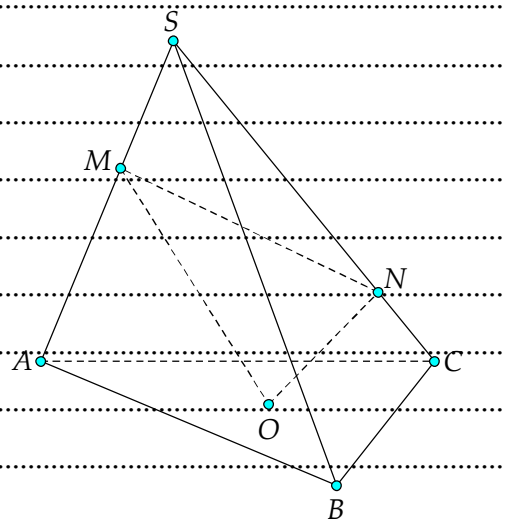
Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các đoạn CA , CB , BD cho lần lượt các điểm M , N , P sao cho MN không song song với AB . Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm M , N , P . Dựng thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$.



Giải.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi O là điểm thuộc miền trong tam giác ABC . Gọi M , N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh SA và SC sao cho MN không song song với AC . Tìm thiết diện do (MNO) cắt tứ diện $SABC$.

Giải.



BT 457. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, SC lấy M, N sao cho MN không song song AC . Gọi K là trung điểm BC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

- [illegible]

BT 458. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, SC lấy M, N sao cho MN không song song AC . Gọi O là điểm nằm miền trong tam giác ABC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- a) (MNO) và (ABC) .
b) (MNO) và (SAB) .
c) (SMO) và (SBC) .
d) (ONC) và (SAB) .

BT 459. Cho tứ diện $ABCD$ có M là điểm trên cạnh AB , N là điểm trên cạnh AD sao cho $MB = 2MA$, $AN = 2ND$. Gọi P là điểm nằm trong tam giác BCD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

- a) (CMN) và (BCD) .
b) (MNP) và (SAD) .
c) (MNP) và (ABC) .

BT 460. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác ABC , N là điểm nằm trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- a) (CDM) và (ABD) .
b) (BCN) và (ABD) .
c) (CMN) và (BCD) .

BT 461. Cho tứ diện $SABC$. Lấy điểm E, F lần lượt trên đoạn SA, SB và điểm G là trọng tâm góc ABC . Hãy tìm:

- a) $(EFG) \cap (ABC) = ?$ b) $(EFG) \cap (SBC) = ?$
c) $(EFG) \cap (SGC) = ?$

BT 462. Cho hình chóp $S.ABCD$. Hai điểm G, H lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB, \triangle SCD$. Tìm:

- a) $(SGH) \cap (ABCD) = ?$ b) $(SAC) \cap (SGH) = ?$
c) $(SAC) \cap (BGH) = ?$ d) $(SCD) \cap (BGH) = ?$

BT 463. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có AB song song CD . Gọi I là giao điểm của AD và BC . Lấy M thuộc cạnh SC . Hãy tìm:

- a) $(SAC) \cap (SBD) = ?$
 b) $(SAD) \cap (SBC) = ?$
 c) $(ADM) \cap (SBC) = ?$

BT 464. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi. Gọi hai điểm M, G lần lượt là trọng tâm $\triangle SAD, \triangle SBC, N \in SG, P$ nằm trong tứ giác $ABCD$. Hãy tìm:

- a) $(MNP) \cap (ABCD) = ?$ b) $(MNP) \cap (SAC) = ?$
c) $(MNP) \cap (SCD) = ?$

BT 465. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, SA . Hãy tìm:

- a) $(MNP) \cap (SAB) = ?$ b) $(MNP) \cap (SAD) = ?$
c) $(MNP) \cap (SBC) = ?$ d) $(MNP) \cap (SCD) = ?$

BT 466. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB, \triangle SBC$ và M là trung điểm $AC, I \in SM$ sao cho $SI > SM$. Hãy tìm:

a) $(IHK) \cap (ABC) = ?$

b) $(IHK) \cap (SBC) = ?$

BT 467. Cho tứ diện $SABC$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, SA .

a) Tìm giao tuyến SH của hai mặt phẳng (SCD) và (SAE) .

b) Tìm giao tuyến CI của hai mặt phẳng (SCD) và (BFC) .

c) SH và CI có cắt nhau không? Giải thích? Nếu có, gọi giao điểm đó là O , chứng minh $IH \parallel SC$. Tính tỉ số $\frac{OH}{OS}$.

Dạng toán 2: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng



BT 468. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy M sao cho $SA = 3SM$, trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $SC = 2SN$. Điểm P thuộc cạnh AB . Tìm giao điểm của:

a) MN và (ABC) .

b) BC và (MNP) .

BT 469. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm của AC và BC . Lấy điểm P trên cạnh BD sao cho $PB > PD$. Tìm giao điểm của:

a) CD và (MNP) .

b) AD và (MNP) .

BT 470. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N . Gọi P là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Tìm giao điểm:

a) MN và (BCD) .

b) AP và (BMN) .

BT 471. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O . Trên SA, SB lần lượt lấy hai điểm M và N . Hãy tìm:

a) $SO \cap (CMN) = ?$

b) $(SAD) \cap (CMN) = ?$

BT 472. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O . Gọi G là trọng tâm tam giác SAB . Hãy tìm:

a) $(SGC) \cap (ABCD) = ?$

b) $AD \cap (SGC) = ?$

c) $SO \cap (SGB) = ?$

d) $SD \cap (BCG) = ?$

BT 473. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm lấy trên cạnh SB, N là điểm lấy trong $\triangle SCD$. Hãy tìm giao điểm của:

a) MN với $(ABCD)$.

b) SC với (MAN) .

c) SD với (MAN) .

d) SA với (CMN) .

BT 474. Cho tứ diện $SABC$. Lấy điểm M trên cạnh SA . Lấy N, P lần lượt nằm trong các tam giác SBC và ABC .

a) Tìm giao điểm của MN với (ABC) .

b) Tìm các giao điểm của (MNP) với AB, SB, AC, SC .

c) Tìm các giao điểm của NP với $(SAB), (SAC)$.

BT 475. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi I, J là trung điểm SA và SB . Lấy điểm M tùy ý trên SD . Tìm giao điểm của:

a) IM và (SBC) .

b) JM và (SAC) .

c) SC và (IJM) .

BT 476. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB . Gọi I, J, K là ba điểm nằm trên cạnh SA, AB, BC .

a) Tìm giao điểm của IK với (SBD) .

b) Tìm các giao điểm của (IJK) với SD và SC .

BT 477. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB , N là trọng tâm $\triangle SCD$. Xác định giao điểm của:

a) MN và $(ABCD)$.

b) MN và (SAC) .

c) SC và (AMN) .

d) SA và (CMN) .

BT 478. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SD và P là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SP = 3PB$.

a) Tìm giao điểm Q của SC và (MNP) . b) Tìm giao tuyến (MNP) và $(ABCD)$.

BT 479. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho M, N không song song với CD . Gọi O là điểm thuộc miền trong $\triangle BCD$. Tìm giao điểm của đường thẳng:

a) BD và (OMN) .

b) BC và (OMN) .

c) MN và (ABO) .

d) AO và (BMN) .

BT 480. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SCD . Xác định giao điểm của:

a) BD và (SMN) .

b) MN và (SAD) .

c) SD và (BMN) .

d) SA và (CMN) .

BT 481. Cho tứ diện $SABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, BC . Lấy điểm M trên đoạn IJ , lấy N trên cạnh SC .

a) Tìm $H = SM \cap (ABC)$.

b) Tìm $K = CM \cap (SAB)$.

c) Tìm $L = MN \cap (ABC)$.

d) Tìm $P = AM \cap (SBC)$.

BT 482. Cho tứ diện $OABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, OB và AB . Trên cạnh OC lấy điểm Q sao cho $OQ > QC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

a) Tìm $E = BC \cap (MNQ)$.

b) Tìm $F = CP \cap (MNQ)$.

c) $K = BG \cap (MNQ)$.

BT 483. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD .

a) $E = SA \cap (OMG)$.

b) $F = AD \cap (OMG)$.

c) $K = GM \cap (ABCD)$.

BT 484. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N là hai điểm lần lượt nằm trong tam giác SAB và SAD .

a) $E = MN \cap (ABCD)$.

b) $F = AB \cap (OMN)$.

c) $H = SA \cap (OMN)$.

d) $K = CD \cap (OMN)$.

- BT 500.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD . Lấy M trên cạnh SB . Tìm thiết diện cắt bởi (AMD) .
- BT 501.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt trên các cạnh CB, CD, SA . Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP) .
- BT 502.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD . Gọi H, K là trung điểm của SB và AB , M là điểm lấy trong hình thang $ABCD$ sao cho đường thẳng KM cắt hai đường thẳng AD, CD . Tìm thiết diện của hình chóp với (HKM) .
- BT 503.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB , lấy M, N lần lượt trên các cạnh SC, SD . Tìm thiết diện của hình chóp với (ABM) và (AMN) .
- BT 504.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, K là trung điểm BC và CD . Lấy M bất kì trên cạnh SA . Tìm thiết diện của hình chóp với (MHK) .
- BT 505.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD, AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
 - Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ) .
 - Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) .
- BT 506.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AD , J là điểm đối xứng với D qua C , K là điểm đối xứng với D qua B . Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (IJK) và tính diện tích của thiết diện này.
- BT 507.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC . Lấy một điểm N thuộc miền trong tam giác SCD .
- Tìm giao điểm của MN với (SAC) .
 - Tìm giao điểm của SC với (AMN) .
 - Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (AMN) .
- BT 508.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB , G là trọng tâm tam giác SAD .
- Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I ở trên đường thẳng CD và $IC = 2ID$.
 - Tìm giao điểm J của (OMG) với AD . Tính tỉ số: $\frac{JA}{JD}$.
 - Tìm giao điểm K của (OMG) với SA . Tính tỉ số: $\frac{KA}{KS}$.
 - Tìm thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$.
- BT 509.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC .
- Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC) và $(ABCD)$.
 - Tìm giao điểm của SA và (MNP) .
 - Xác định thiết diện của hình chóp với (MNP) . Tính tỉ số mà (MNP) chia các cạnh SA, BC và CD .

BT 510. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm của tam giác SAC và I, J lần lượt là trung điểm của CD và SD .

- Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB) .
- Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IJK) với hình chóp.

BT 511. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang, điểm P nằm trong tam giác SAB và điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD) .
- Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) .
- Gọi N là trung điểm của AD . Tìm thiết diện tạo bởi (MNP) và hình chóp.

BT 512. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) .
- Trên các cạnh SB, SD ta lần lượt lấy các điểm M và N thỏa $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$. Tìm giao điểm I của SC và mặt phẳng (AMN) . Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$.
- Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.

BT 513. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SB, SD sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$.

- Tìm giao điểm I của SC với mặt phẳng (AMN) . Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (AMN) .
- Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số: $\frac{KC}{KD}$.

Dạng toán 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

☆☆☆

BT 514. Cho tứ diện $SABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy M, N, P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K . Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

BT 515. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

- Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP) .
- Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

BT 516. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD , điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC .

- a) Tìm giao điểm của SO với mặt phẳng (MNP) .
- b) Tìm giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP) .
- c) Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD . Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.

BT 517. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD .

- a) Tìm giao điểm N của SC với (AMC) .
- b) Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

BT 518. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E, F, H lần lượt là các điểm thuộc cạnh SA, SB, SC .

- a) Tìm giao điểm $K = SD \cap (EFH)$.
- b) Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = EH \cap FK$. Chứng minh: S, I, O thẳng hàng.
- c) Gọi $M = AD \cap BC$ và $N = EK \cap FH$. Chứng minh: S, M, N thẳng hàng.
- d) Gọi $P = AB \cap CD$ và $Q = EF \cap HK$. Chứng minh: A, P, Q thẳng hàng.

BT 519. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC, BD và $MN \cap BC = I, MP \cap AD = J, NJ \cap IP = K$. Chứng minh: C, D, K thẳng hàng.

BT 520. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I và J là hai điểm trên hai cạnh AD, SB .

- a) Tìm giao tuyến của (SBI) và (SAC) . Tìm giao điểm K của IJ và (SAC) .
- b) Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC) . Tìm giao điểm L của DJ và (SAC) .
- c) Gọi $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng: A, K, L, M thẳng hàng.

BT 521. Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối đôi một không song song và điểm $S \notin (ABCD)$. Lấy điểm I thuộc cạnh AD , lấy điểm J thuộc cạnh SB .

- a) Tìm $K = IJ \cap (SAC)$.
- b) $L = DJ \cap (SAC)$.
- c) Gọi $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng: K, L, M thẳng hàng.

BT 522. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC .

- a) Tìm giao tuyến của (BMN) với các mặt phẳng (SAB) và (SBC) .
- b) Tìm $I = SO \cap (BMN)$ và $K = SD \cap (BMN)$.
- c) Tìm $E = AD \cap (BMN)$ và $F = CD \cap (BMN)$.
- d) Chứng minh rằng ba điểm B, E, F thẳng hàng.

BT 523. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và SD .

- a) Tìm giao điểm I của BN và (SAC) .
- b) Tìm giao điểm J của MN và (SAC) .
- c) Chứng minh: I, J, C thẳng hàng.
- d) Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

BT 524. Cho tứ diện $ABCD$ có K là trung điểm của AB . Lấy I, J lần lượt thuộc AC, BD sao cho $IA = 2IC$ và $JB = 3JD$.

- Tìm giao điểm E của AD và (IJK) .
- Tìm giao tuyến d của (IJK) và (BCD) .
- Gọi O là giao điểm của d với CD . Chứng minh: I, O, E thẳng hàng.
- Tính các tỉ số $\frac{OI}{OE}$ và $\frac{OC}{OD}$.

BT 525. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và $O = AC \cap BD$.

- Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD) .
- Tìm giao điểm P của DN và (SAB) .
- Gọi $K = AN \cap DM$. Chứng minh: S, K, O thẳng hàng. Tính tỉ số: $\frac{KS}{KO}$.

BT 526. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Gọi (P) là mặt phẳng qua M, N và B .

- Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SAD), (SDC)$.
- Tìm $I = SO \cap (P), K = SD \cap (P), E = DA \cap (P), F = DC \cap (P)$.
- Chứng tỏ rằng ba điểm: E, B, F thẳng hàng.

BT 527. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song nhau. Gọi M, E là trung điểm SA, AC và $F \in CD$ sao cho $CD = 3CF$.

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
- Tìm giao điểm N của SD và (MEF) . Tính tỉ số: $\frac{NS}{ND}$.
- Gọi $H = SE \cap CM$ và $K = MF \cap NE$. Chứng minh D, H, K thẳng hàng.
- Tính các tỉ số sau: $\frac{HM}{HC}; \frac{HS}{HE}; \frac{KM}{KF}; \frac{KN}{KE}; \frac{KH}{KD}$.

BT 528. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AC, BD lần lượt lấy ba điểm E, F, G sao cho $AB = 3AE, AC = 2AF, DB = 4DG$.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD) .
- Tìm giao điểm H của đường thẳng CD với (EFG) . Tính tỉ số $\frac{HC}{HD}$.
- Tìm giao điểm I của đường thẳng AD với (EFG) . Tính tỉ số $\frac{IA}{ID}$.
- Chứng minh ba điểm F, H, I thẳng hàng.
- Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K . Tính tỉ số $\frac{AK}{AJ}$.

Dạng toán 5: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

☆☆☆

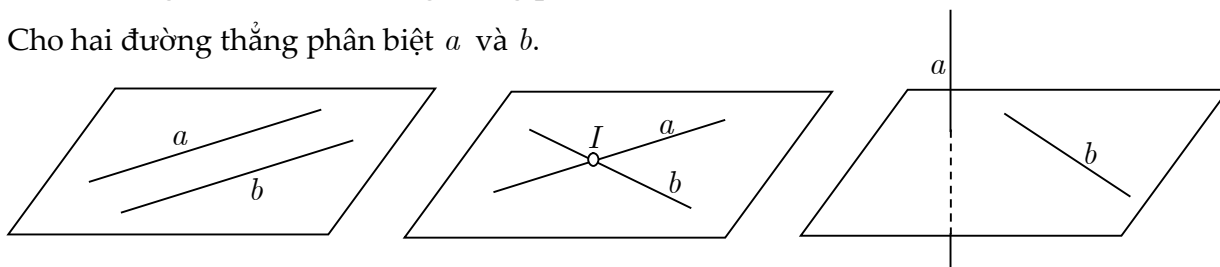
- BT 529.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I , MP cắt AD tại J . Chứng minh: PI, NJ, CD đồng quy.
- BT 530.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC . Gọi N là giao điểm của SB và (ADM) . Gọi O là giao điểm AC và BD . Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng quy.
- BT 531.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên cạnh SC lấy một điểm E không trùng với S và C .
- Tìm giao điểm F của đường thẳng SD với (ABE) .
 - Giả sử AB không song song với CD . Hãy chứng minh ba đường thẳng AB, CD, EF đồng quy.
- BT 532.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD . Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD .
- Tìm giao điểm N của SD với (MAB) .
 - Chứng minh rằng ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.
- BT 533.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC .
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
 - Tìm giao tuyến của (MNP) và (SBD) .
 - Tìm giao điểm của Q của SD và (MNP) .
 - Gọi $H = MN \cap PQ$. Chứng minh: S, H, E thẳng hàng.
 - Chứng minh: SK, QM, NP đồng quy.
- BT 534.** Cho tứ diện $SABC$ với I trung điểm của SA, J là trung điểm của BC . Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC .
- Xác định giao điểm P của MC và (SAB) .
 - Tìm giao tuyến của (SMP) và (ABC) .
 - Tìm giao điểm E của MN và (ABC) .
 - Gọi $F = IN \cap AC$. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.
- BT 535.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K là trung điểm của AB và CD . Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$.
- Tìm giao điểm F của IJ và (BCD) .
 - Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC . Tính tỉ số: $\frac{EB}{EC}$.
 - Chứng minh ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H . Tính $\frac{HC}{HA}$.
 - Chứng minh $EJ \parallel HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HF .
 - Gọi O trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng. Tính tỉ số: $\frac{OA}{OG}$.

§ 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

☆☆☆

① Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b .

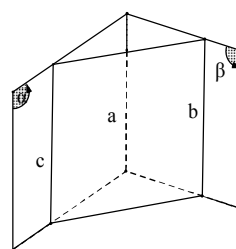
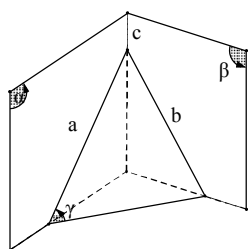


Định nghĩa

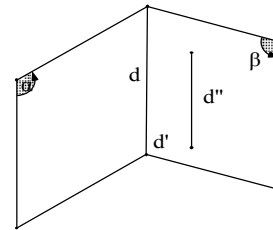
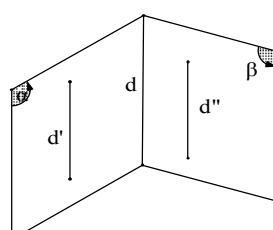
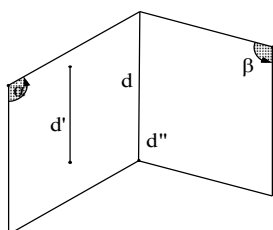
- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

② Tính chất hai đường thẳng song song

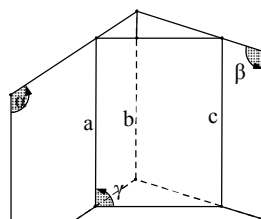
- **Tính chất 1.** Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- **Tính chất 2.** (Định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng). Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



Hệ quả. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



- **Tính chất 3.** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



③ Chứng minh hai đường thẳng song song

→ **Phương pháp giải:**

Cách 1. Chứng minh hai đường thẳng a, b đồng phẳng, rồi dùng các định lý trong hình học phẳng, chẳng hạn định lý đường trung bình, định lý đảo Thales,... để chứng minh $a \parallel b$.

Cách 2. Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.

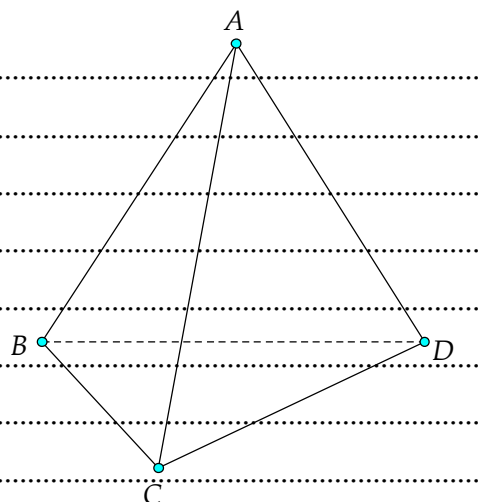
Cụ thể: chứng minh: $\begin{cases} c \parallel a \\ c \parallel b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$.

Cách 3. Áp dụng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng và hệ quả của nó. Chẳng

hạn: chứng minh: $\begin{cases} b \parallel c \\ b \subset (\alpha), c \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ a \equiv b \\ a \equiv c \end{cases}$.

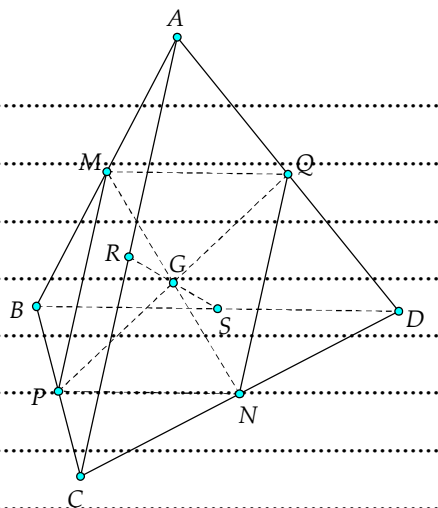
Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng: $IJ \parallel CD$.

Giải.



Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD . Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Giải.



Nhận xét. Điểm G nói trên được gọi là trọng tâm của tứ diện.

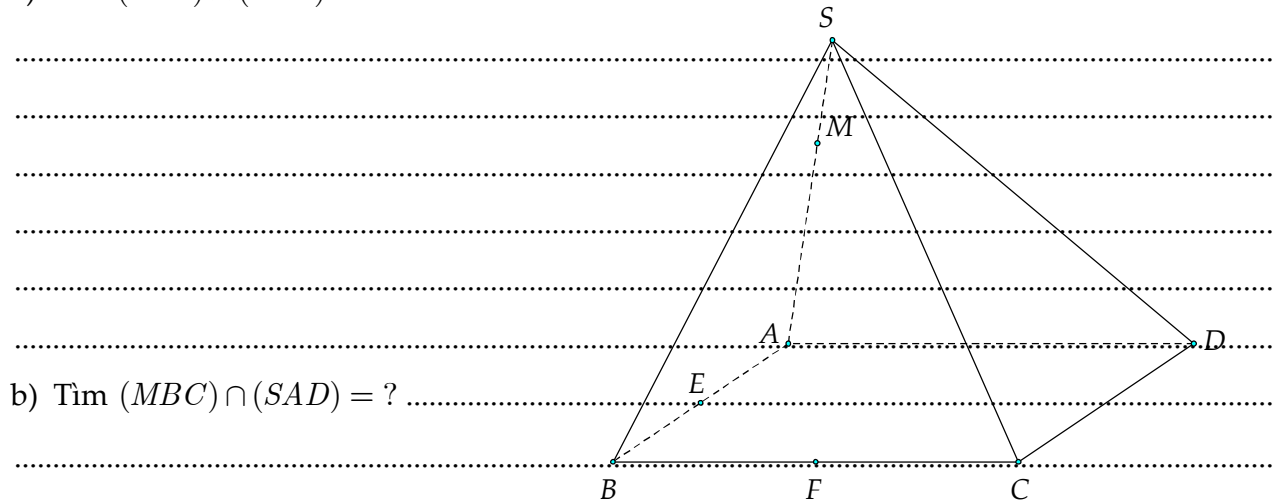
————→ Trọng tâm của tứ diện là điểm đồng qui của các nối trung điểm của các cạnh đối, nó cũng là trung điểm của các cạnh này.

④ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song

————→ **Phương pháp giải:**
$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ax \text{ với } Ax \parallel a \parallel b. \\ a \parallel b \end{cases}$$

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

a) Tìm $(SAB) \cap (SCD) = ?$



b) Tìm $(MBC) \cap (SAD) = ?$

c) Tìm $(MEF) \cap (SAC) = ?$

d) Tìm $AD \cap (MEF) = ?$

e) Tìm $SD \cap (MEF) = ?$

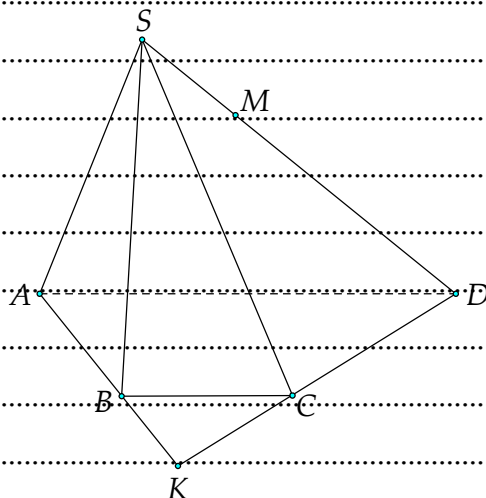
f) Thiết diện của (MEF) và hình chóp là:

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD , AB cắt CD tại điểm K . Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD .

a) Tìm $d = (SAD) \cap (SBC)$ và $N = KM \cap (SBC)$.

b) Chứng minh rằng AM , BN và d đồng qui.

Giải.



BÀI TẬP VẬN DỤNG

a) $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$. b) $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

a) $IJ \parallel MN$. b) $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.

a) Tìm giao điểm E và F của mặt phẳng (ICD) lần lượt với các đường SA , SB .
Chứng minh: $EF \parallel AB$.

b) Gọi K là giao điểm của DE và CF . Chứng minh: $SK \parallel BC$.

a) (SBC) và (SAD) .
b) (SAB) và (SCD) .
c) (MNP) và $(ABCD)$.

[illegible]

a) Chứng minh: $GJ \parallel AB$. b) Tìm $(ABD) \cap (GJD) = ?$

a) Chứng minh: $EF \parallel CD$.
b) Tìm $I = AF \cap (SDC)$.
c) Chứng minh: $SI \parallel AB \parallel CD$.

a) Chứng minh: $IJ \parallel CD$. b) Tìm $(DEF) \cap (ABD) = ?$

a) Tìm $I = SD \cap (AMN)$.
b) Chứng minh: $NI \parallel SB$.
c) Tìm $(AMN) \cap (SAD) = ?$

a) Chứng minh: $OG \parallel BK$. b) Tìm $(ACG) \cap (SBC) = ?$

Page - 133 -

- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAD) và (MBC) .
- Tìm giao điểm I của SB và (CMN) , giao điểm J của SA và (ICD) .
- Chứng minh ba đường thẳng ID , JC , SO đồng qui tại E . Tính tỉ số $\frac{SE}{SO}$.

BT 547. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các đoạn SA , AD , BC sao cho $MA = 2MS$, $NA = 2ND$, $PC = 2PB$.

- Tìm giao tuyến của cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC) , (SAC) và (SBD) .
- Xác định giao điểm Q của SB với (MNP) .
- Gọi K trung điểm của SD . Chứng minh: $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

BT 548. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Lấy điểm E trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Tìm giao điểm M của đường thẳng AE và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng SO .

BT 549. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của SD , CD , BC .

- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBC) , (AMN) và (SBC) .
- Tìm giao điểm I của (PMN) và AC , K của (PMN) và SA .
- Gọi F là trung điểm của PM , chứng minh ba điểm K , F , I thẳng hàng.

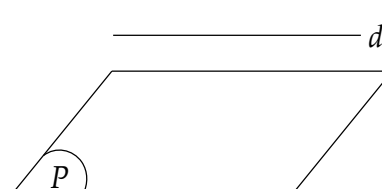
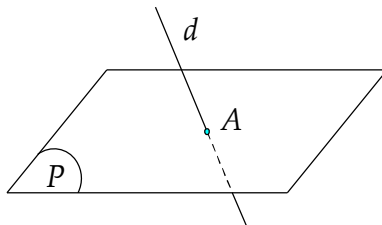
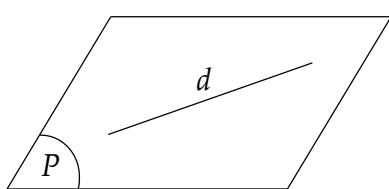
§ 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG



① Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Có ba trường hợp xảy ra:

- Đường thẳng d và (P) có 2 điểm chung phân biệt $\Rightarrow d \subset (P)$.
- Đường thẳng d và (P) có 1 điểm chung duy nhất $\Rightarrow d \cap (P) = A$.
- Đường thẳng d và (P) không có điểm chung nào $\Rightarrow d \parallel (P)$.



Định nghĩa. Đường thẳng d và mặt phẳng (P) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

② Các định lý

— **Định lí 1.** Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .

— **Định lí 2.** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau và cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

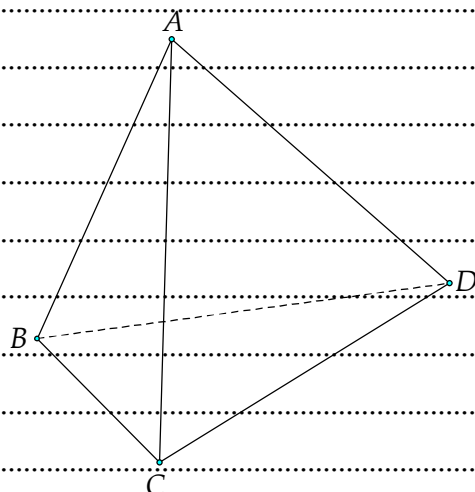
— **Định lí 3.** Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

③ Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P)

————→ **Phương pháp:** Chứng minh
$$\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \Rightarrow a \parallel (P). \\ a \not\subset (P) \end{cases}$$

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) .

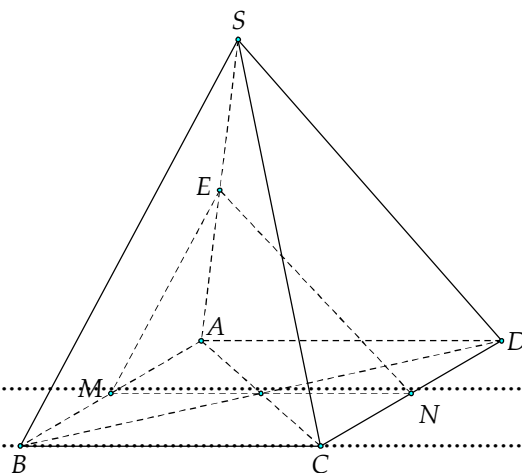
Giải.



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

- Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
- Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh SB, SC đều song song với (MNE) .

Giải.



④ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

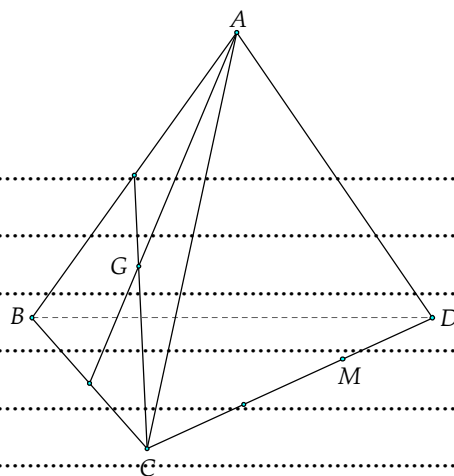
————→ **Phương pháp:** Áp dụng một trong hai cách sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{array} \right. \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx \parallel a \quad \text{hoặc} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \parallel (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{array} \right. \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx \parallel a$$

Ví dụ. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in$ cạnh CD với $MC = 2MD$.

- Chứng minh: $MG \parallel (ABD)$.
- Tìm $(ABD) \cap (BGM) = ?$
- Tìm $(ABD) \cap (AGM) = ?$

Giải.



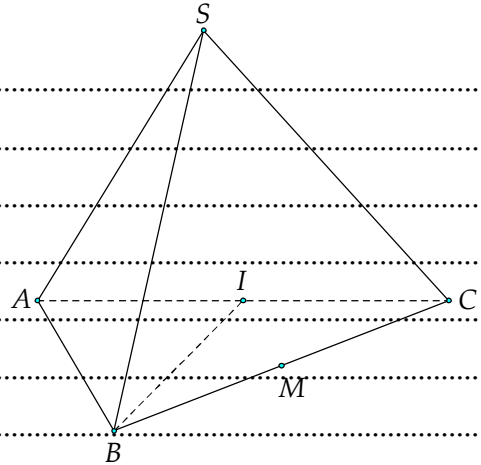
⑤ Tìm thiết diện song song với một đường thẳng

————→ **Phương pháp:** Để tìm thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường

thẳng, thường sử dụng tính chất sau:
$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ d \parallel (\alpha) \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = a \parallel d \quad (\text{với } M \in a).$$

Ví dụ. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC . Mặt (P) đi qua điểm M , song song với BI và SC . Xác định trên hình vẽ các giao điểm của (P) với các cạnh AC, SA, SB . Từ đó suy ra thiết diện của (P) cắt hình chóp.

Giải.



BÀI TẬP ÁP DỤNG

BT 550. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Chứng minh rằng:

- a) $BC \parallel (SAD)$. b) $AD \parallel (SBC)$. c) $MN \parallel (ABCD)$.
d) $MN \parallel (SBC)$. e) $MO \parallel (SCD)$. f) $NO \parallel (SBC)$.

BT 551. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

- a) Chứng minh: $OI \parallel (SAB)$ và $OI \parallel (SCD)$.
b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh: $GE \parallel (SBC)$.

BT 552. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

- a) Chứng minh: $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.
b) Gọi P là điểm trên cạnh SA . Chứng minh: $SB \parallel (MNP)$ và $SC \parallel (MNP)$.
c) Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh: $GI \parallel (SAB)$.

BT 553. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB , với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của SA , G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

- a) $DI \parallel (SBC)$. b) $GO \parallel (SCD)$. c) $SB \parallel (ACE)$.

BT 554. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB, AD . Gọi I, J thuộc SM, SN sao cho $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3}$. Chứng minh:

- a) $MN \parallel (SBD)$. b) $IJ \parallel (SBD)$. c) $SC \parallel (IJO)$.

BT 555. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác ABD và I là điểm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng: $IG \parallel (ACD)$.

BT 556. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và ABC . Chứng minh rằng: $GP \parallel (ABC)$ và $GP \parallel (ABD)$.

BT 557. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm SA .

- a) Chứng minh: $OM \parallel (SCD)$.
b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , đồng thời song song với SC và AD . Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

BT 558. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm CD , (α) là mặt phẳng qua M , đồng thời song song với SA và BC . Tìm thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì ?

BT 559. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song SA .

- a) Tìm thiết diện của (α) và hình chóp.
b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

- BT 560.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC và (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD .
- Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) .
 - Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD . Tìm tỉ số diện tích của $\triangle SME$ với $\triangle SBC$ và tỉ số diện tích của $\triangle SMF$ với $\triangle SCD$.
 - Gọi K là giao điểm của ME và CB , J là giao điểm của MF và CD . Chứng minh K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\frac{EF}{KJ}$.
- BT 561.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh BC và AD . Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN và song song với CD . Xác định vị trí của hai điểm M, N để thiết diện là hình bình hành.
- BT 562.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD .
- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD) .
 - Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì ?
- BT 563.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC .
- Chứng minh $KJ \parallel (SAB)$
 - Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) .
- BT 564.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng: $G_1G_2 \parallel (ABC)$ và $G_1G_2 \parallel (ABD)$.
- BT 565.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SAB$, I là trung điểm AB , lấy điểm M trong đoạn AD sao cho $AD = 3AM$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
 - Đường thẳng qua M và song song AB cắt CI tại N . Chứng minh $NG \parallel (SCD)$.
 - Chứng minh: $MG \parallel (SCD)$.
- BT 566.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , G là trọng tâm của tam giác SCD .
- Chứng minh: $OG \parallel (SBC)$.
 - Cho M là trung điểm của SD . Chứng minh: $CM \parallel (SAB)$.
 - Gọi I là điểm trên cạnh SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh: $SA \parallel (BDI)$.
- BT 567.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SB .
- Chứng minh: $BD \parallel (MNP)$.
 - Tìm giao điểm của (MNP) với BC .
 - Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD) .
 - Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP) .

BT 568. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BD và AD .

- Chứng minh: $NP \parallel (ABC)$.
- Tìm giao điểm Q của AC với (MNP) và tính $\frac{QA}{QC}$. Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (MNP) .
- Chứng minh: $MG \parallel (ABD)$, với G là trọng tâm của tam giác ACD .

BT 569. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) ; (SAB) và (SCD) .
- Một mặt phẳng qua BC và song song với AD cắt SA tại E , ($E \neq S$, $E \neq A$), cắt SD tại F , ($F \neq S$, $F \neq D$). Tứ giác $BEFC$ là hình gì?
- Gọi M thuộc đoạn AD sao cho $AD = 3AM$ và G là trọng tâm tam giác SAB , I là trung điểm AB . Đường thẳng qua M và song song AB cắt CI tại N . Chứng minh: $NG \parallel (SCD)$ và $MG \parallel (SCD)$.

BT 570. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) , (SAB) và (SCD) .
- Tìm giao điểm E của SB và (MNP) .
- Chứng minh: $NE \parallel (SAP)$.

BT 571. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I trung điểm của CD , H là điểm đối xứng của G qua I .

- Chứng minh: $GD \parallel (MCH)$.
- Tìm giao điểm K của MG với (ACD) . Tính tỉ số $\frac{GK}{GM}$.

BT 572. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC, CD .

- Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC) , (SIK) và (SBD) .
- Gọi M là trung điểm của SB . Chứng minh: $SD \parallel (ACM)$.
- Tìm giao điểm F của DM và (SIK) . Tính tỉ số $\frac{MF}{MD}$.

BT 573. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$, trên AD lấy điểm E sao cho $AD = 3AE$. Gọi M là trung điểm AB .

- Chứng minh: $EG \parallel (SCD)$.
- Đường thẳng qua E song song AB cắt MC tại F . Chứng minh: $GF \parallel (SCD)$.
- Gọi I là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CI = 2ID$. Chứng minh: $GO \parallel (SAI)$.

BT 574. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trọng tâm tam giác ABC .

- Chứng minh: $SB \parallel (AMN)$.

- b) Tìm giao tuyến của (AMN) với (SAB) .
- c) Tìm giao điểm I của SD với (AMN) . Tính tỉ số: $\frac{IS}{ID}$.
- d) Gọi Q là trung điểm của ID . Chứng minh: $QC \parallel (AMN)$.

BT 575. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD .

- a) Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAB) .
- b) Tìm giao tuyến của (SMN) và (SBD) .
- c) Gọi H là điểm trên cạnh SA sao cho $HA = 2HS$. Tìm giao điểm K của MH và (SBD) . Tính tỉ số: $\frac{KH}{KM}$.
- d) Gọi G là giao điểm của BN và DM . Chứng minh: $HG \parallel (SBC)$.

BT 576. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , G trọng tâm của tam giác SCD .

- a) Chứng minh: $OG \parallel (SBC)$.
- b) Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Chứng minh: $CM \parallel (SAB)$.
- c) Giả sử điểm I trên đoạn SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh: $SA \parallel (BID)$.
- d) Xác định giao điểm K của BG và mặt phẳng (SAC) . Tính tỉ số: $\frac{KB}{KG}$.

BT 577. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, P, I lần lượt là trung điểm của AB, SC, SB . Một mặt phẳng (α) qua MP và song song với AC và cắt các cạnh SA, BC tại N, Q .

- a) Chứng minh: $BC \parallel (IMP)$.
- b) Xác định thiết diện của (α) với hình chóp. Thiết diện này là hình gì?
- c) Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ) .

BT 578. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi M, N là trung điểm của SC và CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và song song với đường thẳng AC .

- a) Tìm giao tuyến của (α) với $(ABCD)$.
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với (α) .
- c) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) .

BT 579. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AD, BC, SA .

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC) ; (IMN) và (SAB) .
- b) Tìm giao điểm của SB và (IMN) .
- c) Tìm thiết diện của mặt phẳng (IDN) với hình chóp $S.ABCD$.

BT 580. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là trọng tâm

$\triangle SAB$; N là một điểm thuộc đoạn AC sao cho: $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$; I là trung điểm AB .

- a) Chứng minh: $OI \parallel (SAD)$ và $GN \parallel SD$.

- b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với SA và BC . Mặt phẳng (α) cắt SB, SC lần lượt tại L và K . Tìm hình tính thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

BT 581. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và M là điểm thuộc cạnh CD , (M khác C và D).

- a) Tìm giao tuyến của: (KAM) và (SBC) , (SBC) và (SAD) .
b) Tìm thiết diện tạo bởi (HKO) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì?
c) Gọi L là trung điểm đoạn HK . Tìm $I = OL \cap (SBC)$. Chứng minh: $SI \parallel BC$.

BT 582. Cho tứ diện $ABCD$, có M, N là trung điểm của cạnh AB, BC và gọi G là trọng tâm tam giác ACD .

- a) Tìm giao điểm E của MG và (BCD) .
b) Tìm $d = (MNG) \cap (BCD)$. Giả sử $d \cap CD = P$. Chứng minh: $GP \parallel (ABC)$.
c) Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và $\parallel AD$. Tìm thiết diện của (α) với tứ diện.

BT 583. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA thỏa $3MA = 2MS$. Hai điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .
b) Xác định giao điểm K của mặt phẳng (MEF) với cạnh SD . Tính tỉ số: $\frac{KS}{KD}$.
c) Tìm giao điểm I của MF với (SBD) . Tính tỉ số: $\frac{IM}{IF}$.
d) Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) cắt các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

BT 584. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N là trung điểm SA, SD .

- a) Xác định giao điểm của NC và (OMD) .
b) Xác định thiết diện hình chóp với mặt phẳng (P) qua MO và song song với SC .

BT 585. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC , (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD .

- a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) .
b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD . Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và tam giác SCD .
c) Gọi K là giao điểm của ME và CB , J là giao điểm của MF và CD . Chứng ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\frac{EF}{KJ}$.

BT 586. Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$. Gọi M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG .

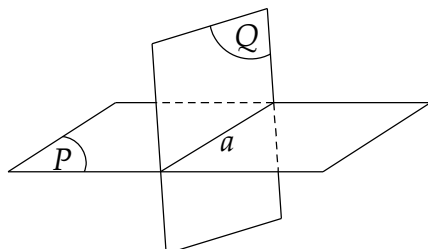
- a) Chứng minh rằng: S, R, G thẳng hàng và $SG = 2MH = 4RG$.
b) Gọi G' là trọng tâm $\triangle SBC$. Chứng minh: $GG' \parallel (SAB)$ và $GG' \parallel (SAC)$.

§ 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

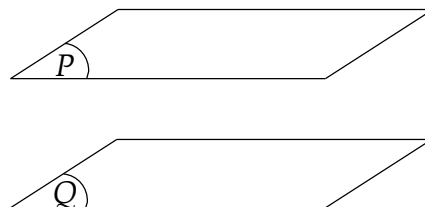
☆☆☆

① Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Có ba trường hợp xảy ra:



$(P), (Q)$ có 1 điểm chung
 $(P) \cap (Q) = a.$

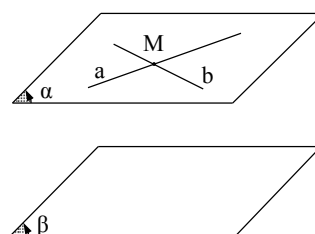


$(P), (Q)$ không có điểm chung
 $(P) \parallel (Q)$

Định nghĩa. Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

② Các định lý

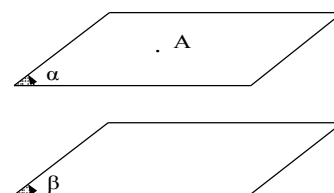
— **Định lý 1.** Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .



Lưu ý:

- Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.
- Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng $(P) \parallel (Q)$.

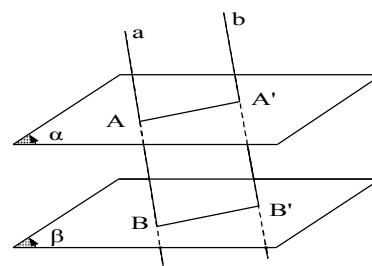
— **Định lý 2.** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



Hệ quả:

- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) . Đó đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\beta) \parallel (\alpha) \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .

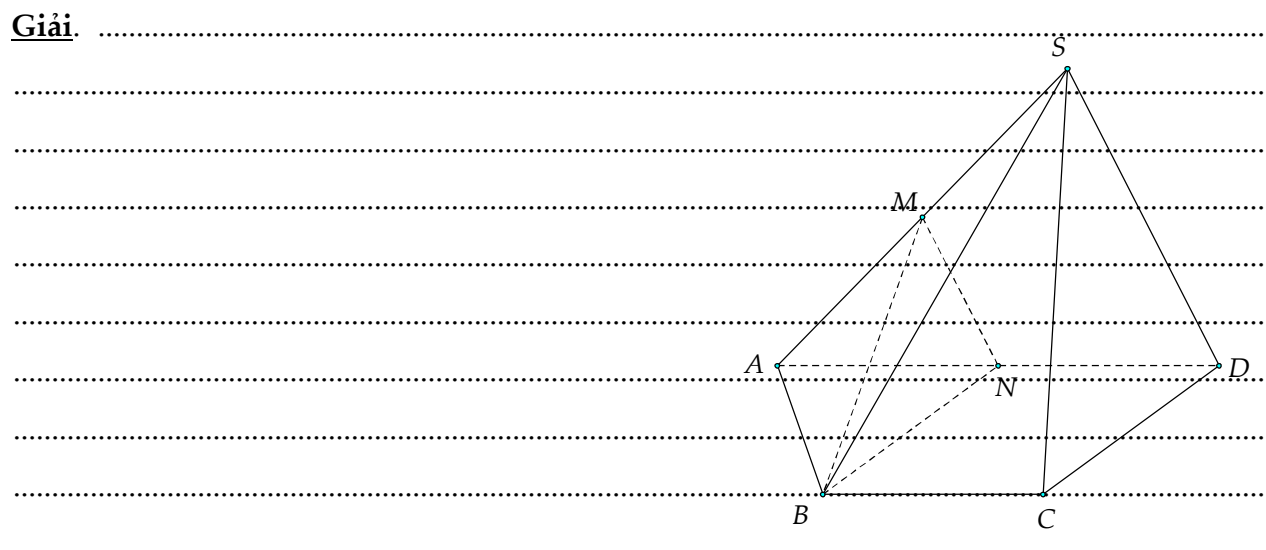
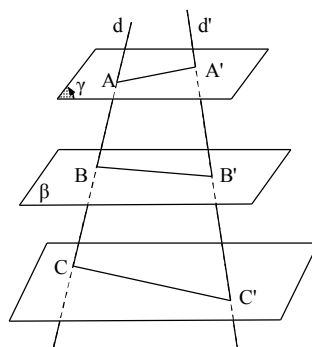
— **Định lý 3.** Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



- Hệ quả: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

— **Định lí Thales:** Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD .
Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.



BÀI TẬP VẬN DỤNG

- BT 587.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SD và K, I là trung điểm của BC, OM .
- Chứng minh: $(OMN) \parallel (SCD)$.
 - $(PMN) \parallel (ABCD)$.
 - Chứng minh: $KI \parallel (SCD)$.
- BT 588.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .
- Chứng minh rằng: $(OMN) \parallel (SBC)$.
 - Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB .
Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$ và $(MOR) \parallel (SCD)$.
- BT 589.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF . Chứng minh:
- $(ADF) \parallel (BCE)$.
 - $(DIK) \parallel (JBE)$.
- BT 590.** Cho các hình bình hành $ABCD, ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF lấy các điểm M, N sao cho $MC = 2AM, NF = 2BN$. Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB , cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1, N_1 . Chứng minh rằng :
- $MN \parallel DE$.
 - $M_1N_1 \parallel (DEF)$.
 - $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

- BT 591.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC và I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE . Chứng minh: $(IJK) \parallel (CDFE)$.
- BT 592.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, BC, CD .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MOP) .
 - Gọi E là trung điểm của SC và I là điểm trên cạnh SA thỏa $AI = 3IS$. Tìm $K = IE \cap (ABC)$ và $H = BC \cap (EIM)$. Tính tỉ số $\frac{CH}{CB}$.
 - Gọi G là trọng tâm $\triangle SBC$. Tìm thiết diện hình chóp $S.ABC$ bị cắt bởi (IMG) .
- BT 593.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Gọi I là trung điểm của ME và $G = AN \cap BD$.
- Tìm giao điểm E của AD với mặt phẳng (BMN) và tìm giao điểm F của SD với mặt phẳng (BMN) . Chứng minh: $FS = 2FD$.
 - Chứng minh $FG \parallel (SAB)$ và $(CDI) \parallel (SAB)$.
 - Gọi H là giao điểm của MN và SG . Chứng minh: $OH \parallel GF$.
- BT 594.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SC , N là điểm trên đường chéo BD sao cho $BD = 3BN$.
- Xác định giao tuyến của (SDC) và (SAB) và tìm $T = DM \cap (SAB)$. Tính $\frac{TM}{TD}$.
 - Gọi $K = AN \cap BC$. Chứng minh rằng: $MK \parallel (SBD)$.
 - Gọi $I = AN \cap DC$, $L = IM \cap SD$. Tính tỉ số $\frac{LS}{LD}$ và $\frac{S_{\triangle IKM}}{S_{\triangle IAL}}$.
- BT 595.** Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M', N' .
- Chứng minh: $(ADF) \parallel (BCE)$.
 - Chứng minh: $(ADF) \parallel (MM'N'N)$.
- BT 596.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $ABC, ACC', A'B'C'$. Chứng minh: $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.
- BT 597.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AD = 2BC$, $M \in BC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M , $\parallel CD$, $\parallel SC$, (P) cắt AD, SA, SB lần lượt tại N, P, Q .
- Chứng minh: $NQ \parallel (SCD)$ và $NP \parallel SD$.
 - Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SD và AD . Chứng minh: $(CHK) \parallel (SAB)$ và CK là giao tuyến của (KPQ) và (SCD) .
- BT 598.** Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm của tam giác ABC . Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.
- Chứng minh: $GM \parallel (SBC)$.
 - Gọi D là điểm đối xứng của A qua G . Chứng minh: $(MCD) \parallel (NBG)$.
 - Gọi $H = DM \cap (SBC)$. Chứng minh H là trọng tâm $\triangle SBC$.

§ 5. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG 2

☆☆☆

BT 599. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O .

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
- Gọi E là trung điểm của SC . Chứng minh: $OE \parallel (SAB)$.
- Gọi F là điểm trên đoạn BD sao cho $3BF = 2BD$. Tìm giao điểm M của SB và (AEF) . Tính tỉ số: $\frac{SM}{SB}$.

BT 600. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SAD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB .

- Chứng minh: $IJ \parallel (ABCD)$.
- Chứng minh: $(OMN) \parallel (SDC)$.
- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SDC) .
- Tìm giao điểm của BC và (OMN) .

BT 601. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi H, I, K, L lần lượt là trung điểm của SA, SC, OB, SD .

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD) ; (HIK) và (SBD) .
- Chứng minh OL song song với (HIK) .
- Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (HIK) .

BT 602. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cạnh đáy lớn AD . Gọi E, F lần lượt là các điểm trên hai cạnh SA, SD thỏa mãn điều kiện: $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SD} = \frac{1}{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) , của (SAD) và (SBC) .
- Tìm giao điểm H của CD và (EFG) .
- Chứng minh: $EG \parallel (SBC)$.
- Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi (EFG) . Nó là hình gì?

BT 603. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$. Lấy điểm M thuộc cạnh AD sao cho $AD = 3AM$.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (GCD) .
- Tìm giao điểm I của CD và mặt phẳng (SGM) .
- Chứng minh: MG song song (SCD) .

BT 604. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB .

- Tìm giao tuyến của (MCB) và (SAD) .
- Chứng minh rằng: $MN \parallel (SCD)$.
- Gọi $I = DM \cap CN$. Chứng minh rằng: $SI \parallel (NAD)$.

MỤC LỤC

PHẦN 1. GIẢI TÍCH	1
Chương 1 : HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	1
§ 0. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CẦN NHỚ	1
§ 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	4
§ 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	12
I. Phương trình lượng giác cơ bản	12
II. Một số kỹ năng giải phương trình lượng giác	13
1. Sử dụng thành thạo cung liên kết	13
2. Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng	13
3. Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của sin và cos	16
4. Xác định nhân tử chung để đưa về phương trình tích số	18
III. Một số dạng phương trình lượng giác thường gặp	21
1. Phương trình lượng giác đưa về bậc hai và bậc cao cùng 1 hàm lượng giác	21
2. Phương trình lượng giác bậc nhất đối với sin và cosin (phương trình cơ bản)	24
3. Phương trình lượng giác đẳng cấp (bậc 2, bậc 3, bậc 4)	27
4. Phương trình lượng giác đối xứng	29
5. Một số phương trình lượng giác dạng khác	30
§ 3. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG 1	36
Chương 2 : TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT	39
§ 1. CÁC QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN	39
§ 2. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP	44
§ 3. NHỊ THỨC NEWTON	56
§ 4. BƯỚC CỎ VÀ XÁC SUẤT CỦA BƯỚC CỎ	63
§ 5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT	74
§ 6. BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 2	80
Chương 3 : DẠY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN	83
§ 1. PHƯƠNG PHÁP QUY nạp TOÁN HỌC	83
§ 2. DẠY SỐ	86
§ 3. CẤP SỐ CỘNG	92
§ 4. CẤP SỐ NHÂN	98
PHẦN 2. HÌNH HỌC	101
Chương 1 : PHÉP BƯỚC HÌNH	101
§ 1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BƯỚC HÌNH	101
§ 2. PHÉP TÍNH TÍNH	101
§ 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC	105
§ 4. PHÉP QUAY	106
§ 5. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM	107
§ 6. PHÉP VỊ TỤ & PHÉP ĐỒNG DẠNG	108
Chương 2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN	111
§ 1. ĐẠY CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG	111
§ 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG	134
§ 4. MẶT PHẪNG SONG SONG	143
§ 5. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG 2	146