

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 + 2x - 7)e^x$ trên đoạn $[0; 3]$.

Câu 3 (1,0 điểm)

a) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)(z-i) + 2z = 2i$. Tìm môđun của số phức $w = 3 + 4z$.

b) Giải bất phương trình $\log_3(x-2) + \log_{\sqrt{3}}\sqrt{x+3} > 1 + \log_3 2$.

Câu 4 (1,0 điểm) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ và trục hoành.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z + 9 = 0$. Tìm tọa độ điểm I thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) bằng 2.

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình $4\sin^2 x \cos x + \sin 3x = \sin(\pi + x)$.

b) Trong lễ khai mạc Hội khỏe Phù Đổng của trường THPT X, ban khánh tiết chọn đồng thời 5 bạn trong số 22 bạn lớp trưởng để đón tiếp khách. Tính xác suất trong 5 bạn được chọn có cả nam và nữ, biết trong 22 bạn lớp trưởng có 8 nam và 14 nữ.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của hai đường chéo AC và BD . Biết $SA = a\sqrt{2}$, $AC = 2a$, $SM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, với M là trung điểm cạnh AB . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có phương trình đường chéo BD là $4x + 5y - 9 = 0$, đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $d: x + y - 2 = 0$. Điểm $K\left(2; \frac{1}{2}\right)$ thuộc cạnh AB và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD có bán kính $R = \frac{15}{6}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$, biết đỉnh C có hoành độ dương.

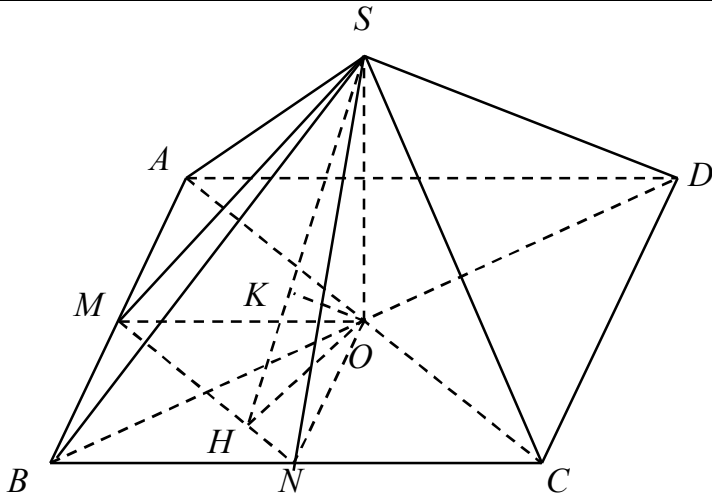
Câu 9 (1,0 điểm). Giải phương trình: $(7x-10)\sqrt{x-2} = 2(1+\sqrt{2x-3})(2\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-2})$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{16}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 1}} + \frac{xy + yz + zx + 1}{x + y + z}$.

-----HẾT-----

Câu	Nội dung	Điểm												
1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$.	1,0đ												
	TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	0,25												
	Sự biến thiên: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$	0,25												
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>$+\infty$</td><td>1</td></tr></table> Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.	x	$-\infty$	1	$+\infty$	y'	-		-	y	1	$+\infty$	1	0,25
	x	$-\infty$	1	$+\infty$										
y'	-		-											
y	1	$+\infty$	1											
Đồ thị: Giao điểm của đồ thị với trục Ox là $(0; 0)$ Vẽ đồ thị: Đồ thị nhận giao điểm 3 đường tiệm cận $(1; 1)$ làm tâm đối xứng.	0,25													
2	Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 + 2x - 7)e^x$ trên đoạn $[0; 3]$.	1,0đ												
	Ta có: $f'(x) = (x^2 + 2x - 7)'e^x + (x^2 + 2x - 7)(e^x)' = (x^2 + 4x - 5)e^x$	0,25												
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)e^x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 3] \\ x = -5 \notin [0; 3] \end{cases}$	0,25												
	Tính $f(0) = -7, f(3) = 8e^3, f(1) = -4e$.	0,25												
	Vậy $\max_{[0; 3]} f(x) = f(3) = 8e^3; \min_{[0; 3]} f(x) = f(1) = -4e$.	0,25												
3	a) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1 + i)(z - i) + 2z = 2i$. Tìm môđun của số phức $w = 3 + 4z$.	0,5đ												
	$(1 + i)(z - i) + 2z = 2i \Leftrightarrow (3 + i)z = 3i - 1 \Leftrightarrow z = \frac{3i - 1}{3 + i} = i$	0,25												
	Từ đó suy ra: $ w = 3 + 4i = 5$	0,25												
	b) Giải bất phương trình $\log_3(x - 2) + \log_{\sqrt{3}}\sqrt{x + 3} > 1 + \log_3 2$.	0,5đ												
	Điều kiện: $x > 2$. Khi đó Bpt $\log_3(x - 2)(x + 3) > \log_3 6 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) > 6$	0,25												

	$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > 3 \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bpt là $T = (3; +\infty)$	0,25
4	Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ và trục hoành.	1,0đ
	Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$	0,25
	Diện tích hình phẳng cần tính được cho bởi công thức $S = \int_{-1}^1 x^4 + 2x^2 - 3 dx$	0,25
	Ta có $S = \left \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 - 3) dx \right $	0,25
	Tích phân $S = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} - 3x \right) \Big _{-1}^1 = \frac{64}{15}$, từ đó suy ra $S = \frac{64}{15}$.	0,25
5	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z + 9 = 0$. Tìm tọa độ điểm I thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) bằng 2.	1,0đ
	Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$	0,25
	Do $I \in d$ nên $I(1-t; -3+2t; 3+t)$.	
	$d(I, (\alpha)) = 2 \Leftrightarrow \frac{ 2(1-t) - 2t - 3(3+t) + 9 }{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{ 2-2t }{3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$	0,25
	Do đó có hai điểm I thỏa đề bài là: $I(3; -7; 1)$, $I(-3; 5; 7)$.	0,25
6	a) Giải phương trình $4\sin^2 x \cos x + \sin 3x = \sin(\pi + x)$.	0,5đ
	$PT \Leftrightarrow 2\sin x \sin 2x + \sin 3x = -\sin x$ $\Leftrightarrow 2\sin x \sin 2x + 2\sin 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(\sin x + \cos x) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,25
	b) Trong lễ khai mạc Hội khỏe Phù Đổng của trường THPT X, ban khánh tiết chọn đồng thời 5 bạn trong số 22 bạn lớp trưởng để đón tiếp khách. Tính xác suất trong 5 bạn được chọn có cả nam và nữ, biết trong 22 bạn lớp trưởng có 8 nam và 14 nữ.	0,5đ

	Chọn 5 bạn trong số 22 bạn, nên số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{22}^5 = 26334$ Gọi A: “5 bạn được chọn có cả nam và nữ” Khi đó $n(\bar{A}) = C_8^5 + C_{14}^5 = 56 + 2002 = 2058$	0,25
	Xác suất cần tính là: $P(A) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{2058}{26334} = \frac{578}{627} (\approx 0,92)$	0,25
	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của hai đường chéo AC và BD. Biết $SA = a\sqrt{2}$, $AC = 2a$, $SM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, với M là trung điểm cạnh AB. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.	1,0đ
7	 Từ giả thiết $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AC, OA = a, SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a$	0,25
	$\triangle OSM$ vuông tại O: $OM = \sqrt{SM^2 - SO^2} = \frac{1}{2}a$ Ta có: $\triangle ABC$ vuông tại B: $BC = 2MO = a, AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$ $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} AB.BC.SO = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$	0,25
	Gọi N là trung điểm của BC $\Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow d(SM, AC) = d(AC, (SMN)) = d(O, (SMN))$ $\triangle OMN$ vuông tại O: $OH \perp MN, SO \perp MN \Rightarrow MN \perp (SOH)$ $\triangle SOH$ vuông tại O: $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SMN) \Rightarrow OK = d(O, (SMN))$	0,25
	$\triangle OMN$ vuông tại O: $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}a, OM = \frac{a}{2}, OH \perp MN \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ $\triangle SOH$ vuông tại O: $d(SM, AC) = OK = \frac{OS.OH}{\sqrt{OS^2 + OH^2}} = \frac{a\sqrt{57}}{19}$	0,25
8	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có phương trình đường chéo BD là $4x + 5y - 9 = 0$, đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là	1,0đ

	$d: x + y - 2 = 0$. Điểm $K\left(2; \frac{1}{2}\right)$ thuộc cạnh AB và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD có bán kính $R = \frac{15}{6}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$, biết đỉnh C có hoành độ dương.	
	Vì $B = d \cap BD$ nên $B(1;1)$ Gọi K' là điểm đối xứng với K qua đường phân giác $d \Rightarrow K' \in BC$. Đường thẳng KK' đi qua K và vuông góc với d nên có phương trình: $2x - 2y - 3 = 0$ Gọi $I = d \cap KK' \Rightarrow I\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Mà I là trung điểm KK' nên $K'\left(\frac{3}{2}; 0\right)$	0,25
	Đường thẳng AB đi qua hai điểm $B(1;1)$ và $K\left(1; \frac{1}{2}\right)$ nên có phương trình $x + 2y - 3 = 0$ Đường thẳng BC đi qua hai điểm $B(1;1)$ và $K'\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ nên có phương trình $2x + y - 3 = 0$ Ta có: $\cos(\widehat{AB, BC}) = \frac{ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 }{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \widehat{ADC} = \sin \widehat{ABC} = \frac{3}{5}$ Theo định lí sin trong tam giác ACD, ta có: $\frac{AC}{\sin \widehat{ADC}} = 2R \Leftrightarrow AC = 3$	0,25
	Vì $A \in AB \Rightarrow A(3 - 2a; a), C \in BC \Rightarrow C(c; 3 - 2c), c > 0$ Gọi M là trung điểm của $AC \Rightarrow M\left(\frac{3 - 2a + c}{2}; \frac{3 - 2c + a}{2}\right)$ Vì $M \in BD, AC = 3$ nên ta có hệ: $\begin{cases} 4\left(\frac{3 - 2a + c}{2}\right) + 5\left(\frac{3 - 2c + a}{2}\right) - 9 = 0 \\ \sqrt{(c - 2a - 3)^2 + (3 - 2c - a)^2} = 3 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 2c \\ (3 - 3c)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} c = 0 \\ a = 3 \end{cases}$ (loại) $\Rightarrow A(5; -1), C(2; -1)$ Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $D(6; -3)$ Thử lại thỏa mãn phân giác trong.	0,25
9	Giải phương trình: $(7x - 10)\sqrt{x - 2} = 2(1 + \sqrt{2x - 3})(2\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x - 2})$	1,0đ
	Điều kiện: $x \geq 2$ suy ra $2\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x - 2} > 0$ và ta có: $7x - 10 = (2\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x - 2})(2\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x - 2})$ ta Với điều kiện đã cho phương trình tương đương với: $2\sqrt{2x - 3} \cdot \sqrt{x - 2} = x + 2\sqrt{2x - 3}$	0,25

	Đặt $t = \sqrt{2x-3} (t \geq 0) \Rightarrow x = \frac{t^2+3}{2}$, phương trình đã cho có dạng $2t\sqrt{\frac{t^2-1}{2}} = \frac{t^2+3}{2} + 2t \Leftrightarrow 2t\sqrt{2t^2-2} = t^2 + 4t + 3 = 0(1)$	0,25
	Do 2 vế không âm nên bình phương 2 vế ta được: $(1) \Leftrightarrow 4t^2(2t^2-2) = (t^2-4t+3)^2 \Leftrightarrow 7t^4 - 8t^3 - 30t^2 - 24t - 9 = 0$ $\Leftrightarrow (t-3)(7t^3 + 13t^2 + 9t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ 7t^3 + 13t^2 + 9t + 3 = 0 \end{cases} (2)$	0,25
	$t = 3 \Rightarrow x = 6$ thỏa mãn điều kiện. Phương trình (2) vô nghiệm vì $t \geq 0 \Rightarrow VT > 0$ dương Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 6$ duy Chú ý: Nếu học sinh thêm bớt, nhầm nghiệm và nhân liên hợp sau đó không chứng minh được phương trình còn lại vô nghiệm thì trừ 1/2đ	0,25
	Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{16}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 1}} + \frac{xy + yz + zx + 1}{x + y + z}$.	1,0đ
	Với $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Ta có	0,25
	$Q = \frac{32}{\sqrt{2(9 - (x^4 + y^4 + z^4) + 4)}} + \frac{(x + y + z)^2 - 1}{2(x + y + z)}$ Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $x^4 + x + x \geq 3x^2$ Côsi Tương tự đi đến: $x^4 + y^4 + z^4 \geq 9 - 2(x + y + z) \Rightarrow Q \geq \frac{32}{\sqrt{4(x + y + z) + 4}} + \frac{(x + y + z)^2 - 1}{2(x + y + z)}$	0,25
10	Đặt $x + y + z = t (t > 0)$. Ta có $Q \geq \frac{16}{\sqrt{t+1}} + \frac{t^2-1}{2t}$ Ta có: $(x + y + z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2).3 = 9$ $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq x^2 + y^2 + z^2 = 3$ $\Rightarrow t \in [\sqrt{3}; 3]$	0,25
	$f'(t) = \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} - \frac{8}{\sqrt{(t+1)^3}} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{8}{\sqrt{4^3}} < 0, \forall t \in [\sqrt{3}; 3]$ Do đó $Q \geq f(t) \geq f(3) = \frac{28}{3}$ Vậy GTNN của $Q = \frac{28}{3}$ khi $x = y = z = 1$.	0,25