

Câu 1. (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1 + 4^{3x-y}) \cdot 5^{1-3x+y} = 1 + 2^{3x-y+1} \\ \log_2(y+1) = \log_{\sqrt{2}} x \end{cases}.$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho dãy số (a_n) xác định bởi
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

a) Chứng minh dãy số (a_n) là dãy số giảm, từ đó tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

b) Với mỗi số nguyên dương n , đặt $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) , có đường cao AD ($D \in BC$). Kẻ DE , DF lần lượt vuông góc với AB , AC ($E \in AB$, $F \in AC$). Gọi I là giao điểm của BF và CE .

a) Gọi K là giao điểm của BF và DE , L là giao điểm của CE và DF . Chứng minh rằng KL song song với BC .

b) Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và AI . Chứng minh rằng M , N , O thẳng hàng.

Câu 4. (1,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x)f(y) - f(x+y) = \frac{4}{9}xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho số nguyên dương n . Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc $\{1; 2; 3; 6\}$.

===== **HẾT** =====