

Câu 1. (2,5 điểm) Giải phương trình $\cos 2x = 2\sin^2 x + 4\cos x$

Câu 2. (4,5 điểm)

a. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$

b. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2020(2021 - x^2)} - 2020}{x - 1}$

Câu 3. (3,0 điểm)

a. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển nhị thức Niu-ton $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$

b. Cho một đa giác lồi (H) có 30 đỉnh $A_1A_2...A_{30}$. Gọi X là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của (H) . Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong X . Tính xác suất để chọn được 2 tam giác là các tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác (H) .

Câu 4. (3,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{2u_n + 5} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

a. Gọi (v_n) là dãy số xác định bởi $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn.

b. Tính giới hạn của dãy số (u_n)

Câu 5. (5,0 điểm)

a. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, (α) là mặt phẳng thay đổi qua AB và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M, N (M khác S, C và N khác S, D). Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AN và BM . Chứng minh rằng biểu thức $T = \frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK}$ có giá trị không đổi.

b. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , các mặt bên đều là hình vuông. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AA', A'C'$. Tính diện tích thiết diện khi cắt lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng (MNE) .

Câu 6. (2,0 điểm)). Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức:
$$P = \sqrt{\frac{xy}{xy + 2z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz + 2x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx + 2y}}$$

----- Hết -----

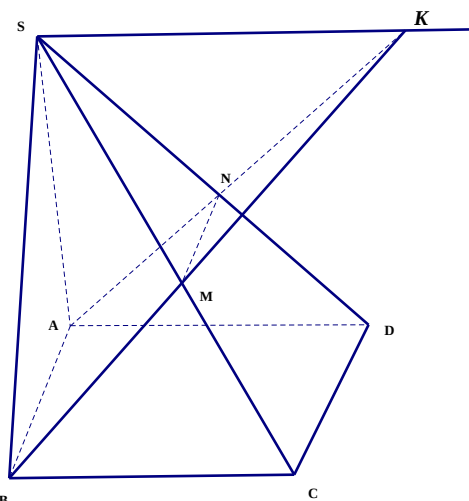
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên học sinh: Số báo danh:

Câu	Nội dung	Điểm
1	Giải phương trình sau: $\cos 2x = 2\sin^2 x + 4\cos x$	2.5
	$\cos 2x = 2\sin^2 x + 4\cos x$ $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 2(1 - \cos^2 x) + 4\cos x$ $\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$	1.5
	$+ \cos x = \frac{3}{2}$ (vô nghiệm) $+ \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ KL: Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	1.0
2.a	a. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$	2.0
	ĐK: $x \geq 1; y \geq 0$ $(1) \Leftrightarrow xy + y^2 + x + y = x^2 - y^2$ $\Leftrightarrow y(x + y) + (x + y) = (x - y)(x + y)$ $\Leftrightarrow (x + y)(y + 1 - x + y) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$	0.5 0.5
	+) $x + y = 0$ (Loại do $x \geq 1; y \geq 0$) +) $x = 2y + 1$ thế vào (2) ta được $(2y + 1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 4y + 2 - 2y$ $\Leftrightarrow \sqrt{2y}(y + 1) = 2y + 2$ $\Leftrightarrow (y + 1)(\sqrt{2y} - 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \sqrt{2y} = 2 \Leftrightarrow y = 2 \end{cases}$ +) Với $y = -1$ (L) +) Với $y = 2 \Rightarrow x = 5$ (TM) Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm $(x; y) = (5; 2)$	0.5 0.5

2.b	Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2020(2021 - x^2)} - 2020}{x - 1}$	2,5
	$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2020(2021 - x^2)} - 2020}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2020(2021 - x^2) - 2020^2}{(x - 1)(\sqrt{2020(2021 - x^2)} + 2020)}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2020(1 - x^2)}{(x - 1)(\sqrt{2020(2021 - x^2)} + 2020)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2020(-1 - x)}{(\sqrt{2020(2021 - x^2)} + 2020)} = \frac{-2}{2} = -1$	1.0 1.5
3.a	Tìm hệ số của x^9 trong khai triển nhị thức Newton $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$	1.5
	$\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot (2x^2)^{15-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k$ $= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot 2^{15-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{30-3k}$ Hệ số của x^9 trong khai triển tương ứng với k thỏa mãn: $30 - 3k = 9 \Leftrightarrow k = 7$ Hệ số của x^9 trong khai triển $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$ là: $C_{15}^7 \cdot 2^8 \cdot (-3)^7 = -C_{15}^7 \cdot 2^8 \cdot 3^7$	0.5 0.5 0.5
3.b	Cho một đa giác lồi (H) có 30 đỉnh $A_1 A_2 \dots A_{30}$. Gọi X là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của (H). Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong X. Tính xác suất để chọn được 2 tam giác là các tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác (H).	1.5
	Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác (H) là: $C_{30}^3 = 4060$ Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{4060}^2$ Gọi A là biến cố: "Hai tam giác được chọn là các tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác (H)". +) Số tam giác có 1 cạnh là cạnh của (H): - Chọn ra một cạnh của đa giác (H) có C_{30}^1 - Chọn ra 1 trong 26 đỉnh không kề với đỉnh thuộc cạnh đã chọn của (H) có C_{26}^1 $\Rightarrow$ Số tam giác có 1 cạnh là cạnh của (H) là $C_{30}^1 \cdot C_{26}^1 = 780$ $\Rightarrow n(A) = C_{780}^2$ $\Rightarrow P(A) = \frac{C_{780}^2}{C_{4060}^2} = \frac{247}{6699}$ KL: Vậy xác suất để chọn được 2 tam giác là tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác (H) là $\frac{247}{6699}$	0.5 0.5 0.5

4	Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{2u_n + 5} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ a. Gọi (v_n) là dãy số xác định bởi $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn. b. Tính giới hạn của dãy số (u_n)	3.0
	Ta có: $v_{n+1} = \frac{\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1}}{\frac{7u_n+4}{2u_n+5}+1} = \frac{\frac{7u_n+4}{2u_n+5}-2}{\frac{7u_n+4}{2u_n+5}+1} = \frac{3u_n-6}{9u_n+9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u_n-2}{u_n+1} = \frac{1}{3} v_n$ Suy ra $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$. Vậy (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{3}$, $v_1 = \frac{u_1-2}{u_1+1} = \frac{1}{3}$ Vì $q < 1$ nên (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn.	1.0 1.0
	+) $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} \right)^n \Rightarrow \lim v_n = 0$ Ta có $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1} \Rightarrow u_n = \frac{2+v_n}{1-v_n}$ Do đó $\lim u_n = \lim \frac{2+v_n}{1-v_n} = 2$	0.5 0.5
5a	Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, (α) là mặt phẳng thay đổi qua AB và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M, N . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AN và BM . Chứng minh rằng biểu thức $T = \frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK}$ có giá trị không đổi.	2.0



Ta có

$$+) \begin{cases} (\alpha) \supset AB \\ MN = (\alpha) \cap (SCD) \Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} SK = (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow SK \parallel AD \parallel BC \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{MN} = \frac{CS}{MS}$$

$$\frac{BC}{SK} = \frac{CM}{SM}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK} = \frac{CS}{MS} - \frac{CM}{SM} = \frac{MS}{MS} = 1$$

0.5

0.5

0.5

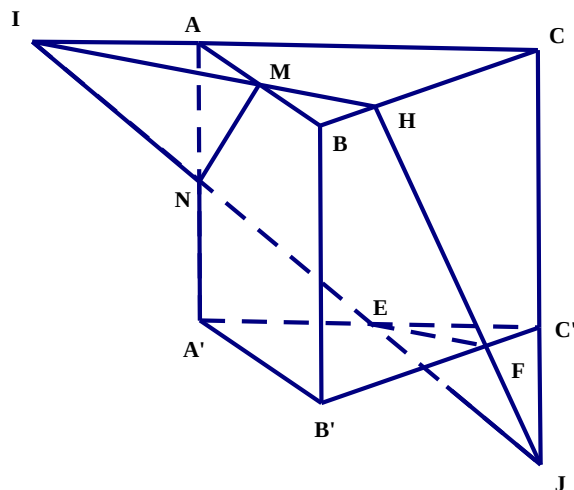
0.5

5b

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , các mặt bên đều là hình vuông. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AA', A'C'$. Tính diện tích thiết diện khi cắt lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng (MNE) .

3.0

*) Dựng thiết diện



0.5

	Trên $(ACC'A')$ gọi $NE \cap AC = I; NE \cap CC' = J \Rightarrow AI = CJ = \frac{a}{2}$ Trên (ABC) gọi $IM \cap BC = H \Rightarrow BH = \frac{a}{4}$ Trên $(BCC'B')$ gọi $HJ \cap B'C' = F \Rightarrow FC' = \frac{a}{4}$ $\Rightarrow$ Thiết diện là ngũ giác MNEFH	1.0 0.5
	Tính diện tích thiết diện $IH = 3MH = 3 \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a\sqrt{3}}{4}; \quad HJ = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{4}; \quad IJ^2 = \frac{18a^2}{4}$ $\Rightarrow \Delta HIJ$ vuông tại H $\frac{S_{MNI}}{S_{IHJ}} = \frac{IM \cdot IN}{IH \cdot IJ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}; \quad \frac{S_{EFJ}}{S_{HIJ}} = \frac{JE \cdot JF}{JI \cdot JH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ $\Rightarrow S_{MNEFH} = S_{IHJ} - S_{MNI} - S_{JEF} = \frac{2}{3} S_{HIJ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a\sqrt{5}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{16}$	0.5 0.5
6	Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{\frac{xy}{xy+2z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+2x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+2y}}$	2.0
	Ta có: $\sqrt{\frac{xy}{xy+2z}} = \sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right)$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{x+z} = \frac{y}{y+z} \Leftrightarrow x = y$ Tương tự: $\sqrt{\frac{yz}{yz+2x}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+x} \right)$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y = z$ $\sqrt{\frac{zx}{zx+2y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+y} + \frac{x}{x+y} \right) \quad \text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow z = x$ $\Rightarrow P = \sqrt{\frac{xy}{xy+2z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+2x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+2y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{x+y} + \frac{y+z}{y+z} + \frac{z+x}{z+x} \right) = \frac{3}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{2}{3}$ Vậy $P_{\max} = \frac{3}{2}$ khi $x = y = z = \frac{2}{3}$	0.5 0.5 0.5

Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.