KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH GIA LAI 2018-2019
MÔN THI: TOÁN 12-BẢNG B
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (H) và đường thẳng $d : y = (m^2+1)x - 2$ (với m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để d cắt (H) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = 12(x_1+x_2) + 11x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và d là

$$\frac{2x+1}{x-1} = (m^2+1)x - 2 \Leftrightarrow (m^2+1)x^2 - (m^2+5)x + 1 = 0$$

(do x = 1 không là nghiệm phương trình)
Đường thẳng d cắt (H) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow (m^2+5)^2 - 4(m^2+1) > 0 \Leftrightarrow (m^2+3)^2 + 12 > 0$$

Suy ra $\forall m \in \mathbb{R}$ thì d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt.
Ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{m^2+5}{m^2+1}; x_1.x_2 = \dfrac{1}{m^2+1}$
$P = 12(x_1+x_2) + 11x_1.x_2 = 12\left(\dfrac{m^2+5}{m^2+1}\right) + 11\left(\dfrac{1}{m^2+1}\right) = 12 + \dfrac{59}{m^2+1} \le 71$
Do đó P đạt giá trị lớn nhất là 71 khi m = 0.
Vậy m = 0 là giá trị cần tìm. □

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 2. Giải các phương trình sau trên tập hợp các số thực

1. $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x = 2\sqrt{x^2-3x}$.
2. $7^x - 6\log_7(6x+1) - 1 = 0$.

Lời giải

1. $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x = 2\sqrt{x^2-3x} \Leftrightarrow (x^2-3x)^2 - 3(x^2-3x) - 2\sqrt{x^2-3x} = 0$
   Đặt $t = \sqrt{x^2-3x}$, $t \ge 0$, phương trình trở thành $t^4 - 3t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = 2; t = -1$ (loại)
   Với $t = 0$ suy ra $x = 0, x = 3$
   Với $t = 2$ suy ra $x = -1, x = 4$
   Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x = 0, x = 3$,$x = -1, x = 4$

2. Điều kiện $x > -\dfrac{1}{6}$. Đặt $y = \log_7(6x+1)$, khi đó $7^y = 6x+1$.

   Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ $\begin{cases} 7^x = 6y+1 \\ 7^y = 6x+1 \end{cases}$.

   Suy ra $7^x - 7^y = 6y - 6x \Leftrightarrow 7^x + 6x = 7^y + 6y$ (1). Xét hàm số $f(t) = 7^t + 6t$.
   Ta có $f'(t) = 7^t \ln 7 + 6 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.
   Do đó (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Suy ra $7^x - 6x - 1 = 0$ (*)
   Xét hàm số $g(x) = 7^x - 6x - 1$ trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$.
   Ta có $g'(x) = 7^x \ln 7 - 6; g''(x) = 7^x (\ln 7)^2 > 0$ nên đồ thị hàm số g lõm trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$
   . Do đó (*) có không quá hai nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$
   Mà $g(0) = 0, g(1) = 0$ nên x = 0, x = 1 là tất cả các nghiệm của (*). Vậy nghiệm của phương trình đã cho là x = 0, x = 1.

□

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 3. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(1+x+x^2)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 512$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 512 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}.(C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}) = 512 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2^{2n} = 512 \\ &\Leftrightarrow n = 5 \end{aligned}$$

$(1+x+x^2)^5 = [1+x(1+x)]^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} C_5^k x^k (1+x)^k = \sum\limits_{k=0}^{5} \left(\sum\limits_{i=0}^{k} C_5^k C_k^i x^{k+i} \right)$, $(i, k \in \mathbb{N}, i \le k)$

Vì số hạng chứa x^5 nên $\begin{cases} i + k = 5 \\ i, k \in \mathbb{N}, i \le k \end{cases}$, giải ra ta được $\begin{cases} i = 0 \\ k = 5 \end{cases}; \begin{cases} i = 1 \\ k = 4 \end{cases}; \begin{cases} i = 2 \\ k = 3 \end{cases}$

Hệ số cần tìm là $C_5^5 C_5^0 + C_4^1 C_5^4 + C_3^2 C_5^3 = 51$ □

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 4. Cho tam giác ABC có $AB = c, BC = a, CA = b$, h_a là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A và $b + c = \dfrac{a}{2} + h_a \sqrt{3}$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} b+c=\frac{a}{2}+h_a.\sqrt{3} \Rightarrow & \quad b+c=\frac{a}{2}+\frac{2S_{ABC}}{a}.\sqrt{3} \\ \Rightarrow & \quad b+c=\frac{a}{2}+(b\sin C).\sqrt{3} \\ \Rightarrow & \quad \sin B+\sin C=\frac{\sin(B+C)}{2}+\sqrt{3}\sin B\sin C \\ \Rightarrow & \quad \sin B+\sin C=\sin B(\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C)+\sin C(\frac{1}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B) \\ \Rightarrow & \quad \sin B\left[\cos\left(C-\frac{\pi}{3}\right)-1\right]+\sin C\left[\cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)-1\right]=0 \\ \Rightarrow & \quad \cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=1 \\ \Rightarrow & \quad B=C=\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC đều. □

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 5. Một quả bóng cao su được thả rơi từ độ cao $h=18m$. Sau mỗi lần chạm đất, quả bóng lại nảy lên cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó. Giả sử quả bóng khi rơi và nảy đều theo phương thẳng đứng. Tính tổng độ dài đoạn đường quả bóng đã di chuyển từ lúc được thả đến lúc quả bóng không nảy nữa.

Lời giải

Sau lần chạm đất đầu tiên, quả bóng nảy lên độ cao là $h_1=\frac{3}{4}h$. Tiếp theo, bóng rơi từ độ cao h_1 , chạm đất và nảy lên độ cao $h_2=\frac{3}{4}h_1$. Sau đó bóng lại rơi từ độ cao h_2 và cứ tiếp tục như vậy... Sau lần chạm đất thứ n, quả bóng nảy lên độ cao $h_n=\frac{3}{4}h_{n-1}$.

Tổng độ dài đoạn đường quả bóng đi được từ lúc thả đến lúc quả bóng không nảy nữa là

$$d=(h+h_1+h_2+\cdots+h_n+\cdots)+(h_1+h_2+\cdots+h_n+\cdots)$$

d là tổng của hai cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=\frac{3}{4}$, có số hạng đầu lần lượt là h, h_1

Do đó $d=\frac{h}{1-q}+\frac{h_1}{1-q}=126$ m. □

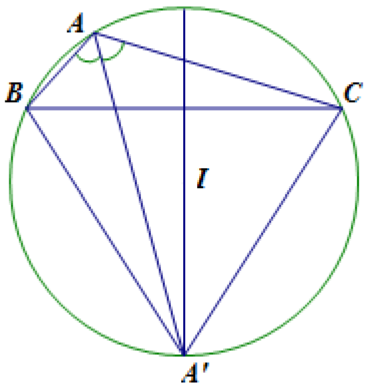
STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm I có phương trình

$$(x-1)^2+(y+1)^2=5$$

, tam giác ABC nội tiếp đường tròn và đường phân giác trong góc A có phương trình $x-y-1=0$. Biết rằng hai điểm A và I cách đều đường thẳng BC và điểm A có hoành độ dương. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Ta có $I(1;-1)$. Tọa độ giao điểm của đường phân giác trong góc A và (I) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=5\\ x-y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2;y=1\\ x=-1;y=-2\end{cases}$$

Suy ra có hai giao điểm $A(2;1)$, $A'(-1;-2)$

Đường thẳng BC vuông góc A'I nên phương trình BC có dạng: $2x+y+m=0$ ($BC\perp A'I$)

$d(A;BC)=d(I;BC)\Leftrightarrow \frac{|4+1+m|}{\sqrt{5}}=\frac{|2-1+m|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow m=-3$

Phương trình BC: $2x+y-3=0$

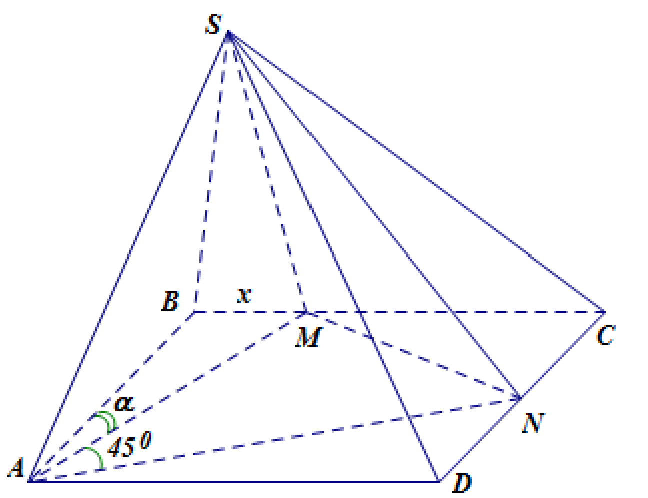
Tìm được tọa độ điểm B, C là: $(\frac{9-\sqrt{21}}{5};\frac{-3+2\sqrt{21}}{5})$, $(\frac{9+\sqrt{21}}{5};\frac{-3-2\sqrt{21}}{5})$.

Vậy diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.d(A;BC)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{84}{5}}.\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{21}}{5}$ □

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , chiều cao h không đổi. Gọi M,N lần lượt là hai điểm di động trên hai cạnh BC,CD sao cho góc $\widehat{MAN}=45^0$. Đặt $BM=x$. Tìm x theo a sao cho thể tích của khối chóp $S.AMN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Ta có $V_{s.AMN} = \frac{1}{3}.h.S_{AMN} = \frac{h\sqrt{2}}{12}.AM.AN$
Đặt $\widehat{MAB} = \alpha$,$0^0 \le \alpha \le 45^0$, $\widehat{NAD} = 45^0 - \alpha$
$AM.AN = \frac{AB}{cos\alpha}.\frac{AD}{\cos(45^0-\alpha)} = \frac{a^2\sqrt{2}}{cos\alpha(cos\alpha+\sin\alpha)} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\sin(2\alpha+45^0)}$
$V_{s.AMN}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM.AN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 1+\sqrt{2}\sin(2\alpha+45^0)$ lớn nhất $\Leftrightarrow \alpha = 22,5^0$
Vậy với $x = a.\tan 22,5^0 = a(\sqrt{2}-1)$ thì thể tích của khối chóp S.AMN đạt giá trị nhỏ nhất. □

STRONG TEAM TOÁN VD-VDC-ĐỀ THI-CHUYÊN ĐỀ

Câu 8. Cho a,b,c là ba số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện $a \ge b \ge c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}\right)+\frac{5a}{a+c}$.

Lời giải

Biến đổi $M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}}+\frac{1}{1+\frac{b}{c}}\right)+\frac{5}{1+\frac{c}{a}}$

Ta có bất đẳng thức $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \ge \frac{2}{1+\sqrt{xy}}, (\forall x,y>0, xy \ge 1)$

Thật vậy $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \ge \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2(\sqrt{xy}-1) \ge 0,$ đúng $\forall x,y>0, xy \ge 1$.

Do đó $M \ge \frac{1}{2}.\frac{2}{1+\sqrt{\frac{a}{c}}}+\frac{5}{1+\frac{c}{a}}$

Đặt $t = \frac{a}{c}$. Vì $a \ge b \ge c > 0$ nên $t \ge 1 \Rightarrow t \ge \sqrt{t}$. Suy ra $M \ge \frac{1}{1+t}+\frac{5t}{1+t} = \frac{5t+1}{t+1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{5t+1}{t+1}$, ta có$f'(t) = \frac{4}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1;+\infty)$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Do đó $f(t) \ge f(1), \forall t \ge 1$

Vậy $M_{\min} = f(1) = 3$, khi $t = 1 \Leftrightarrow a = b = c$ □