

Số báo danh

.....

Môn thi: TOÁN - Lớp 11 THPT

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi có 01 trang - gồm 05 câu

Câu I (4,0 điểm)

1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - (m+2)x + m + 1$, biết rằng (P) đi qua điểm $M(3;0)$.
2. Giải phương trình: $\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x} = x$.

Câu II (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\cos 2x + \sqrt{3}(1 + \sin x) = \frac{2\cos x + 2\sin 2x - 2\sin x - 1}{2\cos x - 1}$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y+3)\sqrt{x+3} = \sqrt{y+1} \\ (x-y+3)\sqrt{x} + \sqrt{y-2x+1} - x^2 + y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III (4,0 điểm)

1. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính Xác suất để số được chọn không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

Câu IV (4,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại $A(-1;3)$. Gọi D là một điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AD$ và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD . Điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm đoạn HC .

Xác định tọa độ điểm C , biết điểm B nằm trên đường thẳng $x + y + 7 = 0$.

2. Trong mặt phẳng với trục tọa độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$). Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên các đường thẳng AC, CD . Giả sử M, N lần lượt là trung điểm của AD, HI . Viết phương trình đường thẳng AB biết $M(1;-2), N(3;4)$ và đỉnh B nằm trên đường thẳng $x + y - 9 = 0$, $\cos \widehat{ABM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu V (4,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'S}$.

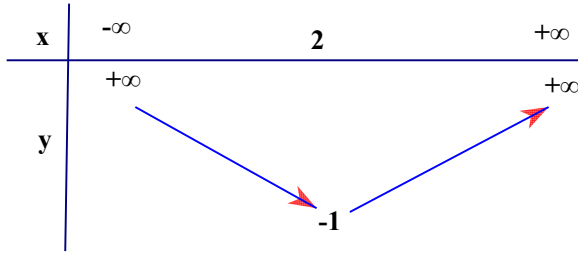
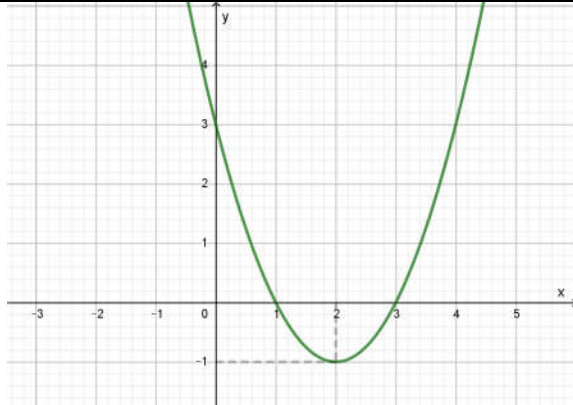
Mặt phẳng (α) qua A' cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Tính giá trị của biểu thức

$$T = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'}.$$

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, đáy lớn $BC = 2a$, $AD = a$, $AB = b$. Mặt bên (SAD) là tam giác đều. Mặt phẳng (α) qua điểm M trên cạnh AB và song song với các cạnh SA, BC . (α) cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q . Đặt $x = AM$ ($0 < x < b$). Tính giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

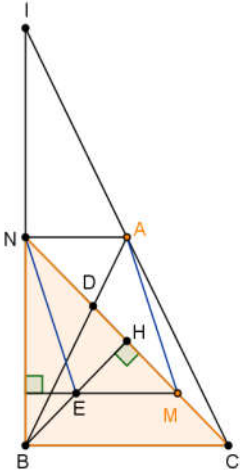
..... HẾT

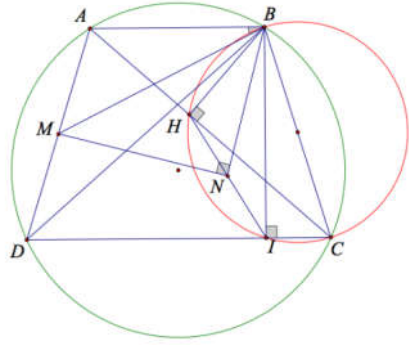
ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM

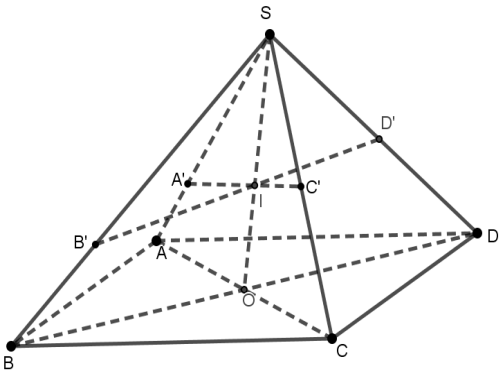
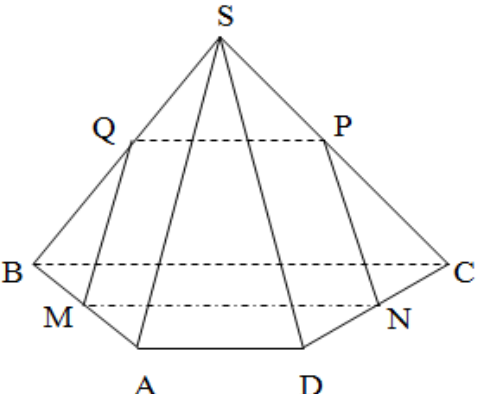
Câu	NỘI DUNG	Điểm
I	1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - (m+2)x + m + 1$, biết rằng (P) đi qua điểm $M(3;0)$.	2.0
4,0 điểm	Do (P) đi qua điểm $M(3;0)$ nên ta có $9 - 3(m+2) + m + 1 = 0 \Leftrightarrow -2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$	0.50
	Khi đó ta có hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ Ta có đỉnh $I: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow I(2; -1)$	0.50
	Bảng biến thiên 	0.50
		0.50
	2. Giải phương trình sau $\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x} = x$.	2.0
	Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Phương trình đã cho tương đương với: $2x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 1) - (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 0$	0.50
	Đặt $a = \sqrt{1+x}$; $b = \sqrt{1-x}$, ($a, b \geq 0$) $\Rightarrow 2x = a^2 - b^2$. Phương trình đã cho trở thành: $(a^2 - b^2)(a+b-1) - (a+b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)[(a+b)(a+b-1) - 1] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (a+b)^2 - (a+b) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a+b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$	0.50
	+ Với: $a = b \Rightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = 0$	0.50
	+ Với: $a+b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ - Kết luận. Phương trình có các nghiệm $x = 0$; $x = \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.	0.50

II	1. Giải phương trình: $\cos 2x + \sqrt{3}(1 + \sin x) = \frac{2 \cos x + 2 \sin 2x - 2 \sin x - 1}{2 \cos x - 1}$	2.0
4,0 điểm	Điều kiện: $2 \cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. $Pt \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}(1 + \sin x) = \frac{(2 \cos x - 1) + 2 \sin x(2 \cos x - 1)}{2 \cos x - 1}$	0.50
	$\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}(1 + \sin x) = \frac{(2 \cos x - 1)(1 + 2 \sin x)}{2 \cos x - 1}$ $\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x + \sqrt{3} + \sqrt{3} \sin x = 1 + 2 \sin x$ $\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\sin x = -1$.	0.50
	Với $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ Với $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$	0.50
	So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.	0.50
	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x - y + 3)\sqrt{x + 3} = \sqrt{y + 1} \\ (x - y + 3)\sqrt{x} + \sqrt{y - 2x + 1} - x^2 + y = 0 \end{cases}$	2.0
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y + 1 \geq 0 \\ y - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$. Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình : $(x - y + 3)\sqrt{x + 3} = \sqrt{y + 1} \Leftrightarrow (x - y + 2)\sqrt{x + 3} = \sqrt{y + 1} - \sqrt{x + 3}$	0.50
	$\Leftrightarrow (x - y + 2)\sqrt{x + 3} = \frac{y - x - 2}{\sqrt{y + 1} + \sqrt{x + 3}} \Leftrightarrow (x - y + 2) \left(\sqrt{x + 3} + \frac{1}{\sqrt{y + 1} + \sqrt{x + 3}} \right) = 0 \quad (1)$ Với điều kiện $x \geq 0, y \geq -1$ ta có : $\sqrt{x + 3} + \frac{1}{\sqrt{y + 1} + \sqrt{x + 3}} > 0$. Nên từ (1) ta có : $x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$.	0.50
	Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{3 - x} = x^2 - x - 2 \quad (*)$ Điều kiện $0 \leq x \leq 3$. Vì $VT \geq 0 \Rightarrow VP \geq 0 \Rightarrow x \in [2; 3]$. Với mọi $x \in [2; 3]$ ta có: $(1) \Leftrightarrow (x - 1) - \sqrt{x} + (x - 2) - \sqrt{3 - x} + x^2 - 3x + 1 = 0$	0.50
	$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1}{(x - 1) + \sqrt{x}} + \frac{x^2 - 3x + 1}{(x - 2) + \sqrt{3 - x}} + x^2 - 3x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1) \left(\frac{1}{(x - 1) + \sqrt{x}} + \frac{1}{(x - 2) + \sqrt{3 - x}} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow y = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}$ (tmdk). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \right)$.	0.50

III	1. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{ca+a^2}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$	2.0									
4,0 điểm	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{2b.(a+b)}\leq\frac{2b+(a+b)}{2}=\frac{a+3b}{2}$ Áp dụng tương tự ta được $\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{ca+a^2}}\geq\frac{2a\sqrt{2}}{a+3b}+\frac{2b\sqrt{2}}{b+3c}+\frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}.$	0.50									
	Ta cần chứng minh $\frac{2a\sqrt{2}}{a+3b}+\frac{2b\sqrt{2}}{b+3c}+\frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$ Hay $\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\geq\frac{3}{4}.$ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được $\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}.$	0.50									
	Mặt khác, từ một đánh giá quen thuộc ta có $(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)$ Do đó ta được $a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{4}{3}(a+b+c)^2$	0.50									
	Từ đó suy ra $\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a+b+c)^2}=\frac{3}{4}$ Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.	0.50									
	2. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính Xác suất để số được chọn không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau.	2.0									
	Số phần tử của S là $8.A_8^5=53760$. Do đó, chọn ngẫu nhiên một số từ tập S có 53760 (cách). Vì số được chọn có 6 chữ số nên ít nhất phải có hai chữ số chẵn, và vì không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau nên số được chọn có tối đa 3 chữ số chẵn.	0.50									
	TH1: Số được chọn có đúng 2 chữ số chẵn, khi đó gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$ Xếp 4 số lẻ trước ta có 4! cách. <table><tr><td></td><td>lẻ</td><td></td><td>lẻ</td><td></td><td>lẻ</td><td></td><td>lẻ</td><td></td></tr></table> Xếp 2 số chẵn vào 5 khe trống của các số lẻ có $C_5^2.A_5^2-4.C_4^1$ cách. Trong trường hợp này có $4!(C_5^2.A_5^2-4.C_4^1)=4416$ (số).		lẻ		lẻ		lẻ		lẻ		0.50
	lẻ		lẻ		lẻ		lẻ				

	TH2: Số được chọn có đúng 3 chữ số chẵn, khi đó gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$ Xếp 3 chữ số lẻ trước ta có A_4^3 cách. lẻ lẻ lẻ Xếp 3 chữ số chẵn vào 4 khe trống của các số lẻ có $C_4^3 \cdot A_5^3 - C_3^2 \cdot A_4^2$ cách. Trong trường hợp này có $A_4^3 \cdot (C_4^3 \cdot A_5^3 - C_3^2 \cdot A_4^2) = 4896$ (số).	0.50
	Vậy có tất cả 9312 số có 6 chữ số sao cho không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau. Xác suất cần tìm là $\frac{9312}{53760} = \frac{97}{560}$.	0.50
IV	1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại $A(-1;3)$. Gọi D là một điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AD$ và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD. Điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm đoạn HC. Xác định tọa độ điểm C, biết điểm B nằm trên đường thẳng $x + y + 7 = 0$.	2.0
4,0 điểm	Gọi N, I là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với BC với các đường thẳng CD và CA. Do tam giác IBC vuông tại B và $AB = AC \Rightarrow A$ là trung điểm của đoạn IC, suy ra D là trọng tâm tam giác IBC. Do đó $AN // \frac{1}{2}BC$. Gọi E là trung điểm BH, khi đó E là trực tâm tam giác NBM và tứ giác $NAME$ là hình bình hành nên từ $NE \perp BM \Rightarrow AM \perp BM$. 	1.0
	Đường thẳng BM có phương trình $x - 3y = 5$. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y = -7 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(-4; -3)$	0.50
	Từ $\overline{AB} = 3\overline{AD} \Rightarrow D(-2; 1)$. Lúc đó ta có phương trình các đường thẳng $CD: x + y = -1$; $BH: x - y = -1$. Suy ra tọa độ điểm $H(-1; 0)$. Suy ra $C(2; -3)$	0.50
	2. Trong mặt phẳng với trục tọa độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$). Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên các đường thẳng AC, CD. Giả sử M, N lần lượt là trung điểm của AD, HI. Viết phương trình đường thẳng AB biết $M(1; -2)$, $N(3; 4)$ và đỉnh B nằm trên đường thẳng $x + y - 9 = 0$, $\cos \widehat{ABM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.	2.0

	Xét tam giác ABD và HBI có: $\widehat{ABD} = \widehat{HBI} = \widehat{HBI}.$ Và $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{HIB}$. Suy ra $\triangle ABD \sim \triangle HBI$ Ta có BM, BN lần lượt là hai trung tuyến của tam giác ABD, HBI do đó: $\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BH} \quad (1).$ Lại có $\widehat{ABM} = \widehat{HBN} \Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{ABH} \quad (2).$ Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABH \sim \triangle MBN$. Do đó $\widehat{MNB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ hay $MN \perp NB$	 0.50
	Đường thẳng BN đi qua N và vuông góc với MN nên có phương trình là: $x + 3y - 15 = 0$. Toạ độ điểm B thỏa mãn $\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ x + 3y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$. Suy ra $B(6; 3)$.	0.50
	Gọi $\vec{n}(a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng AB. Ta có $\overrightarrow{MB}(5; 5)$ cùng phương với vec tơ $\overrightarrow{u_{MB}}(1; 1)$. Theo bài ra ta có: $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{ a + b }{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \Leftrightarrow 8(a^2 + b^2) = 5(a^2 + 2ab + b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ 3a = b \end{cases}$	0.50
	Với $a = 3b$, chọn $b = 1 \Rightarrow a = 3$ ta có phương trình $3x + y - 21 = 0$ Với $b = 3a$ chọn $a = 1 \Rightarrow b = 3$ ta có phương trình $x + 3y - 15 = 0$ (loại do trùng với BN) Vậy phương trình đường thẳng AB là: $3x + y - 21 = 0$.	0.50
V	1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'S}$. Mặt phẳng (α) qua A' cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'}$.	2.0
4,0 điểm	Gọi O là giao của AC và BD. Ta có O là trung điểm của đoạn thẳng AC, BD. Các đoạn thẳng $SO, A'C', B'D'$ đồng quy tại I.	

Ta có: $S_{SA'I} + S_{SC'I} = S_{SA'C'}$ $\Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{S_{SAC}} + \frac{S_{SC'I}}{S_{SAC}} = \frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$ $\Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{2S_{SAO}} + \frac{S_{SC'I}}{2S_{SCO}} = \frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$ 	0.50
$\Leftrightarrow \frac{SA'}{2SA} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{SC'}{2SC} \cdot \frac{SI}{SO} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \frac{SI}{2SO} \left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} \right) = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC}$	0.50
$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}; \text{ Tương tự: } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}$	0.50
Suy ra: $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{3}{2}$.	0.50
2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, đáy lớn $BC = 2a$, $AD = a$, $AB = b$. Mặt bên (SAD) là tam giác đều. Mặt phẳng (α) qua điểm M trên cạnh AB và song song với các cạnh SA, BC. (α) cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Đặt $x = AM$ ($0 < x < b$). Tính giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.	2.0
$(\alpha) \parallel SA$ và BC nên $(\alpha) \parallel (SAD) \Rightarrow MQ \parallel SA, NP \parallel SD$ Ta có $MN \parallel PQ \parallel AD \parallel BC$ Theo ĐL Talét trong hình thang $ABCD: \frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CD} \quad (1)$ Theo ĐL Talét trong $\triangle SAB: \frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{MQ}{SA} \quad (2)$ Theo ĐL Talét trong $\triangle SCD: \frac{CN}{CD} = \frac{CP}{CS} = \frac{PN}{SD} \quad (3)$  Hình 2	0.50
Từ (1), (2), (3) suy ra $MQ = NP = \frac{b-x}{b}a$; $PQ = \frac{x}{b}2a$; $MN = a + \frac{x}{b}a$ $\Rightarrow$ Thiết diện là hình thang cân và $S_{td} = \frac{1}{2}(MN + PQ) \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2} \right)^2}$	0.50
$= \frac{1}{2} \left(\frac{ab+ax}{b} + \frac{2ax}{b} \right) \sqrt{\frac{a^2(b-x)^2}{b^2} - \frac{a^2(b-x)^2}{4b^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(b+3x)}{b} \cdot \frac{a\sqrt{3}(b-x)}{2b}$	0.50

	$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{12b^2} (3x+b)(3b-3x) \leq \frac{a^2 \sqrt{3}}{12b^2} \left(\frac{3x+b+3b-3x}{2} \right)^2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	
	Vậy diện tích lớn nhất của thiết diện là $\frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$ khi $x = \frac{b}{3}$.	0.50

..... **HẾT**