

MỤC LỤC

PHẦN I ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH		3
CHƯƠNG 4 GIỚI HẠN		5
1	GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	5
A	Tóm tắt lý thuyết	5
B	Dạng toán và bài tập	6
	Dạng 1.1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)}$, với $P(n)$, $Q(n)$ là các đa thức.	6
1	Ví dụ	6
2	Bài tập áp dụng	8
	Dạng 1.2. Tính giới hạn dạng $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ với $P(n)$, $Q(n)$ là các hàm mũ a^n .	15
1	Ví dụ	15
2	Bài tập áp dụng	16
	Dạng 1.3. Tính giới hạn của dãy số chứa căn thức	19
1	Ví dụ	19
2	Bài tập áp dụng	21
3	Bài tập rèn luyện	30
2	GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	32
A	Tóm tắt lý thuyết	32
B	Dạng toán và bài tập	33
	Dạng 2.1. Tính giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$, trong đó tử thức và mẫu thức là các đa thức	33
1	Ví dụ	33
2	Bài tập áp dụng	34
	Dạng 2.2. Tính giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$, trong đó tử thức hoặc mẫu thức có chứa căn thức	38
1	Ví dụ	39
2	Bài tập áp dụng	40

C	Tóm tắt lý thuyết	50
D	Dạng toán và bài tập	50
	Dạng 2.3. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \infty$	50
1	Ví dụ	50
2	Bài tập áp dụng	51
3	Bài tập rèn luyện	60
	Dạng 2.4. Giới hạn một bên $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$	61
1	Ví dụ	61
2	Bài tập áp dụng	63
	Dạng 2.5. Giới hạn của hàm số lượng giác	65
1	Ví dụ	65
2	Bài tập áp dụng	66
3	Ví dụ	67
4	Bài tập áp dụng	68
5	Ví dụ	70
6	Bài tập áp dụng	71
7	Ví dụ	72
8	Bài tập rèn luyện	73
3	HÀM SỐ LIÊN TỤC	110
A	Tóm tắt lý thuyết	110
1	Hàm số liên tục tại một điểm	110
2	Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn	110
3	Tính chất của hàm số liên tục	111
B	Dạng toán và bài tập	111
	Dạng 3.1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm	111
1	Ví dụ	111
2	Bài tập áp dụng	113
3	Bài tập rèn luyện	118

Dạng 3.2. Xét tính liên tục của hàm số cho trước trên $\mathbb{R}$	119
1 Ví dụ	119
2 Bài tập áp dụng	121
3 Bài tập rèn luyện	122
Dạng 3.3. Chứng minh phương trình có nghiệm	122
1 Ví dụ	122
2 Bài tập áp dụng	125
3 Bài tập rèn luyện	128
4 Ôn tập chương IV	128

CHƯƠNG 5 ĐẠO HÀM 143

1 ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM - CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	143
A Tóm tắt lý thuyết	143
B Dạng toán và bài tập	143
Dạng 1.1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa	143
1 Ví dụ	143
2 Bài tập áp dụng	144
3 Bài tập rèn luyện	145
Dạng 1.2. Các quy tắc tính đạo hàm và bảng đạo hàm	145
1 VÍ DỤ	145
2 BÀI TẬP ÁP DỤNG	145
3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN	146
1 VÍ DỤ	147
2 BÀI TẬP ÁP DỤNG	148
3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN	148
1 VÍ DỤ	149
2 BÀI TẬP ÁP DỤNG	150
3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN	151

1	VÍ DỤ	153
2	BÀI TẬP ÁP DỤNG	154
3	BÀI TẬP RÈN LUYỆN	155
1	VÍ DỤ	156
2	BÀI TẬP ÁP DỤNG	157
3	BÀI TẬP RÈN LUYỆN	158
1	VÍ DỤ	158
2	BÀI TẬP ÁP DỤNG	159
3	BÀI TẬP RÈN LUYỆN	161
1	VÍ DỤ	165
2	BÀI TẬP ÁP DỤNG	168
3	BÀI TẬP RÈN LUYỆN	169
	Dạng 1.3. Đạo hàm của hàm số lượng giác	171
1	VÍ DỤ	171
2	BÀI TẬP ÁP DỤNG	172
3	BÀI TẬP RÈN LUYỆN	177
1	VÍ DỤ	180
2	BÀI TẬP ÁP DỤNG	180
3	BÀI TẬP RÈN LUYỆN	181
2	ĐẠO HÀM	182
A	Tóm tắt lý thuyết	182
B	Dạng toán và bài tập	182
	Dạng 2.1. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp điểm (tại điểm M) (hoặc biết hoành độ hoặc tung độ).	182
1	Ví dụ	182
2	Bài tập áp dụng	184
3	Bài tập áp dụng	187

Dạng 2.2. Tiếp tuyến cho sẵn hệ số góc, song song - vuông góc	188
1 Ví dụ	189
2 Bài tập áp dụng	189
3 Bài tập rèn luyện	190
Dạng 2.3. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết điểm đi qua	199
C Bài tập trắc nghiệm	203
1 Rèn luyện lần 1	208
2 Rèn luyện lần 1	219
3 ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ VI PHÂN	230
A Tóm tắt lý thuyết	230
B Ví dụ minh họa	230
Dạng 3.1. Tính đạo hàm cấp cao của một hàm số	230
1 Ví dụ	230
2 Bài tập áp dụng	231
Dạng 3.2. Tìm vi phân của một hàm số	232
1 Ví dụ	232
2 Bài tập áp dụng	232
4 ÔN TẬP CHƯƠNG V	233
PHẦN II HÌNH HỌC	
253	253
CHƯƠNG 3 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC	255
1 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG	255
A Tóm tắt lý thuyết	255
B Dạng toán và bài tập	255
Dạng 1.1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, đường thẳng vuông góc với đường thẳng	255
Dạng 1.2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	270
1 Ví dụ	270
2 Bài tập áp dụng	271

2	MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG	287
	Dạng 2.1. Chứng minh mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng	288
	Dạng 2.2. Chứng minh mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng	291
	Dạng 2.3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng	293
	Dạng 2.4. Thiết diện vuông góc	302
3	KHOẢNG CÁCH	304
A	Tóm tắt lý thuyết	304
1	Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng	304
2	Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	305
3	Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song	305
4	Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song	305
5	Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	305
B	Dạng toán và bài tập	305
	Dạng 3.1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	305
1	Ví dụ	306
2	Bài tập áp dụng	312
	Dạng 3.2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau.	319
1	Ví dụ	320
2	Bài tập áp dụng	323
4	Ôn tập cuối chương III	332

PHẦN



ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH

GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Giới hạn bằng 0). Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Khi đó ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định nghĩa 2 (Giới hạn bằng a). Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a nếu $\lim(u_n - a) = 0$. Khi đó ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$. Dãy số có giới hạn là số a hữu hạn gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

Định nghĩa 3 (Giới hạn vô cực).

- ① Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kỳ, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Ký hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

- ② Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Ký hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

GIỚI HẠN HỮU HẠN	GIỚI HẠN VÔ CỰC
Các giới hạn đặc biệt $\lim \frac{1}{n^k} = 0, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$ $\lim q^n = 0, \quad (q < 1).$ $\lim C = C, \quad (C \in \mathbb{R}).$	Các giới hạn đặc biệt $\lim n^k = +\infty, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$ $\lim q^n = +\infty, \quad (q > 1).$
Định lý 1. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì $\lim(u_n \pm v_n) = a \pm b.$ $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b.$ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0).$ - Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}.$	Định lý 2. - Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$ - Nếu $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty.$ - Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty.$

Định lý 3 (Nguyên lý Kẹp). Cho ba dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$. Lúc đó, nếu $u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = a$.

Định nghĩa 4. Cấp số nhân (u_n) có công bội q được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn nếu $|q| < 1$.

Nhận xét. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội q . Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Lúc đó

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1 - q}. \quad (4.1)$$

Định nghĩa 5. Giới hạn (4.1) được gọi là *tổng của cấp số nhân lùi vô hạn* (u_n) và được ký hiệu là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots.$$

Như vậy

$$S = \lim S_n = \frac{u_1}{1 - q}, (|q| < 1).$$

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1.1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)}$, với $P(n)$, $Q(n)$ là các đa thức.

Phương pháp giải:

Rút lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu, rồi sử dụng các công thức:

- $\lim \frac{c}{n^k} = 0, \quad (k \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{R}).$
- $\lim n^k = +\infty, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$
- $\begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) = +\infty.$
- $\begin{cases} \lim u_n = -\infty \\ \lim v_n = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) = -\infty.$
- $\begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) = -\infty.$
- $\begin{cases} \lim u_n = -\infty \\ \lim v_n = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) = +\infty.$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{n^2 \left(4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} + 2 \right)} = \lim \frac{4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 2} = \frac{4 - 0 - 0}{0 + 2} = 2. \quad \square$$

Nhận xét. Nếu bậc tử $P(n)$ bằng bậc mẫu $Q(n)$ thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\text{Hệ số bậc cao nhất của tử}}{\text{Hệ số bậc cao nhất của mẫu}}.$

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(2n^2 - n)^5 \cdot (4n - 1)^4}{20n^6 \cdot (2n^2 - n + 1)^4}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{\left[n^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right]^5 \left[n \left(4 - \frac{1}{n} \right) \right]^4}{20n^6 \left[n^2 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right]^4} \\ &= \lim \frac{n^{10} \left(2 - \frac{1}{n} \right)^5 n^4 \left(4 - \frac{1}{n} \right)^4}{20n^6 n^8 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^5 \left(4 - \frac{2}{n}\right)^4}{20 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^4} \\
 &= \frac{(2-0)^5 \cdot (4-0)^4}{20 \cdot (2-0+0)^4} \\
 &= \frac{128}{5}.
 \end{aligned}$$

□

Nhận xét. Với bài toán có lũy thừa cao, ta thường rút bậc cao trong từng dấu ngoặc, sau đó áp dụng công thức $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ và tính toán tương tự như các bài trước.

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \right) = 0 \cdot \frac{1-0+0}{1+0} = 0.$$

□

Nhận xét. Nếu bậc tử $P(n)$ nhỏ hơn bậc mẫu $Q(n)$ thì $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$.

VÍ DỤ 4. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2n^3 - 11n + 1}{n^2 - 2}$.

Lời giải.

$$L = \lim \frac{n^3 \left(2 - \frac{11}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \left(n \cdot \frac{2 - \frac{11}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^2}} \right) = +\infty$$

$$\text{Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \frac{2 - \frac{11}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^2}} = 2 > 0.$$

□

Nhận xét. Nếu bậc tử $P(n)$ lớn hơn bậc mẫu $Q(n)$ thì $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$. Để biết là $+\infty$ hay $-\infty$ ta dựa vào dấu của giới hạn hai nhân tử trong tích theo quy tắc “cùng dấu thì tích dương, trái dấu thì tích âm”. Thông thường, sẽ để trống $= \dots$ và xét dấu sẽ điền vào sau. Về thực nghiệm, đó chính là dấu của tích hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu.

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n+1)}{3n^2 + 4}$.

Lời giải.

Xét cấp số cộng: $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n+1$ có số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 2$ và số hạng cuối là $u_m = 2n+1$, ta có

$$u_1 + (m-1)d = 2n+1 \Leftrightarrow 1 + 2(m-1) = 2n+1 \Leftrightarrow m = n+1.$$

Vậy cấp số cộng có $n+1$ số hạng. Suy ra tổng

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n+1 = \frac{m}{2} (u_1 + u_m) = \frac{n+1}{2} (1 + 2n+1) = n^2 + 2n + 1.$$

Vì thế

$$L = \lim \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 4} = \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{4}{n^2}\right)} = \lim \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1+0+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

□

Nhận xét. Cần nhớ công thức cấp số cộng:

- $u_{k+1} - u_k = d$, với d là công sai.
- $u_n = u_1 + (n - 1)d$, với d là công sai.
- $u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k$, với $k \geq 2$.
- $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$.

VÍ DỤ 6. Tính giới hạn $L = \lim \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}; (\forall k = 1, 2, \dots, n)$. Do đó

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim \frac{n}{n+1} \\ &= \lim \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{1+0} = 1. \end{aligned}$$

□

Nhận xét. Phân tích $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ với $a = \frac{1}{k+1} \Big|_{k=0} = 1$ và $b = \frac{1}{k} \Big|_{k=-1} = -1$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)} \\ &= \lim \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{3+0-0}{2+0} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^3 - n + 3}{2n^2 + 3n^3 - 1}$.

Lời giải.

Ta có

$$L = \lim \frac{n^3 \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{2}{n} + 3 - \frac{1}{n^3} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim \frac{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{2}{n} + 3 - \frac{1}{n^3}} \\
 &= \frac{1 - 0 + 0}{0 + 3 - 0} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $L = \lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{5n^3 - n(n^2 + n - 1)}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{4n^3 - n^2 + n} \\
 &= \lim \frac{n^3 \left(6 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^3 \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \\
 &= \lim \frac{6 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\
 &= \frac{6 - 0 + 0}{4 - 0 + 0} = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(2n^4 + 1)^2 (n + 2)^9}{n^{17} + 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{\left[n^4 \left(2 + \frac{1}{n^4}\right)\right]^2 \left[n \left(1 + \frac{2}{n}\right)\right]^9}{n^{17} \left(1 + \frac{1}{n^{17}}\right)} \\
 &= \lim \frac{n^8 \left(2 + \frac{1}{n^4}\right)^2 n^9 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^9}{n^{17} \left(1 + \frac{1}{n^{17}}\right)} \\
 &= \lim \frac{\left(2 + \frac{1}{n^4}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^9}{\left(1 + \frac{1}{n^{17}}\right)} \\
 &= \frac{(2 + 0)^2 \cdot (1 + 0)^9}{(1 + 0)} = 4.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 5. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(2n - 1)^2 (3 - 4n^3)}{(4n + 2)^3 (2 - n)^2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{\left[n \left(2 - \frac{1}{n}\right)\right]^2 \left[n^3 \left(\frac{3}{n^3} - 4\right)\right]}{\left[n \left(4 + \frac{2}{n}\right)\right]^3 \left[n \left(\frac{2}{n} - 1\right)\right]^2} \\
 &= \lim \frac{n^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 n^3 \left(\frac{3}{n^3} - 4\right)}{n^3 \left(4 + \frac{2}{n}\right)^3 n^2 \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 \left(\frac{3}{n^3} - 4\right)}{\left(4 + \frac{2}{n}\right)^3 \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2} \\
 &= \frac{(2-0)^2 \cdot (0-4)}{(4+0)^3 \cdot (0-1)^2} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 6. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(3n^2 - 1)^3 (2n + 5)^2 (9n + 4)}{(2n - 4)^4 (2n^3 + 1) (2n^2 - 7)}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{\left[n^2 \left(3 - \frac{1}{n^2}\right)\right]^3 \left[n \left(2 + \frac{5}{n}\right)\right]^2 \left[n \left(9 + \frac{4}{n}\right)\right]}{\left[n \left(2 - \frac{4}{n}\right)\right]^4 \left[n^3 \left(2 + \frac{1}{n^3}\right)\right] \left[n^2 \left(2 - \frac{7}{n^2}\right)\right]} \\
 &= \lim \frac{n^6 \left(3 - \frac{1}{n^2}\right)^3 n^2 \left(2 + \frac{5}{n}\right)^2 n \left(9 + \frac{4}{n}\right)}{n^4 \left(2 - \frac{4}{n}\right)^4 n^3 \left(2 + \frac{1}{n^3}\right) n^2 \left(2 - \frac{7}{n^2}\right)} \\
 &= \lim \frac{\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)^3 \left(2 + \frac{5}{n}\right)^2 \left(9 + \frac{4}{n}\right)}{\left(2 - \frac{4}{n}\right)^4 \left(2 + \frac{1}{n^3}\right) \left(2 - \frac{7}{n^2}\right)} \\
 &= \frac{(3-0)^3 \cdot (2+0)^2 \cdot (9+0)}{(2-0)^4 \cdot (2+0) \cdot (2-0)} \\
 &= \frac{243}{16}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 7. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(n^2 + 2)(n - 1)^3}{(n + 1)(2n^2 + 3)^2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{\left[n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\right] \left[n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^3}{\left[n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \left[n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)\right]^2} \\
 &= \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right) n^4 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^2} \\
 &= \lim \frac{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^2} \\
 &= \frac{(1+0) \cdot (1-0)^3}{(1+0) \cdot (2+0)^2} \\
 &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 8. Tính giới hạn $L = \lim \frac{7n^3 + 2n^2 + 1}{n^4 + 5n^3 + n}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^3 \left(7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^4 \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3} \right)} \\ &= \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vì $\lim \frac{1}{n} = 0$ và $\lim \frac{7 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} = 7$.

□

BÀI 9. Tính giới hạn $L = \lim \frac{7n + 3}{2n^2 + 3n^3 + 4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n \left(7 + \frac{3}{n} \right)}{n^3 \left(\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^3} \right)} \\ &= \lim \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{7 + \frac{3}{n}}{\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^3}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vì $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ và $\lim \frac{7 + \frac{3}{n}}{\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^3}} = \frac{7}{3}$.

□

BÀI 10. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2} \right)}{n^3 \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3} \right)} \\ &= \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vì $\lim \frac{1}{n} = 0$ và $\lim \frac{1 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}} = \frac{1}{3}$.

□

BÀI 11. Tính giới hạn $L = \lim \frac{-2n^3 + 3n^2 + 4}{n^4 + 4n^3 + n}$.

Lời giải.

Ta có

$$L = \lim \frac{n^3 \left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3} \right)}{n^4 \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}$$

$$= \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}} \right)$$

$$= 0.$$

Vì $\lim \frac{1}{n} = 0$ và $\lim \frac{-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}} = -2.$

□

BÀI 12. Tính giới hạn $L = \lim \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5}.$

Lời giải.

Ta có

$$L = \lim \frac{n^2 \left(-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{n^4 \left(3 + \frac{5}{n^4} \right)}$$

$$= \lim \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^4}} \right)$$

$$= 0.$$

Vì $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ và $\lim \frac{-2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^4}} = -\frac{2}{3}.$

□

BÀI 13. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^3 - 5n + 3}{3n^2 + n - 1}.$

Lời giải.

Ta có

$$L = \lim \frac{n^3 \left(1 - \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$= \lim \left(n \cdot \frac{1 - \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= +\infty.$$

Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim \frac{1 - \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3} > 0.$

□

BÀI 14. Tính giới hạn $L = \lim \frac{5n^4 - n^3 + 5n^2 + 3}{n^2 - 3n^3 - 1}.$

Lời giải.

Ta có

$$L = \lim \frac{5n^4 - n^3 + 5n^2 + 3}{n^2 - 3n^3 - 1}$$

$$= \lim \left(\frac{n^4}{n^3} \cdot \frac{5 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n} - 3 - \frac{1}{n^3}} \right)$$

$$= \lim \left(n \cdot \frac{5 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n} - 3 - \frac{1}{n^3}} \right)$$

$$= -\infty.$$

$$\text{vì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n} - 3 - \frac{1}{n^3}} = -\frac{5}{3} < 0.$$

Vậy $L = -\infty$. □

BÀI 15. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^4 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n + 9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^4 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n + 9} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^4}{n^3} \cdot \frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{9}{n^3}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \cdot \frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{9}{n^3}} \right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

$$\text{vì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{9}{n^3}} = 3 > 0.$$

Vậy $L = +\infty$. □

BÀI 16. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^5 - 2n^4 + 2n + 7}{-6n^4 + 2n^3 + n^2 - 1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^5 - 2n^4 + 2n + 7}{-6n^4 + 2n^3 + n^2 - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^5}{n^4} \cdot \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} + \frac{7}{n^5}}{-6 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \cdot \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} + \frac{7}{n^5}}{-6 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} \right) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

$$\text{vì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} + \frac{7}{n^5}}{-6 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Vậy $L = -\infty$. □

BÀI 17. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 1}$.

Lời giải.

Xét cấp số cộng $1, 2, \dots, n$ có số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng cuối $u_n = n$ và công sai $d = 1$.

Do đó tổng $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Suy ra

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2(3 + \frac{1}{n^2})} = \frac{1}{6}.$$

Vậy $L = \frac{1}{6}$. □

BÀI 18. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)}{n^2 + 3n + 1}$.

Lời giải.

Xét cấp số cộng $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 2$, số hạng cuối $2n - 1 = 1 + (n - 1) \cdot 2 = u_n$.

Do đó $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2$.

Suy ra

$$L = \lim \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)}{n^2 + 3n + 1} = \lim \frac{n^2}{n^2 + 3n + 1} = \lim \frac{1}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Vậy $L = 1$. □

BÀI 19. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2n^2 - n + 9}$.

Lời giải.

Xét cấp số cộng $1, 2, \dots, n$ có số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng cuối $u_n = n$ và công sai $d = 1$.

Do đó tổng $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$.

Suy ra

$$L = \lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2n^2 - n + 9} = \lim \frac{n^2 + n}{2(2n^2 - n + 9)} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}\right)} = \frac{1}{4}.$$

Vậy $L = \frac{1}{4}$. □

BÀI 20. Tính giới hạn $L = \frac{5 + 9 + 13 + \dots + 4n - 3}{3n^2 + 5n - 1}$.

Lời giải.

Xét cấp số cộng $5, 9, 13, \dots, 4n - 3$ có số hạng đầu $u_1 = 5$, công sai $d = 4$ và số hạng cuối $4n - 3 = 5 + (n - 2) \cdot 4 =$

u_{n-1} . Suy ra tổng $5 + 9 + 13 + \dots + 4n - 3 = \frac{(5 + 4n - 3)(n - 1)}{2} = \frac{4n^2 - 2n - 2}{2}$.

Do đó

$$L = \frac{5 + 9 + 13 + \dots + 4n - 3}{3n^2 + 5n - 1} = \lim \frac{4n^2 - 2n - 2}{2(3n^2 + 5n - 1)} = \lim \frac{4 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}}{2\left(3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Vậy $L = \frac{2}{3}$. □

BÀI 21. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n}{2n + 1}$.

Lời giải.

Ta có $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n = \underbrace{-1 - 1 - \dots - 1}_{n \text{ số hạng}} = -n$.

Do đó

$$L = \lim \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n}{2n + 1} = \lim \frac{-n}{2n + 1} = \lim \frac{-1}{2 + \frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $L = -\frac{1}{2}$. □

BÀI 22. Tính giới hạn $L = \lim \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n(n + 2)} \right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n(n + 2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n + 1} - \frac{1}{n + 2} \right). \end{aligned}$$

Do đó

$$L = \lim \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Vậy $L = \frac{3}{4}$. □

BÀI 23. Tính giới hạn $L = \lim \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Do đó

$$L = \lim \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Vậy $L = \frac{1}{2}$. □

BÀI 24. Tính giới hạn $L = \lim \left[\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right). \end{aligned}$$

Do đó

$$L = \lim \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) \right] = \frac{1}{3}.$$

Vậy $L = \frac{1}{3}$. □

📌 **DẠNG 1.2.** Tính giới hạn dạng $L = \lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ với $P(n), Q(n)$ là các hàm mũ a^n .

Phương pháp giải:

Áp dụng $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

Sử dụng công thức mũ, rồi chia cả tử và mẫu cho a^n với $|a|$ là cơ số lớn nhất.

Công thức mũ cần nhớ

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \text{ và } a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1 - 3^n + 4 \cdot 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}$.

Lời giải.

Chia cả tử và mẫu cho 5^n , ta có

$$L = \frac{\frac{1}{5^n} - \frac{3^n}{5^n} + 100}{2 \cdot \frac{2^n}{5^n} + 9 \cdot \frac{3^n}{5^n} + 5} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 100}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5} = \frac{0 - 0 + 100}{0 + 0 + 5} = 20.$$

□

Nhận xét. Ta chia cho a^n với $|a|$ là cơ số lớn nhất vì sau khi chia luôn tạo ra cơ số có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 để áp dụng công thức $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}{5 \cdot 2^n + 1}$.

Lời giải.

- Xét cấp số nhân $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ có số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công bội $q = 2$ và có số hạng tổng quát

$$u_m = 2^n \Leftrightarrow u_1 q^{m-1} = 2^n \Leftrightarrow m - 1 = n \Leftrightarrow m = n + 1.$$

Suy ra tổng các số hạng của cấp số nhân trên là

$$S_m = u_1 \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

- Suy ra

$$L = \lim \frac{2^{n+1} - 1}{5 \cdot 2^n + 1} = \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{5 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2 - 0}{5 + 0} = \frac{2}{5}.$$

□

Nhận xét. Các công thức cần nhớ về cấp số nhân

- | | |
|---|---|
| ① $\frac{u_{k+1}}{u_k} = q$ (q là công bội). | ② $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. |
| ③ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$. | ④ $u_{k+1} \cdot u_{k-1} = u_k^2$ với $k \geq 2$. |

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{4 \cdot 3^n + 5^{n+1}}{3 \cdot 2^n + 5^n}$.

Lời giải.

Chia tử và mẫu cho 5^n , ta được

$$L = \lim \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5}{3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = \frac{0 + 5}{0 + 1} = 5.$$

□

BÀI 2. Tính giới hạn $L = \lim \frac{4^{n+2} + 6^{n+1}}{5^{n-1} + 2 \cdot 6^{n+3}}$.

Lời giải.

Chia tử và mẫu cho 6^n , ta được

$$L = \lim \frac{16 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6}{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n + 432} = \frac{0 + 6}{0 + 432} = \frac{1}{72}.$$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2^n - 3^{n-2} + 3 \cdot 5^{n+2}}{2^{n-1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}$.

Lời giải.

Chia tử và mẫu cho 5^n , ta được

$$L = \lim \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 75}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5} = \frac{0 - 0 + 75}{0 + 0 + 5} = 15.$$

□

BÀI 4. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2^n - 3^n + 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}$.

Lời giải.

Chia tử và mẫu cho 5^n , ta được

$$L = \lim \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 25}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5} = \frac{0 - 0 + 25}{0 + 0 + 5} = 5.$$

□

BÀI 5. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(-3)^n - 4 \cdot 5^{n+1}}{2 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n}$.

Lời giải.

Chia tử và mẫu cho 5^n , ta được

$$L = \lim \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^n - 20}{2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n + 3} = \frac{0 - 20}{0 + 3} = -\frac{20}{3}.$$

□

BÀI 6. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2^n + (-5)^n}{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-5)^n}$.

Lời giải.

Chia tử và mẫu cho $(-5)^n$, ta được

$$L = \lim \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^n + 1}{2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^n + 3} = \frac{0 + 1}{0 + 3} = \frac{1}{3}.$$

□

BÀI 7. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(-1)^n \cdot 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$.

Lời giải.

Chia tử và mẫu cho 243^n , ta được

$$L = \lim \frac{\left(-\frac{1}{243}\right)^n \cdot 2 \cdot \left(\frac{32}{243}\right)^n}{9} = \frac{0}{9} = 0.$$

□

BÀI 8. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính tổng của một cấp số nhân, ta lần lượt có

$$\bullet 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

$$\bullet 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Do đó

$$L = \lim \frac{2^{n+1} - 1}{\frac{3^{n+1} - 1}{2}} = 2 \cdot \lim \frac{2 \cdot 2^n - 1}{3 \cdot 3^n - 1} = 2 \lim \frac{2 \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 2 \cdot \frac{0 - 0}{3 - 0} = 0.$$

□

BÀI 9. Tính giới hạn $L = \lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính tổng của một cấp số nhân, ta lần lượt có

$$\bullet 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = (-2) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$$

$$\bullet 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right]$$

Do đó

$$L = \lim \frac{(-2) \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right]}{\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right]} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 0 - 1}{\frac{1}{3} \cdot 0 - 1} = \frac{4}{3}.$$

□

BÀI 10. Tính giới hạn $L = \lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$.

Lời giải.

Ta xét đánh giá đại diện

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{(k-1) \cdot (k+1)}{k^2}, \quad (2 \leq k \leq n).$$

Cho k nhận giá trị lần lượt từ 2 đến n , ta được

$$L = \lim \frac{1 \times 3 \times 2 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times (n+1)}{1^2 \times 2^2 \times \dots \times n^2} = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

□

BÀI 11. Tính giới hạn $L = \lim \left[\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n(n+1)(n+2)} \right]$.

Lời giải.

Trong bài quy nạp toán học, chúng ta đã chứng minh được

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Do đó

$$L = \lim \left[\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{6} \cdot \lim \frac{n(n+1)(2n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{6} \cdot \lim \frac{2n+1}{n+2} = \frac{1}{6} \cdot \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{3}.$$

□

BÀI 12. Tính giới hạn $L = \lim \left[\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4 + 4n^3 + 1} \right]$.

Lời giải.

Trong bài quy nạp toán học, chúng ta đã chứng minh được

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Do đó

$$L = \lim \left[\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^4 + 4n^3 + 1} \right] = \frac{1}{4} \cdot \lim \frac{n^2(n+1)^2}{n^4 + 4n^3 + 1} = \frac{1}{4} \cdot \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{4}.$$

□

BÀI 13. Tính giới hạn $L = \lim \left[\frac{2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \dots + (n+1) \cdot n^2}{n^4} \right]$.

Lời giải.

Trước hết ta cần tìm được biểu thức tổng quát của tổng

$$S = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \dots + (n+1) \cdot n^2.$$

Ta viết lại tổng

$$\begin{aligned} S &= (1+1) \cdot 1^2 + (2+1) \cdot 2^2 + (3+1) \cdot 3^2 + \dots + (n+1) \cdot n^2 \\ \Leftrightarrow S &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ \Leftrightarrow S &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$L = \lim \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^4} + \lim \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^4} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}.$$

□

📌 DẠNG 1.3. Tính giới hạn của dãy số chứa căn thức

Phương pháp giải:

Rút lũy thừa bậc cao hoặc liên hợp và sử dụng $\lim n^k = \infty$. Lưu ý: Dấu hiệu nhận dạng liên hợp (dạng $+\infty \cdot 0$) là sau khi rút n có mũ cao trong căn và nhóm thừa số, xuất hiện số 0. Chẳng hạn:

- Tính giới hạn dãy $u_n = \sqrt{n^2 + 3n + 5} - n$: biểu thức trong căn có n^2 là lũy thừa cao nhất và ta quan tâm đến nó, những hạng tử sau bỏ hết, có nghĩa ta xem $u_n = \sqrt{n^2} - n = n - n = 0$ nên cần liên hợp.
- Tính giới hạn dãy $u_n = \sqrt{2n^2 + 3n + 5} - n$: biểu thức trong căn có $2n^2$ là lũy thừa cao nhất nên nháp $\sqrt{2n^2} - n = n\sqrt{2} - n = n(\sqrt{2} - 1)$ có $\sqrt{2} - 1 \neq 0$ nên ta không cần liên hợp mà rút ra giải trực tiếp.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{2n^2 + 3n + 5} - n)$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} L &= \lim \left[\sqrt{n^2 \left(\frac{2n^2 + 3n + 5}{n^2} \right)} - n \right] \\ &= \lim \left(n \sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - n \right) \\ &= \lim n \cdot \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1 > 0$ nên $L = +\infty$. □

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n + 20)$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} L &= \lim 20 + \lim (\sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n) \\ &= 20 + \lim \frac{3n - 4}{\sqrt{9n^2 + 3n - 4} + 3n} \\ &= 20 + \lim \frac{n \left(3 - \frac{4}{n} \right)}{n \sqrt{9 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}} + 3n} \\ &= 20 + \lim \frac{3 - \frac{4}{n}}{\sqrt{9 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}} + 3} \\ &= 20 + \frac{3 - 0}{9 + 0 - 0} + 3 \\ &= \frac{41}{2}. \end{aligned}$$

□

⚠ **Cần nhớ:** Liên hợp là hình thức trục căn dựa vào HĐT $\begin{cases} (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\ (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{--- } \sqrt{a} - \sqrt{b} &= \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. & \text{--- } \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} &= \frac{a + b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}. \\ \text{--- } \sqrt{a} + b &= \frac{a - b^2}{\sqrt{a} + b}. & \text{--- } \sqrt[3]{a} - b &= \frac{a - b^3}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + b^2}. \\ \text{--- } \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} &= \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}. & \text{--- } \sqrt[3]{a} + b &= \frac{a + b^3}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + b^2}. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n+2-n}{(\sqrt[3]{n+2})^2 + \sqrt[3]{n+2} \cdot \sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} \\ &= \lim \frac{2}{\left[\sqrt[3]{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} \right]^2 + \sqrt[3]{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} \cdot \sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} \\ &= \lim \frac{2}{\sqrt[3]{n^2} \left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right]} = 0. \end{aligned}$$

□

⚠ Cần nhớ: $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.

VÍ DỤ 4. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} + 5 - 2n)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim 5 + \lim (\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} - 2n) \\ &= 5 + \lim (\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} - 2n) \\ &= 5 + \lim \frac{8n^3 + 3n^2 - 2 - 8n^3}{(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2})^2 + \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} \cdot 2n + 4n^2} \\ &= 5 + \lim \frac{3n^2 - 2}{\left(\sqrt[3]{n^3 \left(8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3}\right)} \right)^2 + \sqrt[3]{n^3 \left(8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3}\right)} \cdot 2n + 4n^2} \\ &= 5 + \lim \frac{n^2 \left(3 - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left[\left(\sqrt[3]{8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} \right)^2 + \sqrt[3]{8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} \cdot 2 + 4 \right]} \\ &= 5 + \lim \frac{3 - \frac{2}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} \right)^2 + \sqrt[3]{8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} \cdot 2 + 4} = 5 + \frac{3}{4+4+4} = \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

□

⚠ Cần nhớ: $\sqrt[3]{a} - b = \frac{a - b^3}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot b + b^2}$. Trong lời giải trên, đã sử dụng hai tính chất:

- $\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$.
- $\lim C = C$ với C là hằng số và $C \in \mathbb{R}$.

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn $L = \lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}) \\
 &= \lim \left[(\sqrt{n^2 + n + 1} - n) + (n - \sqrt[3]{n^3 + n^2}) \right] \\
 &= \lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - n) + \lim(n - \sqrt[3]{n^3 + n^2}) \\
 &= \lim \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} + \lim \frac{n^3 - (n^3 + n^2)}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n^2} + (\sqrt[3]{n^3 + n^2})^2} \\
 &= \lim \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} + \lim \frac{-n^2}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n^2} + (\sqrt[3]{n^3 + n^2})^2} \\
 &= \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} + \lim \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}}\right)^2}} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{\frac{1}{n}\sqrt{9n^2 - n + 1}}{\frac{1}{n}(4n - 2)} \\
 &= \lim \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 - \frac{2}{n}} \\
 &= \frac{\sqrt{9 - 0 + 0}}{4 - 0} \\
 &= \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Tính giới hạn $L = \lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - n + 10)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim 10 + \lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \\
 &= 10 + \lim \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\
 &= 10 + \lim \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} \\
 &= 10 + \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 10 + \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0+1}} = 10 + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{21}{2}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{n \left(\sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \right)}{n \sqrt{9 + \frac{3}{n}}} \\
 &= \lim \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1}{\sqrt{9 + \frac{3}{n}}} \\
 &= \frac{\sqrt{4 - 0 + 0} - 1}{\sqrt{9 + 0}} \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{9n^2 + 2n - 1} - \sqrt{4n^2 + 1})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{(9n^2 + 2n - 1) - (4n^2 + 1)}{\sqrt{9n^2 + 2n - 1} + \sqrt{4n^2 + 1}} = \lim \frac{5n^2 + 2n - 2}{\sqrt{9n^2 + 2n - 1} + \sqrt{4n^2 + 1}} \\
 &= \lim \frac{n^2 \left(5 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} \right)}{n \left(\sqrt{9 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} \right)} \\
 &= \lim n \cdot \left(\frac{5 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}}{\sqrt{9 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}} \right) \\
 &= +\infty.
 \end{aligned}$$

Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim \left(\frac{5 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}}{\sqrt{9 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}} \right) = 1$

□

BÀI 5. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{4n^2 + n + 1} - 9n)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{4n^2 + n + 1 - 81n^2}{\sqrt{4n^2 + n + 1} + 9n} \\
 &= \lim \frac{-77n^2 + n + 1}{\sqrt{4n^2 + n + 1} + 9n} \\
 &= \lim \frac{n^2 \left(-77 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 9 \right)} \\
 &= \lim n \cdot \left(\frac{-77 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 9} \right)
 \end{aligned}$$

$$= -\infty.$$

$$\text{Vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim \left(\frac{-77 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 9} \right) = -7 < 0$$

□

BÀI 6. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt{4n^2 + 2})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{(4n^2 + n) - (4n^2 + 2)}{\sqrt{4n^2 + n} + \sqrt{4n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{n - 2}{\sqrt{4n^2 + n} + \sqrt{4n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{n \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + \sqrt{4 + \frac{2}{n^2}}\right)} \\ &= \lim \frac{1 - \frac{2}{n}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + \sqrt{4 + \frac{2}{n^2}}} \\ &= \frac{1 - 0}{\sqrt{4 + 0} + \sqrt{4 + 0}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

BÀI 7. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^2 \sqrt{2 + \frac{3}{n^3} - \frac{2}{n^4}}}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)} \\ &= \lim \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{n^3} - \frac{2}{n^4}}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2 + 0 - 0}}{2 - 0 + 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 8. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n + 25)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim 25 + \lim (\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n) \\ &= 25 + \lim \frac{(n^2 + 3n + 5) - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} \\ &= 25 + \lim \frac{3n + 5}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} \\ &= 25 + \lim \frac{n \left(3 + \frac{5}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} + 1\right)} \\ &= 25 + \lim \frac{3 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} + 1} \end{aligned}$$

$$= 25 + \frac{3+0}{\sqrt{1+0+0+1}} = \frac{53}{2}.$$

□

BÀI 9. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{(2n+1) - (n+3)}{\sqrt{4n-5} (\sqrt{2n+1} + \sqrt{n+3})} \\ &= \lim \frac{n-2}{\sqrt{4n-5} (\sqrt{2n+1} + \sqrt{n+3})} \\ &= \lim \frac{n \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n \sqrt{4 - \frac{5}{n}} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}\right)} \\ &= \lim \frac{1 - \frac{2}{n}}{\sqrt{4 - \frac{5}{n}} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}\right)} \\ &= \frac{1-0}{\sqrt{4-0} (\sqrt{2+0} + \sqrt{1+0})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 10. Tính giới hạn $L = \lim (n^2 + 2019 - \sqrt{n^4 + 3n + 1})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim 2019 + \lim (n^2 - \sqrt{n^4 + 3n + 1}) \\ &= 2019 + \lim \frac{n^4 - (n^4 + 3n + 1)}{n^2 + \sqrt{n^4 + 3n + 1}} \\ &= 2019 + \lim \frac{-3n - 1}{n^2 + \sqrt{n^4 + 3n + 1}} \\ &= 2019 + \lim \frac{n \left(-3 - \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}}\right)} \\ &= 2019 + \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{-3 - \frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} \\ &= 2019 + \lim \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{-3 - \frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} \\ &= 2019 + 0 \cdot (-3) = 2019. \end{aligned}$$

□

BÀI 11. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt{4n^2-1} + \sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n} - \sqrt[4]{n^4+1}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{\frac{1}{n} (\sqrt{4n^2-1} + \sqrt[3]{8n^3+2n^2-3})}{\frac{1}{n} (\sqrt{16n^2+4n} - \sqrt[4]{n^4+1})} \\ &= \lim \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{8 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3}}}{\sqrt{16 + \frac{4}{n}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^4}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2+2}{4-1} = \frac{4}{3}.$$

□

BÀI 12. Tính giới hạn $L = \lim (3n - 5 - \sqrt{9n^2 + 1})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim (3n - \sqrt{9n^2 + 1} - \lim 5) \\ &= \lim \frac{9n^2 - 9n^2 - 1}{3n + \sqrt{9n^2 + 1}} - \lim 5 \\ &= \lim \frac{-1}{3n + \sqrt{9n^2 + 1}} - \lim 5 \\ &= 0 - 5 = -5. \end{aligned}$$

□

BÀI 13. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n^2 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{n \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)} \\ &= \lim n \cdot \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 1$

□

BÀI 14. Tính giới hạn $L = \lim [n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2})]$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n[(n^2 + 1) - (n^2 + 2)]}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{-n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 15. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt{1 + 4 + 7 + \dots + (3n + 1)}}{2n^2 + \sqrt{n^4 + 2n + 1}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{\sqrt{(n+1)(3n+2)}}{\sqrt{2}(2n^2 + \sqrt{n^4 + 2n + 1})} \\ &= \lim \frac{\sqrt{3n^2 + 5n + 2}}{2\sqrt{2}n^2 + \sqrt{2}\sqrt{n^4 + 2n + 1}} \\ &= \lim \frac{\sqrt{3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}}{2\sqrt{2}n + \sqrt{2}\sqrt{n^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lim \sqrt{3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}}{\lim \left(2\sqrt{2}n + \sqrt{2} \sqrt{n^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{\lim \left(2\sqrt{2}n + \sqrt{2} \sqrt{n^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 16. Tính giới hạn $L = \lim(\sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n+1})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L &= \lim(\sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n+1}) \\
 &= \lim \frac{3}{\sqrt[3]{(n+4)^2} - \sqrt[3]{(n+4) \cdot (n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2}} \\
 &= \lim \frac{3}{\sqrt[3]{n^2 \cdot \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{n^2 \left(1 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \sqrt[3]{n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}} \\
 &= \lim \frac{3}{\sqrt[3]{n^2} \left[\sqrt[3]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \right]} = 0.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 17. Tính giới hạn $L = \lim(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} + \sqrt[3]{5n^2 - 8n^3})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L &= \lim(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} + \sqrt[3]{5n^2 - 8n^3}) \\
 &= \lim \frac{8n^2 - 2}{\sqrt[3]{(8n^3 + 3n^2 - 2)^2} - \sqrt[3]{(8n^3 + 3n^2 - 2) \cdot (5n^2 - 8n^3)} + \sqrt[3]{(5n^2 - 8n^3)^2}} \\
 &= \lim \frac{8 - \frac{2}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3}\right) \cdot \left(\frac{5}{n} - 8\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{5}{n} - 8\right)^2}} \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 18. Tính giới hạn $L = \lim(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n + 6)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L &= \lim(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n + 6) \\
 &= 6 + \lim(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n) \\
 &= 6 + \lim \frac{3n^2 + 4}{\sqrt[3]{(8n^3 + 3n^2 + 4)^2} + 2n \cdot \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} + 4n^2} \\
 &= 6 + \lim \frac{3 + \frac{4}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}\right)^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{8 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}} + 4} \\
 &= 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 19. Tính giới hạn $L = \lim \left(\sqrt[3]{2n - n^3} + n - 1 \right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(\sqrt[3]{2n - n^3} + n - 1 \right) \\ &= -1 + \lim \left(\sqrt[3]{2n - n^3} + n \right) \\ &= -1 + \lim \frac{2n}{\sqrt[3]{(2n - n^3)^2} - n \sqrt[3]{2n - n^3} + n^2} \\ &= -1 + \lim \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{n^2} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{2}{n^2} - 1} + 1} \\ &= -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

□

BÀI 20. Tính giới hạn $L = \lim \left(\sqrt[3]{n - n^3} + n + 2 \right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(\sqrt[3]{n - n^3} + n + 2 \right) \\ &= 2 + \lim \left(\sqrt[3]{n - n^3} + n \right) \\ &= 2 + \lim \frac{n}{\sqrt[3]{(n - n^3)^2} - n \cdot \sqrt[3]{n - n^3} + n^2} \\ &= 2 + \lim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n^2} - 1} + 1} \\ &= 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$

□

BÀI 21. Tính giới hạn $L = \lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n - 1 \right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n - 1 \right) \\ &= -1 + \lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n \right) \\ &= -1 + \lim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{(n^3 - 2n^2)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 - 2n^2} + n^2} \\ &= -1 + \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} + 1} \\ &= -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 22. Tính giới hạn $L = \lim \left(n + \sqrt[3]{1 - n^3} \right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(n + \sqrt[3]{1 - n^3} \right) \\ &= \lim \frac{1}{n^2 - n \cdot \sqrt[3]{1 - n^3} + \sqrt[3]{(1 - n^3)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{n^3} - 1} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^3} - 1\right)^2}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 23. Tính giới hạn $L = \lim [n \cdot (\sqrt[3]{n^3 + n} - n)]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L &= \lim [n \cdot (\sqrt[3]{n^3 + n} - n)] \\
 &= \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3 + n)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + n} + n^2} \\
 &= \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2} + n \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 24. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - 2n}{\sqrt[3]{n^3 + 4n + 1} - n}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{[(4n^2 + 1) - 4n^2][\sqrt[3]{(n^3 + 4n + 1)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 4n + 1} + n^2]}{(\sqrt{4n^2 + 1} + 2n)(n^3 + 4n + 1 - n^3)} \\
 &= \lim \frac{\sqrt[3]{(n^3 + 4n + 1)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 4n + 1} + n^2}{(\sqrt{4n^2 + 1} + 2n)(4n + 1)} \\
 &= \lim \frac{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}} + 1}{\left(\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} + 2\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right)} \\
 &= \frac{1 + 1 + 1}{(2 + 2) \cdot 4} \\
 &= \frac{3}{16}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 25. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1 - n^6}}{\sqrt{n^4 + 1} - n^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L &= \lim \frac{[n^6 + (1 - n^6)](\sqrt{n^4 + 1} + n^2)}{[n^4 - n^2 \sqrt[3]{1 - n^6} + \sqrt[3]{(1 - n^6)^2}][(n^4 + 1) - n^4]} \\
 &= \lim \frac{\sqrt{n^4 + 1} + n^2}{n^4 - n^2 \sqrt[3]{1 - n^6} + \sqrt[3]{(1 - n^6)^2}} \\
 &= \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} + 1}{n^2 - \sqrt[3]{1 - n^6} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^3} - n^3\right)^2}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 26. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n(\sqrt[3]{4-n^3}+n)}{\sqrt{4n^2+1}-2n}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{n(4-n^3+n^3)(\sqrt{4n^2+1}+2n)}{[\sqrt[3]{(4-n^3)^2}-n\sqrt[3]{4-n^3}+n^2](4n^2+1-4n^2)} \\ &= \lim \frac{4n(\sqrt{4n^2+1}+2n)}{\sqrt[3]{(4-n^3)^2}-n\sqrt[3]{4-n^3}+n^2} \\ &= \lim \frac{4\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2\right)}{\sqrt[3]{\left(\frac{4}{n^3}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{4}{n^3}-1}+1} \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 27. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt[3]{8n^3+n^2}-\sqrt{4n^2-n})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim (\sqrt[3]{8n^3+n^2}-\sqrt{4n^2-n}) \\ &= \lim \left[(\sqrt[3]{8n^3+n^2}-2n) - (\sqrt{4n^2-n}-2n) \right] \\ &= \lim (\sqrt[3]{8n^3+n^2}-2n) - \lim (\sqrt{4n^2-n}-2n) \\ &= \lim \frac{(8n^3+n^2-8n^3)}{\sqrt[3]{(8n^3+n^2)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+n^2}+4n^2} - \lim \frac{(4n^2-n-4n^2)}{\sqrt{4n^2-n}+2n} \\ &= \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{(8n^3+n^2)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+n^2}+4n^2} + \lim \frac{n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} \\ &= \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(8+\frac{1}{n}\right)^2}+2\sqrt[3]{8+\frac{1}{n}}+4} + \lim \frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2} \\ &= \frac{1}{4+4+4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 28. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim (\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2}) \\ &= \lim \left[(\sqrt{4n^2+3n}-2n) - (\sqrt[3]{8n^3+5n^2}-2n) \right] \\ &= \lim (\sqrt{4n^2+3n}-2n) - \lim (\sqrt[3]{8n^3+5n^2}-2n) \\ &= \lim \frac{3n}{\sqrt{4n^2+2n}} - \lim \frac{5n^2}{\sqrt[3]{(8n^3+5n^2)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+5n^2}+4n^2} \\ &= \lim \frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2} - \lim \frac{5}{\sqrt[3]{\left(8+\frac{5}{n}\right)^2}+2\sqrt[3]{8+\frac{5}{n}}+4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4+4+4} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 29. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt[3]{n^6 + 1})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim (\sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt[3]{n^6 + 1}) \\ &= \lim [(\sqrt{n^4 + n^2} - n^2) - (\sqrt[3]{n^6 + 1} - n^2)] \\ &= \lim (\sqrt{n^4 + n^2} - n^2) - \lim (\sqrt[3]{n^6 + 1} - n^2) \\ &= \lim \frac{(n^4 + n^2 - n^4)}{\sqrt{n^4 + n^2} + n^2} - \lim \frac{(n^6 + 1) - n^6}{\sqrt[3]{(n^6 + 1)^2} + n^2 \sqrt[3]{n^6 + 1} + n^4} \\ &= \lim \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n^2} + n^2} - \lim \frac{1}{\sqrt[3]{(n^6 + 1)^2} + n^2 \sqrt[3]{n^6 + 1} + n^4} \\ &= \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} + 0 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 30. Tính giới hạn $L = \lim (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}) \\ &= \lim [(\sqrt{n^2 + n + 1} - n) - (\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n)] \\ &= \lim (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) - \lim (\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n) \\ &= \lim \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} - \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2} + n \sqrt[3]{n^3 + n^2} + n^2} \\ &= \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} - \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Tính các giới hạn sau

① $\lim \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^2 + 3} \dots$

③ $\lim \frac{n^3 - n + 3}{2n^2 + 3n^3 - 1} \dots$

⑤ $\lim \frac{6n^3 - 2n + 1}{2n^3 - n(n^2 + n - 1)} \dots$

⑦ $\lim \frac{(2n - 1)^2(3 - 4n^3)}{(4n + 2)^3(2 - n)^2} \dots$

⑨ $\lim \frac{(n^2 + 2)(n - 1)^2}{(n + 1)(2n + 3)^3} \dots$

⑪ $\lim \frac{(n + 2)^3(3 - n)}{(3n^2 + 2)(5 - n)^2} \dots$

⑬ $\lim \left(\frac{1}{n^2 + 2n} - \frac{1}{2n^2 + 3} \right) \dots$

② $\lim \frac{5n^2 - n + 3}{2n^2 + 3n - 1} \dots$

④ $\lim \frac{8n^3 - 2n^2 + 1}{1 - 3n^2 + 2n^3} \dots$

⑥ $\lim \frac{(n^2 + 2)(3 - n) + 2n^3}{(3n^2 + 2)(5 - n)} \dots$

⑧ $\lim \frac{(2n^4 + 1)^2(n + 2)^9}{n^{17} + 1} \dots$

⑩ $\lim \frac{4n^4 - n^2 + 1}{(2n + 1)(3 - n)(n^2 + 2)} \dots$

⑫ $\lim \frac{(n + 2)^3(3 - n)^5}{(3n^2 + 2n + 1)^3(5 - n)^2} \dots$

⑭ $\lim \left(\frac{n^3}{2n^2 - 1} - \frac{n^2}{2n + 1} \right) \dots$

BÀI 2. Tính các giới hạn sau

- | | |
|---|--|
| ① $\lim \frac{2^n + 4^n}{4^n - 3^n} \dots$ | ② $\lim \frac{3 \cdot 2^n - 5^n}{5 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n} \dots$ |
| ③ $\lim \frac{4^n + 2 \cdot 3^n}{5 + 3^n} \dots$ | ④ $\lim \frac{1 + 2 \cdot 3^n}{5 + 3^n} \dots$ |
| ⑤ $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 5^{n+1}}{3 \cdot 2^n + 5^n} \dots$ | ⑥ $\lim \frac{4^{n+2} + 6^{n+1}}{5^{n-1} + 2 \cdot 6^{n+3}} \dots$ |
| ⑦ $\lim \frac{(-3)^n - 4 \cdot 5^{n+1}}{2 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n} \dots$ | ⑧ $\lim \frac{2^n - 3^n + 4 \cdot 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}} \dots$ |
| ⑨ $\lim \frac{2^n - 3^n + 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}} \dots$ | ⑩ $\lim \frac{2^n + (-5)^n}{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-5)^n} \dots$ |
| ⑪ $\lim \frac{\sqrt{9^n + 1}}{3^n - 1} \dots$ | ⑫ $\lim \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{n \cdot 3^n} \dots$ |
| ⑬ $\lim \frac{(-1)^n \cdot 2^{5n+1}}{3^{5n+2}} \dots$ | ⑭ $\lim \frac{(-5)^n + 4^n}{(-7)^{n+1} + 4^{n+1}} \dots$ |
| ⑮ $\lim \frac{4^n + 2 \cdot 2^{2n+1}}{5 \cdot 2^{2(n+1)} + 3^n}$ | ⑯ $\lim \frac{3 - 2^n + 5^n}{3^n - 2 \cdot 5^n}$ |
| ⑰ $\lim \frac{2^n + 3^n - 4^n}{2^n + 3^{n+1} + 4^{n+1}}$ | ⑱ $\lim \frac{4 + 2 \cdot 3^{n-1} - 4^{n-2}}{2^n + 3^{n+1} + 4^{n+1}}$ |
| ⑲ $\lim \frac{(-3)^n - 5^n}{(-3)^{n-2} + 5^{n+1} + 2}$ | ⑳ $\lim \frac{3^n \cdot 2^{n-1} + 3^{n+2}}{3^{n+2} + 6^{n+1}}$ |

BÀI 3. Tính các giới hạn sau

- | | |
|--|--|
| ① $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}}$ | ② $\lim \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$ |
| ③ $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - 1} + \sqrt[3]{8n^3 + 2n^2 - 3}}{\sqrt{16n^2 + 4n} - \sqrt[4]{n^4 + 1}}$ | ④ $\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt[3]{n^3 + 3n}}{\sqrt[4]{16n^4 + 1}}$ |
| ⑤ $\lim (\sqrt{3n^2 - n + 5} - n)$ | ⑥ $\lim (\sqrt[3]{8n^3 - n^2 + n - 2} - n)$ |

BÀI 4. Tính các giới hạn sau

- | | |
|--|--|
| ① $\lim (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$. | ② $\lim (\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt{4n^2 + 2})$. |
| ③ $\lim (\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n) \dots$ | ④ $\lim (\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n) \dots$ |
| ⑤ $\lim [n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] \dots$ | ⑥ $\lim [n (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2})] \dots$ |
| ⑦ $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n + 3) \dots$ | ⑧ $\lim (\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n + 1) \dots$ |
| ⑨ $\lim (\sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n + 2) \dots$ | ⑩ $\lim (1 + n^2 - \sqrt{n^4 + 3n + 1}) \dots$ |
| ⑪ $\lim (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}) \dots$ | ⑫ $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - n) \dots$ |
| ⑬ $\lim (\sqrt[3]{n - n^3} + n + 2) \dots$ | ⑭ $\lim (\sqrt[3]{2n - n^3} + n - 1) \dots$ |
| ⑮ $\lim (\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n - 1) \dots$ | ⑯ $\lim (\sqrt[3]{8n^3 + 4n^2 + 2} - 2n + 3) \dots$ |

BÀI 5. Tính các giới hạn sau

- | |
|---|
| ① $\lim \frac{2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)}{4n^2 + 1} \dots$ |
| ② $\lim \frac{\sqrt{1 + 4 + 7 + \dots + (3n + 1)}}{2n^2 + \sqrt{n^4 + 2n + 1}} \dots$ |
| ③ $\lim \frac{2 + 4 + \dots + 2^n}{3 \cdot 2^n + 1} \dots$ |
| ④ $\lim \left[\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \right] \dots$ |

BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Giới hạn của hàm số tại một điểm). Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Định nghĩa 2 (Giới hạn của hàm số tại vô cực). Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần tới $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a; +\infty)$ mà $\lim x_n = +\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.

① Giới hạn hữu hạn

— Giới hạn đặc biệt

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \ (c \in \mathbb{R}).$$

— Định lí

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M. \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M. \quad \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

— Giới hạn một bên

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

② Giới hạn vô cực

— Giới hạn đặc biệt

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{khi } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{khi } k \text{ lẻ.} \end{cases}$$

— Định lí 1

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] =$

$$\begin{cases} +\infty & \text{khi } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0 \\ -\infty & \text{khi } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0. \end{cases}$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } L \cdot g(x) > 0 \\ -\infty & \text{khi } L \cdot g(x) < 0. \end{cases}$

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.1. Tính giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$, trong đó tử thức và mẫu thức là các đa thức

Phương pháp giải: Khử dạng vô định bằng cách phân tích thành tích bằng cách chia Hoóc-nơ (đầu rơi, nhân tới, cộng chéo), rồi sau đó đơn giản biểu thức để khử dạng vô định.

1 Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 4}$.

Lời giải.

Ta có

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)\left(x + \frac{7}{2}\right)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+7}{x+2} = \frac{11}{4}. \quad \square$$

⚠️ Cần nhớ: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Học sinh thường quên nhân thêm a .

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$.

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x^2 + x + 1)}{(x-3)(4x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4x^2 - x + 1} = \frac{11}{17}. \quad \square$$

Nhận xét. Bảng chia Hoóc-nơ (đầu rơi, nhân tới, cộng chéo) như sau:

Phân tích $2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$ thành tích số:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3 = (x-3)(2x^2 + x + 1).$$

Phân tích $4x^3 - 13x^2 + 4x - 3$ thành tích số:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -13 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow 4x^3 - 13x^2 + 4x - 3 = (x-3)(4x^2 - x + 1).$$

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có Ta có } L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - x - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{100} - x) - (x - 1)}{(x^{50} - x) - (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{99} - 1) - (x - 1)}{x(x^{49} - 1) - (x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x^{98} + x^{97} + \dots + x + 1) - (x - 1)}{x(x-1)(x^{48} + x^{47} + \dots + x + 1) - (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x - 1)}{(x-1)(x^{49} + x^{48} + \dots + x^2 + x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x - 1}{x^{49} + x^{48} + \dots + x^2 + x - 1} = \frac{98}{48} = \frac{49}{24}. \end{aligned}$$

□

⚠️ Cần nhớ hằng đẳng thức $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$.

Chứng minh: xét cấp số nhân $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$ có n số hạng và $u_1 = 1, q = x$.

$$\text{Khi đó } S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1).$$

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính giới hạn

① $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}.$

□

② $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}.$

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+4} = \frac{2}{5}.$

□

③ $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}.$

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x+3} = -\frac{1}{6}.$

□

④ $A = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x}.$

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-4)(x-5)}{x(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-4}{x} = \frac{1}{5}.$

□

⑤ $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6}.$

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-1}{x-2} = 8.$

□

⑥ $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}.$

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{4}{3}.$

□

⑦ $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}.$

Lời giải.

$A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x^2+4)}{x+4} = -16.$

□

⑧ $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4}$ (HD xem $x = (\sqrt{x})^2$).

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 4} = -\frac{4}{3}.$$

□

⑨ $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}.$

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 1} = 12.$$

□

 Cần nhớ: Hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ và $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

⑩ $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18}.$

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x + 9)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 9} = \frac{12}{7}.$$

□

⑪ $A = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - x - 2 + \sqrt{2}}{x^3 - 2\sqrt{2}}.$

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - x - 2 + \sqrt{2}}{x^3 - 2\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2} - 1)}{(x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x + \sqrt{2} - 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 2} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{6}.$$

□

BÀI 2. Tính giới hạn

① $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}.$

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x^2 - 3x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1} = -1.$$

□

② $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}.$

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}.$$

□

③ $A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2(2x + 1)}{(x + 1)^2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{1}{2}.$$

□

④ $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}.$

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x-3} = -\frac{3}{2}.$$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 9 + 7\sqrt{3}}{3 - x^2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 9 + 7\sqrt{3}}{3 - x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} -\frac{(x + \sqrt{3})(2x^2 - (3 + 2\sqrt{3})x + 7 + 3\sqrt{3})}{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} -\frac{2x^2 - (3 + 2\sqrt{3})x + 7 + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \\ &= \frac{18 + 19\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)^2}{(x-3)(x+3)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x^2+1)} = 0.$$

□

BÀI 5. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x^2 - x - 1)}{(x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 - 3x - 3} = \frac{3}{4}.$$

□

BÀI 6. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right).$

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{(x-2)(x^3-8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)}{(x^2+2x+4)} = \frac{1}{2}.$$

□

BÀI 7. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right).$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6 + x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)^2}{(x-2)^2(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-3)(x-1)} = -2. \end{aligned}$$

□

BÀI 8. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^3 - 1} \right).$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^3 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 - x^2 - x + 2}{(x^2 + x - 2)(x^3 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x^2 + x - 2)(x^3 - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

□

BÀI 9. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}.$

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}$ □

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - x - (x - 1)}{x^{30} - x - (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{19} - 1) - (x - 1)}{x(x^{29} - 1) - (x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1) - (x - 1)}{x(x - 1)(x^{28} + x^{27} + \dots + x + 1) - (x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{19} + x^{18} + \dots + x - 1)}{(x - 1)(x^{29} + x^{28} + \dots + x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{19} + x^{18} + \dots + x - 1}{x^{29} + x^{28} + \dots + x - 1} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}.
 \end{aligned}$$

BÀI 10. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 1}{x^2 - 3x + 2}$ □

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{49} + x^{48} + \dots + x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{49} + x^{48} + \dots + x + 1}{x - 2} \\
 &= -50.
 \end{aligned}$$

BÀI 11. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2}$. (với n là số nguyên)

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2}$ □

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n - 1) - n(x - 1)}{(x - 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n(x - 1)}{(x - 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 - n)}{(x - 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 - n}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1} - 1 + x^{n-2} - 1 + \dots + x^2 - 1 + x - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + (x - 1)(x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + x + 1) + \dots + (x - 1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} [(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + (x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + x + 1) + \dots + 1] \\
 &= (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n^2 - n}{2}
 \end{aligned}$$

BÀI 12. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n + 1)x + n}{(x - 1)^2}$

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2}$ □

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^n - 1) - n(x - 1)}{(x - 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x) - n(x - 1)}{(x - 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - n)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - n}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 + x^{n-1} - 1 + \dots + x^2 - 1 + x - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x - 1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + \dots + (x - 1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} [(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + \dots + 1] \\
 &= n + (n - 1) + \dots + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}
 \end{aligned}$$

BÀI 13. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x + x^2 + x^3 + \dots + x^m - m}$. (m, n là số nguyên)

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x + x^2 + x^3 + \dots + x^m - m}$ □

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 + x^{n-1} - 1 + \dots + x^2 - 1 + x - 1}{x^m - 1 + x^{m-1} - 1 + \dots + x^2 - 1 + x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x - 1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + \dots + (x - 1)}{(x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) + (x - 1)(x^{m-2} + x^{m-3} + \dots + x + 1) + \dots + (x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + (x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + \dots + 1}{(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) + (x^{m-2} + x^{m-3} + \dots + x + 1) + \dots + 1} \\
 &= \frac{n + (n - 1) + \dots + 1}{m + (m - 1) + \dots + 1} = \frac{n(n + 1)}{m(m + 1)}
 \end{aligned}$$

BÀI 14. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right)$

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{1}{1 - x} \right) - \left(\frac{n}{1 - x^n} - \frac{1}{1 - x} \right) \right]$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{1}{1 - x} \right) - \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1 - x^n} - \frac{1}{1 - x} \right) \\
 \text{và } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{1}{1 - x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m - (1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})}{1 - x^m} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x) + (1 - x^2) + \dots + (1 - x^{m-1})}{1 - x^m} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x) [1 + (1 + x) + \dots + (1 + x + x^2 + \dots + x^{m-2})]}{(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + (1 + x) + \dots + (1 + x + x^2 + \dots + x^{m-2})}{1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1}} = \frac{1 + 2 + \dots + m - 1}{m} = \frac{m - 1}{2}
 \end{aligned}$$

Tương tự ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1 - x^n} - \frac{1}{1 - x} \right) = \frac{n - 1}{2}$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right) = \frac{m - 1}{2} - \frac{n - 1}{2} = \frac{m - n}{2}$ □

 **DẠNG 2.2.** Tính giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$, trong đó tử thức hoặc mẫu thức có chứa căn thức

Phương pháp giải: Nhân lượng liên hợp để khử dạng vô định.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(3 - \sqrt{x+3})(3 + \sqrt{x+3})}{(x-6)(3 + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{9 - (x+3)}{(x-6)(3 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6-x}{(x-6)(3 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-1}{3 + \sqrt{x+3}} = \frac{-1}{3 + \sqrt{6+3}} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } E &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{3x+2} - 2) + (2 - \sqrt{5x-6})}{x-2} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2}}_A + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{5x-6}}{x-2}}_B \\ A &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+2-2^3}{(x-2)[(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{3x+2} + 4]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)[(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{3x+2} + 4]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{3x+2} + 4} = \frac{1}{4} \\ B &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{5x-6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (5x-6)}{(x-2)(2 + \sqrt{5x-6})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5}{2 + \sqrt{5x-6}} = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } E = A + B = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -1.$$

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5x-3} + 2}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5x-3} + 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x-3+8}{(x+1)(\sqrt[3]{(5x-3)^2} - 2\sqrt[3]{5x-3} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5(x+1)}{(x+1)(\sqrt[3]{(5x-3)^2} - 2\sqrt[3]{5x-3} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5}{\sqrt[3]{(5x-3)^2} - 2\sqrt[3]{5x-3} + 4} \\ &= \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 4. Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+2-8}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2-4}{(x-2)(\sqrt{3x-2} + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{\sqrt{3x-2} + 2} \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 F &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot (\sqrt[3]{1+4x} - 1) + (\sqrt{1+2x} - 1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot (\sqrt[3]{1+4x} - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot (1+4x-1)}{x(\sqrt[3]{(1+4x)^2} + \sqrt[3]{1+4x} + 1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x-1}{x(\sqrt{1+2x} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot 4}{\sqrt[3]{(1+4x)^2} + \sqrt[3]{1+4x} + 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+2x} + 1} \\
 &= \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}.
 \end{aligned}$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{3-\sqrt{x+1}}$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } B &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{3-\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(3+\sqrt{x+1})}{(3-\sqrt{x+1})(3+\sqrt{x+1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(3+\sqrt{x+1})}{9-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(3+\sqrt{x+1})}{8-x} = \lim_{x \rightarrow 8} (-3-\sqrt{x+1}) = -3-\sqrt{8+1} = -6
 \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } B &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{4+x+x^2}-2)(\sqrt{4+x+x^2}+2)}{(x+1)(\sqrt{4+x+x^2}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4+x+x^2-4}{(x+1)(\sqrt{4+x+x^2}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(\sqrt{4+x+x^2}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{\sqrt{4+x+x^2}+2} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2-3x}-x}{2x-6}$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } B &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2-3x}-x}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x^2-3x}-x)(\sqrt{2x^2-3x}+x)}{(2x-6)(\sqrt{2x^2-3x}+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{(2x-6)(\sqrt{2x^2-3x}+x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{2(x-3)(\sqrt{2x^2-3x}+x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2(\sqrt{2x^2-3x}+x)} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } B &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

□

BÀI 5. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(2 - x)}{(x - 2)(x + 2)(2 + \sqrt{3x - 2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(x + 2)(2 + \sqrt{3x - 2})} = -\frac{3}{16}. \quad \square$$

BÀI 6. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{x(9 - x)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-1}{x(\sqrt{x} + 3)} = -\frac{1}{54}. \quad \square$$

BÀI 7. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{2x^2 + x - 10}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{2x^2 + x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(2x + 5)(\sqrt{x + 2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(2x + 5)(\sqrt{x + 2} + 2)} = \frac{1}{36}. \quad \square$$

BÀI 8. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{7 - 2x} + x - 2}{x^2 - 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{7 - 2x} + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7 - 2x - (x - 2)^2}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{7 - 2x} + 2 - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 2x + 3}{(2x + 5)(x - 1)(x + 1)(\sqrt{7 - 2x} + 2 - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 - x}{(2x + 5)(x - 1)(\sqrt{7 - 2x} + 2 - x)} = -\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad \square$$

BÀI 9. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 5 - \sqrt{2x^2 + x + 8}}{x^2 + 3x + 2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 5 - \sqrt{2x^2 + x + 8}}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x + 5)^2 - (2x^2 + x + 8)}{(x^2 + 3x + 2)(2x + 5 + \sqrt{2x^2 + x + 8})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 19x + 17}{(x^2 + 3x + 2)(2x + 5 + \sqrt{2x^2 + x + 8})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x + 17)}{(x + 1)(x + 2)(2x + 5 + \sqrt{2x^2 + x + 8})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 17}{(x + 2)(2x + 5 + \sqrt{2x^2 + x + 8})} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

BÀI 10. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x + 8} - 3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x + 8} - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(\sqrt{x + 8} + 3)}{(x - 1)(\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x + 8} + 3)}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3}} = 3. \end{aligned} \quad \square$$

BÀI 11. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{\sqrt{4x + 5} - \sqrt{3x + 6}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+6}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{4x+5} + \sqrt{3x+6})}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5} + \sqrt{3x+6}}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 12. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})}{2(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}}{2(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

BÀI 13. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(3-x)(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+6})}{(x-3)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+6})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-5}} = -3. \end{aligned}$$

□

BÀI 14. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{1-x}}{x^4+x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{1-x}}{x^4+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2+x+2) - (1-x)}{x(x+1)(x^2-x+1)(\sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{x(x+1)(x^2-x+1)(\sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x(x^2-x+1)(\sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{1-x})} = 0. \end{aligned}$$

□

BÀI 15. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x-3} - 1}{x-1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x-3} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1)}{(x-1)(\sqrt[4]{(4x-3)^3} + \sqrt[4]{(4x-3)^2} + \sqrt[4]{4x-3} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt[4]{(4x-3)^3} + \sqrt[4]{(4x-3)^2} + \sqrt[4]{4x-3} + 1} = 1. \end{aligned}$$

□

BÀI 16. $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2x+5}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+3}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2x+5}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2-2x-4)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+3})}{(x^2-x-2)(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2x+5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2x+5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 17. $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9} - 3) + (\sqrt{x+16} - 4)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{x+9} + 3} + \frac{x}{\sqrt{x+16} + 4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x+16} + 4} \right) = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

□

BÀI 18. $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+2} - 2) + (\sqrt{5x+4} - 3)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+2} + 2} + \frac{5(x-1)}{\sqrt{5x+4} + 3}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt{2x+2} + 2} + \frac{5}{\sqrt{5x+4} + 3} \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 19. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+6} + \sqrt{2x-2} - 8}{x-3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+6} + \sqrt{2x-2} - 8}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2\sqrt{x+6} - 6) + (\sqrt{2x-2} - 2)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \frac{x+6-9}{\sqrt{x+6} + 3} + \frac{2x-2-4}{\sqrt{2x-2} + 2}}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \frac{x-3}{\sqrt{x+6} + 3} + 2 \frac{x-3}{\sqrt{2x-2} + 2}}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{\sqrt{x+6} + 3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2} + 2} \right) \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

□

BÀI 20. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x-1} + x^2 - 8}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x-1} + x^2 - 8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x\sqrt{x-1} - x^2) + 2(x^2 - 4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \frac{4x-4-x^2}{2\sqrt{x-1} + x} + 2(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x \frac{(x-2)^2}{2\sqrt{x-1} + x} + 2(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-x \frac{(x-2)}{2\sqrt{x-1} + x} + 2(x+2) \right) \\ &= 8. \end{aligned}$$

□

BÀI 21. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-4)\sqrt{2x-3} + x - 84}{x-6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-4)\sqrt{2x-3} + x - 84}{x-6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{[(5x-4)\sqrt{2x-3} - 3(5x-4)] + 16x - 96}{x-6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-4)(\sqrt{2x-3} - 3) + 16(x-6)}{x-6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-4) \frac{2(x-6)}{\sqrt{2x-3} + 3} + 16(x-6)}{x-6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{10x-8}{\sqrt{2x-3} + 3} + 16 \right) \\ &= \frac{74}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 22. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}\sqrt{1+6x} - 1}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}\sqrt{1+6x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{24x^2 + 10x + 1} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x^2 + 10x + 1 - 1}{x(\sqrt{24x^2 + 10x + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(24x + 10)}{x(\sqrt{24x^2 + 10x + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x + 10}{\sqrt{24x^2 + 10x + 1} + 1} \\ &= 5. \end{aligned}$$

□

BÀI 23. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x-1} - 3x + 1}{x^2 - 2x + 1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x-1} - 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{2x-1} - x}{(x-1)^2} + \frac{\sqrt{4x-3} - (2x-1)}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2x-1-x^2}{(x-1)^2(\sqrt{2x-1}+x)} + \frac{4x-3-(2x-1)^2}{(x-1)^2(\sqrt{4x-3}+2x-1)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-1}{\sqrt{2x-1}+x} - \frac{4}{\sqrt{4x-3}+2x-1} \right] \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 24. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x-7+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}}{x^2-2x+1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x - 7 + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}}{x^2 - 2x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4\sqrt{x+3} - x - 7) + (2\sqrt{2x-1} - 2x)}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{16x + 48 - x^2 - 14x - 49}{(x+7+4\sqrt{x+3})} + \frac{4(2x-1) - 4x^2}{2x+2\sqrt{2x-1}}}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-(x-1)^2}{(x+7+4\sqrt{x+3})} + \frac{-4(x-1)^2}{2x+2\sqrt{2x-1}}}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{x+7+4\sqrt{x+3}} - \frac{4}{2x+2\sqrt{2x-1}} \right) \\
 &= -\frac{17}{16}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 25. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+4} + \sqrt{9-6x} - 5}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+4} + \sqrt{9-6x} - 5}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{4x+4} - (x+2)] + (\sqrt{9-6x} + x - 3)}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4x+4-x^2-4x-4}{\sqrt{4x+4}+(x+2)} + \frac{9-6x-x^2+6x-9}{\sqrt{9-6x}-(x-3)}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^2}{\sqrt{4x+4}+(x+2)} - \frac{x^2}{\sqrt{9-6x}-(x-3)}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{\sqrt{4x+4}+(x+2)} - \frac{1}{\sqrt{9-6x}-(x-3)} \right) \\
 &= -\frac{5}{12}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 26. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x+3} + 2x^2 - 5x}{(x-1)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x+3} + 2x^2 - 5x}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 2x + 1) + (\sqrt{6x+3} - x - 2)}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^2 + \frac{6x+3-x^2-4x-4}{\sqrt{6x+3}+x+2}}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^2 - \frac{(x-1)^2}{\sqrt{6x+3}+x+2}}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{6x+3}+x+2} \right) \\
 &= \frac{11}{6}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 27. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 8}{(x - 2)(\sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 28. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x)}{x(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 29. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - 2}{x-3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - 2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{(x-3)(\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 30. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt{x} - 1}$.

Lời giải.

Thực hiện phép nhân liên hợp ở cả tử và mẫu, ta có

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \cdot (\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

□

BÀI 31. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{2x+9} - 5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{2x+9} - 5} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2+2\sqrt[3]{x}+4}}}{\frac{2x-16}{\sqrt{2x+9}+5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x+9}+5}{2(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt[3]{x}+4})} \\ &= \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

□

BÀI 32. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x-2} + 1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x-2} + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}}{\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

BÀI 33. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10+2x^3} + x - 1}{x^2 + 3x + 2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10+2x^3} + x - 1}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{10+2x^3} - 2) + (x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2x^3+2}{\sqrt[3]{(10+2x^3)^2} + 2\sqrt[3]{10+2x^3} + 4} + (x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{\sqrt[3]{(10+2x^3)^2} + 2\sqrt[3]{10+2x^3} + 4} + (x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2(x^2-x+1)}{\sqrt[3]{(10+2x^3)^2} + 2\sqrt[3]{10+2x^3} + 4} + 1}{(x+2)} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 34. Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3}{x^2 - 3x + 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8x+11-27}{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+7-9}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+7} + 3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{27} - \frac{1}{6} = \frac{7}{54}.$$

□

BÀI 35. Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 7} - \sqrt{x^2 + 3}}{x - 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 7} - \sqrt{x^2 + 3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 7} - 2}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 7 - 8}{(x - 1) \left(\sqrt[3]{(x^3 + 7)^2} + 2\sqrt[3]{x^3 + 7} + 4 \right)} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - 4}{(x - 1) (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{(x - 1) \left(\sqrt[3]{(x^3 + 7)^2} + 2\sqrt[3]{x^3 + 7} + 4 \right)} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1) (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{(x^3 + 7)^2} + 2\sqrt[3]{x^3 + 7} + 4} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

BÀI 36. Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x} - 2}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8-x} - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1-x) - 4}{x(2\sqrt{1-x} + 2)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8-x-8}{x \left(\sqrt[3]{(8-x)^2} + 2\sqrt[3]{8-x} + 4 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{2\sqrt{1-x} + 2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt[3]{(8-x)^2} + 2\sqrt[3]{8-x} + 4} \\ &= -1 - \frac{-1}{12} = -\frac{11}{12}. \end{aligned}$$

□

BÀI 37. Tính giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} - 3}{x^2 - 4} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 4x + 11 - 27}{(x^2 - 4) \left(\sqrt[3]{(2x^2 + 4x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} + 9 \right)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 7 - 9}{(x^2 - 4) (\sqrt{x+7} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+4)}{(x^2 - 4) \left(\sqrt[3]{(2x^2 + 4x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} + 9 \right)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x^2 - 4) (\sqrt{x+7} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+4)}{(x+2) \left(\sqrt[3]{(2x^2 + 4x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 11} + 9 \right)} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2) (\sqrt{x+7} + 3)} \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{24} = \frac{5}{72}. \end{aligned}$$

□

BÀI 38. Tính giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{8+3x} - 4}{x^2 + x}$.

Lời giải.

$$F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{8+3x} - 4}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot (\sqrt[3]{8+3x} - 2) + (2\sqrt{4+x} - 4)}{x^2 + x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot (\sqrt[3]{8+3x} - 2)}{x^2 + x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{4+x} - 4}{x^2 + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot (8+3x-8)}{x(x+1) \left(\sqrt[3]{(8+3x)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x} + 4 \right)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(4+x-4)}{x(x+1)(\sqrt{4+x}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot 3}{(x+1) \left(\sqrt[3]{(8+3x)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x} + 4 \right)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(x+1)(\sqrt{4+x}+2)} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 39. Tính giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 F &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+ax-1}{x \left(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+ax} + 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+ax} + 1} \\
 &= \frac{a}{n}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 40. Tính giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+bx}}{x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 F &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+ax} - 1) - (\sqrt[m]{1+bx} - 1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x} \\
 &= \frac{a}{n} - \frac{b}{m}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 41. Tính giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[m]{1+bx} - 1} (ab \neq 0)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[m]{1+bx} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x}} \right].$$

$$\text{Xét } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \frac{a}{n};$$

□

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x} = \frac{b}{m};$$

$$\Rightarrow F = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{\frac{b}{m}} = \frac{am}{bn}.$$

BÀI 42. Tính giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+bx}}{\sqrt{1+x} - 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 F &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+bx}}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+ax} - 1) - (\sqrt[m]{1+bx} - 1)}{\sqrt{1+x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt{1+x} - 1} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} \right) \\
 \text{Ta có } A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \frac{a}{n} \\
 B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+bx} - 1}{x} = \frac{b}{m} \\
 C &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{1+x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + 1) = 2 \\
 \Rightarrow F &= \frac{a}{n} \cdot 2 - \frac{b}{m} \cdot 2 = 2 \left(\frac{a}{n} - \frac{b}{m} \right).
 \end{aligned}$$

□

C TÓM TẮT LÝ THUYẾT

D DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.3. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \infty$

- Đối với dạng đa thức không căn, ta rút bậc cao và áp dụng công thức khi $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k &= +\infty. & \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k &= \begin{cases} +\infty & \text{khi } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{khi } k \text{ lẻ} \end{cases} & \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} &= 0 \text{ (c hằng số)}.
 \end{aligned}$$

- Đối với dạng phân số không căn, ta làm tương tự như giới hạn dãy số, tức rút bậc cao nhất của tử và mẫu, sau đó áp dụng công thức trên.

- Ngoài việc đưa ra khỏi căn bậc chẵn cần có trị tuyệt đối, học sinh cần phân biệt khi nào đưa ra ngoài căn, khi nào liên hợp. Phương pháp suy luận cũng tương tự như giới hạn của dãy số, nhưng cần phân biệt khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$

1 Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$.

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(-1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2 - 6x^2 - 6x^3}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{6}{x} - 6 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - \frac{6}{x} - 6} = \frac{1+0+0}{0-0-6} = -\frac{1}{6}.$$

□

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + 2x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \right] = -\infty, \end{aligned}$$

vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = 2 - 1 = 1 > 0$. □

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2)$..

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) \right] = -\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = 1 > 0. \quad \square$$

BÀI 2. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 - 1)$..

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(-1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \right] = +\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0. \quad \square$$

BÀI 3. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1)$..

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) \right] = +\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = 1 > 0. \quad \square$$

BÀI 4. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 2x^2 + 3)$..

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^4 \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) \right] = -\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) = -1 < 0. \quad \square$$

BÀI 5. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - x^2 + 6)$..

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^4 \left(-1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} \right) \right] = -\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} \right) = -1 < 0. \quad \square$$

BÀI 6. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 8x}{2x - 1}$..

Lời giải.

$$\text{Tính giới hạn } B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} - 8 \right)}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 8}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{0 - 8}{2 - 0} = -4. \quad \square$$

BÀI 7. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x - 1}$..

Lời giải.

$$\text{Tính giới hạn } B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1. \quad \square$$

BÀI 8. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1}$..

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \frac{7}{x} - \frac{15}{x^4} \right)}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{7}{x} - \frac{15}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^4}} = \frac{2 + 0 + 0}{1 + 0} = 2. \quad \square$$

BÀI 9. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1} ..$

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)}{x^3 \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{2 + 0 + 0}{-1 - 0 + 0} = -2. \quad \square$$

BÀI 10. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1} ..$

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0 + 0 + 0}{2 - 0} = 0. \quad \square$$

BÀI 11. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) ..$

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2x + 4)}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{x^3 \left(3 - \frac{4}{x^2} \right) \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\left(3 - \frac{4}{x^2} \right) \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{2 + 0}{(3 - 0)(3 + 0)} = \frac{2}{9}. \quad \square$$

BÀI 12. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x + 3)^3(2x + 1)^4}{(3 + 2x)^7} ..$

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 \left(4 + \frac{3}{x} \right)^3 \left(2 + \frac{1}{x} \right)^4}{x^7 \left(2 + \frac{3}{x} \right)^7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(4 + \frac{3}{x} \right)^3 \left(2 + \frac{1}{x} \right)^4}{\left(2 + \frac{3}{x} \right)^7} = \frac{(4 + 0)^3(2 + 0)^4}{(0 + 2)^7} = 8. \quad \square$$

BÀI 13. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(1 + 2x)^{50}} ..$

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{50} \left(2 - \frac{3}{x} \right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x} \right)^{30}}{x^{50} \left(2 + \frac{1}{x} \right)^{50}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x} \right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x} \right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x} \right)^{50}} = \frac{(2 - 0)^{20}(3 + 0)^{30}}{(0 + 2)^{50}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{30}. \quad \square$$

BÀI 14. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x - 4} ..$

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x}} = -\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x}} = 3. \quad \square$$

BÀI 15. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 3}{5 - x} ..$

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{x \left(\frac{5}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \frac{2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{\frac{5}{x} - 1} = -\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{\frac{5}{x} - 1} = -2. \quad \square$$

BÀI 16. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x + 10 \right) ..$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 C &= 10 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - x \right] = 10 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - x \right] \\
 &= 10 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - x \right] = 10 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + 1}} \right) \right] \\
 &= 10 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + 1}} = 10 + \frac{-3}{2} = \frac{17}{2}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 17. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x}$..

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 C &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}}{x \left(\frac{1}{x} - 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}}{\left(\frac{1}{x} - 2 \right)} \right) = -\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ và} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}}{\left(\frac{1}{x} - 2 \right)} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 18. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 13)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 C &= 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x) = 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 - 4x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 2x} \right) \\
 &= 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 2x} = 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}{|x| \sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x} \\
 &= 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}{-x \sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x} = 13 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = 14.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 19. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x + 5)$..

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 C &= 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x \right) = 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \right] \\
 &= 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{1 - 1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \right) \right] = 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 20. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x)$..

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 C &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(1 - \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} \right) \right] = +\infty, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} \right) = 1 - \sqrt{2} < 0 \\
 \text{và } \lim_{x \rightarrow -\infty} x &= -\infty.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 21. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - x + 2021)$..

Lời giải.

$$\begin{aligned} C &= 2021 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \sqrt{1 - \frac{4}{x}} - x \right) = 2021 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} - 1 \right) \right] \\ &= 2021 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{1 - \frac{4}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1} \right) \right] = 2021 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1} = 2021 - \frac{4}{2} = 2019. \end{aligned}$$

□

BÀI 22. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$..

Lời giải.

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{-1 - \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 23. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$..

Lời giải.

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2|x|}{x} + \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}} = \frac{2 + 0}{-\sqrt{1 + 0 + 0}} = -2.$$

□

BÀI 24. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1} - 2x^2)$..

Lời giải.

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - 2x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \frac{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} - 4}{\sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + 2} = \frac{3}{4}.$$

□

BÀI 25. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2x}}{2x + 3}$..

Lời giải.

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2x}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2 \right)}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

BÀI 26. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 1)$..

Lời giải.

$$\begin{aligned} C &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \right] \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \right) \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

□

BÀI 27. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - \sqrt{x^2 + x}}{x + 10}$..

Lời giải.

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x + 10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{|x|}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{10}{x}} = \frac{-1 + 1}{1} = 0.$$

□

BÀI 28. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 9x - 21} - \sqrt{4x^2 - 7x + 13})$..

Lời giải.

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x\sqrt{4 - \frac{9}{x} - \frac{21}{x^2}} + x\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{-4 + \frac{9}{x} + \frac{21}{x^2} + 4 - \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2}}{\sqrt{4 - \frac{9}{x} - \frac{21}{x^2}} + \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2}}} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{34}{x}}{\sqrt{4 - \frac{9}{x} - \frac{21}{x^2}} + \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2}}} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 29. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2|x| - 3x^2 + 7x - 1}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+3x}}$..

Lời giải.

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{4|x|}{x} - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right)^2 \cdot (-x)\sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4|x|}{x} - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{\left(2 + \frac{1}{x} \right)^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \frac{-4}{2^2 \cdot 1} = 1.$$

□

BÀI 30. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 3)$..

Lời giải.

$$\begin{aligned} C &= 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right) = 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{4 - 4 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} \right) \right] \\ &= 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{4}{4+0+0+0} = 1. \end{aligned}$$

□

BÀI 31. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x-1)\sqrt{\frac{3-x}{5-3x-x^3}} \right]$..

Lời giải.

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{\frac{3}{x} - 1}{x^2 \left(\frac{5}{x^2} - \frac{3}{x} - 1 \right)}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[- \left(1 - \frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{\frac{3}{x} - 1}{\frac{5}{x^2} - \frac{3}{x} - 1}} \right] = -1 \cdot \sqrt{\frac{0-1}{0-0-1}} = -1.$$

□

BÀI 32. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 3x} - 4x + 5)$..

Lời giải.

$$\begin{aligned} C &= 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\sqrt{16 + \frac{3}{x}} - 4x \right) = 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{16 + \frac{3}{x}} - 4 \right) \right] \\ &= 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{16 + \frac{3}{x} - 16}{\sqrt{16 + \frac{3}{x}} + 4} \right) \right] = 5 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{16 + \frac{3}{x}} + 4} = \frac{3}{4+4} = 5 + \frac{3}{8} = \frac{43}{8}. \end{aligned}$$

□

BÀI 33. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x\sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}} \right)$..

Lời giải.

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x\sqrt{\frac{x^3 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}{x^5 \left(1 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} \right)}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}}} = -\sqrt{2}.$$

□

BÀI 34. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3 - \sqrt{x^2 - x + 1})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} C &= -3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \right] \\ &= -3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{1 - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \right) \right] = -3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 35. Tính các giới hạn sau

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}} \right]$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1 - x}$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 - x^2} - x\sqrt{x^2 + 3}}{x(5 - 2x)}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1 + 3\sqrt{4x^2 + x - 5}}{1 - 3x + 2\sqrt{9x^2 - x + 10}}$

⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt[3]{1 - 8x^3}}{6x + 9}$

⑦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 1)\sqrt{x^2 - 3}}{x - 5x^2}$

⑧ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 3x - 1}}{\sqrt{9x^2 - x + 3} - 5x - 3}$

⑨ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x}}$

⑩ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3}{6x + \sqrt{4x^2 + x + 3}}$

⑪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 7x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + 5x + 3}$

⑫ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2\sqrt{1 - 2x}}{1 - x}$

Lời giải.

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \frac{(-x)}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{2x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(-1) \cdot \sqrt{\frac{2x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}}} \right] = -\sqrt{2}.$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 3}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}} = 2.$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3x + 1}{x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} - 1} = \frac{1 + 3}{2 - 1} = 4.$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 - x^2} - x\sqrt{x^2 + 3}}{x(5 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x^2\sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{x^2\left(\frac{5}{x} - 2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{\left(\frac{5}{x} - 2\right)} = -\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1 + 3\sqrt{4x^2 + x - 5}}{1 - 3x + 2\sqrt{9x^2 - x + 10}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1 + 3x\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}}{1 - 3x + 2x\sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}}{\frac{1}{x} - 3 + 2\sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}}} = \frac{8}{3}.$

- ⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sqrt{x^2-1} - \sqrt[3]{1-8x^3}}{6x+9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - x\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-8}}{6x+9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-8}}{6+\frac{9}{x}} = -\frac{1}{6}.$
- ⑦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1) \cdot (-x)\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{x-5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x}\right) \cdot (-1)\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{\frac{1}{x}-5} = \frac{2}{5}.$
- ⑧ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2+3x-1}}{\sqrt{9x^2-x+3}-5x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-5x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}}{-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-5-\frac{3}{x}} = -\frac{1}{4}.$
- ⑨ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{2}{2} = 1.$
- ⑩ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+3}{6x+\sqrt{4x^2+x+3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+3}{6x-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8+\frac{3}{x}}{6-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = 2.$
- ⑪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-7x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+5x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-7x+2}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+5x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-7+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+5+\frac{3}{x}} = -1.$
- ⑫ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2\sqrt{1-2x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}-1} = -1.$

□

BÀI 36. Tính các giới hạn sau

- | | |
|---|--|
| ① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$ | ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-4x}-x)$ |
| ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$ | ④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$ |
| ⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x+1}-x-2)$ | ⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-3x+5}+x+1)$ |
| ⑦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{27x^3-x^2}-3x)$ | ⑧ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-\sqrt{4x^2+2x-1})$ |
| ⑨ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-3-\sqrt{4x^2+4x+3})$ | ⑩ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^4+3x^2+1}-2x^2)$ |
| ⑪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+3x+1}-2x+4)$ | ⑫ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2-4x+1}+2x+3)$ |
| ⑬ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt[3]{4x^2-x^3}}{2x-\sqrt{4x^2-3x}}$ | ⑭ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3+1}-2x+1)$ |

Lời giải.

- ① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\right] = +\infty.$
- Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right) = -2.$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1} = -2.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2 - (x-2)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right)} = 0.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right)} = \frac{1}{2}.$$

$\textcircled{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{5}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x - 2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 1 - (x + 2)^2}{(\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x + 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\left(x\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + x + 2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x} \right)} = 0. \end{aligned}$$

$\textcircled{6}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x + 1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 5 - (x + 1)^2}{(\sqrt{x^2 - 3x + 5} - x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 4}{\left(-x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} - x - 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5 + \frac{4}{x}}{\left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$\textcircled{7}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{27x^3 - x^2} - 3x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27x^3 - x^2 - 27x^3}{(\sqrt[3]{27x^3 - x^2})^2 + 3x\sqrt[3]{27x^3 - x^2} + 9x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 \left(\sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}} \right)^2 + 3x^2 \sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}} + 9x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}} \right)^2 + 3\sqrt[3]{27 - \frac{1}{x}} + 9} = -\frac{1}{27}. \end{aligned}$$

$\textcircled{8}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 2x - 1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - 2x + 1}{(2x + \sqrt{4x^2 + 2x - 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 1}{\left(2x + x\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{\left(2 + \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

⑨

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 - \sqrt{4x^2 + 4x + 3}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 3)^2 - 4x^2 - 4x - 3}{(2x - 3 + \sqrt{4x^2 + 4x + 3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x + 6}{(2x - 3 + \sqrt{4x^2 + 4x + 3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x + 6}{\left(2x - 3 + x\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16 + \frac{6}{x}}{\left(2 - \frac{3}{x} + \sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right)} = -4. \end{aligned}$$

⑩

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1} - 2x^2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 + 3x^2 + 1 - 4x^4}{\sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1} + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 \sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + 2x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + 2}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

⑪

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x + 4) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 3x + 1 - (2x - 4)^2}{(\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x - 4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{19x - 15}{\left(x\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + 2x - 4}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{19 - \frac{15}{x}}{\left(\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + 2 - \frac{4}{x}}\right)} = \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

⑫

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2x + 3) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1 - (2x + 3)^2}{(\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 2x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16x - 8}{\left(-x\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} - 2x - 3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16 - \frac{8}{x}}{\left(-\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} - 2 - \frac{3}{x}}\right)} = 4. \end{aligned}$$

⑬

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt[3]{4x^2 - x^3}}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + 4x^2 - x^3}{4x^2 - 4x^2 + 3x} \cdot \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 3x}}{x^2 - x\sqrt[3]{4x^2 - x^3} + (\sqrt[3]{4x^2 - x^3})^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + \sqrt{4 - \frac{3}{x}}}{1 - \sqrt[3]{\frac{4}{x} - 1} + (\sqrt[3]{4x^2 - x^3})^2} \right] = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

⑭

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 1} - 2x + 1) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 1 - (2x - 1)^3}{(\sqrt[3]{8x^3 + 1})^2 + (2x - 1) \cdot \sqrt[3]{8x^3 + 1} + (2x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 - 6x + 2}{(\sqrt[3]{8x^3 + 1})^2 + (2x - 1) \cdot \sqrt[3]{8x^3 + 1} + (2x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \cdot \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}} + \left(2 - \frac{1}{x}\right)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 37. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}} \right) ..$

BÀI 38. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{27x^3 - x^2 - 3x} \right) ..$

BÀI 39. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + 1} - 2x + 1 \right) ..$

BÀI 40. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 2x - 1} + x - 6}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - 4x} ..$

BÀI 41. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1} \right) ..$

BÀI 42. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2} \right) ..$

BÀI 43. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x} ..$

BÀI 44. Tính các giới hạn sau

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1) \cdot \sqrt{\frac{x}{2x^4 + x^2 + 1}} \right]$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+2) \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}} \right]$

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}} \right]$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x-4) \cdot \sqrt{\frac{3-x}{5-3x-x^3}} \right]$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2 + x}}{x + 10}$

⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2|x| - 3x^2 + 7x - 1}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2 + 3x}}$

⑦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1 - x}$

⑧ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2}$

⑨ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x + 2}}$

⑩ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{4\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$

⑪ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{3x - 1}$

⑫ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2} + 3x}{6x - 7}$

⑬ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} + 3x}{2x + 7}$

⑭ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + x}}$

⑮ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

⑯ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{4x^2 - 6x + 1} + 3x}$

BÀI 45. Tính các giới hạn sau

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x)$

④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x)$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x)$

⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x)$

⑦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2})$

⑧ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$

⑨ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 9x - 21} - \sqrt{4x^2 - 7x + 13})$

⑩ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 + 5x})$

⑪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 1)$

⑫ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 3x} - 4x + 5)$

⑬ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3 - \sqrt{x^2 - x + 1})$

⑭ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + \sqrt{x^2 - 5x + 1})$

⑮ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x + 1}{x}$

⑯ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x + 5 - \sqrt{16x^2 + 4x + 3})$

DẠNG 2.4. Giới hạn một bên $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$

Phương pháp: Sử dụng các định lý về giới hạn hàm số.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}$.

Lời giải.

Ta có

① $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = -1 < 0$.

② $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$.

③ $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$.

Suy ra $A = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty$. □

VÍ DỤ 2. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2}$.

Lời giải.

Ta có

① $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 15) = -13 < 0$.

② $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$.

③ $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0$.

Suy ra $A = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2} = -\infty$. □

VÍ DỤ 3. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - x}{3 - x}$.

Lời giải.

Ta có

① $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2 - x) = -1 < 0$.

② $\lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - x) = 0$.

③ $x \rightarrow 3^- \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 3 - x > 0$.

Suy ra $A = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - x}{3 - x} = -\infty$. □

VÍ DỤ 4. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{2x - 4}$.

Lời giải.

Ta có

① $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3 > 0$.

② $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4) = 0$.

$$\textcircled{3} \quad x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow 2x - 4 > 0.$$

Suy ra $A = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2x-4} = +\infty$. □

VÍ DỤ 5. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-5) = -1 < 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-4)^2 = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad x \rightarrow 4^- \Rightarrow (x-4)^2 > 0.$$

Suy ra $A = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2} = -\infty$. □

VÍ DỤ 6. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x-8}{(3-x)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x-8) = 1 > 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)^2 = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad x \rightarrow 3^- \Rightarrow (3-x)^2 > 0.$$

Suy ra $A = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x-8}{(3-x)^2} = +\infty$. □

VÍ DỤ 7. Tính $A = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$.

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-1}{x+3}$.

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} (2x-1) = -7 < 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} (x+3) = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad x \rightarrow -3^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow x+3 > 0.$$

Suy ra $A = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2} = -\infty$. □

VÍ DỤ 8. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$.

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$.

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3 > 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} [(x-2)(x+2)] = 0.$$

③ $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow (x-2)(x+2) < 0$.

Suy ra $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = -\infty$. □

VÍ DỤ 9. Tính $B = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$.

Lời giải.

Vì $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow |2-x| = 2-x$.

Do đó $B = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x-1} = -\frac{1}{3}$. □

VÍ DỤ 10. Tính $B = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{5x-15}$.

Lời giải.

Vì $x \rightarrow 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow |x-3| = x-3$.

Do đó $B = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{5(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$. □



BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính $B = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{2x^3+x-3}$.

Lời giải.

Vì $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$.

Do đó $B = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(2x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{2x^2+2x+3} = -\frac{1}{7}$. □

BÀI 2. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$ và $B = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$. Suy ra giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.

Lời giải.

① $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$ nên $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$.

② $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$ nên $B = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$ nên không tồn tại giới hạn của $C = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$. □

BÀI 3. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-9|}{x-3}$.

Lời giải.

Ta có $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3| \cdot |x+3|}{x-3}$. Do đó

① $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x^2-9|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)|x+3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} |x+3| = 6$.

② $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2-9|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)|x+3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-|x+3|) = -6$.

Do đó giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-9|}{x-3}$ không tồn tại. □

BÀI 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x^4 - 6x^2 - x & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 3x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Hỏi hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x = 1$ hay không? Tại sao?

Lời giải.

① $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 3x) = 1 - 3 = -2$.

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x^4 - 6x^2 - x) = 5 - 6 - 1 = -2.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên hàm số có giới hạn tại $x = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$. □

BÀI 5. Tính giới hạn của $C = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{khi } x < 1 \\ 1 - \sqrt{7x^2 + 2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 3) = -2.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [1 - \sqrt{7x^2 + 2}] = -2.$$

Do đó $C = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$. □

BÀI 6. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{x+1} & \text{khi } x < -2 \\ x+10 & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 10) = 8.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x-2}{x+1} = 8.$$

Do đó $C = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 8$. □

BÀI 7. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & \text{khi } x < -1 \\ mx^2 - x + m^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - x + 1) = 3.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (mx^2 - x + m^2) = m^2 + m + 1.$$

Do đó để hàm số có giới hạn tại $x = -1$ thì $3 = m^2 + m + 1 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -2$. □

BÀI 8. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-3+|x-1|\sqrt{5x^2+4}}{x^2-2x+1}$.

Lời giải.

Vì $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$. Do đó

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1) - (x-1)\sqrt{5x^2+4}}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - \sqrt{5x^2+4}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{9 - (5x^2+4)}{(x-1)(3 + \sqrt{5x^2+4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5(1-x^2)}{(x-1)(3 + \sqrt{5x^2+4})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-5(1+x)}{3 + \sqrt{5x^2+4}} = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 9. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2-2x+|x-1|\sqrt{x+3}}{x^2-2x+1}$.

Lời giải.

Vì $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1)$. Do đó

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x(x-1) - (x-1)\sqrt{x+3}}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2 - x - 3}{(x-1)(2x + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x+3}{2x + \sqrt{x+3}} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

□

BÀI 10. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{\sqrt{x-1}-1}$.

Lời giải.

Vì $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2)$. Do đó

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-1)-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} [-(\sqrt{x-1}+1)] = -2. \end{aligned}$$

□

BÀI 11. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$.

Lời giải.

$$D = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{(x-3)(x-4)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3-x}\sqrt{4-x}}{\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

□

BÀI 12. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{4-x^2}$.

Lời giải.

$$D = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)(x-3)}}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2-x}\sqrt{3-x}}{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2}.$$

□

BÀI 13. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}+x-1}{\sqrt{x^2-x^3}}$.

Lời giải.

$$D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} - (1-x)}{\sqrt{x^2(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{(1-x)^2}}{|x|\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{|x|} = 1.$$

□

BÀI 14. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x)\sqrt{\frac{x+5}{x^3+2x^2-3}}$.

Lời giải.

$$D = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-\sqrt{\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x-1)(x^2+3x+3)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-\sqrt{\frac{(x-1)(x+5)}{x^2+3x+3}} \right] = 0.$$

□

BÀI 15. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}$.

Lời giải.

$$D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)\sqrt{x+2}}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+2}}{4-x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

📁 DẠNG 2.5. Giới hạn của hàm số lượng giác

1 Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{4 \cos^2 x - 3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{4 \cos^2 x - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{4(1 - \sin^2 x) - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{1 - 4 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{(1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-1}{1 + 2 \sin x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2 \cos^2 x - 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2 \cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2(1 - \sin^2 x) - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{1 - 2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{(1 + \sqrt{2} \sin x)(1 - \sqrt{2} \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{1 + \sqrt{2} \sin x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\sin 4x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x - \cos^2 2x + \sin^2 2x}{2 \sin 2x \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{2 \sin 2x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2x}{\cos 2x} = 0. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{1 + 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\sin x - \cos x)}{2 \sin x (\sin x + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = -1. \end{aligned}$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{1 - 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \sin x (\sin x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = -1. \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x (\sin x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} = -1. \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x}$.

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 6x \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 6x = 2.$$

□

BÀI 4. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$.

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 4x = 2.$$

□

BÀI 5. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

Lời giải.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0.$$

□

BÀI 6. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 2 \cos 2x + 2}{\sin 3x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 2 \cos 2x + 2}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x + 2 (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2}{3 \sin x - 4 \sin^3 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x + 4 \cos^2 x}{\sin x (3 - 4 \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x (4 \cos^2 x - 3 + 4 \cos x)}{\sin x [3 - 4 (1 - \cos^2 x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x [(2 \cos x + 1)^2 - 4]}{\sin x [4 \cos^2 x - 1]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x (2 \cos x + 3) (2 \cos x - 1)}{\sin x (2 \cos x + 1) (2 \cos x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x (2 \cos x + 3)}{\sin x (2 \cos x + 1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 7. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\cos x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \sin x \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (\cos x + \sin x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2 (\cos x + \sin x) = 2. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \cdot \frac{\frac{bx}{2}}{\sin \frac{bx}{2}} \right) = \frac{a}{b}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{bx}{2}}{\sin \frac{bx}{2}} = 1$. □

VÍ DỤ 6. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot 5}{5x} = 5.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$. □

VÍ DỤ 7. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \cdot \sin x}{45x^3}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \cdot \sin x}{45x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

VÍ DỤ 8. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1$. □

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 8. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{2 \sin^2 \frac{3x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 \frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{3x}{2}} \cdot \frac{25}{9} \right] = \frac{25}{9}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{3x}{2}} = 1$. □

BÀI 9. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2} = 1.$ □

BÀI 10. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot 4 \cos^2 x \right) = 4.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$ □

BÀI 11. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^3 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{-2}{4 \cos x} \right] = \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1.$ □

BÀI 12. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\sin^3 x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2} \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 13. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot 4 \cos^2 x \right) = 4.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$ □

BÀI 14. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}$.

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{2 \cos \frac{x}{2}} \right) = \frac{3}{2}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$

□

5 VÍ DỤ

VÍ DỤ 9. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos 8x} - 1) \sin^2 3x}{3x^4}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos 8x} - 1) \sin^2 3x}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 8x - 1) \sin^2 3x}{3x^4 (\sqrt{\cos 8x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 4x \sin^2 3x}{3x^4 (\sqrt{\cos 8x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin 4x}{4x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot \frac{-96}{\sqrt{\cos 8x} + 1} \right] = -48. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 10. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin 2x}.$

Lời giải.

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{-1}{1 + \sqrt{2x+1}} \right] = \frac{-1}{2}.$$

□

VÍ DỤ 11. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x \cos 2x}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x (1 - 2 \sin^2 x)}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x (1 - 2 \sin^2 x)}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1 + 2 \cos^2 x}{1 + \cos x \sqrt{\cos 2x}} \right] = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 12. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan^2 x}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 x}{2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} (1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{2 \cos^2 \frac{x}{2} (1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 13. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{\sin^2 x - 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{\sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{(\sin^2 x - \cos^2 x) (\sqrt[3]{\tan^2 x} + \sqrt[3]{\tan x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\sin^2 x - \cos^2 x) (\sqrt[3]{\tan^2 x} + \sqrt[3]{\tan x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x (\sin x + \cos x) (\sqrt[3]{\tan^2 x} + \sqrt[3]{\tan x} + 1)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

6 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 15. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{2}{4 (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \right] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

BÀI 16. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \sqrt{1 - x})^2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \sqrt{1 - x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \sqrt{1 - x})^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{2 (1 + \sqrt{1 - x})^2}{4} \right] = 2. \end{aligned}$$

□

BÀI 17. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \cos x}{x^2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 - \cos^2 x}{x^2 (\sqrt{1 + x^2} + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2 (\sqrt{1 + x^2} + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + \cos x} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + \cos x} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

□

BÀI 18. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(\sqrt{3x+4} + 2 + x)}{(-x^2 - x)(1 + \sqrt{2x+1})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\sqrt{3x+4} + 2 + x)}{-x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(\sqrt{3x+4} + 2 + x)}{(-x-1)(1 + \sqrt{2x+1})} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sqrt{3x+4} + 2 + x}{-x-1} \right) \\ &= 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

□

BÀI 19. Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1 + 1 - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x(\sqrt{2x+1} + 1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{\sin x(1 + \sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[3]{(x^2+1)^2})} = 1. \end{aligned}$$

□

7 VÍ DỤ

VÍ DỤ 14. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]$.

Lời giải.

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4}$. Vì $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \rightarrow 0$. Khi đó

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\tan \left(2t + \frac{\pi}{2} \right) (-1) \tan t \right] = \lim_{x \rightarrow 0} (\cot 2t \tan t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2t}{2 \cos^2 t} = \frac{1}{2}.$$

□

BÀI 20. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}$.

Lời giải.

Đặt $t = x - \pi$. Vì $x \rightarrow \pi \Rightarrow t \rightarrow 0$. Khi đó

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

□

BÀI 21. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3}$.

Lời giải.

Đặt $t = x - 1$. Vì $x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0$. Khi đó

$$C = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t(t-2)} = -\frac{1}{2}.$$

□

BÀI 22. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$.

Lời giải.

Đặt $t = x - a$. Vì $x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0$. Khi đó

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t+a) - \sin a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{t+2a}{2} \sin \frac{t}{2}}{2 \frac{t}{2}} = \cos a.$$

□

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-x-6}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-x-6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+2)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

□

② $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x-3}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+5) = 8. \end{aligned}$$

□

③ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+2x-3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+2x-3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(x+3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

④ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

⑤ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{4-x^2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{4-x^2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x+2)}{(2-x)(2+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{2-x} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

⑥ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-9}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x+3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

□

⑦ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+3x-4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+3x-4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+4} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

□

⑧ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

□

⑨ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 4}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+7)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+7}{x+2} = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

□

⑩ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-1} = 3. \end{aligned}$$

□

⑪ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{4x^2 + x - 18}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{4x^2 + x - 18} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+5)}{(x-2)(4x+9)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+5}{4x+9} = \frac{11}{17}. \end{aligned}$$

□

⑫ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x+5} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

⑬ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^2 - 10x + 12}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^2 - 10x + 12} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{2(x-2)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x-2}{2(x-3)} = 2. \end{aligned}$$

□

⑭ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^2 - x - 6}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(2x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x-2}{2x+3} = -\frac{4}{7}. \end{aligned}$$

□

⑮ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

⑯ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 5x} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-4)(x-5)}{x(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-4}{x} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

□

⑰ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3x-1)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-1}{x-2} = 8. \end{aligned}$$

□

⑱ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(2x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{2x-1} = 4. \end{aligned}$$

□

⑲ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{9 - x^2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{9 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-2)(x-3)}{(3-x)(3+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-2)}{-x-3} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

⑳ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4)(x-2)}{x+4} = -16. \end{aligned}$$

□

㉑ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 - 5x + 6}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2 + 2x + 4)}{x-3} = 12. \end{aligned}$$

□

㉒ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x+9)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x+9} = \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

□

㉓ $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - x - 2 + \sqrt{2}}{x^3 - 2\sqrt{2}}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - x - 2 + \sqrt{2}}{x^3 - 2\sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})}{(x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - 1 + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 2} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{6}. \end{aligned}$$

□

㉔ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x-1} = 12. \end{aligned}$$

□

㉕ $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2} &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}x + 2)}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 2}{x + \sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

□

㉖ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x + 3) = 3. \end{aligned}$$

□

㉗ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x((x+3)^2 + 3(x+3) + 9)}{x} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((x+3)^2 + 3(x+3) + 9) = 27. \end{aligned}$$

□

㉘ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(2x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 + 3x + 9)}{2x+3} = 9. \end{aligned}$$

□

②9 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 10x - 8}{x - 2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 10x - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 - 3x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 4) = 2. \end{aligned}$$

□

③0 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x^2 - 3x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1} = -1. \end{aligned}$$

□

③1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

□

③2 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 1)}{x - 3} = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

□

③3 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x + 6}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x + 6} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(2x - 5)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 5}{x^2 - 2x + 3} = -\frac{9}{11}. \end{aligned}$$

□

③4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2. \end{aligned}$$

□

③5 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 3x - 2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 3x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{(x + 1)^2} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

□

③6 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 - 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x + 2)} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□

③7 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^3 + x^2 - 3}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^3 + x^2 - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(2x^2 + 3x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 4}{2x^2 + 3x + 3} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

□

③8 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - 2x + 3}{3x^2 - 2x - 1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - 2x + 3}{3x^2 - 2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(3x^2 - x - 3)}{(x - 1)(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 3}{3x + 1} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

③⑨ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 3x + 1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x-1} = 11. \end{aligned}$$

□

④⑩ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x + 3}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x - 3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 3}{x-2} = -1. \end{aligned}$$

□

④① $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{3x^3 + 4x^2 - x + 6}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{3x^3 + 4x^2 - x + 6} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(3x^2 - 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-4}{3x^2 - 2x + 3} = -\frac{6}{19}. \end{aligned}$$

□

④② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x^2 - x - 1)}{(x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 - 3x - 3} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□

④③ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 - 2x - 3)}{(x-3)(x^3 + 3x^2 + x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = 0. \end{aligned}$$

□

④④ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{9x^4 + 8x^2 - 1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{9x^4 + 8x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(3x-1)(2x^2 - x + 1)}{(3x-1)(3x^3 + x^2 + 3x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 3x + 1} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

□

④5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 4} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

□

④6 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

④7 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2x^4 + x - 2}{x^2 - 4}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2x^4 + x - 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^4 + 1)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 1}{x + 2} = \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

□

④8 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 2x + 1)(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

④9 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(2x^2 + x + 1)}{(x - 3)(4x^2 - x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4x^2 - x + 1} = \frac{11}{17}. \end{aligned}$$

□

⑤0 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x + 1)(x^2 + 2x + 1)}{(x - 1)(x^2 + 2x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

⑤1 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 12x^2 + 4x - 12}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 12x^2 + 4x - 12} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(2x^2 + x + 1)}{4(x - 3)(x^2 + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4(x^2 + 1)} = \frac{11}{20}. \end{aligned}$$

□

⑤2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{(\sqrt[3]{x} - 1)^2(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)^2} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

□

⑤3 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4}{3x^3 + 14x^2 + 20x + 8}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4}{3x^3 + 14x^2 + 20x + 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x^2 - 1)(x^2 + 4x + 4)}{(3x + 2)(x^2 + 4x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 1}{3x + 2} = -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

□

54) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 9 + 7\sqrt{3}}{3 - x^2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 9 + 7\sqrt{3}}{3 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(2x^2 - (3 - 2\sqrt{3})x + 7 - 3\sqrt{3})}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^2 - (3 - 2\sqrt{3})x + 7 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - x} = \frac{7\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

□

55) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^3(x - 2)}{(x - 1)^2(x - 2)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x + 1} = 0. \end{aligned}$$

□

56) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5}{x^2 - 1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5)}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x + 1} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

□

57) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right).$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

58) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right).$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

59) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right).$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)}{(x - 3)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x - 3)(x - 1)} = -2. \end{aligned}$$

□

⑥0 $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x-3}{x+2} - \frac{x-26}{4-x^2} \right).$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x-3}{x+2} - \frac{x-26}{4-x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-5)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-5)}{x-2} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

□

⑥1 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^3-1} \right).$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^3-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

□

⑥2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(6x^2+11x+6)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (6x^2+11x+6) = 6. \end{aligned}$$

□

⑥3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x+1} = \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

□

64 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n(x - 1)}{(x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{n-1} - 1) + (x^{n-2} - 1) + \dots + (x^2 - 1) + (x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} ((x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) + (x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + x + 1) + \dots + 1) \\ &= (n - 2) + (n - 3) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n - 2)(n - 1)}{2}. \end{aligned}$$

□

65 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1) - (x - 1)}{(x - 1)(x^{49} + x^{48} + \dots + 1) - (x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{99} + x^{98} + \dots + x}{x^{49} + x^{48} + \dots + x} = \frac{49}{24}. \end{aligned}$$

□

66 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) + (x^2 - 1) + \dots + (x^n - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) + (x - 1)(x + 1) + \dots + (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (1 + (x + 1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)) \\ &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Tính các giới hạn sau

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}.$

② $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x + 3} - 1}.$

③ $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x + 3}}{x - 6}.$

④ $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{3 - \sqrt{x + 1}}.$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}.$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2 - 3x} - x}{2x - 6}.$

⑦ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x^2 - 4}.$

⑧ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}.$

⑨ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 1} - 2}.$

⑩ $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}.$

⑪ $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{2 - \sqrt{x - 3}}.$

⑫ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 1}.$

$$\textcircled{13} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{3 + 2x}}{x^2 - 3x}.$$

$$\textcircled{15} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x^2 - 2x}.$$

$$\textcircled{17} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{2x^2 + x - 10}.$$

$$\textcircled{19} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x + 5} - 3}.$$

$$\textcircled{21} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}.$$

$$\textcircled{23} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x}.$$

$$\textcircled{25} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - x^2} - 1}{x^2 - x}.$$

$$\textcircled{27} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{2x + 7} + x - 4}.$$

$$\textcircled{29} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 5 - \sqrt{2x^2 + x + 8}}{x^2 + 3x + 2}.$$

$$\textcircled{31} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 3}{\sqrt{3 + 2x} - \sqrt{x + 2}}.$$

$$\textcircled{33} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{1 - x}}{x^4 + x}.$$

$$\textcircled{35} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x - 5} - 2}.$$

$$\textcircled{37} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{3 - x}}.$$

$$\textcircled{39} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{3x - 5}}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 6}}.$$

$$\textcircled{41} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} + x^2 - 3x}.$$

$$\textcircled{43} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 1} + x^4 - 3x^3 + x^2 + 3}{\sqrt{2x} - 2}.$$

$$\textcircled{14} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{2x - x^2} - 1}.$$

$$\textcircled{16} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x - 3} - 3}{x^2 - 4x}.$$

$$\textcircled{18} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x - 1} - 1}.$$

$$\textcircled{20} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + 1} - 2}{x^2 + x - 2}.$$

$$\textcircled{22} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4(x + 1)}{3 - \sqrt{4x + 1}}.$$

$$\textcircled{24} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{1 - x^3} - 3}.$$

$$\textcircled{26} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x + 5} + x - 5}{x^2 - 2x}.$$

$$\textcircled{28} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2 + \sqrt{7 - 2x}}{x^2 - 1}.$$

$$\textcircled{30} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x - 6} - \sqrt{x + 2}}{x - 2}.$$

$$\textcircled{32} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$\textcircled{34} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{x + 7} - 3}.$$

$$\textcircled{36} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x + 8} - 3}.$$

$$\textcircled{38} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{\sqrt{4x + 5} - \sqrt{3x + 6}}.$$

$$\textcircled{40} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x + 5}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 3}}.$$

$$\textcircled{42} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x - 3} - 1}{x - 1}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x + 3} - 2)(\sqrt{x + 3} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x + 3} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x + 3} - 1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(\sqrt{x + 3} + 1)}{(\sqrt{x + 3} - 1)(\sqrt{x + 3} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x + 3} + 1) = 2.$$

$$\textcircled{3} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x + 3}}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(3 - \sqrt{x + 3})(3 + \sqrt{x + 3})}{(x - 6)(3 + \sqrt{x + 3})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-1}{3 + \sqrt{x + 3}} = \frac{-1}{6}.$$

$$\textcircled{4} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{3 - \sqrt{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x - 8)(3 + \sqrt{x + 1})}{(3 - \sqrt{x + 1})(3 + \sqrt{x + 1})} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3 + \sqrt{x + 1}}{-1} = -6.$$

$$\textcircled{5} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x + 1)}{(x + 1)(\sqrt{4 + x + x^2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2} = -\frac{1}{4}.$$

- ⑥ Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2 - 3x} - x}{2x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(\sqrt{2x^2 - 3x} + x)(x-3)2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2(\sqrt{2x^2 - 3x} + x)} = \frac{1}{4}$.
- ⑦ Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{16}$.
- ⑧ Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(2-x)}{(x-2)(x+2)(2 + \sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(x+2)(2 + \sqrt{3x-2})} = -\frac{3}{16}$.
- ⑨ Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} [(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)] = 24$.
- ⑩ Ta có $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{x(9-x)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-1}{x(\sqrt{x} + 3)} = -\frac{1}{54}$.
- ⑪ Ta có $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{2 - \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})}{7-x} = -\lim_{x \rightarrow 7} [(x+7)(2 + \sqrt{x-3})] = -56$.
- ⑫ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+3}{(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \frac{7}{8}$.
- ⑬ Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{3+2x}}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x(x-3)(x + \sqrt{3+2x})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x(x + \sqrt{3+2x})} = \frac{2}{9}$.
- ⑭ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{2x - x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{2x - x^2} + 1)}{-x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{2x - x^2} + 1)}{-(x-1)} = \infty$.
- ⑮ Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{4x+1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x(\sqrt{4x+1} + 3)} = \frac{1}{3}$.
- ⑯ Ta có $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x-3} - 3}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x-4)}{x(x-4)(\sqrt{3x-3} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3}{x(\sqrt{3x-3} + 3)} = \frac{1}{8}$.
- ⑰ Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x^2 + x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(2x-5)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(2x-5)(\sqrt{x+2} + 2)} = -\frac{1}{4}$.
- ⑱ Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-1)(\sqrt{x-1} + 1)] = 2$.
- ⑲ Ta có $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x+5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+1)(x-4)(\sqrt{x+5} + 3)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} [(x+1)(\sqrt{x+5} + 3)] = 30$.
- ⑳ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x+2)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{1}{4}$.
- ㉑ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{4}$.
- ㉒ Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4(x+1)}{3 - \sqrt{4x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+2)(3 + \sqrt{4x+1})}{4(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[-(3x+2)(3 + \sqrt{4x+1})]}{4} = -12$.
- ㉓ Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+1} - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x(x+1)(\sqrt{x^3+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^3+1} + 1)} = 0$.
- ㉔ Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{1-x^3} - 3} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{1-x^3} + 3)}{-(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = -\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-x^3} + 3}{x^2 - 2x + 4} = -\frac{1}{2}$.
- ㉕ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-x^2} - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^2}{x(x-1)(\sqrt{2x-x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{x(\sqrt{2x-x^2} + 1)} = 0$.

26) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} + x - 5}{x^2 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 12x - 20}{x(x-2)(\sqrt{2x+5} - (x-5))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x-10)}{x(x-2)(\sqrt{2x+5} - (x-5))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-10)}{x(\sqrt{2x+5} - (x-5))} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

27) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{2x+7} + x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{2x+7} - (x-4))}{-x^2 + 10x - 9} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{2x+7} - (x-4))}{-(x-9)} = \frac{3}{4}.$

28) Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2+\sqrt{7-2x}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x+1)((x-2)-\sqrt{7-2x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{(x-1)((x-2)-\sqrt{7-2x})} = \frac{1}{6}.$

29) Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+5-\sqrt{2x^2+x+8}}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+17}{(x+2)((2x+5)+\sqrt{2x^2+x+8})} = \frac{5}{2}.$

30) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-6}-\sqrt{x+2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(\sqrt{5x-6}+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\sqrt{5x-6}+\sqrt{x+2}} = 1.$

31) Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)(\sqrt{3+2x}+\sqrt{x+2})}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} 3(\sqrt{3+2x}+\sqrt{x+2}) = 6.$

32) Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = -\frac{1}{3}.$

33) Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x(x^2-x+1)(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x})} = 0.$

34) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7}-3} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{2+\sqrt{x+2}} = -\frac{3}{2}.$

35) Ta có $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2} = -\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5}+2}{3+\sqrt{x}} = -\frac{2}{3}.$

36) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x+8}+3)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} = 3.$

37) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = -\frac{1}{4}.$

38) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+6}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{3}{2}.$

39) Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}} = -2 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}} = -3.$

40) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 2} 2 \frac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$

41) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}+x^2-3x}{-x^3+5x^2-4x-3} = -\frac{4}{3}.$

42) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt[4]{(4x-3)^3}+\sqrt[4]{(4x-3)^2}+\sqrt[4]{4x-3}+1} = 1.$

43) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2} = 1.$

BÀI 3. Tính các giới hạn sau

① $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2}.$

② $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5x-3}+2}{x+1}.$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x^2+x}.$

④ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt[3]{5x+3}}{x-1}.$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}.$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1+\sqrt[3]{x-2}}.$

⑦ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5x-4}-x}{2x^2-x-1}.$

⑧ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$

⑨ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x+1-\sqrt[3]{4x^2+28}}.$

⑩ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x^3+x-30}.$

⑪ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10+2x^3}+x-1}{x^2+3x+2}.$

⑫ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2+3}-2}.$

⑬ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+7}-2}.$

⑭ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt[3]{x}+1}.$

⑮ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}.$

⑯ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}.$

⑰ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}.$

⑱ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x}}{x^2-1}.$

⑲ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+9}+\sqrt[3]{2x-6}}{x^3+1}.$

⑳ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{19-x^3}+2}{\sqrt{4x-3}-3}.$

㉑ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x^2-4x}.$

㉒ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x^3-1}.$

㉓ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-x}{\sqrt[3]{3x-2}-2}.$

㉔ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{2x+1}-1}.$

Lời giải.

① Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4} = \frac{1}{3}.$

② Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5x-3}+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5}{\sqrt[3]{(5x-3)^2}-2\sqrt[3]{5x-3}+4} = \frac{5}{12}.$

③ Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})} = \frac{1}{3}.$

④ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt[3]{5x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5}{4+2\sqrt[3]{5x+3}+\sqrt[3]{(5x+3)^2}} = -\frac{5}{12}.$

⑤ Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}{x+3} = 2.$

⑥ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1+\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1-\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}\right) = 3.$

⑦ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5x-4}-x}{2x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2-x+4}{(2x+1)(\sqrt[3]{(5x-4)^2}+\sqrt[3]{5x-4}+4)} = \frac{2}{9}.$

⑧ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) = 3.$

⑨ Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x + 1 - \sqrt[3]{4x^2 + 28}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9) \left((x + 1)^2 + (x + 1) \sqrt[3]{(4x^2 + 28)} + \sqrt[3]{(4x^2 + 28)^2} \right)}{(x - 3)(x^2 + 2x + 9)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 3x + 9) \left((x + 1)^2 + (x + 1) \sqrt[3]{(4x^2 + 28)} + \sqrt[3]{(4x^2 + 28)^2} \right)}{x^2 + 2x + 9} = 72.\end{aligned}$$

⑩ Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x + 5} - 2}{x^3 + x - 30} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x^2 + 3x + 10) \left(\sqrt[3]{(x + 5)^2} + \sqrt[3]{x + 5} + 4 \right)} = \frac{1}{336}.$

⑪ Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10 + 2x^3} + x - 1}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 - 3x^2 + 3x + 9}{(x + 1)(x + 2) \left(\sqrt[3]{(10 + 2x^3)^2} + (x - 1) \sqrt[3]{10 + 2x^3} + (x - 1)^2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 6x + 9}{(x + 2) \left(\sqrt[3]{(10 + 2x^3)^2} + (x - 1) \sqrt[3]{10 + 2x^3} + (x - 1)^2 \right)} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

⑫ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{(x + 1) \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 \right)} = \frac{2}{3}.$

⑬ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x + 7} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x + 7)^2} + 2\sqrt[3]{x + 7} + 4}{\sqrt{x} + 1} = 6.$

⑭ Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{\sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1) \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1 \right)}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = -\frac{3}{2}.$

⑮ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{(2x - 1)^2} + \sqrt[3]{(2x - 1)x} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{3}.$

⑯ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x - 2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x - 2)^2} - \sqrt[3]{x - 2} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = 1.$

⑰ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x + 4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(4x + 4)^2} + 2\sqrt[3]{4x + 4} + 4}{4 \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 \right)} = 1.$

⑱ Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x - 1) \left(\sqrt[3]{(x + 2)^2} - \sqrt[3]{x(x + 2)} + \sqrt[3]{x^3} \right)} = -\frac{1}{3}.$

⑲ Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x + 9} + \sqrt[3]{2x - 6}}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{(x^2 - x + 1) \left(\sqrt[3]{x + 9} - \sqrt[3]{(x + 9)(2x - 6)} + \sqrt[3]{(2x - 6)^2} \right)} = \frac{1}{2}.$

⑳ Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{19 - x^3} + 2}{\sqrt{4x - 3} - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(9 - 3x + x^2) (\sqrt{4x - 3} + 3)}{-4 \left(\sqrt[3]{(19 - x^3)^2} - 2\sqrt[3]{19 - x^3} + 4 \right)} = -\frac{27}{8}.$

㉑ Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(x - 4) \left(\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{1 - x^2} + \sqrt[3]{(1 - x)^2} \right)} = -\frac{1}{6}.$

㉒ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x - 1} - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x^2 + x + 1) \left(\sqrt[3]{(2x - 1)^2} + \sqrt[3]{2x - 1} + 1 \right)} = \frac{2}{9}.$

㉓ Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x + 2} - x}{\sqrt{3x - 2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x + 1)^2 (\sqrt{3x - 2} + 2)}{3 \left(\sqrt[3]{(3x + 2)^2} + x\sqrt[3]{3x + 2} + x^2 \right)} = -1.$

㉔ Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{\sqrt[4]{2x + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{2x + 1} + 1) (\sqrt{2x + 1} + 1)}{2 \left(\sqrt[3]{(x + 1)^2} + \sqrt[3]{x + 1} + 1 \right)} = \frac{2}{3}.$

BÀI 4. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+6} + \sqrt{2x-2} - 8}{x-3}.$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} - 7}{x-2}.$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-4)\sqrt{2x-3} + x - 84}{x-6}.$$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7} - \sqrt{x^2+3}}{x-1}.$$

$$\textcircled{11} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}.$$

$$\textcircled{13} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}.$$

$$\textcircled{15} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2}.$$

$$\textcircled{17} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}.$$

$$\textcircled{19} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}.$$

$$\textcircled{21} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}.$$

$$\textcircled{23} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt{1+6x} - 1}{x}.$$

$$\textcircled{25} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2-x} - 2}{x-1}.$$

$$\textcircled{27} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+4} + \sqrt{9-6x} - 5}{x^2}.$$

$$\textcircled{29} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x+3} + 2x^2 - 5x}{(x-1)^2}.$$

$$\textcircled{31} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x-7+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}}{x^2-2x+1}.$$

$$\textcircled{33} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6x^2+2} - 2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1}.$$

$$\textcircled{35} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - 4}{x}.$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x-1} + x^2 - 8}{x-2}.$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}.$$

$$\textcircled{10} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}.$$

$$\textcircled{12} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x^2+5} - \sqrt{x+3}}{x-1}.$$

$$\textcircled{14} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}.$$

$$\textcircled{16} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-4}.$$

$$\textcircled{18} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} + \sqrt{x+2} - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}.$$

$$\textcircled{20} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{3x-2} - 2}{x^2-1}.$$

$$\textcircled{22} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt[4]{7x+2}}{x-2}.$$

$$\textcircled{24} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}.$$

$$\textcircled{26} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{8+3x} - 4}{x^2+x}.$$

$$\textcircled{28} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

$$\textcircled{30} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x-1} - 3x+1}{x^2-2x+1}.$$

$$\textcircled{32} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{\sqrt{2x^2+8} - 2\sqrt{2x-3} + x-4}.$$

$$\textcircled{34} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2-6x+5} - \sqrt[3]{3x^2-9x+7}}{(x-2)^2}.$$

$$\textcircled{36} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x^2}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x} + \frac{\sqrt{x+16}-4}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)} + \frac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{x(\sqrt{x+16}+4)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} + \frac{x+16-16}{x(\sqrt{x+16}+4)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)} + \frac{x}{x(\sqrt{x+16}+4)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+16}+4} \right) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}.
 \end{aligned}$$

② $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1} + \frac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{2x+2}-2)(\sqrt{2x+2}+2)}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} + \frac{(\sqrt{5x+4}-3)(\sqrt{5x+4}+3)}{(x-1)(\sqrt{5x+4}+3)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+2-4}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} + \frac{5x+4-9}{(x-1)(\sqrt{5x+4}+3)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} + \frac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x+4}+3)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt{2x+2}+2} + \frac{5}{\sqrt{5x+4}+3} \right) \\
 &= \frac{2}{4} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

③ $I = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+6} + \sqrt{2x-2} - 8}{x-3}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2\sqrt{x+6}-6}{x-3} + \frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} + \frac{(\sqrt{2x-2}-2)(\sqrt{2x-2}+2)}{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2(x+6-9)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} + \frac{2x-2-4}{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} + \frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2}+2} \right) \\
 &= \frac{2}{6} + \frac{2}{4} = \frac{5}{6}.
 \end{aligned}$$

④ $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - 4}{x}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{x+1}-2}{x} + \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} + \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2(x+1-1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} + \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

⑤ $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} - 7}{x-2}.$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+2} - 4 + \sqrt{x+7} - 3}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{x+2} + \frac{2\sqrt{x+2} - 4}{x-2} + \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2} \right) \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} + \frac{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)}{(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} \right) \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2(x+2-4)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} + \frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} \right) \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{\sqrt{x+2} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} \right) \\ &= 2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

⑥ $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x-1} + x^2 - 8}{x-2}.$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} - 4 + x^2 - 4}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(2\sqrt{x-1} + \frac{4\sqrt{x-1} - 4}{x-2} + \frac{x^2 - 4}{x-2} \right) \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} + \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \right) \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4(x-1-1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} + (x+2) \right) \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{\sqrt{x-1} + 1} + x + 2 \right) \\ &= 2 + \frac{4}{2} + 4 = 8. \end{aligned}$$

⑦ $I = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-4)\sqrt{2x-3} + x - 84}{x-6}.$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(5x-30)\sqrt{2x-3} + 26\sqrt{2x-3} - 78 + x - 6}{x-6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{5(x-6)\sqrt{2x-3}}{x-6} + \frac{26(\sqrt{2x-3} - 3)}{x-6} + \frac{x-6}{x-6} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \left(5\sqrt{2x-3} + \frac{26(\sqrt{2x-3} - 3)(\sqrt{2x-3} + 3)}{(x-6)(\sqrt{2x-3} + 3)} + 1 \right) \\ &= 15 + \lim_{x \rightarrow 6} \frac{26(2x-3-9)}{(x-6)(\sqrt{2x-3} + 3)} + 1 \\ &= 15 + \lim_{x \rightarrow 6} \frac{26 \cdot 2(x-6)}{(x-6)(\sqrt{2x-3} + 3)} + 1 \\ &= 15 + \lim_{x \rightarrow 6} \frac{52}{\sqrt{2x-3} + 3} + 1 \\ &= 15 + \frac{52}{6} + 1 = \frac{74}{3}. \end{aligned}$$

⑧ $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}$.
Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1+3x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt[3]{1+3x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sqrt{1+2x} - 1)(\sqrt{1+2x} + 1)}{x(\sqrt{1+2x} + 1)} + \frac{(1 - \sqrt[3]{1+3x})(1^2 + 1 \cdot \sqrt[3]{1+3x} + (\sqrt[3]{1+3x})^2)}{x(1^2 + 1 \cdot \sqrt[3]{1+3x} + (\sqrt[3]{1+3x})^2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2x - 1}{x(\sqrt{1+2x} + 1)} + \frac{1 - (1 + 3x)}{x(1^2 + 1 \cdot \sqrt[3]{1+3x} + (\sqrt[3]{1+3x})^2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{1+2x} + 1} + \frac{-3}{1 + \sqrt[3]{1+3x} + (\sqrt[3]{1+3x})^2} \right) \\ &= \frac{2}{2} + \frac{-3}{3} = 0. \end{aligned}$$

⑨ $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7} - \sqrt{x^2+3}}{x-1}$.
Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7} - 2 + 2 - \sqrt{x^2+3}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x^3+7} - 2}{x-1} + \frac{2 - \sqrt{x^2+3}}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt[3]{x^3+7} - 2)((\sqrt[3]{x^3+7})^2 + \sqrt[3]{x^3+7} \cdot 2 + 2^2)}{(x-1)((\sqrt[3]{x^3+7})^2 + \sqrt[3]{x^3+7} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{(2 - \sqrt{x^2+3})(2 + \sqrt{x^2+3})}{(x-1)(2 + \sqrt{x^2+3})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 7 - 8}{(x-1)((\sqrt[3]{x^3+7})^2 + \sqrt[3]{x^3+7} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{4 - (x^2 + 3)}{(x-1)(2 + \sqrt{x^2+3})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{(x-1)((\sqrt[3]{x^3+7})^2 + \sqrt[3]{x^3+7} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{1 - x^2}{(x-1)(2 + \sqrt{x^2+3})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)((\sqrt[3]{x^3+7})^2 + \sqrt[3]{x^3+7} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(2 + \sqrt{x^2+3})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{(\sqrt[3]{x^3+7})^2 + 2\sqrt[3]{x^3+7} + 4} - \frac{1+x}{2 + \sqrt{x^2+3}} \right) \\ &= \frac{3}{12} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

⑩ $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3 + 3 - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(\sqrt[3]{8x+11}-3) \left((\sqrt[3]{8x+11})^2 + \sqrt[3]{8x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)}{(x^2-3x+2) \left((\sqrt[3]{8x+11})^2 + \sqrt[3]{8x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)} + \frac{(3-\sqrt{x+7})(3+\sqrt{x+7})}{(x^2-3x+2)(3+\sqrt{x+7})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{8x+11-27}{(x^2-3x+2) \left((\sqrt[3]{8x+11})^2 + \sqrt[3]{8x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)} + \frac{9-(x+7)}{(x^2-3x+2)(3+\sqrt{x+7})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{8(x-2)}{(x-1)(x-2) \left((\sqrt[3]{8x+11})^2 + \sqrt[3]{8x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)} + \frac{2-x}{(x-1)(x-2)(3+\sqrt{x+7})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{8}{(x-1) \left((\sqrt[3]{8x+11})^2 + \sqrt[3]{8x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)} - \frac{1}{(x-1)(3+\sqrt{x+7})} \right) \\
 &= \frac{8}{27} - \frac{1}{6} = \frac{7}{54}.
 \end{aligned}$$

⑪ $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 2 + 2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{1+x} - 2}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} + \frac{(2-\sqrt[3]{8-x})(2^2+2\cdot\sqrt[3]{8-x}+(\sqrt[3]{8-x})^2)}{x(2^2+2\cdot\sqrt[3]{8-x}+(\sqrt[3]{8-x})^2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2(1+x-1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} + \frac{8-(8-x)}{x(2^2+2\cdot\sqrt[3]{8-x}+(\sqrt[3]{8-x})^2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{4+2\cdot\sqrt[3]{8-x}+(\sqrt[3]{8-x})^2} \right) \\
 &= \frac{2}{2} + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}.
 \end{aligned}$$

⑫ $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x^2+5} - \sqrt{x+3}}{x-1}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x^2+5} - 2 + 2 - \sqrt{x+3}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{3x^2+5} - 2}{x-1} + \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x-1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt[3]{3x^2+5}-2) \left((\sqrt[3]{3x^2+5})^2 + \sqrt[3]{3x^2+5} \cdot 2 + 2^2 \right)}{(x-1) \left((\sqrt[3]{3x^2+5})^2 + \sqrt[3]{3x^2+5} \cdot 2 + 2^2 \right)} + \frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x^2+5-8}{(x-1) \left((\sqrt[3]{3x^2+5})^2 + \sqrt[3]{3x^2+5} \cdot 2 + 2^2 \right)} + \frac{4-(x+3)}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1) \left((\sqrt[3]{3x^2+5})^2 + \sqrt[3]{3x^2+5} \cdot 2 + 2^2 \right)} + \frac{1-x}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3(x+1)}{(\sqrt[3]{3x^2+5})^2 + \sqrt[3]{3x^2+5} \cdot 2 + 2^2} - \frac{1}{2+\sqrt{x+3}} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{6}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

⑬ $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}.$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2 + 2 - \sqrt{5-x^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} + \frac{2 - \sqrt{5-x^2}}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt[3]{x+7} - 2)((\sqrt[3]{x+7})^2 + \sqrt[3]{x+7} \cdot 2 + 2^2)}{(x-1)((\sqrt[3]{x+7})^2 + \sqrt[3]{x+7} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{(2 - \sqrt{5-x^2})(2 + \sqrt{5-x^2})}{(x-1)(2 + \sqrt{5-x^2})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+7-8}{(x-1)((\sqrt[3]{x+7})^2 + \sqrt[3]{x+7} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{4 - (5-x^2)}{(x-1)(2 + \sqrt{5-x^2})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)((\sqrt[3]{x+7})^2 + \sqrt[3]{x+7} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2 + \sqrt{5-x^2})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{x+7})^2 + \sqrt[3]{x+7} \cdot 2 + 2^2} + \frac{x+1}{2 + \sqrt{5-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{2}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

⑭ $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}.$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2 + 2 - \sqrt{3x-2}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} + \frac{2 - \sqrt{3x-2}}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(\sqrt[3]{3x+2} - 2)((\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2)}{(x-2)((\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{(2 - \sqrt{3x-2})(2 + \sqrt{3x-2})}{(x-2)(2 + \sqrt{3x-2})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x+2-8}{(x-2)((\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{4 - (3x-2)}{(x-2)(2 + \sqrt{3x-2})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3(x-2)}{(x-2)((\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2)} + \frac{3(2-x)}{(x-2)(2 + \sqrt{3x-2})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{(\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2} + \frac{-3}{2 + \sqrt{3x-2}} \right) \\ &= \frac{3}{12} + \frac{-3}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

⑮ $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{5x-6}}{x-2}.$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2 + 2 - \sqrt{5x-6}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} + \frac{2 - \sqrt{5x-6}}{x-2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(\sqrt[3]{3x+2}-2) \left((\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2 \right)}{(x-2) \left((\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2 \right)} + \frac{(2-\sqrt{5x-6})(2+\sqrt{5x-6})}{(x-2)(2+\sqrt{5x-6})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x+2-8}{(x-2) \left((\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2 \right)} + \frac{4-(5x-6)}{(x-2)(2+\sqrt{5x-6})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3(x-2)}{(x-2) \left((\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2 \right)} + \frac{5(2-x)}{(x-2)(2+\sqrt{5x-6})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{(\sqrt[3]{3x+2})^2 + \sqrt[3]{3x+2} \cdot 2 + 2^2} + \frac{-5}{2+\sqrt{5x-6}} \right) \\
 &= \frac{3}{12} + \frac{-5}{4} = -1.
 \end{aligned}$$

⑩ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-4}.$
Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - 3 + 3 - \sqrt{x+7}}{x^2-4} \\
 I &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11} - 3}{x^2-4} + \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x^2-4} \right) \\
 I &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-3) \left((\sqrt[3]{2x^2+4x+11})^2 + \sqrt[3]{2x^2+4x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)}{(x^2-4) \left((\sqrt[3]{2x^2+4x+11})^2 + \sqrt[3]{2x^2+4x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)} + \frac{(3-\sqrt{x+7})(3+\sqrt{x+7})}{(x^2-4)(3+\sqrt{x+7})} \right) \\
 I &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2+4x+11-27}{(x^2-4) \left((\sqrt[3]{2x^2+4x+11})^2 + \sqrt[3]{2x^2+4x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)} + \frac{9-(x+7)}{(x^2-4)(3+\sqrt{x+7})} \right) \\
 I &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2+4x-16}{(x^2-4) \left((\sqrt[3]{2x^2+4x+11})^2 + \sqrt[3]{2x^2+4x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)} + \frac{2-x}{(x^2-4)(3+\sqrt{x+7})} \right) \\
 I &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2) \left((\sqrt[3]{2x^2+4x+11})^2 + \sqrt[3]{2x^2+4x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)} + \frac{2-x}{(x-2)(x+2)(3+\sqrt{x+7})} \right) \\
 I &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2(x+4)}{(x+2) \left((\sqrt[3]{2x^2+4x+11})^2 + \sqrt[3]{2x^2+4x+11} \cdot 3 + 3^2 \right)} + \frac{-1}{(x+2)(3+\sqrt{x+7})} \right) \\
 I &= \frac{12}{108} + \frac{-1}{24} = \frac{5}{72}.
 \end{aligned}$$

⑪ $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}.$
Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - 2 + 2 - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5-x^3} - 2}{x^2-1} + \frac{2 - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{5-x^3}-2)(\sqrt{5-x^3}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3}+2)} + \frac{(2-\sqrt[3]{x^2+7})(2^2+2 \cdot \sqrt[3]{x^2+7} + (\sqrt[3]{x^2+7})^2)}{(x^2-1)(2^2+2 \cdot \sqrt[3]{x^2+7} + (\sqrt[3]{x^2+7})^2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5-x^3-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{5-x^3}+2)} + \frac{8-(x^2+7)}{(x-1)(x+1)(2^2+2 \cdot \sqrt[3]{x^2+7} + (\sqrt[3]{x^2+7})^2)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{5-x^3}+2)} + \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x+1)(2^2+2 \cdot \sqrt[3]{x^2+7} + (\sqrt[3]{x^2+7})^2)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-(1+x+x^2)}{(x+1)(\sqrt{5-x^3}+2)} + \frac{-1}{2^2+2 \cdot \sqrt[3]{x^2+7} + (\sqrt[3]{x^2+7})^2} \right) \\
 &= \frac{-3}{8} + \frac{-1}{12} = -\frac{11}{24}.
 \end{aligned}$$

⑮ $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} + \sqrt{x+2} - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}.$

Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} - 6 + \sqrt{x+2} - 2 + 8 - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2} \\
 &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} - 6}{4-x^2}}_{I_1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{4-x^2}}_{I_2} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}}_{I_3} \\
 I_1 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3-24} - 6}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(\sqrt[3]{4x^3-24} - 2)(\sqrt[3]{4x^3-24}^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2)}{(4-x^2)((\sqrt[3]{4x^3-24})^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(4x^3 - 24 - 8)}{(4-x^2)((\sqrt[3]{4x^3-24})^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \cdot 4(x^3 - 8)}{(4-x^2)((\sqrt[3]{4x^3-24})^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12(x-2)(x^2+2x+4)}{(2-x)(2+x)((\sqrt[3]{4x^3-24})^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-12(x^2+2x+4)}{(2+x)((\sqrt[3]{4x^3-24})^2 + \sqrt[3]{4x^3-24} \cdot 2 + 2^2)} = \frac{-144}{48} = -3. \\
 I_2 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(4-x^2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)}{(2-x)(2+x)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(2+x)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{-1}{16}. \\
 I_3 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8(1 - \sqrt{2x-3})(1 + \sqrt{2x-3})}{(4-x^2)(1 + \sqrt{2x-3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8(1 - (2x-3))}{(2-x)(2+x)(1 + \sqrt{2x-3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 \cdot 2(2-x)}{(2-x)(2+x)(1 + \sqrt{2x-3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{16}{(2+x)(1 + \sqrt{2x-3})} = \frac{16}{8} = 2. \\
 \Rightarrow I &= -3 - \frac{1}{16} + 2 = -\frac{17}{16}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 5. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x).$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2).$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 6x^2 + 9x + 1).$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x - 1).$

⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1).$

⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 8x^2 + 10).$

⑦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 2x^2 + 3).$

⑧ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - x^2 + 6).$

⑨ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$

⑩ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x).$

⑪ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x).$

⑫ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - x).$

⑬ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{9x+1}).$

⑭ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3}).$

Lời giải.

① $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x).$

Ta có

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(2 - \frac{3}{x^2} \right) = +\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{x^2} \right) = 2 > 0 \right).$$

② $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2).$

Ta có

$$I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = 1 > 0 \right).$$

③ $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 6x^2 + 9x + 1).$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0 \right).$$

④ $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x - 1).$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = +\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0 \right).$$

⑤ $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1).$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = 1 > 0 \right).$$

⑥ $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 8x^2 + 10).$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{8}{x^2} + \frac{10}{x^4} \right) = +\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{8}{x^2} + \frac{10}{x^4} \right) = 1 > 0 \right).$$

⑦ $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 2x^2 + 3).$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) = -\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) = -1 < 0 \right).$$

⑧ $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - x^2 + 6).$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(-1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} \right) = -\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} \right) = -1 < 0 \right).$$

⑨ $I = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = +\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = 1 > 0 \right).$$

$$\textcircled{10} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = 1 - \sqrt{2} < 0 \right).$$

$$\textcircled{11} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right) = -\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right) = 1 > 0 \right).$$

$$\textcircled{12} \quad I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = +\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = 1 > 0 \right).$$

$$\textcircled{13} \quad I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{9x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{9 + \frac{1}{x}} \right) = -\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{9 + \frac{1}{x}} \right) = -2 < 0 \right).$$

$$\textcircled{14} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3}).$$

Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3}$ là $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{3}; +\infty \right)$.

Ta có, khi $x \rightarrow -\infty$ hàm số $f(x) = \sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3}$ không xác định. Do đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16x+7} + \sqrt{9x+3})$ không tồn tại.

□

BÀI 6. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{2x-1}.$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1}.$$

$$\textcircled{7} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1}.$$

$$\textcircled{9} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2(5x+2)^2}{(3x+1)^4}.$$

$$\textcircled{11} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+2)^2(x+2)}{(2x^2+1)(1-x)^2}.$$

$$\textcircled{13} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right).$$

$$\textcircled{15} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x + 2}{2x^4 + x + 3}.$$

$$\textcircled{17} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4x^2+1)(2x+3)}{x^2-6x+1}.$$

$$\textcircled{19} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^3 + x + 2}{2x^3 + x + 3}.$$

$$\textcircled{21} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 11}{2x - 7}.$$

$$\textcircled{23} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x}.$$

$$\textcircled{25} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{2x + 1}.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1}.$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x+1}.$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x(2x^2-1)}{(5x-1)(x^2+2x)}.$$

$$\textcircled{8} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2+1)(7x-1)}{(2x^3-1)(x+3)}.$$

$$\textcircled{10} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^4(1-2x)^3}{(2x+2)^5(x^2+3)}.$$

$$\textcircled{12} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)^3(1-x)^4}{(1-2x)^5x^2}.$$

$$\textcircled{14} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1}.$$

$$\textcircled{16} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2+1)(7x-1)}{(2x^3-1)(x+3)}.$$

$$\textcircled{18} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x + 2}{2x^2 + x + 3}.$$

$$\textcircled{20} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x^3 + x + 2}{2x^2 - x^3}.$$

$$\textcircled{22} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x}.$$

$$\textcircled{24} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2x^5 + x^3 - 1}{(2x^2 - 1)(x^3 + x)}}.$$

$$\textcircled{26} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

$$\textcircled{2} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

$$\textcircled{3} \quad I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{4} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3.$$

$$\textcircled{5} \quad I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}{x^3 \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = -2.$$

$$\textcircled{6} \quad I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x(2x^2 - 1)}{(5x - 1)(x^2 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \cdot x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(5 - \frac{1}{x}\right) \cdot x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(5 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{6}{5}.$$

$$\textcircled{7} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \frac{7}{x} - \frac{15}{x^4}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{7}{x} - \frac{15}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^4}} = 2.$$

$$\textcircled{8} \quad I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2 + 1)(7x - 1)}{(2x^3 - 1)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot x \left(7 - \frac{1}{x}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right) \cdot x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{x^2}\right) \left(7 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(2 - \frac{1}{x^3}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = 0.$$

$$\textcircled{9} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2(5x+2)^2}{(3x+1)^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot x^2 \left(5 + \frac{2}{x}\right)^2}{x^4 \left(3 + \frac{1}{x}\right)^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(5 + \frac{2}{x}\right)^2}{\left(3 + \frac{1}{x}\right)^4} = \frac{25}{81}.$$

$$\textcircled{10} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^4(1-2x)^3}{(2x+2)^5(x^2+3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 \cdot x^3 \left(\frac{1}{x} - 2\right)^3}{x^5 \left(2 + \frac{2}{x}\right)^5 \cdot x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 \left(\frac{1}{x} - 2\right)^3}{\left(2 + \frac{2}{x}\right)^5 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = -\frac{1}{4}.$$

$$\textcircled{11} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+2)^2(x+2)}{(2x^2+1)(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^2 \cdot x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2 \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\left(2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} =$$

$$-\infty.$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\left(2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} = \frac{1}{2} > 0 \right).$$

$$\textcircled{12} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)^3(1-x)^4}{(1-2x)^5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{2}{x}\right)^3 x^4 \left(\frac{1}{x} - 1\right)^4}{x^5 \left(\frac{1}{x} - 2\right)^5 x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^3 \left(\frac{1}{x} - 1\right)^4}{\left(\frac{1}{x} - 2\right)^5} = -\frac{1}{32}.$$

$$\textcircled{13} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right).$$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(3x + 2) - x^2(3x^2 - 4)}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{4}{x}\right)}{x^2 \left(3 - \frac{4}{x^2}\right) \cdot x \left(3 + \frac{2}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\left(3 - \frac{4}{x^2}\right) \left(3 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{14} \quad I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} = 0.$$

□

BÀI 7. Tính các giới hạn sau

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - x}{3 - x}.$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 5}{(x - 4)^2}.$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x + 1}{x - 2}.$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1}{x - 1}.$$

$$\textcircled{7} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6 - 5x}{4x - 8}.$$

$$\textcircled{8} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{2x - 4}.$$

$$\textcircled{9} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x - 3|}{5x - 15}.$$

$$\textcircled{10} \quad \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{7x - 1}{|x + 3|}.$$

$$\textcircled{11} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}.$$

$$\textcircled{12} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - 1|}{2x^3 + x - 3}.$$

$$\textcircled{13} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{2x^3 + x - 3}.$$

$$\textcircled{14} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x - 2}.$$

$$\textcircled{15} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3}.$$

$$\textcircled{16} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{|x^2 + x - 20|}.$$

$$\textcircled{17} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{\sqrt{x - 1} - 1}.$$

$$\textcircled{18} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x - 3|}{\sqrt{5x - 11} - 2}.$$

$$\textcircled{19} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{\sqrt[3]{x - 1} - 1}.$$

$$\textcircled{20} \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 - 25|}{\sqrt[3]{x - 4} - 1}.$$

$$\textcircled{21} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x - 8}{(3 - x)^2}.$$

$$\textcircled{22} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x + 25} - 3}{x^2 - x - 2}.$$

$$\textcircled{23} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 2}{\sqrt{4x^2 - 16}}.$$

$$\textcircled{24} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{25} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2 - x}}.$$

$$\textcircled{26} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{27} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x+2)(x+1)}}{\sqrt{x+1} - x - 1}.$$

$$\textcircled{28} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - 9}.$$

$$\textcircled{29} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{-x^2 + 6x - 5}.$$

$$\textcircled{30} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}}.$$

$$\textcircled{31} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}.$$

$$\textcircled{32} \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}.$$

$$\textcircled{33} \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) \sqrt{\frac{x + 5}{x^2 + 2x - 3}}.$$

$$\textcircled{34} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} + 1 - x}.$$

$$\textcircled{35} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right).$$

$$\textcircled{36} \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}.$$

$$\textcircled{37} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right).$$

$$\textcircled{38} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0 \\ x - 1 > 0, \forall x \rightarrow 1^+. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2} = -\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 15) = -13 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \\ x - 2 > 0, \forall x \rightarrow 2^+. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - x}{3 - x} = +\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (2 - x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - x) = 0 \\ 3 - x > 0, \forall x \rightarrow 3^-. \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 5}{(x - 4)^2} = -\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 5) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 4)^2 = 0 \\ (x - 4)^2 > 0, \forall x \rightarrow 4^-. \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x + 1}{x - 2} = +\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x + 1) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0 \\ x - 2 < 0, \forall x \rightarrow 2^-. \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1}{x - 1} = -\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0 \\ x - 1 < 0, \forall x \rightarrow 1^-. \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6 - 5x}{4x - 8} = -\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (6 - 5x) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x - 8) = 0 \\ 4x - 8 > 0, \forall x \rightarrow 2^+. \end{cases}$$

$$\textcircled{8} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2x-4} = +\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4) = 0 \\ 2x-4 > 0, \forall x \rightarrow 2^+. \end{cases}$$

$\textcircled{9}$ Do $x \rightarrow 3^+$ nên $|x-3| = x-3$, suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{5x-15} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{5(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

$$\textcircled{10} \quad \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{7x-1}{|x+3|} = -\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-3)^-} (7x-1) = -22 \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^-} (|x+3|) = 0 \\ |x+3| > 0, \forall x \rightarrow (-3)^-. \end{cases}$$

$\textcircled{11}$ Do $x \rightarrow 2^-$ nên $|2-x| = 2-x$, suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(2x^2-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{3}.$$

$\textcircled{12}$ Do $x \rightarrow 1^+$ nên $|x-1| = x-1$, suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{2x^3+x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(2x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2x^2+2x+3} = \frac{1}{7}.$$

$\textcircled{13}$ Do $x \rightarrow 1^-$ nên $|x-1| = 1-x$, suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{2x^3+x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(x-1)(2x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{2x^2+2x+3} = -\frac{1}{7}.$$

$\textcircled{14}$ Ta có $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, do $x \rightarrow 2^+$ nên $x^2-3x+2 > 0$, suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2-3x+2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1.$$

$$\textcircled{15} \quad \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-9|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|(x-3)(x+3)|}{x-3}.$$

— **TH1:** $x > 3$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x^2-9|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3) = 6.$$

— **TH2:** $x < 3$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2-9|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} -(x+3) = -6.$$

Do $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x^2-9|}{x-3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2-9|}{x-3}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-9|}{x-3}$.

$$\textcircled{16} \quad \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|x^2+x-20|} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|(x-4)(x+5)|}.$$

— **TH1:** $x > 4$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{|x^2+x-20|} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{(x-4)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{9}.$$

— **TH2:** $x < 4$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{|x^2+x-20|} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{(x-4)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{x+5} = -\frac{1}{9}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{|x^2+x-20|} \neq \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{|x^2+x-20|}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|x^2+x-20|}$.

(17) Do $x \rightarrow 2^-$ nên $|x-2| = 2-x$, suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-1-1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{x-1}+1) = 2.$$

(18) Do $x \rightarrow 3^-$ nên $|x-3| = 3-x$, suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{\sqrt{5x-11}-2} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3-x)(\sqrt{5x-11}+2)}{5x-11-4} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(\sqrt{5x-11}+2)}{5} = -\frac{4}{5}.$$

(19) Do $x \rightarrow 2^-$ nên $|x-2| = 2-x$, suy ra

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{\sqrt[3]{x-1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)((\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1} + 1)}{x-1-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-(\sqrt[3]{x-1})^2 + \sqrt[3]{x-1} + 1 \right) = -3. \end{aligned}$$

(20) Ta có $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$, do $x \rightarrow 5^-$ nên $x^2 - 25 < 0$, suy ra

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2-25|}{\sqrt[3]{x-4}-1} &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(25-x^2)((\sqrt[3]{x-4})^2 + \sqrt[3]{x-4} + 1)}{x-4-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \left(-(5+x)((\sqrt[3]{x-4})^2 + \sqrt[3]{x-4} + 1) \right) = -30. \end{aligned}$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x-8}{(3-x)^2} = +\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x-8) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (3-x)^2 = 0 \\ (3-x)^2 > 0, \forall x \rightarrow 3^+. \end{cases}$$

(22) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+25}-3}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+25-27}{((\sqrt[3]{x+25})^2 + 3\sqrt[3]{x+25} + 9)(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{((\sqrt[3]{x+25})^2 + 3\sqrt[3]{x+25} + 9)(x+1)} = \frac{1}{81}. \end{aligned}$$

$$(23) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+2}{\sqrt{4x^2-16}} = +\infty, \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x+2) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4x^2-16} = 0 \\ \sqrt{4x^2-16} > 0, \forall x \rightarrow 2^+. \end{cases}$$

$$(24) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = -1.$$

$$(25) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{2-x}(2+x)) = 0.$$

$$(26) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = -2.$$

(27) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x+2)(x+1)}}{\sqrt{x+1}-x-1} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}(1-\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+1}} = 1. \end{aligned}$$

- (28) Ta có $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$, do $x \rightarrow 3^-$ nên $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3 - x$, suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - x}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x + 3} = -\frac{1}{6}.$$

- (29) Do $x \rightarrow 1^-$ nên $x - 1 < 0$, từ đó ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{-x^2 + 6x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x - 1)(x - 3)}}{-(x - 1)(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1 - x}\sqrt{3 - x}}{-(x - 1)(x - 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{3 - x}}{\sqrt{1 - x}(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{\sqrt{3 - x}}{x - 5} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

$$\forall \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{3 - x}}{x - 5} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x}} \right) = +\infty.$$

- (30) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x + 2)}{x^2 \sqrt{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x + 1}(x + 2)}{x^2} = 0.$

- (31) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \sqrt{\frac{x}{(x - 2)(x + 2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x(x - 2)}{x + 2}} = 0.$

- (32) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1)(x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{(x - 1)(x + 1)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x(x + 1)}{x - 1}} = 0 \end{aligned}$$

- (33) Do $x \rightarrow 1^+$ nên $1 - x < 0$, vì thế ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) \sqrt{\frac{x + 5}{x^2 + 2x - 3}} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\sqrt{\frac{(x + 5)(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 3)}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\sqrt{\frac{(x + 5)(x - 1)}{x + 3}} \right) = 0 \end{aligned}$$

- (34) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1 - x}}{2\sqrt{1 - x} + 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x}(2 + \sqrt{1 - x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{2 + \sqrt{1 - x}} = \frac{1}{2}.$

- (35) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x \sqrt{\frac{1 - x}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \sqrt{\frac{x^2(1 - x)}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x(1 - x)}) = 0.$

- (36) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(2x - 1)(x + 3)}{(x + 3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x - 1}{x + 3} = -\infty.$
 Vì $\lim_{x \rightarrow -3^+} (2x - 1) = -7$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} (x + 3) = 0$ và $x + 3 > 0, \forall x \rightarrow -3^+.$

- (37) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x + 2 - 1}{(x - 2)(x + 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x + 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2} \right) = -\infty.$
 Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{3}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty.$

- (38) Do $x \rightarrow 1^-$ nên $x - 1 < 0$, suy ra $\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| = 1 - x$, nên ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x + 2)(x - 1)^2}}{(x - 1)(x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - x)\sqrt{x + 2}}{(x - 1)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sqrt{x + 2}}{x + 4} = -\frac{\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

□

BÀI 11. Tính các giới hạn sau

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}.$

⑦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{1 - \cos ax}, a \neq 0.$

⑨ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}; (a \neq 0).$

⑪ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$

⑬ $\lim_{x \rightarrow b} \frac{\cos x - \cos b}{x - b}.$

⑮ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}.$

⑰ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}.$

⑲ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}.$

⑳ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$

㉑ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + \tan bx}{(a+b)x}; (a+b \neq 0).$

㉓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{x^2}.$

㉕ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}.$

㉗ $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x + \frac{\pi}{2}}.$

㉙ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2}.$

㉛ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x \cos 7x}{\sin^2 11x}.$

㉝ $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}.$

㉟ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \cos 2x}{x^2}.$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}.$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \sin x}{45x^3}.$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}.$

⑧ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}.$

⑩ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$

⑫ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$

⑭ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin 2x}.$

⑯ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\tan x - \tan c}{x - c}.$

⑰ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}.$

⑲ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\tan(x+2)}.$

㉑ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$

㉓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x \cos 7x}{x^2}.$

㉕ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\tan(a+x) - \tan(a-x)}.$

㉗ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x - \sin x \cdot \sin 4x}{x^4}.$

㉙ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}.$

㉛ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$

㉝ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\tan(x-1)}.$

㉟ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3}.$

㉟ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$

Lời giải.

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}\right) = 5.$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\tan 2x}{2x}\right) = \frac{2}{3}.$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right) = \frac{1}{2}.$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \sin x}{45x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{2 \sin^2 \frac{3x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{25}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{\frac{3x}{2}}{\sin \frac{3x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{25}{9}.$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x \cos^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 4.$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{1 - \cos ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{2 \sin^2 \frac{ax}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{4}{a^2} \cdot \left(\frac{\frac{ax}{2}}{\sin \frac{ax}{2}} \right)^2 \right) = \frac{2}{a}.$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2 \cdot \frac{4}{b^2} \cdot \left(\frac{\frac{bx}{2}}{\sin \frac{bx}{2}} \right)^2 \right) = \frac{a^2}{b^2}.$$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2 \right) = \frac{a^2}{2}.$$

$\textcircled{10}$ Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^3 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{11} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x \sin x (1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} = \frac{1}{2}.$$

$\textcircled{12}$ Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \right) = \cos a. \end{aligned}$$

$\textcircled{13}$ Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} \frac{\cos x - \cos b}{x - b} &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{-2 \sin \frac{x+b}{2} \sin \frac{x-b}{2}}{x - b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \left(-\sin \frac{x+b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-b}{2}}{\frac{x-b}{2}} \right) = -\sin b. \end{aligned}$$

$\textcircled{14}$ Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - 1}{\sin 2x (1 + \sqrt{2x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1 + \sqrt{2x+1}} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

15 Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{a+x+a-x}{2} \sin \frac{a+x-a-x}{2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \sin a \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = -2 \sin a. \end{aligned}$$

16 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\tan x - \tan c}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin(x-c)}{(x-c) \cos x \cos c} = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{\sin(x-c)}{(x-c)} \cdot \frac{1}{\cos x \cos c} \right) = \frac{1}{\cos^2 c}.$

17 Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

18 Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 2a}{2}}{(x-a)(x+a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos 2a - \cos 2x}{2(x-a)(x+a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin(a+x) \sin(a-x)}{2(x-a)(x+a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin(a+x)}{x+a} \cdot \frac{\sin(a-x)}{a-x} \right) = \frac{\sin 2a}{2a}. \end{aligned}$$

19 Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{(\alpha + \beta)x}{2} \sin \frac{(\alpha - \beta)x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\alpha + \beta)x}{2}}{\frac{(\alpha + \beta)x}{2}} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\alpha - \beta)x}{2}}{\frac{(\alpha - \beta)x}{2}} \right) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}. \end{aligned}$$

20 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\tan(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{\tan(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \left((x^2 - 2x + 4) \cdot \frac{(x+2)}{\tan(x+2)} \right) = 12.$

21 Ta có

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cos 2x(1 - \cos 3x)}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \cos x \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + \cos x \cos 2x \frac{2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 4 \cos x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + 9 \cos x \cos 2x \left(\frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \right)^2 \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \right) \\ &= 1 + 4 + 9 = 14. \end{aligned}$$

22 Ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+x)\cos x - 2\sin(a+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+x)(\cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\sin(a+x)\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-4\sin(a+x) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = -\sin a. \end{aligned}$$

23 Ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + \tan bx}{(a+b)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \cdot \frac{\sin ax}{ax} + bx \cdot \frac{\tan bx}{bx}}{(a+b)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \frac{\sin ax}{ax} + b \cdot \frac{\tan bx}{bx}}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1. \end{aligned}$$

24 Ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x \cos 7x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x + \cos 5x - \cos 5x \cos 7x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 4x \sin x + \cos 5x(1 - \cos 7x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 4x \sin x - 2\cos 5x \sin^2 \frac{7x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(8 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{\sin x}{x} - 2 \cdot \frac{49}{4} \cdot \cos 5x \cdot \left(\frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \right)^2 \right) = 8 - \frac{49}{2} = -\frac{33}{2}. \end{aligned}$$

25 Ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx + \cos bx - \cos bx \cos cx}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{(a+b)x}{2} \sin \frac{(b-a)x}{2} + \cos bx(1 - \cos cx)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{(a+b)x}{2} \sin \frac{(b-a)x}{2} - 2\cos bx \sin^2 \frac{cx}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{b^2 - a^2}{4} \cdot \frac{\sin \frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}} - 2 \cdot \frac{c^2}{4} \cdot \cos bx \cdot \left(\frac{\sin \frac{cx}{2}}{\frac{cx}{2}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{c^2}{2} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2}. \end{aligned}$$

26 Ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\tan(a+x) - \tan(a-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos a \sin x}{\frac{\sin 2x}{\cos(a+x)\cos(a-x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos a \cos(a+x) \cos(a-x)}{\cos x} = \cos^3 a. \end{aligned}$$

27) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1 + 1 - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{-x^2}{1 + \sqrt[3]{x^2+1} + (\sqrt[3]{x^2+1})^2}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} - \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x^2+1} + (\sqrt[3]{x^2+1})^2}}{\frac{\sin x}{x}} = 1. \end{aligned}$$

28) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x - \sin x \cdot \sin 4x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(\sin 2x - 2 \sin x \cos 2x)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x (\cos x - \cos 2x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x \sin x \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = 6. \end{aligned}$$

29) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x + \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{x + \frac{\pi}{2}} = 1.$

30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - 2 \cos x)}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - 2 \cos x}{\cos x} \right) = -1.$

31) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 + 1 - \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

32) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - 1 - \sin x}{x^3 (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\cos x (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

33) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x \cos 7x}{\sin^2 11x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x + \cos 5x(1 - \cos 7x)}{\sin^2 11x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{\sin^2 11x} + \frac{2 \cos 5x \sin^2 \frac{7x}{2}}{\sin^2 11x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{25}{242} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \right)^2 \left(\frac{11x}{\sin 11x} \right)^2 + \frac{49}{242} \cos 5x \left(\frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{11x}{\sin 11x} \right)^2 \right) \\ &= \frac{25}{242} + \frac{49}{242} = \frac{37}{121}. \end{aligned}$$

34) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\tan(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{\tan(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \cdot \frac{x-1}{\tan(x-1)} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

35) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{(x - \pi)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\pi - x}{2} \right)}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi - x}{2} \right)}{\frac{\pi - x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

36) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x-3} \right) = -\frac{1}{2}.$

37) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \cos 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1 + 1 - \cos 2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1 - 1}{x^2(\sqrt{x^2+1} + 1)} + \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1} + 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

38) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\cos x(1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{\cos x(1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 + \frac{2 \cos x \sin^2 x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 + \frac{2 \cos x}{1 + \sqrt{\cos 2x}} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

□

BÀI 12. Tính các giới hạn sau

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos 5x - \cos x}$

② $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{4 \cos^2 x - 3}$

③ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\cos x}$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan^2 x}$

⑦ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x}$

⑧ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan 2x \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]$

⑨ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 2 \cos 2x + 2}{\sin 3x}$

⑩ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$

Lời giải.

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos 5x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x \sin x}{-2 \sin 3x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}.$

② $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{4 \cos^2 x - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{1 - 4 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 + 2 \sin x} = \frac{1}{2}.$

③ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x + \sin 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \cos x + 2 \sin x) = 2.$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 6x \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 6x = 2.$

⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \right)}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos x \right)}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-4 \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot (1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{(1 + \cos x) \cdot (1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})} = \frac{1}{6}.$

⑦ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{\sin \left(3x - \pi + \pi \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{-\sin \left[3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{x - \frac{\pi}{3}}}{-3 \cdot \frac{\sin \left[3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right]}{3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}} = -\frac{2}{3}.$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan 2x \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan x}{(1 + \tan x)^2} = 1.$$

$\textcircled{9}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 2 \cos 2x + 2}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x + 4 \cos^2 x}{3 \sin x - 4 \sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 3) \cos x}{(2 \sin x + \sqrt{3})(2 \sin x - \sqrt{3}) \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\left(\cos x - \cos \frac{\pi}{3} \right) (2 \cos x + 3) \cos x}{\left(\sin x - \sin \frac{\pi}{3} \right) (2 \sin x + \sqrt{3}) \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) (2 \cos x + 3) \cos x}{\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) (2 \sin x + \sqrt{3}) \sin x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$\textcircled{10}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x - 1) \cos^2 x}{(1 - \tan^2 x) \cdot \left[(\sqrt[3]{\tan x})^2 + \sqrt[3]{\tan x} + 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos^2 x}{(1 + \tan x) \cdot \left[(\sqrt[3]{\tan x})^2 + \sqrt[3]{\tan x} + 1 \right]} \\ &= -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

□

BÀI 13. Tính các giới hạn sau

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\sin 4x}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2 \cos^2 x - 1}$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right)}{1 - 2 \sin x}$$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{1 - \sqrt{2} \sin x}$$

$$\textcircled{10} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x} - \cot x \right)$$

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

— Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

— Hàm số không liên tục tại x_0 gọi là gián đoạn tại x_0 .

2 HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG, TRÊN MỘT ĐOẠN

— Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

— Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Nhận xét. — Nếu hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì các hàm số $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $c \cdot f(x)$ (với c là hằng số) đều liên tục tại điểm x_0 .

— Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức và lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

3 TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

— **Định lý về giá trị trung gian.** Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$, $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ thỏa $f(c) = M$.

— **Ý nghĩa hình học.** Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a)$, $f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $c \in (a; b)$.

— **Hệ quả.** Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$. Ta thường vận dụng theo hai hướng sau:

– Vận dụng chứng minh phương trình có nghiệm: “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$ ”.

– Vận dụng trong tương giao đồ thị: “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a; b)$ ”.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 3.1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp giải

Đề cho	$x = x_0$	$x \neq x_0$	$x < x_0$	$x > x_0$
Cần tính	$f(x_0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Hàm số liên tục tại điểm $x = x_0$ khi $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hoặc $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

1 Ví dụ

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 4 \cdot 2 - 7 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1.$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$. □

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}.$$

Suy ra $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$ (hay gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$). $\square$

VÍ DỤ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 3 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + 3) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - 2x + 3}{(2 - x)(1 + \sqrt{2x - 3})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{1 + \sqrt{2x - 3}} = 1.$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$. $\square$

VÍ DỤ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 1} - 2} & \text{khi } x > 3 \\ 2x + 12 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(3) = 18$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 12) = 18.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x + 1} + 2)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 3)(\sqrt{x + 1} + 2) = 24.$$

Suy ra $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 3$. $\square$

VÍ DỤ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x + 1 - \sqrt{x + 3}}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{3}{4} & \text{khi } x = 1 \\ \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{3x^2 - 14x + 11} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{3}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{3x^2 - 14x + 11} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(3x^2 - 3x - 6)}{(x - 1)(3x - 11)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3x - 6}{3x - 11} = \frac{3}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - \sqrt{x + 3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x + 1)^2 - (x + 3)}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{x + 3})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 2}{x + 1 + \sqrt{x + 3}} = \frac{3}{4}.$$

Suy ra $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$. $\square$

VÍ DỤ 6. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos 8x - 1}{x^4 + x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(0) = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos 8x - 1}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x + \cos 2x - \cos 8x - 1}{x^4 + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{x^2(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{-2}{x^2 + 1} \right] = -2. \end{aligned}$$

Suy ra $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 0$ (hay gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$). $\square$

VÍ DỤ 7. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{1}{8}(a + x) & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có $f(2) = \frac{1}{8}(a + 2)$;

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 4x + 3)}{x(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 3}{x(x+2)} = \frac{15}{8}.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2 \Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{8}(a + 2) = \frac{15}{8} \Leftrightarrow a = 13.$ □

VÍ DỤ 8. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2(x^2 - 4)}{\sqrt{x+2} - x} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{m+2} + m - 10x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có

— $f(2) = \sqrt{m+2} + m - 20.$

— $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x^2 - 4)}{\sqrt{x+2} - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + x)}{x+2 - x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + x)}{-(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+2)(\sqrt{x+2} + x)}{-(x+1)} = -16.$

— $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{m+2} + m - 10x) = \sqrt{m+2} + m - 20.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \sqrt{m+2} + m - 20 = -16$

$\Leftrightarrow \sqrt{m+2} = 4 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m^2 - 9m + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m = 2 \vee m = 7 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$ □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(1) = 4.$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 2) = 4.$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+1) = 4.$

Suy ra $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$. □

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - 2 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 2.$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)(\sqrt{x^2 - 3} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 3} + 1} = 2.$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$. □

BÀI 3. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{\sqrt{2}+7}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+1}+7}{3} = \frac{\sqrt{2}+7}{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x+2} = \frac{4}{3}.$$

Suy ra $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$. □

BÀI 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-x^2+3x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2+3x-1}{x-1} = 1.$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$. □

BÀI 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{-x-1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2+2x & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -1$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(-1) = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (-x-2) = -1.$$

Suy ra $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$. □

BÀI 6. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x > 4 \\ -4x+46 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(4) = 30$.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (-4x+46) = 30.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+1)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x+1)(\sqrt{x+5}+3) = 30.$$

Suy ra $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 4$. □

BÀI 7. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{2x^2-x-6} & \text{khi } x > 2 \\ mx+10 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có:

$$\text{--- } f(2) = 2m + 10.$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (mx+10) = 2m+10.$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-8}{2x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(2x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+2x+4}{2x+3} = \frac{12}{7}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m+10 = \frac{12}{7} \Leftrightarrow m = -\frac{29}{7}$. □

BÀI 8. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có:

$$\text{--- } f(1) = 2m+1;$$

$$\text{---} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x+1} = 0.$$

$$\text{---} \text{Hàm số } f(x) \text{ liên tục tại điểm } x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

□

BÀI 9. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ -5m + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{---} f(0) = -5m + 2.$$

$$\text{---} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 0$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -5m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{5}.$$

□

BÀI 10. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2+2x-3} & \text{khi } x > 1 \\ x+m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{---} f(1) = 1 + m.$$

$$\text{---} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+3)(\sqrt{2x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x+3)(\sqrt{2x-1}+1)} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{---} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+m) = 1+m.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } m = -\frac{3}{4}.$$

□

BÀI 11. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{6+x}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x-m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{---} f(2) = 4 - m.$$

$$\text{---} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6+x}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt[3]{(6+x)^2} + 2\sqrt[3]{6+x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(6+x)^2} + 2\sqrt[3]{6+x} + 4} = \frac{1}{12}.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 - m = \frac{1}{12} \Leftrightarrow m = \frac{47}{12}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{47}{12}.$$

□

BÀI 12. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ m + \frac{1 - x}{x + 2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{--- } f(2) = m - \frac{1}{4}.$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(m + \frac{1 - x}{x + 2} \right) = m - \frac{1}{4}.$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x - 2)(2x - 3)|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(2x - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(2x - 3)}{1} = -1.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

Vậy $m = -\frac{3}{4}$. □

BÀI 13. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{12x - 4} - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \sqrt{m^2 x^2 + 8} + 2mx & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{--- } f(1) = \sqrt{m^2 + 8} + 2m.$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{12x - 4} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12(x - 1)}{(x - 1) \left(\sqrt[3]{(12x - 4)^2} + 2\sqrt[3]{12x - 4} + 4 \right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12}{\sqrt[3]{(12x - 4)^2} + 2\sqrt[3]{12x - 4} + 4} = 12.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 8} + 2m = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ m^2 + 8 = (1 - 2m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ -3m^2 + 4m + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{7}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy $m = -1$. □

BÀI 14. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 3 + |x - 1|\sqrt{5x^2 + 4}}{x^2 - 2x + 1} & \text{khi } x < 1 \\ m^2 + \frac{1}{3}x - 3m & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{--- } f(1) = m^2 + \frac{1}{3} - 3m.$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(m^2 + \frac{1}{3}x - 3m \right) = m^2 + \frac{1}{3} - 3m.$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3 + |x - 1| \sqrt{5x^2 + 4}}{x^2 - 2x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(3 - \sqrt{5x^2 + 4})}{(x - 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - \sqrt{5x^2 + 4}}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-5(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(3 + \sqrt{5x^2 + 4})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-5(x + 1)}{3 + \sqrt{5x^2 + 4}} = -\frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 + \frac{1}{3} - 3m = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2. \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = 2$. □

BÀI 15. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7-3x}-4}{2-\sqrt{1-x}} & \text{khi } x > -3 \\ m^2 - 2mx - \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq -3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{— } f(-3) = m^2 + 6m - \frac{3}{2}.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(m^2 - 2mx - \frac{3}{2} \right) = m^2 + 6m - \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{7-3x}-4}{2-\sqrt{1-x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-3(x+3)(2+\sqrt{1-x})}{(x+3)(\sqrt{7-3x}+4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-3(2+\sqrt{1-x})}{\sqrt{7-3x}+4} = -\frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3) \Leftrightarrow m^2 + 6m - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow m^2 + 6m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 0. \end{cases}$$

Vậy $m = -6$ hoặc $m = 0$. □

BÀI 16. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{5-\sqrt{x^2+16}} & \text{khi } x > 3 \\ \frac{m}{3}(x+m+1) & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{— } f(3) = \frac{m}{3}(4+m).$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{m}{3}(x+m+1) = \frac{m}{3}(4+m).$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{5-\sqrt{x^2+16}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3-x)(5+\sqrt{x^2+16})}{(3-x)(3+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5+\sqrt{x^2+16}}{3+x} = \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \frac{m}{3}(4+m) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 1. \end{cases}$$

Vậy $m = -5$ hoặc $m = 1$. □

BÀI 17. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-x} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{m+2} + m - 10x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{— } f(2) = \sqrt{m+2} + m - 20.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{m+2} + m - 10x) = \sqrt{m+2} + m - 20.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+x)}{-(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+2)(\sqrt{x+2}+x)}{-(x+1)} = -16.\end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \sqrt{m+2} = 4-m \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m \geq 0 \\ m+2 = (4-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m^2 - 9m + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ \begin{cases} m = 2 \\ m = 7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $m = 2$. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 18. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+27}{2x^2+5x-3} & \text{khi } x \neq -3 \\ \frac{4+x}{5} & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -3$.

BÀI 19. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2+8}{\sqrt{1-4x}-3} & \text{khi } x > -2 \\ 5x-2 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -2$.

BÀI 20. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x > 3 \\ 2x+12 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$.

BÀI 21. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-\sqrt{7x}-10} & \text{khi } x \neq 2 \\ -\frac{8x}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

BÀI 22. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \\ \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$.

BÀI 23. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-12}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ \frac{x^2+5}{x-1} & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$.

BÀI 24. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5}-5}{x-5} & \text{khi } x > 5 \\ \frac{2x}{25} & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$.

BÀI 25. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{-2x^3+3x^2-x} & \text{khi } x > 1 \\ -2x+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 26. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2-x}-4 & \text{khi } x < 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x > 2 \\ -4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

BÀI 27. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} -6 & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+8}-3} & \text{khi } x > 1 \\ x\sqrt{1-x}-6 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 28. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3+x-3}{x^3-1} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{(m^2-1)x^2+4}{x+2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 29. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} & \text{khi } x \neq -3 \\ mx+3 & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -3$.

BÀI 30. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{2x^2-4x-6} & \text{khi } x > 3 \\ mx+8 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

BÀI 31. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ x+2m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

BÀI 32. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x^2-4x-5} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2+m^2 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 5$.

 DẠNG 3.2. Xét tính liên tục của hàm số cho trước trên $\mathbb{R}$

 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3+x+3}{x^3+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{7}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Xét $x \neq -1$ thì $f(x) = \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ mà nó xác định.
- Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = -1$
- $$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 3)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 - x + 1} = \frac{7}{3}.$$
- $$f(-1) = \frac{7}{3}.$$
- Suy ra $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x = -1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$. □

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\sqrt{5 - x} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Với mọi $x_0 \in (1; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = f(x_0)$.
Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.
- Với mọi $x_0 \in (-\infty; 1)$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (-\sqrt{5 - x}) = -\sqrt{5 - x_0} = f(x_0)$.
Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$
- $f(1) = -\sqrt{5 - 1} = 2$.
 - $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\sqrt{5 - x}) = -2$.
 - $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-3) = -2$.
- Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$. □

VÍ DỤ 3. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}} & \text{khi } x > 2 \\ (2x-3)^2 + a & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Với $\forall x \in (-\infty; 2)$ ta có

- $f(x_0) = \frac{x_0^2 + x_0 - 6}{\sqrt{x_0+2} - \sqrt{3x_0-2}}$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}} = \frac{x_0^2 + x_0 - 6}{\sqrt{x_0+2} - \sqrt{3x_0-2}}$
Suy ra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Với $\forall x \in (2; +\infty)$, ta có

- $f(x_0) = (2x_0 - 3)^2 + a$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(2x - 3)^2 + a] = (2x_0 - 3)^2 + a$.
Suy ra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lại có

- $f(2) = 1 + a$.

$$\text{---} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}} = -10.$$

$$\text{---} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [(2x-3)^2 + a] = 1 + a.$$

Khi đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì sẽ liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow -10 = 1 + a.$$

Suy ra $a = -11$ là giá trị cần tìm. □

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x + 3} & \text{khi } x \neq -3 \\ 19 & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

--- Xét $x \neq -3$ thì $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x + 3}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$ mà nó xác định.

--- Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(2x^2+1)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (2x^2+1) = 19.$$

$$f(-3) = 19.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x = -3$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$. □

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} & \text{khi } x < 2 \\ 2 - x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

--- Với mọi $x_0 \in (-\infty; 2)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} = f(x_0)$.

Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

--- Với mọi $x_0 \in (2; +\infty)$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (2 - x) = 2 - x_0 = f(x_0)$.

Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

--- Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$

$$- f(2) = 0.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-3)}{2(x^2+2x+4)} = -\frac{1}{24}.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2 - x) = 0.$$

Suy ra hàm số không liên tục tại $x = 2$ □

BÀI 3. Tìm a để $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ a^3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có với $x \neq -1$ thì $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên nó liên tục trên từng khoảng mà nó xác định. Lại có

— $f(-1) = a^3$.

— $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-3}{x^2+1} = -\frac{5}{2}$.

Khi đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì sẽ liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a^3 = -\frac{5}{2}.$$

Suy ra $a = \sqrt[3]{-\frac{5}{2}}$ là giá trị cần tìm. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. □

BÀI 5. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x}{\sqrt{x-1}-1} & \text{khi } x > 0 \\ m+2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. □

BÀI 6. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \cos m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. □

BÀI 7. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m-2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. □

BÀI 8. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. □

📁 DẠNG 3.3. Chứng minh phương trình có nghiệm

— Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $\mathcal{D}$, ta chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathcal{D}$ và có hai số $a, b \in \mathcal{D}$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.

— Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên $\mathcal{D}$, ta chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathcal{D}$ và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ với $i = 1; 2; \dots; k$ nằm trong $\mathcal{D}$ sao cho $f(a_i) \cdot f(a_{i+1}) < 0$.

⚠️ Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức và lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Khi hàm số đã liên tục trên $\mathbb{R}$ rồi, sẽ liên tục trên mỗi khoảng $(a_i; a_{i+1})$ mà ta cần tìm.

1 Ví dụ

VÍ DỤ 1. Chứng minh phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

Lời giải.

- Đặt $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra liên tục trên $[-1; 2]$.
- Ta có $\begin{cases} f(-1) = -11 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(2) = -11 < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1; 2) : f(x_0) = 0$,
nghĩa là phương trình $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên các đoạn $[-2; 0]$; $[0; 1]$;

- Ta có $\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 0)$. (1)
- Tương tự $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)
- Tương tự $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) = -3 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$. (3)
- Từ (1); (2); (3) suy ra phương trình có ít nhất ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-2; 0)$; $(0; 1)$; $(1; 2)$. Mà $f(x)$ là đa thức bậc ba nên phương trình $f(x) = 0$ có tối đa ba nghiệm. Suy ra phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt.

□

 Với sự hỗ trợ của chức năng mode 7 trong Casio, ta dễ dàng tìm được các khoảng $(-2; 0)$; $(0; 1)$; $(1; 2)$ như trên. Công việc còn lại là trình bày sao cho đúng ngôn ngữ.

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 + x + 1$, vì $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

□

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 5x^2 - 2 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2$, $f(x)$ là hàm đa thức trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$; $[0; 1]$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$. (1)
- Tương tự $\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -8 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)
- Từ (1), (2) ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

□

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$, $f(x)$ là hàm đa thức trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$; $[0; 1]$.

— Ta có $\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -12 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$. (1)

— Tương tự $\begin{cases} f(0) = -3 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)

— Từ (1), (2) ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

□

VÍ DỤ 6. Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Lời giải.

Đặt $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(-1) = m^2 + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1; 0): f(x_0) = 0$.

Do đó phương trình $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m$ (đpcm). □

⚠️ Đối với bài toán chứa tham số m , ta chọn khoảng $(a; b)$ sao cho tại vị trí a và b triệt tiêu đi m hoặc là biểu thức luôn dương hoặc luôn âm dựa vào kinh nghiệm người giải toán. Một số trường hợp sử dụng dấu tam thức bậc hai để đánh giá, tức

$$\textcircled{1} \quad ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases} \quad \textcircled{2} \quad ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

VÍ DỤ 7. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + mx^2 - 2mx - 1 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^4 + mx^2 - 2mx - 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(2) = 15 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(2) = -15 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi m . □

VÍ DỤ 8. Chứng minh rằng phương trình $m(x - 2)(x - 3) + 2x - 5 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Lời giải.

Đặt $f(x) = m(x - 2)(x - 3) + 2x - 5$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra liên tục trên đoạn $[2; 3]$.

Ta có $\begin{cases} f(2) = -1 \\ f(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(3) \cdot f(2) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi m . □

VÍ DỤ 9. Chứng minh phương trình $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi số thực a, b, c .

Lời giải.

Đặt $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục trên $\mathbb{R}$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a \leq b \leq c$.

— Nếu $a = b$ hoặc $b = c$ thì $f(b) = (b - a)(b - c) \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x = b$.

— Nếu $a < b < c$ thì $\begin{cases} f(a) = (a - b)(a - c) > 0 \\ f(b) = (b - a)(b - c) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$. Do đó phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm (đpcm). □

VÍ DỤ 10. Cho ba số a, b, c thỏa mãn hệ thức $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục trên $\mathbb{R}$.

— Ta có $f(0) = c$ và có
$$\begin{cases} 2a + 3b + 6c = 0 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c = \frac{2}{3}(2a + 3b + 6c) - \frac{c}{3} = -\frac{c}{3} \end{cases}$$

— Nếu $c = 0 \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{0}{3} = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{3} \in (0; 1)$.

— Nếu $c \neq 0$ thì ta có $f(0) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{c^2}{3} < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm $x = a \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \subset (0; 1)$.

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. □

VÍ DỤ 11. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Chứng minh phương trình có nghiệm $x_0 \in (3; 4)$. Không tính $f(\sqrt[5]{36})$ và $f(1 + \sqrt[5]{36})$, chứng minh rằng $x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}$

Lời giải.

Ta có

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 1 = -1 \\ f(4) &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 1 = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(3) \cdot f(4) = -15 < 0.$$

Suy ra phương trình có nghiệm $x_0 \in (3; 4)$.

Ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 = (x_0 - 1)^3 - 3(x - 1) - 3$.

Vì x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ nên ta có $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^3 - 3(x - 1) - 3 = 0$.

Đặt $\alpha = x_0 - 1$ và $x_0 \in (3; 4) \Rightarrow \alpha \in (2; 3)$. Khi đó, ta có

$$\alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = 3\alpha + 3 \geq 2 \cdot \sqrt{9\alpha} \Leftrightarrow \alpha^3 \geq 6\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^6 \geq 36\alpha \Leftrightarrow \alpha^5 \geq 36 \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt[5]{36}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1 \notin (2; 3)$.

Do đó, dấu "=" không xảy ra, tức ta luôn có

$$\alpha > \sqrt[5]{36} \Rightarrow \alpha = x_0 - 1 > \sqrt[5]{36} \Leftrightarrow x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Chứng minh phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét

$$f(-3) = (m^2 + 1) \cdot (-3)^3 - 2m^2 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + m^2 + 1 = -44m^2 - 14 < 0.$$

Xét

$$f(0) = (m^2 + 1) \cdot 0^3 - 2m^2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0.$$

Xét

$$f(1) = (m^2 + 1) \cdot 1^3 - 2m^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + m^2 + 1 = -2 < 0.$$

Xét

$$f(2) = (m^2 + 1) \cdot 2^3 - 2m^2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0.$$

Ta thấy $f(-3) \cdot f(0) < 0$, $f(0) \cdot f(1) < 0$, $f(1) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-3; 0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. □

BÀI 2. Chứng minh phương trình $(1 - m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (1 - m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 1. $m = 0$ ta có phương trình $x^5 - 16x = 0$ có nghiệm $x \in \{0; \pm 2\}$.

Vậy với $m = 0$ thì phương trình $(1 - m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2. $m \neq 0$ thì

Xét

$$f(-2) = (1 - m)(-2)^5 + 9m \cdot (-2)^2 - 16 \cdot (-2) - m = -32 + 32m + 36m + 32 - m = 67m.$$

Xét

$$f(0) = (1 - m) \cdot 0^5 + 9m \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 - m = -m.$$

Xét

$$f(2) = (1 - m) \cdot 2^5 + 9m \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 - m = 32 - 32 \cdot m + 36m - 32 - m = -3m < 0.$$

Ta thấy $f(-2) \cdot f(0) = -67m^2 < 0$, $f(0) \cdot f(2) = -3m^2 < 0$ với mọi $m \neq 0$.

Suy ra phương trình $(1 - m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

Vậy phương trình $(1 - m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt. □

BÀI 3. Chứng minh phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm với mọi m .

Lời giải.

Đặt $f(x) = (m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $f(-2) = (m^2 - m + 3)(-2)^{2n} - 2 \cdot (-2) - 4 = (m^2 - m + 3) \cdot 4^n > 0$.

Xét $f(0) = (m^2 - m + 3) \cdot 0^{2n} - 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$.

Ta thấy $f(-2) \cdot f(0) < 0$ với mọi $m \neq 0$.

Suy ra phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

Vậy phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm âm. □

BÀI 4. Chứng minh phương trình $(4m + 1)x^3 - (m + 1)x + m = 0$ có nghiệm với mọi m .

Lời giải.

Trường hợp 1. $m = 0$, ta có phương trình $x^3 - x = 0$ luôn có nghiệm $x = 0$, $x = \pm 1$.

Trường hợp 2. $m \neq 0$.

Đặt $f(x) = (4m + 1)x^3 - (m + 1)x + m$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $f(-1) = (4m + 1) \cdot (-1)^3 - (m + 1) \cdot (-1) + m = -2m$.

Xét $f(0) = (4m + 1) \cdot 0^3 - (m + 1) \cdot 0 + m = m$.

Ta thấy $f(-1) \cdot f(0) = -2m \cdot m = -2m^2 < 0$ nên phương trình $(4m + 1)x^3 - (m + 1)x + m = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$.

Vậy phương trình $(4m + 1)x^3 - (m + 1)x + m = 0$ có nghiệm với mọi m . □

BÀI 5. Chứng minh phương trình $(m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Lời giải.

Đặt $f(x) = (m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $f(-2) = (m^3 - 1)[(-2)^{2001} - 1][(-2) + 2]^{2002} + 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$.

Xét $f(1) = (m^3 - 1)(1^{2001} - 1)(1 + 2)^{2002} + 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

Ta thấy $f(-2) \cdot f(1) = -1 \cdot 5 = -5 < 0$ với mọi m .

Suy ra phương trình $(m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.

Vậy phương trình $(m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3 = 0$ có nghiệm với mọi m . □

BÀI 6. Chứng minh phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{— } f(-3) = (m^2 + 1) \cdot (-3)^3 - 2m^2 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + m^2 + 1 = -44m^2 - 14 < 0.$$

$$\text{— } f(0) = (m^2 + 1) \cdot 0^3 - 2m^2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0.$$

$$\text{— } f(1) = (m^2 + 1) \cdot 1^3 - 2m^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + m^2 + 1 = -2 < 0.$$

$$\text{— } f(2) = (m^2 + 1) \cdot 2^3 - 2m^2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0.$$

Ta thấy $f(-3) \cdot f(0) < 0$, $f(0) \cdot f(1) < 0$, $f(1) \cdot f(2) < 0$. Suy ra phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-3; 0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. □

BÀI 7. Chứng minh phương trình $m(x-1)(x^3-4x)+x^3-3x+1=0$ có ít nhất ba nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x) = m(x-1)(x^3-4x)+x^3-3x+1$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{— } f(-2) = m(-2-1)[(-2)^3-4 \cdot (-2)] + (-2)^3-3 \cdot (-2)+1 = -8+7 = -1.$$

$$\text{— } f(0) = m(0-1)(0^3-4 \cdot 0) + 0^3-3 \cdot 0+1 = 1.$$

$$\text{— } f(1) = m(1-1)(1^3-4 \cdot 1) + 1^3-3 \cdot 1+1 = -1 < 0.$$

$$\text{— } f(2) = m(2-1)(2^3-4 \cdot 2) + 2^3-3 \cdot 2+1 = 1.$$

Ta thấy $f(-2) \cdot f(0) = -1 < 0$, $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$, $f(1) \cdot f(2) = -1 < 0$. Suy ra phương trình $m(x-1)(x^3-4x)+x^3-3x+1=0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $m(x-1)(x^3-4x)+x^3-3x+1=0$ có ít nhất ba nghiệm. $\square$

BÀI 8. Cho α và β thỏa mãn $0 < \alpha < \beta$. Chứng minh phương trình sau có nghiệm

$$\sin^{10} x - x = \frac{\alpha \sin^2 \alpha + \beta \sin^{10} \beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}.$$

Lời giải.

Đặt $f(x) = \sin^{10} x - x - \frac{\alpha \sin^2 \alpha + \beta \sin^{10} \beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$, hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $m < 0$ sao cho $f(m) > 0$.

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, nên tồn tại $M > 0$ sao cho $f(M) < 0$.

Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục trên $[m; M]$ và $f(m) \cdot f(M) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm. $\square$

BÀI 9. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$, ($k > n > m > 0$) và $km \leq n^2$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Lời giải.

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. (1)

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = c$; $f\left(\frac{n}{k}\right) = a \cdot \frac{n^2}{k^2} + b \cdot \frac{n}{k} + c$.

$$\Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{n}{k}\right) = c \left[\frac{n^2}{k} \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} \right) + c \left(1 - \frac{n^2}{km} \right) \right] = c^2 \left(1 - \frac{n^2}{km} \right) \quad (\text{do } \frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0)$$

$$\text{Vì } c^2 \geq 0; n^2 \geq km > 0 \Rightarrow \frac{n^2}{km} \geq 1 \text{ do đó } f(0) \cdot f\left(\frac{n}{k}\right) = c^2 \left(1 - \frac{n^2}{km} \right) \leq 0.$$

— Với $c = 0$ phương trình đã cho trở thành $ax^2 + bx = 0$.

Suy ra $x = 0$ hoặc $ax + b = 0$. (2)

— Nếu $a = 0$ thì từ $c = a = 0$ và điều kiện $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$ suy ra $b = 0$. Khi đó phương trình (2) có nghiệm là $\forall x \in \mathbb{R}$, suy ra phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$.

— Nếu $a \neq 0$ thì $b \neq 0$ (vì nếu $b = 0, c = 0$ thì từ điều kiện $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$ suy ra $a = 0$)

suy ra phương trình (2) có nghiệm $x = -\frac{b}{a}$

Khi đó từ điều kiện $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0; k > n > m > 0$ và $c = 0$ suy ra $x = -\frac{b}{a} = \frac{n}{k} \in (0; 1)$

Do đó phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$.

— Với $1 - \frac{n^2}{km} = 0 \Rightarrow f\left(\frac{n}{k}\right) = 0 \Rightarrow \frac{n}{k}$ là nghiệm thuộc $(0; 1)$.

— Với $c \neq 0$ và $1 - \frac{n^2}{km} \neq 0 \Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{n}{k}\right) < 0 \Rightarrow f(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{n}{k}\right)$.

Mà $\left(0; \frac{n}{k}\right) \subset (0; 1)$ (vì $0 < \frac{n}{k} < 1$) nên phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. $\square$

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 10. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

BÀI 11. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4; 1)$.

BÀI 12. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng năm nghiệm.

BÀI 13. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG IV

BÀI 1 (HKII - THPT Lương Văn Can).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}{x - 1}.$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$.

Lời giải.

① a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{16}.$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 2.$

② Ta có

— $f(1) = 4.$

— $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 2) = 4.$

— $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 1) = 4.$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, nên hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 1$.

□

BÀI 2 (HKII - THPT Trương Nguyệt Anh).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x + 6}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{x^2 - 2x + 3}).$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - 2 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$.

Lời giải.

① a) Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-5)}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-5}{x^2 - 2x + 3} = -\frac{9}{11}.$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{x^2 - 2x + 3}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^2 + 2x - 3}{(3x - \sqrt{x^2 - 2x + 3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(8 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x \left(3 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}\right)} = -\infty.\end{aligned}$$

② Ta có

$$\text{— } f(2) = 2.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 3} + 1} = 2.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, nên hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

□

BÀI 3 (HKII - THPT Bùi Thị Xuân).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{9x^4 + 8x^2 - 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x + 1} + 3x + 1).$

② Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} a + b & \text{khi } x = 1 \\ \frac{\sqrt{2x^2 + 5x - 7}}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \text{ liên tục tại } x_0 = 1. \\ x^2 + 2bx + 3a & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

③ Chứng minh rằng phương trình $(m^2 - 3m + 2)(x^2 - 3x + 2) + (3 - 2x)(3 - 2m) = 0$ có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

① a) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{9x^4 + 8x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(3x - 1)(2x^2 - x + 1)}{(3x - 1)(3x^3 + x^2 + 3x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 3x + 1} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x + 1} + 3x + 1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x \left(-\sqrt{9 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 - \frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{-\sqrt{9 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

② Ta có

$$\text{— } f(1) = a + b.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2bx + 3a) = 3a + 2b + 1.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 7) = 9.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + 1 = 9 \\ a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 19. \end{cases}$$

- ③ Ta có hàm số $f(x) = (m^2 - 3m + 2)(x^2 - 3x + 2) + (3 - 2x)(3 - 2m)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác $f(1) \cdot f(2) = (3 - 2m)(2m - 3) = -(2m - 3)^2$.

— Nếu $m = \frac{3}{2}$ thì $f(1) \cdot f(2) = 0$ nên phương trình có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

— Nếu $m \neq \frac{3}{2}$ thì $f(1) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $(m^2 - 3m + 2)(x^3 - 3x + 2) + (3 - 2x)(3 - 2m) = 0$ luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

□

BÀI 4 (HKII - THPT Nguyễn Hữu Huân).

- ① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.

- ② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$.

Lời giải.

① a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(x + 1)} = \frac{1}{4}$.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 1)}{x - 3} = -\frac{2}{5}$.

- ② Ta có

— $f(1) = -1$.

— $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, nên hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 1$.

□

BÀI 5 (HKII - THPT Hermann Gmeiner).

- ① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1 - x^3} - 3}{x + 2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 5}{(x - 4)^2}$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$.

- ② Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} & \text{khi } x < 0 \\ a - 5 + \frac{4 - x}{x + 1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Lời giải.

① a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-x^3} - 3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x^3+8)}{(x+2)(\sqrt{1-x^3}+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x^2-2x+4)}{\sqrt{1-x^3}+3} = -2.$

c) Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-5) = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-4)^2 = 0 \\ (x-4)^2 > 0 \text{ khi } x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2} = -\infty.$

d) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

② Ta có

— $f(0) = a - 1.$

— $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = 2.$

— $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(a - 5 + \frac{4-x}{x+1}\right) = a - 1.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a - 1 = 2 \Leftrightarrow a = 3.$$

□

BÀI 6 (HKII - THPT Hoàng Hoa Thám).

① Tính các giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + 3x}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2}.$

② Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & \text{khi } x < 1 \\ \cos(x-1) & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1.$

③ Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương và một nghiệm âm.

Lời giải.

① Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + 3x}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 3\right)}{x \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}\right)} = -\frac{2}{3}.$

② Ta có

— $f(1) = 1.$

— $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 2x) = a + 2.$

— $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \cos(x-1) = 1.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 2 = 1 \Leftrightarrow a = -1.$$

- ③ Ta có hàm số $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(0) = -25 < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25) = +\infty.$$

Vậy phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-\infty; 0)$ và có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương và một nghiệm âm.

□

BÀI 7 (HKII - THPT Hàn Thuyên).

- ① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2+2x-15}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+1)\sqrt{2x^2-3}}{-3x^2+x}.$

- ② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{7-7x} & \text{khi } x \neq 1 \\ m - \frac{x}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

① a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2+2x-15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{8}.$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+1)\sqrt{2x^2-3}}{-3x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(-x\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)}{x^2\left(-3+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)}{\left(-3+\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{2}.$

- ② Ta có

$$\text{— } f(1) = m - \frac{1}{2}.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{7(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{14}.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m - \frac{1}{2} = -\frac{1}{14} \Leftrightarrow m = \frac{3}{7}.$$

□

BÀI 8 (HKII - THPT Hùng Vương).

① Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 7x^2 + 19x - 16}{5x^2 - 8x + 3}.$

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{\sqrt{x+2}-1} & \text{khi } x > 2 \\ 2x-m & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

- ③ Chứng minh rằng phương trình $(m^2 - m + 4)x^{2015} - 2x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải.

① Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 7x^2 + 19x - 16}{5x^2 - 8x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x^2 - 3x + 16)}{(x-1)(5x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 3x + 16}{5x-3} = \frac{17}{2}.$

- ② Ta có

— $f(2) = 4 - m.$

— $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - m) = 4 - m.$

— $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+2} - 1} = 0.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 - m = 0 \Leftrightarrow m = 4.$

- ③ Ta có hàm số $f(x) = (m^2 - m + 4)x^{2015} - 2x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác $f(0) = 1 > 0.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2015} \left(m^2 - m + 4 - \frac{2}{x^{2014}} + \frac{1}{x^{2015}} \right) = -\infty \text{ (vì } m^2 - m + 4 > 0 \text{ với mọi } m \in \mathbb{R}).$$

Vậy phương trình $(m^2 - m + 4)x^{2015} - 2x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-\infty; 0)$ (nghiệm âm) với mọi giá trị của tham số $m.$

□

BÀI 9 (HKII - THPT Hưng Đạo).

- ① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 6x}{3 + 2x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 3}{x - 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 2x^3).$

- ② Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1.$

Lời giải.

① a) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 6x}{3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{5}{x} - 6 \right)}{x \left(\frac{3}{x} + 2 \right)} = -3.$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 3}{x - 2} = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 3) = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \\ x - 2 > 0 \text{ khi } x > 2 \end{cases}.$

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 2x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{3}{x^2} - 2 \right) = +\infty.$

- ② Ta có

— $f(1) = m.$

— $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 4}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{3}.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}.$

□

BÀI 10 (HKII - THPT Bà Điểm).

- ① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}).$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \\ \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$.

③ Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 2mx + 1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Lời giải.

① a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)} = 1$.

② Ta có

$$\text{— } f(5) = 3.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} ((x-5)^2 + 3) = 3.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)} = 3.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5)$, nên hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 5$.

③ Ta có

$$\text{— } f(3) = 6m + 1.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = 1.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 3$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 6m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

□

BÀI 11 (HKII - THPT Bình Tân).

① Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ mx + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

② Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải.

① Ta có

$$\text{— } f(2) = 2m + \frac{1}{4}.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(mx + \frac{1}{4} \right) = 2m + \frac{1}{4}.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}.$$

Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x_0 = 2$ khi $2m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0$.

② Đặt $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$. Ta có

$$f(0) = -1, f(-1) = m^2 + 1. \text{ Suy ra } f(-1) \cdot f(0) = -m^2 - 1 < 0 \forall m.$$

Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Do đó phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$ với mọi giá trị của tham số m .

Vậy ta có đpcm.

BÀI 12 (HKII - THPT Củ Chi).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{3n^2 - n + 9}{1 - 2n^2}.$

b) $\lim \frac{(1 - 3n)^3 (n^2 + 1)^2}{3n^7 - 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3 + \sqrt{x^2 - x + 1}).$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - \sqrt{7x - 10}} & \text{khi } x \neq 2 \\ -\frac{8x}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

③ Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải.

① Tính các giới hạn

a) $\lim \frac{3n^2 - n + 9}{1 - 2n^2} = \lim \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 2} = \frac{3 - 0 + 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2}.$

b) $\lim \frac{(1 - 3n)^3 (n^2 + 1)^2}{3n^7 - 2} = \lim \frac{\left(\frac{1}{n} - 3\right)^3 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2}{3 - \frac{2}{n^7}} = \frac{(0 - 3)^3 \cdot (1 + 0)^2}{3 - 0} = -9.$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3 + \sqrt{x^2 - x + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 3)^2 - (x^2 - x + 1)}{x - 3 - \sqrt{x^2 - x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 8}{x - 3 - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5 + \frac{8}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

② Ta có

— $f(2) = -\frac{16}{3}.$

— $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - \sqrt{7x - 10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x + \sqrt{7x - 10})}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x + \sqrt{7x - 10})}{x - 5} = -\frac{16}{3}.$

Ta thấy $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

③ Đặt $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$. Ta có $f(-1) = 4$, $f(0) = -3$, $f(1) = 2$.

Suy ra $f(-1) \cdot f(0) = -12 < 0$, $f(0) \cdot f(1) = -6 < 0$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1; 0]$ và $[0; 1]$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm.

BÀI 13 (HKII - THPT Đình Thiện Lý).

① Tính các giới hạn sau

a) $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n^4+2n^3-5n+2}.$

b) $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 6^n}{4^n + 3}.$

c) $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}.$

d) $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x).$

② Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} & \text{nếu } x > 2 \\ 2ax+3 & \text{nếu } x \leq 2. \end{cases}$

a) Khi $a = 1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$.

b) Tìm giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 2$.

③ Chứng minh phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

① Tính các giới hạn

a) $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n^4+2n^3-5n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}} = 0.$

b) $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 6^n}{4^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{6^n}} = -\infty.$

c) $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x^2+x+1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2+x+1}{x+3} = \frac{11}{3}.$

d) $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{1}{4}.$

② $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} & \text{nếu } x > 2 \\ 2ax+3 & \text{nếu } x \leq 2. \end{cases}$

a) Khi $a = 1$, ta được $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} & \text{nếu } x > 2 \\ 2x+3 & \text{nếu } x \leq 2. \end{cases}$

Ta thấy

— $f(2) = 7.$

— $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+3) = 7.$

— $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-\sqrt{x+7}-3) = -6.$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên hàm số đã cho không liên tục tại $x = 2$.

b) Ta có

— $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4a+3.$

— $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -6.$

Do đó hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi $4a+3 = -6 \Leftrightarrow a = -\frac{9}{4}.$

- ③ Đặt $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2$. Ta có $f(0) = -2$, $f(1) = 1$, $f(2) = -8$, $f(3) = 13$.
 Suy ra $f(0)f(1) = -2 < 0$, $f(1)f(2) = -8 < 0$, $f(2)f(3) = -104 < 0$.
 Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên các đoạn $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$.
 Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên các khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$.
 Vậy phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm.

□

BÀI 14 (HKII - THPT Lý Tự Trọng).

- ① Tính các giới hạn sau
- a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x - \sqrt{5}}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2}$.
- ② Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{3 - x} & \text{khi } x \neq 3 \\ 4ax + 5 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.
- ③ Chứng minh phương trình $5x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Lời giải.

- ① Tính các giới hạn
- a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x - \sqrt{5}} = 0$.
- b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5 - 9}{(x + 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = -\frac{2}{3}$.
- ② Ta có
- $f(3) = 12a + 5$.
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 1)}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 1) = -2$.
- Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x_0 = 3$ khi $12a + 5 = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{12}$.
- ③ Đặt $f(x) = 5x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5$. Ta có $f(0) = -5$, $f(1) = 1$. Suy ra $f(0)f(1) = -5 < 0$.
 Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn $[0; 1]$.
 Do đó phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.
 Vậy ta có đpcm.

□

BÀI 15 (HKII - THPT Lê Quý Đôn).

- ① Tìm giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{2x^2-3x+1} & \text{khi } x < 1 \\ -2a+7 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$.
- ② Chứng minh phương trình $(m^2 - 3m + 3)x^3 + 2x - 3 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Lời giải.

- ① Ta có
- $f(1) = -2a + 7$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2a + 7) = -2a + 7$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+3}-2}{2x^2-3x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3-4}{(x-1)(2x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(2x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{4}$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 1$ khi $-2a + 7 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{27}{8}$. Vậy $a = -\frac{27}{8}$ là giá trị cần tìm.

② Đặt $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^3 + 2x - 3 = 0$.

Ta có $f(0) = -3$, $f(2) = 8m^2 - 24m + 25 = 8\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + 7 > 0 \forall m$. Suy ra $f(0)f(2) < 0 \forall m$.

Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 2)$ với mọi m .

Vậy ta có đpcm.

□

BÀI 16 (HKII - THPT Chuyên Nguyễn Thượng Hiền).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{4x^3}$.

② Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{\sqrt{x+8}-3} & \text{khi } x > 1 \\ m^2x^2 + 7mx & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$.

③ Chứng minh phương trình $mx^{14} - (3m^2 + 7)x^{15} - 5 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi m .

Lời giải.

① Tính các giới hạn

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{4x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{\cos x \cdot 4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \cdot 4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{8 \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

② Ta có

$$\text{— } f(1) = m^2 + 7m.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (m^2x^2 + 7mx) = m^2 + 7m.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)(\sqrt{x+8}+3)}{x+8-9} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-\sqrt{x+8}-3) = -6$$

$$\text{Do đó, hàm số đã cho liên tục tại } x_0 = 1 \text{ khi } m^2 + 7m = -6 \Leftrightarrow m^2 + 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -6. \end{cases}$$

Vậy $m = -1$, $m = -6$ là các giá trị cần tìm.

③ Đặt $f(x) = mx^{14} - (3m^2 + 7)x^{15} - 5$.

Ta có $f(0) = -5$, $f(-1) = 3m^2 + m + 2 = 2m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \forall m$. Suy ra $f(-1)f(0) < 0 \forall m$.

Mặt khác, vì $f(x)$ là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm với mọi m .

□

BÀI 17 (HKII - THPT An Lạc).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + 5x - 26}{x - \sqrt{x^2 + x - 2}}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x - 1).$

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{1 - x^3} & \text{khi } x \neq 1 \\ 4mx^2 + 6x + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 18 (HKII - THPT Nam Kỳ Khởi Nghĩa).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 1}}{3 - x}.$

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4}mx & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 19 (HKII - THPT Nguyễn Chí Thanh).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 2}{x^3 - 7x - 6}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3}).$

② Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x + 6} - 3} & \text{khi } x > 3 \\ ax + 3 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

BÀI 20 (HKII - THPT Nguyễn An Ninh).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 - 8x - 12}{x^2 - x - 6}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x + 5}).$

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ x - 2m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

BÀI 21 (HKII - THPT Nguyễn Du).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 3x^2 + 7x - 10}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} + x)].$

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2x - \frac{1}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 22 (HKII - THPT Mạc Đĩnh Chi).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\frac{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 7^n + 4}{3 \cdot 2^n + 4} \right).$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 4} - 2}{x^2 + x} \right).$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 3x + 4}).$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5}-5}{x-5} & \text{khi } x > 5 \\ 2x & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ tại $x_0 = 5$.

BÀI 23 (HKII - THPT Gia Định).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^4 - 6x^3 + x - 3}{4x^2 - 11x - 3}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{7x+8} \cdot \sqrt[3]{9x-28} - 12}{x^3 - 4x^2 + 2x - 8} \right).$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{12x+4} - \sqrt[3]{36x+8}}{2x^3 - 12x^2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{64x^3 - 4x^2} - 4x + 1).$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{3}{4} & \text{khi } x = 1 \text{ tại } x_0 = 1. \\ \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{3x^2 - 14x + 11} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

BÀI 24 (HKII - THPT Nguyễn Hiền).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9x^4 - 82x^2 + 9}{2x^3 - 54}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x+3)\sqrt{x^2+4}}{(2x+5)^2}.$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}}{-2x^3+3x^2-x} & \text{khi } x > 1 \\ -2x+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 25 (HKII - THPT Nguyễn Hữu Cánh).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4 - 3x - x^2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{6-x}}{-x^2 + 3x - 2}.$

② Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{khi } x > 3 \\ \frac{x-2}{4} & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$.

BÀI 26 (HKII - THPT Nguyễn Thái Bình).

① Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ \frac{x^2 + 5}{x - 1} & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại điểm $x = 3$.

② Chứng minh phương trình $(m^2 + m + 3)(x - 2) + x^2 + 2x - 4 = 0$ có nghiệm $\forall m$.

BÀI 27 (HKII - THPT Tây Thạnh).

① Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{9 - x^2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x)$.

② Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m(m^2 - 3) & \text{khi } x = 2 \\ \frac{x - 2}{\sqrt{5 - 2x} - \sqrt{3 - x}} & \text{khi } x \neq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

③ Chứng minh phương trình $5x^4 + 3x^3 - 6x^2 - x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM - CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- ① **Định nghĩa đạo hàm:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giới hạn hữu hạn nếu có của tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi $x \rightarrow x_0$ được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại x_0 , kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Như vậy, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- ② **Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số**
Định lí 1 (thừa nhận). Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- ③ **Ý nghĩa của đạo hàm**
- (a) **Ý nghĩa hình học:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ có dạng: $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ với $k = f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.
- (b) **Ý nghĩa vật lý:**
- Vận tốc tức thời: $v(t) = s'(t)$.
 - Gia tốc tức thời: $a(t) = v'(t)$.
 - Cường độ dòng điện tức thời: $I(t) = Q'(t)$.
- ④ **Đạo hàm trên khoảng:** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

▢ DẠNG 1.1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Cần nhớ công thức: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

1 Ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho $f(x) = 2x^2 + x + 1$. Tính $f'(2)$?

Lời giải.

Ta có

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x + 1 - 11}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x + 5)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 5) = 9.$$

□

VÍ DỤ 2. Cho $y = x^3 - 2x + 1$. Tính $y'(1)$?

Lời giải.

Ta có

$$y'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 1) = 1.$$

□

VÍ DỤ 3. Cho $f(x) = \sqrt{2x + 1}$. Tính $f'(1)$?

Lời giải.

Ta có

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{(x - 1)(\sqrt{2x + 1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

VÍ DỤ 4. Cho $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$. Tính $y'(3)$?

Lời giải.

Ta có

$$y'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{y(x) - y(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2x - 1}{x + 3} - \frac{5}{6}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x - 21}{6(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{7}{6(x + 3)} = \frac{7}{36}.$$

□

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho $f(x) = x^3 + x - 2$. Tính $f'(-2)$?

Lời giải.

Ta có

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x - 2 - (-12)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 5)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 5) = 13.$$

□

BÀI 2. Cho $y = \sqrt{3 - 2x}$. Tính $y'(-3)$?

Lời giải.

Ta có

$$y'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{y(x) - y(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{3 - 2x} - 3}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-6 - 2x}{(x + 3)(\sqrt{3 - 2x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2}{\sqrt{3 - 2x} + 3} = -\frac{1}{3}.$$

□

BÀI 3. Cho $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$. Tính $f'(2)$?

Lời giải.

Ta có

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x + 1}{x - 1} - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x + 6}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(x - 1)} = -3.$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Cho $y = 2x^2 - x + 2$. Tính $y'(1)$?

BÀI 5. Cho $f(x) = \sqrt{2x+7}$. Tính $f'(1)$?

BÀI 6. Cho $y = \sqrt{x^2+5}$. Tính $y'(2)$?

□ DẠNG 1.2. Các quy tắc tính đạo hàm và bảng đạo hàm

① $(u + v - w)' = u' + v' - w'$	② $(u \cdot v)' = u'v + v'u$
③ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	④ $(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
$(C)' = 0 \quad (C \in \mathbb{R})$ $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0)$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$
□ Công thức tính nhanh $\square \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad \square \left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{adx^2+2aex+(be-cd)}{(dx+e)^2}$ $\square \left(\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2} \quad (\text{Tích huyền trừ tích sắc})$	

Làm quen nhóm công thức $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ và $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$

Lời giải.

$$y' = 4x^3 - 2 \cdot 2x = 4x^3 - 4x. \quad \square$$

VÍ DỤ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y = 5x^2(3x-1)$

Lời giải.

$$y' = [5x^2(3x-1)]' = (5x^2)' \cdot (3x-1) + 5x^2 \cdot (3x-1)' = 10x \cdot (3x-1) + 5x^2 \cdot 3 = 45x^2 - 10x. \quad \square$$

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 - 3x + 1$

Lời giải.

$$y' = -2 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 2x - 3 = -8x^3 + 8x - 3. \quad \square$$

BÀI 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$

Lời giải.

$$y' = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 1 = 3x^2 - 6x + 1. \quad \square$$

BÀI 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{2}x^5 + x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5$

Lời giải.

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x + 4 = \frac{5}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 3x + 4. \quad \square$$

BÀI 4. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{1}{2}x^4$

Lời giải.

$$y' = -\frac{1}{3} + 2x - \frac{1}{2} \cdot 4x^3 = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3.$$

□

BÀI 5. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{5}mx^5 - 2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + m^2 - 1$

Lời giải.

$$y' = \frac{1}{5} \cdot 5mx^4 - 2 \cdot 4x^3 + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = mx^4 - 8x^3 + x^2.$$

□

BÀI 6. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 + m - 1$

Lời giải.

$$y' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x = x^3 - x^2 + x.$$

□

BÀI 7. Tìm đạo hàm của hàm số $y = 3x^3 + 2(m-1)x^2 + x + m^2 - 1$

Lời giải.

$$y' = 3 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2(m-1)x + 1 = 9x^2 + 4(m-1)x + 1.$$

□

BÀI 8. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x)(3 - x^2)$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= [(x^2 + x)(3 - x^2)]' \\ &= (x^2 + x)' \cdot (3 - x^2) + (x^2 + x) \cdot (3 - x^2)' \\ &= (2x + 1) \cdot (3 - x^2) + (x^2 + x) \cdot (-2x) \\ &= -4x^3 - 3x^2 + 6x + 3. \end{aligned}$$

□

BÀI 9. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (2x - 1)^2(2x + 1)^2$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= [(2x - 1)^2(2x + 1)^2]' \\ &= [(2x - 1)^2]' \cdot (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 \cdot [(2x + 1)^2]' \\ &= 2 \cdot (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 \cdot 2 \\ &= 16x^2 + 4. \end{aligned}$$

□

BÀI 10. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x(2x - 1)(3x + 2)$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= [x \cdot (2x - 1)(3x + 2)]' \\ &= x' \cdot [(2x - 1)(3x + 2)] + x \cdot [(2x - 1)(3x + 2)]' \\ &= 1 \cdot [(2x - 1)(3x + 2)] + x \cdot [(2x - 1)' \cdot (3x + 2) + (2x - 1) \cdot (3x + 2)'] \\ &= 1 \cdot [6x^2 + x - 2] + x \cdot [2 \cdot (3x + 2) + (2x - 1) \cdot 3] \\ &= 6x^2 + x - 2 + x \cdot [12x + 1] \\ &= 6x^2 + x - 2 + 12x^2 + x \\ &= 18x^2 + 2x - 2. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 11. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^2}{2} - 2$

Lời giải.

$$y' = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2 \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{1}{2} \cdot 2x = x^3 - x.$$

□

BÀI 12. Tìm đạo hàm của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 5$

Lời giải.

$$y' = -\frac{1}{4} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x = x^3 - 4x.$$

□

BÀI 13. Tìm đạo hàm của hàm số $y = m^2x^4 - (m-1)x^2 + m^2 - 5m + 4$

Lời giải.

$$y' = 4 \cdot m^2x^3 - 2 \cdot (m-1)x = 4m^2x^3 - 2(m-1)x.$$

□

BÀI 14. Tìm đạo hàm của hàm số $y = 3x^5 - 6mx^4 - 2mx + m^2 - 1$

Lời giải.

$$y' = 3 \cdot 5x^4 - 6 \cdot 4mx^3 - 2m = 15x^4 - 24mx^3 - 2m.$$

□

BÀI 15. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^6 - 2x^3 - 5x^2 + 3$

Lời giải.

$$y' = 6 \cdot x^5 - 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x = 6x^5 - 6x^2 - 10x.$$

□

BÀI 16. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (2x-3)(x^5-2x)$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= [(2x-3)(x^5-2x)]' \\ &= (2x-3)' \cdot (x^5-2x) + (2x-3) \cdot (x^5-2x)' \\ &= 2 \cdot (x^5-2x) + (2x-3) \cdot (5x^4-2) \\ &= 2x^5 - 4x + 10x^5 - 15x^4 - 4x + 6 \\ &= 12x^5 - 15x^4 - 8x + 6. \end{aligned}$$

□

BÀI 17. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2-2x+3)(2x^2+3)$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= [(x^2-2x+3)(2x^2+3)]' \\ &= (x^2-2x+3)' \cdot (2x^2+3) + (x^2-2x+3) \cdot (2x^2+3)' \\ &= (2x-2) \cdot (2x^2+3) + (x^2-2x+3) \cdot (4x) \\ &= 4x^3 - 4x^2 + 6x - 6 + 4x^3 - 8x^2 + 12x \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 18x - 6. \end{aligned}$$

□

BÀI 18. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2+1)(5-3x^2)$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= [(x^2+1)(5-3x^2)]' \\ &= (x^2+1)' \cdot (5-3x^2) + (x^2+1) \cdot (5-3x^2)' \\ &= (2x) \cdot (5-3x^2) + (x^2+1) \cdot (-6x) \\ &= 10x - 6x^3 - 6x^3 - 6x \\ &= -12x^3 + 4x. \end{aligned}$$

□

Làm quen nhóm công thức $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^7 + x)^2$

Lời giải.

$$y' = 2(x^7 + x) \cdot (7x^6 + 1) = 2(7x^{13} + 8x^7 + x) = 14x^{13} + 16x^7 + 2x.$$

□

VÍ DỤ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 1)^3$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= \left[(x^2 - 2x + 3)(2x + 1)^3 \right]' \\ &= (x^2 - 2x + 3)' \cdot (2x + 1)^3 + (x^2 - 2x + 3) \cdot \left[(2x + 1)^3 \right]' \\ &= (2x - 2) \cdot (2x + 1)^3 + (x^2 - 2x + 3) \cdot \left[3(2x + 1)^2 \cdot 2 \right] \\ &= (2x - 2) \cdot (2x + 1)^3 + 6(x^2 - 2x + 3)(2x + 1)^2. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)^2$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= 2(2x^3 - 3x^2 - 6x + 1) \cdot (6x^2 - 6x - 6) \\ &= 2(12x^5 - 30x^4 - 30x^3 + 60x^2 + 30x - 6) \\ &= 24x^5 - 60x^4 - 60x^3 + 120x^2 + 60x - 12. \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^7 + 3x^4 + 2)^{10}$

Lời giải.

$$y' = 10(x^7 + 3x^4 + 2)^9 \cdot (7x^6 + 12x^3).$$

□

BÀI 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^4 - 2x^2 + x - 1)^2$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^4 - 2x^2 + x - 1) \cdot (4x^3 - 4x + 1) \\ &= 2(4x^7 - 12x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x - 1) \\ &= 8x^7 - 24x^5 + 10x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 10x - 2. \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (3x - 5x^2 + 4x^3)^{10}(x + 3)^5$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= \left[(3x - 5x^2 + 4x^3)^{10}(x + 3)^5 \right]' \\ &= \left[(3x - 5x^2 + 4x^3)^{10} \right]' \cdot (x + 3)^5 + (3x - 5x^2 + 4x^3)^{10} \cdot \left[(x + 3)^5 \right]' \\ &= \left[10(3x - 5x^2 + 4x^3)^9 \cdot (3 - 10x + 12x^2) \right] \cdot (x + 3)^5 + (3x - 5x^2 + 4x^3)^{10} \cdot \left[5(x + 3)^4 \cdot 1 \right] \\ &= 10(12x^2 - 10x + 3)(x + 3)^5(3x - 5x^2 + 4x^3)^9 + 5(x + 3)^4(3x - 5x^2 + 4x^3)^{10}. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (1 - 2x^2)^3$

Lời giải.

$$y' = 3(1 - 2x^2)^2 \cdot (-4x) = -12x \cdot (4x^4 - 4x^2 + 1) = -48x^5 + 48x^3 - 12x.$$

□

BÀI 6. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^4$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= 4(x^2 + x + 1)^3 \cdot (2x + 1) \\ &= 4(2x + 1)(x^2 + x + 1)^3. \end{aligned}$$

□

BÀI 7. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x - x^2)^{32}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= 32(x - x^2)^{31} \cdot (1 - 2x) \\ &= 32(1 - 2x)(x - x^2)^{31}. \end{aligned}$$

□

BÀI 8. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - x + 1)^3$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= 3(x^2 - x + 1)^2 \cdot (2x - 1) \\ &= 3(2x - 1)(x^2 - x + 1)^2. \end{aligned}$$

□

Làm quen nhóm công thức

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

và

$$\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(2x + 1)'(x + 1) - (x + 1)'(2x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2(x + 1) - 1(2x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2mx + 1}{x + m}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(2mx + 1)'(x + m) - (x + m)'(2mx + 1)}{(x + m)^2} = \frac{2m(x + m) - 1 \cdot (2mx + 1)}{(x + m)^2} = \frac{2m^2 - 1}{(x + m)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{2m \cdot m - 1 \cdot 1}{(x + m)^2} = \frac{2m^2 - 1}{(x + m)^2}.$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-1}{4x-3}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(2x-1)'(4x-3) - (4x-3)'(2x-1)}{(4x-3)^2} = \frac{2(4x-3) - 4(2x-1)}{(4x-3)^2} = \frac{-2}{(4x-3)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1)}{(4x-3)^2} = \frac{-2}{(4x-3)^2}.$$

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{3}{2x+1}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(3)'(2x+1) - (2x+1)' \cdot 3}{(2x+1)^2} = \frac{0 \cdot (2x+1) - 2 \cdot 3}{(2x+1)^2} = \frac{-6}{(2x+1)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{0 \cdot 1 - 2 \cdot 3}{(2x+1)^2} = \frac{-6}{(2x+1)^2}.$$

□

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-3x}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(2x+1)'(1-3x) - (1-3x)'(2x+1)}{(1-3x)^2} = \frac{2(1-3x) + 3(2x+1)}{(1-3x)^2} = \frac{5}{(1-3x)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{(1-3x)^2} = \frac{5}{(1-3x)^2}.$$

□

BÀI 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1-2x}{x+5}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(1-2x)'(x+5) - (x+5)'(1-2x)}{(x+5)^2} = \frac{-2(x+5) - (1-2x)}{(x+5)^2} = \frac{-11}{(x+5)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{-2 \cdot 5 - 1 \cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{-11}{(x+5)^2}.$$

□

BÀI 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(mx+4)'(x+m) - (x+m)'(mx+4)}{(x+m)^2} = \frac{m(x+m) - 1 \cdot (mx+4)}{(x+m)^2} = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{m \cdot m - 1 \cdot 4}{(x+m)^2} = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}.$$

□

BÀI 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{(2m+1)x - 2(m+1)}{mx + m^2 - 1}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{((2m+1)x - 2(m+1))'(mx + m^2 - 1) - (mx + m^2 - 1)'((2m+1)x - 2(m+1))}{(mx + m^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(2m+1)(mx + m^2 - 1) - m \cdot ((2m+1)x - 2(m+1))}{(mx + m^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2m^3 + 3m^2 - 1}{(mx + m^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{(2m+1) \cdot (m^2 - 1) + 2(m+1) \cdot m}{(mx + m^2 - 1)^2} = \frac{2m^3 + 3m^2 - 1}{(mx + m^2 - 1)^2}.$$

□

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{5x}{1-4x}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(5x)'(1-4x) - (1-4x)'(5x)}{(1-4x)^2} = \frac{5 \cdot (1-4x) + 4 \cdot 5x}{(1-4x)^2} = \frac{5}{(1-4x)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{5 \cdot 1 + 4 \cdot 0}{(1-4x)^2} = \frac{5}{(1-4x)^2}.$$

□

BÀI 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(x-1)'(x+2) - (x+2)'(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - 1 \cdot (x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

□

BÀI 9. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{6x-1}{x+2}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(6x-1)'(x+2) - (x+2)'(6x-1)}{(x+2)^2} = \frac{6 \cdot (x+2) - 1 \cdot (6x-1)}{(x+2)^2} = \frac{13}{(x+2)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{6 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{13}{(x+2)^2}.$$

□

BÀI 10. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{mx-2}{x-m+1}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(mx-2)'(x-m+1) - (x-m+1)'(mx-2)}{(x-m+1)^2} = \frac{m(x-m+1) - 1 \cdot (mx-2)}{(x-m+1)^2} = \frac{-m^2 + m + 2}{(x-m+1)^2}.$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{m \cdot (-m+1) + 2 \cdot 1}{(x-m+1)^2} = \frac{-m^2 + m + 2}{(x-m+1)^2}.$$

□

BÀI 11. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{((3m+1)x - m^2 + m)'(x+m) - (x+m)'((3m+1)x - m^2 + m)}{(x+m)^2} \\ &= \frac{(3m+1) \cdot (x+m) - ((3m+1)x - m^2 + m)}{(x+m)^2} \\ &= \frac{4m^2}{(x+m)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{(3m+1) \cdot m - 1 \cdot (-m^2+m)}{(x+m)^2} = \frac{4m^2}{(x+m)^2}.$$

□

Làm quen nhóm công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ và

$$\left(\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)^2}$$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 4}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 + x + 1)'(2x^2 - x + 4) - (2x^2 - x + 4)'(x^2 + x + 1)}{(2x^2 - x + 4)^2} \\ &= \frac{(2x + 1)(2x^2 - x + 4) - (4x - 1)(x^2 + x + 1)}{(2x^2 - x + 4)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 4x + 5}{(2x^2 - x + 4)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{(-1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)x^2 + 2(1 \cdot 4 - 2 \cdot 1)x + (1 \cdot 4 + 1 \cdot 1)}{(2x^2 - x + 4)^2} = \frac{-3x^2 + 4x + 5}{(2x^2 - x + 4)^2}.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 - 2(m-1)x + m + 3}{x - 1}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 - 2(m-1)x + m + 3)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - 2(m-1)x + m + 3)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{(2x - 2(m-1)) \cdot (x - 1) - (x^2 - 2(m-1)x + m + 3)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x + m - 5}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -2(m-1) & m+3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{x^2 - 2x + m - 5}{(x - 1)^2}.$$

□

2 BÀI TẬP ỨNG DỤNG

BÀI 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2) - (1-x+x^2)'(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} \\ &= \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (-1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} \\ &= \frac{-4x+2}{(2x^2-x+4)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{(-1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1)x^2 + 2(-1 \cdot 1 - 1 \cdot 1)x + (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)}{(2x^2 - x + 4)^2} = \frac{-4x+2}{(2x^2 - x + 4)^2}.$$

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 7}{2x - 5}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 - 3x + 7)'(2x - 5) - (2x - 5)'(x^2 - 3x + 7)}{(2x - 5)^2} \\ &= \frac{(2x - 3)(2x - 5) - 2(x^2 - 3x + 7)}{(2x - 5)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 10x + 1}{(2x - 5)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \frac{2x^2 - 10x + 1}{(2x - 5)^2}.$$

□

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x - 5}{x^2 + x + 2}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x - 5)'(x^2 + x + 2) - (x^2 + x + 2)'(2x - 5)}{(x^2 + x + 2)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + x + 2) - (2x + 1)(2x - 5)}{(x^2 + x + 2)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 10x + 9}{(x^2 + x + 2)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-2x^2 + 10x + 9}{(x^2 + x + 2)^2}.$$

□

BÀI 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 + (m+2)x - 3m + 1}{x - 1}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x^2 + (m+2)x - 3m + 1)'(x - 1) - (x - 1)'(2x^2 + (m+2)x - 3m + 1)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{(4x + m + 2) \cdot (x - 1) - (2x^2 + (m+2)x - 3m + 1)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + 2m - 3}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & m+2 & -3m+1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2x^2 - 4x + 2m - 3}{(x - 1)^2}.$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 1}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 + 5x - 2)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 + 5x - 2)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{(2x + 5)(x - 1) - (x^2 + 5x - 2)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$$

□

BÀI 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x - 3}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x^2 - 4x + 1)'(x - 3) - (x - 3)'(2x^2 - 4x + 1)}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{(4x - 4)(x - 3) - (2x^2 - 4x + 1)}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 12x + 11}{(x - 3)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{2x^2 - 12x + 11}{(x - 3)^2}.$$

□

BÀI 7. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-3x+3}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x-1)'(x^2-3x+3) - (x^2-3x+3)'(x-1)}{(x^2-3x+3)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2-3x+3) - (2x-3)(x-1)}{(x^2-3x+3)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x}{(x^2-3x+3)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{-x^2+2x}{(x^2-3x+3)^2}.$$

□

BÀI 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2+mx-3m+1}{mx-1}$.

Lời giải.

— Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x^2+mx-3m+1)'(mx-1) - (mx-1)'(2x^2+mx-3m+1)}{(mx-1)^2} \\ &= \frac{(4x+m) \cdot (x-1) - m(2x^2+mx-3m+1)}{(mx-1)^2} \\ &= \frac{2mx^2-4x+3m^2-2m}{(mx-1)^2}. \end{aligned}$$

— Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & m & -3m+1 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix} = \frac{2mx^2-4x+3m^2-2m}{(mx-1)^2}.$$

□

Làm quen nhóm công thức $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ và $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

1 Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \frac{1}{x-1} + 1.$

② $y = x - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^4+6x^3-1}.$

③ $y = \frac{1}{3x^2+2x}.$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} + 0 = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = 1 + \frac{9}{x^2} + 2 \cdot \frac{(x^4 + 6x^3 - 1)'}{(x^4 + 6x^3 - 1)^2} = 1 + \frac{9}{x^2} + 2 \cdot \frac{(4x^3 + 18x^2)}{(x^4 + 6x^3 - 1)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad y' = -\frac{(3x^2 + 2x)'}{(3x^2 + 2x)^2} = -\frac{6x + 2}{(3x^2 + 2x)^2}.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{1}{(2x-5)^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{4}{(x^2 - 2x + 5)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{1}{x} - \frac{2}{(3x - x^2)^5}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = -\frac{[(2x-5)^2]'}{(2x-5)^4} = -\frac{2(2x-5) \cdot (2x-5)'}{(2x-5)^4} = -\frac{4}{(2x-5)^3}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = -4 \cdot \frac{[(x^2 - 2x + 5)^2]'}{(x^2 - 2x + 5)^4} = -4 \cdot \frac{2(x^2 - 2x + 5) \cdot (x^2 - 2x + 5)'}{(x^2 - 2x + 5)^4} = -\frac{16(x-1)}{(x^2 - 2x + 5)^3} = \frac{16(1-x)}{(x^2 - 2x + 5)^3}.$$

$$\textcircled{3} \quad y' = -\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{[(3x - x^2)^5]'}{(3x - x^2)^{10}} = -\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{5(3x - x^2)^4 \cdot (3x - x^2)'}{(3x - x^2)^{10}} = -\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{5(3-2x)}{(3x - x^2)^6} = \frac{10(3-2x)}{(3x - x^2)^6} - \frac{1}{x^2}.$$

□

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{3}{x-1} + \frac{5}{2(2x-1)^6}$.

Lời giải.

$$y' = -3 \cdot \frac{(x-1)'}{(x-1)^2} - 5 \cdot \frac{[2(2x-1)^6]'}{4(2x-1)^{12}} = -3 \cdot \frac{1}{(x-1)^2} - 5 \cdot \frac{2 \cdot 6(2x-1)^5 \cdot (2x-1)'}{4(2x-1)^{12}} = -\frac{3}{(x-1)^2} - \frac{30}{(2x-1)^7}.$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{1}{x+1} - 2x.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{1}{x^2 - 3x + 1}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} - 2 = -\frac{1}{(x+1)^2} - 2.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \left[\frac{1}{(x-1)^2} \right]' = -\frac{[(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = -\frac{2(x-1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$\textcircled{3} \quad y' = -\frac{(x^2 - 3x + 1)'}{(x^2 - 3x + 1)^2} = -\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{3 - 2x}{(x^2 - 3x + 1)^2}.$$

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}.$$

$$\textcircled{2} y = \frac{3}{(2x^2 - 8x)^4} - 2x^2.$$

$$\textcircled{3} y = x - \frac{3}{(x^2 - 3x)^{10}}.$$

$$\textcircled{4} y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2x - 1)^5}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} y' = -\frac{[(x^2 - x + 1)^5]'}{(x^2 - x + 1)^{10}} = -\frac{5(x^2 - x + 1)^4 \cdot (x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^{10}} = -\frac{5(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^6} = \frac{5(1 - 2x)}{(x^2 - x + 1)^6}.$$

$$\textcircled{2} y' = -3 \cdot \frac{[(2x^2 - 8x)^4]'}{(2x^2 - 8x)^8} - 4x = -3 \cdot \frac{4(2x^2 - 8x)^3 \cdot (2x^2 - 8x)'}{(2x^2 - 8x)^8} - 4x = -3 \cdot \frac{4(4x - 8)}{(2x^2 - 8x)^5} - 4x = \frac{3(2 - x)}{(x^2 - 4x)^5} - 4x.$$

$$\textcircled{3} y' = 1 - 3 \cdot \frac{[(x^2 - 3x)^{10}]'}{(x^2 - 3x)^{20}} = 1 - 3 \cdot \frac{10(x^2 - 3x)^9 \cdot (x^2 - 3x)'}{(x^2 - 3x)^{20}} = 1 - 3 \cdot \frac{10(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^{11}} = 1 - \frac{30(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^{11}}.$$

$$\textcircled{4} y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{(x^2)'}{x^4} - \frac{[(2x - 1)^5]'}{(2x - 1)^{10}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^4} - \frac{5(2x - 1)^4 \cdot (2x - 1)'}{(2x - 1)^{10}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{10}{(2x - 1)^6}.$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} y = -x + 1 - \frac{1}{x + 2}.$$

$$\textcircled{2} y = \frac{3}{(3x + 5)^2}.$$

$$\textcircled{3} y = \frac{2}{x^3 - 3x^2 + 1}.$$

$$\textcircled{4} y = \frac{1}{(x^3 - 3x)^{11}} - \frac{1}{x}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} y' = -1 + 0 + \frac{(x + 2)'}{(x + 2)^2} = -1 + \frac{1}{(x + 2)^2}.$$

$$\textcircled{2} y' = -3 \cdot \frac{[(3x + 5)^2]'}{(3x + 5)^4} = -3 \cdot \frac{2(3x + 5) \cdot (3x + 5)'}{(3x + 5)^4} = -\frac{18}{(3x + 5)^3}.$$

$$\textcircled{3} y' = -2 \cdot \frac{(x^3 - 3x^2 + 1)'}{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} = -2 \cdot \frac{3x^2 - 6x}{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} = -\frac{6x(x - 2)}{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} = \frac{6x(2 - x)}{(x^3 - 3x^2 + 1)^2}.$$

$$\textcircled{4} y' = -\frac{[(x^3 - 3x)^{11}]'}{(x^3 - 3x)^{22}} + \frac{1}{x^2} = -\frac{11(x^3 - 3x)^{10} \cdot (x^3 - 3x)'}{(x^3 - 3x)^{22}} + \frac{1}{x^2} = -\frac{11(3x^2 - 3)}{(x^3 - 3x)^{12}} + \frac{1}{x^2} = \frac{33(1 - x^2)}{(x^3 - 3x)^{12}} + \frac{1}{x^2}.$$

□

Làm quen nhóm công thức $\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$, $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$ và kết hợp một số công thức khác

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5.$

② $y = 3x^2 - 4\sqrt{x} + \frac{2}{x} - 1.$

③ $y = \sqrt{x^2 + 6x + 7}.$

Lời giải.

① $y' = 8x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$

② $y' = 6x - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 6x - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}.$

③ $y' = \frac{(x^2 + 6x + 7)'}{2\sqrt{x^2 + 6x + 7}} = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x + 7}} = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 7}}.$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}.$

② $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}.$

③ $y = \sqrt{4x - x^2}.$

Lời giải.

① $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2 - 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 5x^4 - 12x^2 + 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}.$

② $y' = \frac{(x^2 - 2x - 8)'}{2\sqrt{x^2 - 2x - 8}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 8}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}.$

③ $y' = \frac{(4x - x^2)'}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}.$

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y = \sqrt{x + 4} - \sqrt{4 - x}.$

② $y = x - 2\sqrt{x^2 + 3x + 3}.$

③ $y = 2x - \sqrt{x^2 - 3}.$

④ $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}.$

⑤ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{12 - 3x^2}.$

Lời giải.

① Tập xác định: $\mathcal{D} = [-4; 4].$

Ta có $y' = \frac{(x + 4)'}{2\sqrt{x + 4}} - \frac{(4 - x)'}{2\sqrt{4 - x}} = \frac{1}{2\sqrt{x + 4}} + \frac{1}{2\sqrt{4 - x}}.$

② Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}.$

Ta có $y' = 1 - \frac{2 \cdot (x^2 + 3x + 3)'}{2\sqrt{x^2 + 3x + 3}} = 1 - \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}} = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 3} - 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}.$

- ③ Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = 2 - \frac{(x^2 - 3)'}{2\sqrt{x^2 - 3}} = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{2\sqrt{x^2 - 3} - x}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

- ④ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 1 + \frac{(2x^2 + 1)'}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = 1 + \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2x^2 + 1} + 2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

- ⑤ Tập xác định: $\mathcal{D} = [-2; 2]$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(12 - 3x^2)'}{2\sqrt{12 - 3x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-6x}{2\sqrt{12 - 3x^2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}} \right) = \frac{\sqrt{12 - 3x^2} + 3x}{2\sqrt{12 - 3x^2}}.$$

□

BÀI 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y = (3x^2 - x)\sqrt{2x + 1}$.

② $y = (1 - x)\sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

③ $y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

④ $y = x\sqrt{16 - x^2} + (x - 1)\sqrt{x}$.

⑤ $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - (x + 1)\sqrt{x + 1}$.

Lời giải.

- ① Tập xác định: $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$$\text{Ta có } y' = (6x - 1)\sqrt{2x + 1} + (3x^2 - x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{(6x - 1)(2x + 1) + 3x^2 - x}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{15x^2 + 3x - 1}{\sqrt{2x + 1}}.$$

- ② Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = -\sqrt{x^2 - 2x + 5} + (1 - x) \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \frac{-(x^2 - 2x + 5) - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \frac{-2x^2 + 4x - 6}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

- ③ Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = -\frac{3(x^2)'}{x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = -\frac{6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}.$$

- ④ Tập xác định: $\mathcal{D} = [0; 4]$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{16 - x^2} + x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{16 - x^2}} + \sqrt{x} + (x - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{16 - x^2 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} + \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

- ⑤ Tập xác định: $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 5}} - \sqrt{x + 1} - (x + 1) \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} - \frac{3}{2}\sqrt{x + 1}.$$

□

BÀI 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y = \sqrt{(x-2)^3}$.

② $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

③ $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$.

④ $y = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$.

⑤ $y = \frac{\sqrt{2x^2-x+3}}{3x+2}$.

Lời giải.

① Tập xác định: $\mathcal{D} = [2; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{3(x-2)^2}{2\sqrt{(x-2)^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{x-2}$.

② Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$.

Ta có $y' = \frac{\sqrt{1-x} - (1+x) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{2(1-x) + (1+x)}{2\sqrt{1-x}(1-x)} = \frac{3-x}{2\sqrt{1-x}(1-x)}$.

③ Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{3x^2\sqrt{x^2-6} - x^3 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-6}}}{x^2-6} = \frac{3x^2(x^2-6) - x^4}{(x^2-6)\sqrt{x^2-6}} = \frac{2x^4 - 18x^2}{(x^2-6)\sqrt{x^2-6}}$.

④ Tập xác định: $\mathcal{D} = (-1; 1)$.

Ta có $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - (x+1) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2 + x(x+1)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

⑤ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{(4x-1)(3x+2)}{2\sqrt{2x^2-x+3}} - 3\sqrt{2x^2-x+3}}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{(4x-1)(3x+2) - 6(2x^2-x+3)}{2(3x+2)^2\sqrt{2x^2-x+3}} \\ &= \frac{12x^2+5x-2-12x^2+6x-18}{2(3x+2)^2\sqrt{2x^2-x+3}} \\ &= \frac{11x-20}{2(3x+2)^2\sqrt{2x^2-x+3}}. \end{aligned}$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \frac{2}{x} + 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^4 + 1$.

② $y = \sqrt{1+2x-x^2}$.

③ $y = \sqrt{2x^2-5x+2}$.

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = -2 \cdot \frac{1}{x^2} + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot 4x^3 = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2x^3.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \frac{(1+2x-x^2)'}{2\sqrt{1+2x-x^2}} = \frac{2-2x}{2\sqrt{1+2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

$$\textcircled{3} \quad y' = \frac{(2x^2-5x+2)'}{2\sqrt{2x^2-5x+2}} = \frac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+2}}.$$

□

BÀI 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{1}{4}x^2 - x - \sqrt{4x-x^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = x^2\sqrt{x}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = x^2 + x\sqrt{x} + 1.$$

$$\textcircled{4} \quad y = (x-1)\sqrt{3x+2}.$$

$$\textcircled{5} \quad y = x\sqrt{1-x^2}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad \text{Tập xác định: } \mathcal{D} = [0; 4].$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2}x - 1 - \frac{(4x-x^2)'}{2\sqrt{4x-x^2}} = \frac{1}{2}x - 1 - \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{(x-2)\sqrt{4x-x^2} + 2x-4}{2\sqrt{4x-x^2}}.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Tập xác định: } \mathcal{D} = [0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } y' = (x^2)' \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot (\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Tập xác định: } \mathcal{D} = [0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } y' = 2x + (x)' \cdot \sqrt{x} + x(\sqrt{x})' = 2x + \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = 2x + \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Tập xác định: } \mathcal{D} = \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

$$\text{Ta có } y' = (x-1)' \cdot \sqrt{3x+2} + (x-1) \cdot (\sqrt{3x+2})' = \sqrt{3x+2} + (x-1) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} = \frac{2(3x+2) + 3(x-1)}{2\sqrt{3x+2}} = \frac{9x+1}{2\sqrt{3x+2}}.$$

$$\textcircled{5} \quad \text{Tập xác định: } \mathcal{D} = [-1; 1].$$

$$\text{Ta có } y' = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

BÀI 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}.$$

$$\textcircled{4} \quad y = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}.$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x-1}.$$

Lời giải.

- ① Tập xác định: $\mathcal{D} = [0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\frac{x+100}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+100)^2} = \frac{100-x}{2(x+100)^2\sqrt{x}}.$$

- ② Tập xác định: $\mathcal{D} = (-4; 4)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\sqrt{16-x^2} - x \cdot \frac{(-x)}{\sqrt{16-x^2}}}{16-x^2} = \frac{(16-x^2) + x^2}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}} = \frac{16}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}.$$

- ③ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sqrt{x^2-x+3} - (x+2) \cdot \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}}{x^2-x+3} \\ &= \frac{2(x^2-x+3) - (x+2)(2x-1)}{2(x^2-x+3)\sqrt{x^2-x+3}} \\ &= \frac{2x^2-2x+6 - (2x^2+3x-2)}{2(x^2-x+3)\sqrt{x^2-x+3}} \\ &= \frac{-5x+8}{2(x^2-x+3)\sqrt{x^2-x+3}}. \end{aligned}$$

- ④ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \cdot x - \sqrt{4+x^2}}{x^2} = \frac{x^2 - (4+x^2)}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{-4}{x^2\sqrt{4+x^2}}.$$

- ⑤ Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x-1) \left(x\sqrt{x^2+1} \right)' - 2x\sqrt{x^2+1}}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1} + (2x-1) \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - 2x\sqrt{x^2+1}}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x^2+1) + (2x-1)x^2 - 2x(x^2+1)}{(2x-1)^2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 - 1}{(2x-1)^2\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

□

BÀI 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y = \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}.$

② $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}.$

③ $y = (1 - \sqrt{1-2x})^3.$

④ $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$

⑤ $y = \frac{1+\sqrt{x+3}}{x-1}.$

Lời giải.

① Tập xác định: $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(x\sqrt{x})'(x^2-1) - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2-1) - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x^2-1)^2}.$$

② Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{x^2-1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}}.$$

③ Tập xác định: $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

$$\text{Ta có } y' = 3(1 - \sqrt{1-2x})^2 (1 - \sqrt{1-2x})' = 3(1 - \sqrt{1-2x})^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

④ Tập xác định: $\mathcal{D} = [0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-2}{(1 + \sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{-1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}.$$

⑤ Tập xác định: $\mathcal{D} = [-3; +\infty) \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot (x-1) - (1 + \sqrt{x+3})}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - 2\sqrt{x+3} - 2(x+3)}{2\sqrt{x+3}(x-1)^2} = \frac{-x-7-2\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}(x-1)^2}.$$

□

Nhóm bài toán chứng minh, giải phương trình và bất phương trình

Phương pháp giải

- Tính y' .
- Dùng các kiến thức đã học để rút gọn, biến đổi về phương trình hoặc bất phương trình đã biết cách giải như phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc ba (sử dụng máy tính cầm tay).
- Đối với bài toán chứng minh đẳng thức thì ta biến đổi về phức tạp thành về đơn giản hoặc biến đổi cả hai vế cùng bằng một biểu thức trung gian.

⚠ Một số bài toán tìm nghiệm của phương trình bậc hai thỏa mãn điều kiện cho trước.

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) với $a \neq 0$.

Nếu phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thì
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

① Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$.

② Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

③ Phương trình (*) có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

⚠ Một số bài toán về bất phương trình bậc hai thường gặp.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

① $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

② $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

③ $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

④ $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

1 **VÍ DỤ**

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$. Chứng minh rằng $2y'\sqrt{1 + x^2} - y = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})'}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{2\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

Do đó, $2y'\sqrt{1+x^2} - y = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} = 0$.
 Vậy $2y'\sqrt{1+x^2} - y = 0$. □

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = 3x + \sqrt{10-x^2}$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$ (*).

Ta có $y' = 3 - \frac{x}{\sqrt{10-x^2}}$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow 3 - \frac{x}{\sqrt{10-x^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 = \frac{x}{\sqrt{10-x^2}} \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{10-x^2} = x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(10-x^2) = x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 10x^2 - 90 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \quad (\text{thỏa điều kiện } (*)). \end{aligned}$$

Vậy phương trình $y' = 0$ có duy nhất nghiệm $x = 3$. □

 Cần nhớ $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 3mx + 201$. Tìm tham số m để phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3m$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3m = 0$ (*).

Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ 1 - 9m > 0 \\ \frac{2}{3} > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{9} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{9}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m \in \left(0; \frac{1}{9}\right)$. □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$. Tìm tham số m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 10$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$ và

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (*).$$

Ta biến đổi được $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 10$.

Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S^2 - 3P = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - (m^2 - 1) > 0 \\ (2m)^2 - 3(m^2 - 1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \pm\sqrt{7}$. □

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$. Tìm m để phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x$ và

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 0 \Leftrightarrow 2x(2mx^2 + m^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương là

$$\begin{cases} 2m \neq 0 \\ \Delta' = 0 - 2m(m^2 - 9) > 0 \\ 2m \cdot 0^2 + m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3. \end{cases} \\ m \neq 3 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m < -3$ hoặc $0 < m < 3$. □

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 1}$. Giải bất phương trình $y' < 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.

Điều kiện $x \neq 1$ (*).

Khi đó, $y' < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Đối chiếu với điều kiện (*), bất phương trình $y' < 0$ có tập nghiệm là $S = (-1; 3) \setminus \{1\}$. □

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}(m^2 - m - 6)x^3 - (m + 2)x^2 - 4x + m$. Tìm tham số m sao cho $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (m^2 - m - 6)x^2 - 2(m + 2)x - 4$.

— Trường hợp $m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3. \end{cases}$

– Với $m = -2$ thì $f'(x) = -4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, $m = -2$ thỏa mãn bài toán.

– Với $m = 3$ thì $f'(x) = -10x - 4$ là nhị thức bậc nhất nên $f'(x)$ không lớn hơn 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, $m = 3$ không thỏa mãn bài toán.

— Trường hợp $m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 3 \end{cases}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} & f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & (m^2 - m - 6)x^2 - 2(m + 2)x - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m^2 - m - 6 < 0 \\ ((m + 2)^2 + 4(m^2 - m - 6)) < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m^2 - m - 6 < 0 \\ 5m^2 - 20 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 3 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -2 < m < 2. \end{aligned}$$

Tóm lại, giá trị m cần tìm là $-2 \leq m < 2$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Khi đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 0, x = 2$. □

BÀI 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$.

Điều kiện $x \neq -1$ (*).

Khi đó, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0. \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện (*), phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x = -2, x = 0$. □

BÀI 3. Cho hàm số $y = (x - 1)\sqrt{2x + 1}$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 \cdot \sqrt{2x + 1} + (x - 1) \cdot \frac{(2x + 1)'}{2\sqrt{2x + 1}} = \sqrt{2x + 1} + \frac{x - 1}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{2x + 1 + x - 1}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{2x + 1}}$.

Điều kiện $x > -\frac{1}{2}$ (*).

Khi đó, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Đối chiếu với điều kiện (*), phương trình $y' = 0$ có một nghiệm $x = 0$. □

BÀI 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 8$. Giải bất phương trình $y' \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4x - 6$.

Khi đó, $y' \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{10} \leq x \leq 2 + \sqrt{10}$.

Vậy bất phương trình $y' \leq 0$ có tập nghiệm là $S = [2 - \sqrt{10}; 2 + \sqrt{10}]$. □

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 1$. Giải bất phương trình $f'(x) < 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -4x^3 + 16x$.

Khi đó, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 16x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x > 2. \end{cases}$

Vậy bất phương trình $f'(x) < 0$ có tập nghiệm là $S = (-2; 0) \cup (2; +\infty)$. □

BÀI 6. Cho hàm số $y = 3mx^3 - 2x^2 + (3 - m)x$. Tìm tham số m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải.

Ta có $y' = 9mx^2 - 4x + 3 - m$ và $y' = 0 \Leftrightarrow 9mx^2 - 4x + 3 - m = 0$ (*).

Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ ac < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m \neq 0 \\ 9m(3 - m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > 3 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m < 0$ hoặc $m > 3$. □

BÀI 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x + 1$. Tìm tham số m sao cho $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + m + 6$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} & f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & x^2 + 2mx + m + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - m - 6 < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & -2 < m < 3. \end{aligned}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $-2 < m < 3$. □

BÀI 8. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + mx + 3$. Xác định tham số m để phương trình $y' = 0$ có

- ① hai nghiệm phân biệt cùng âm,
- ② hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = -mx^2 + 2(m-1)x + m$ và $y' = 0 \Leftrightarrow -mx^2 + 2(m-1)x + m = 0 \quad (*)$.

- ① Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt cùng âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \neq 0 \\ (m-1)^2 + m^2 > 0 \\ \frac{2(m-1)}{m} < 0 \\ -1 > 0 \quad (\text{vô lý}). \end{cases}$$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn bài toán.

- ② Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$.
Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ S^2 - 2P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 + m^2 \geq 0 \\ \left[\frac{2(m-1)}{m} \right]^2 + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 3m^2 - 8m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \begin{bmatrix} m = 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = 2$ hoặc $m = \frac{2}{3}$. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 9. Cho hàm số $f(x) = -2x^4 - x^2 + 4$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -8x^3 - 2x$.

Khi đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x(4x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có một nghiệm $x = 0$. □

BÀI 10. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 2}{1 - x}$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-2x^2 + 4x + 2}{(1 - x)^2}$.

Điều kiện $x \neq 1 \quad (*)$.

Khi đó, $y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện (*), phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x = 1 + \sqrt{2}$, $x = 1 - \sqrt{2}$. □

BÀI 11. Cho hàm số $y = x - 2 + \frac{4}{x^2}$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$ (*).

Ta có $y' = 1 - \frac{4(x^2)'}{(x^2)^2} = 1 - \frac{8x}{x^4} = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$.

Khi đó, $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Đối chiếu với điều kiện (*), phương trình $y' = 0$ có một nghiệm $x = 2$. □

BÀI 12. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2$. Tìm m để phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$ và $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \end{cases} (*)$.

Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương là

$$\begin{cases} m > 0 \\ 0^2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m > 0$. □

BÀI 13. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

Khi đó, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1. \end{cases}$

Vậy bất phương trình $f'(x) > 0$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. □

BÀI 14. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + (4m - 9)x$. Tìm tham số m sao cho $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2mx + 4m - 9$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} & f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & 3x^2 + 2mx + 4m - 9 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3 > 0 \\ m^2 - 3(4m - 9) \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & m^2 - 12m + 27 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & 3 \leq m \leq 9. \end{aligned}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $3 \leq m \leq 9$. □

BÀI 15. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Tìm tham số m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx - 1$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0$ (*).

Phương trình (*) có $ac = -1 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Khi đó, $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow (2m)^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow 4m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \pm 1$. □

DẠNG 1.3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

Bảng công thức đạo hàm

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
◦ $(\sin x)' = \cos x$	◦ $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
◦ $(\cos x)' = -\sin x$	◦ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
◦ $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	◦ $(\tan u)' = (1 + \tan^2 u) \cdot u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
◦ $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	◦ $(\cot u)' = -(1 + \cot^2 u) \cdot u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 5 \sin x - 3 \cos x.$

② $y = x - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^4 + 6x^3 - 1}.$

③ $y = \cos^2 5x.$

④ $y = \tan^3 \left(5x + \frac{\pi}{3} \right).$

Lời giải.

① $y' = 5 \cos x + 3 \sin x.$

② $y' = \frac{2}{\cos^2 2x} + \frac{4}{\sin^2 2x}.$

③ $y' = 2 \cos 5x \cdot (\cos 5x)' = -2 \cos 5x \cdot \sin 5x \cdot (5x)' = -5 \sin 10x.$

④ $y' = 3 \tan^2 \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \left(\tan \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) \right)' = 15 \tan^2 \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(5x + \frac{\pi}{3} \right)}.$

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

② $y = \sqrt{1 + \sin 2x}.$

Lời giải.

① Ta có $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$
Suy ra $y' = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (-\sin 4x) = -\sin 4x.$

$$\textcircled{2} \quad y' = \frac{(1 + \sin 2x)'}{2\sqrt{1 + \sin 2x}} = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}.$$

□

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{2 \sin x - 3 \cos x}{\sin x + \cos x}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \left(\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \right)^2.$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2 \sin x - 3 \cos x)'(\sin x + \cos x) - (2 \sin x - 3 \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(2 \cos x + 3 \sin x)(\sin x + \cos x) - (2 \sin x - 3 \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x + 3 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{5(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{5}{\sin 2x + 1}. \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \right) \cdot \frac{-2 \sin 2x(1 - \cos 2x) - (1 + \cos 2x) \cdot 2 \sin 2x}{(1 - \cos 2x)^2} \\ &= 2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \right) \cdot \frac{-2 \sin 2x + 2 \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 2x - 2 \sin 2x \cos 2x}{(1 - \cos 2x)^2} \\ &= -\frac{8 \sin 2x(1 + \cos 2x)}{(1 - \cos 2x)^3}. \end{aligned}$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = 2 \sin x + \cos 2x.$$

Lời giải.

$$y' = 2 \sin x + (2x)' \cdot (-\sin 2x) = 2 \cos x - 2 \sin 2x.$$

□

$$\textcircled{2} \quad y = \cos 3x + \tan(x^2 + 2x).$$

Lời giải.

$$y' = -3 \sin 3x + \frac{(x^2 + 2x)'}{\cos^2(x^2 + 2x)} = -3 \sin 3x + \frac{2x + 2}{\cos^2(x^2 + 2x)}.$$

□

$$\textcircled{3} \quad y = (2 \cos x + 1)(3 \sin x + 1).$$

Lời giải.

$$y' = -2 \sin x(3 \sin x + 1) + (2 \cos x + 1) \cdot 3 \cos x = 6(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin x + 3 \cos x = 6 \cos 2x - 2 \sin x + 3 \cos x$$

□

$$\textcircled{4} \quad y = \sin x - \frac{1}{3} \cos 3x + 2 \tan x + \pi.$$

Lời giải.

$$y' = \cos x + \sin 3x + \frac{2}{\cos^2 x}.$$

□

⑤ $y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}\sin 2x + \sqrt{2x^2 + x}.$

Lời giải.

$$y' = 3x^3 + \cos 2x + \frac{(2x^2 + x)'}{2\sqrt{2x^2 + x}} = 3x^3 + \cos 2x + \frac{4x + 1}{2\sqrt{2x^2 + x}}. \quad \square$$

⑥ $y = 7\sin 4x - 2\cos 5x.$

Lời giải.

$$y' = 28\cos 4x + 10\sin 5x. \quad \square$$

⑦ $y = \cos(3x^7 + 2) + \cot 2x.$

Lời giải.

$$y' = -(3x^7 + 2)' \cdot \sin(3x^7 + 2) - \frac{2}{\sin^2 2x} = -21x^6 \sin(3x^7 + 2) - \frac{2}{\sin^2 2x}. \quad \square$$

⑧ $y = \sin 2x - \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

Lời giải.

$$y' = 2\cos 2x + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)'}{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = 2\cos 2x + \frac{1}{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}. \quad \square$$

⑨ $y = \sin x + 3\cos x - 2\tan x.$

Lời giải.

$$y' = \cos x - 3\sin x - \frac{2}{\cos^2 x}. \quad \square$$

⑩ $y = \cos(2x^2 - 5x + 14).$

Lời giải.

$$y' = -(2x^2 - 5x + 14)' \cdot \sin(2x^2 - 5x + 14) = (5 - 4x)\sin(2x^2 - 5x + 14). \quad \square$$

⑪ $y = \cos^2 2x - \sin 2x.$

Lời giải.

$$y' = 2\cos 2x \cdot (\cos 2x)' - 2\cos 2x = -4\sin 2x \cos 2x - 2\cos 2x = -2\sin 4x - 2\cos 2x. \quad \square$$

⑫ $y = \sin^2 3x + \cos x.$

Lời giải.

$$y' = 2\sin 3x \cdot (\sin 3x)' - \sin x = 6\sin 3x \cos 3x - \sin x = 3\sin 6x - \sin x \quad \square$$

⑬ $y = \cos^3 2x - \tan x.$

Lời giải.

$$y' = 3\cos^2 2x \cdot (\cos 2x)' - \frac{1}{\cos^2 x} = -6\cos^2 2x \cdot \sin 2x - \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \square$$

⑭ $y = \sin^3(2x + 1).$

Lời giải.

$$y' = 3\sin^2(2x + 1) \cdot (\sin(2x + 1))' = 6\sin^2(2x + 1) \cdot \cos(2x + 1). \quad \square$$

⑮ $y = \cos^4(3x - 1).$

Lời giải.

$$y' = 4\cos^3(3x - 1) \cdot (\cos(3x - 1))' = -12\cos^3(3x - 1) \cdot \sin(3x - 1). \quad \square$$

⑯ $y = \cos^2(\sin 2x).$

Lời giải.

$$y' = 2\cos(\sin 2x) \cdot (\cos(\sin 2x))' = -2\cos(\sin 2x) \sin(2\sin 2x) \cos 2x = -\sin(2\sin 2x) \cdot \cos 2x. \quad \square$$

⑪ $y = \sin(\cos^2 x \tan^2 x).$

Lời giải.

Ta có $y = \sin(\sin^2 x)$. Suy ra $y' = (\sin^2 x)' \cdot \cos(\sin^2 x) = 2 \sin x \cos x \cdot \cos(\sin^2 x) = \sin 2x \cdot \cos(\sin^2 x)$. $\square$

⑫ $y = 2 \sin^2 4x - 3 \cos^3 5x.$

Lời giải.

$$y' = 4 \sin 4x \cdot (\sin 4x)' - 9 \cos^2 5x \cdot (\cos 5x)' = 16 \sin 4x \cos 4x + 45 \cos^2 5x \sin 5x = 8 \sin 8x + 45 \cos^2 5x \sin 5x.$$

$\square$

⑬ $y = \cos^2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right).$

Lời giải.

$$y' = 2 \cos \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \left(\cos \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right)' = -2 \cos \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)' = -\sin \left(2 \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2} \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right).$$

$\square$

⑭ $y = \cos^{2017} \left(x^3 + \frac{\pi}{7} \right).$

Lời giải.

$$y' = 2017 \cdot \cos^{2016} \left(x^3 + \frac{\pi}{7} \right) \cdot \left(\cos \left(x^3 + \frac{\pi}{7} \right) \right)' = -6051x^2 \cdot \cos^{2016} \left(x^3 + \frac{\pi}{7} \right) \cdot \sin \left(x^3 + \frac{\pi}{7} \right).$$

$\square$

⑮ $y = \tan^3 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)^2.$

Lời giải.

$$y' = 3 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)^2 \cdot \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)^2 \right)' = 3 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)^2 \cdot \frac{\left(\left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)^2 \right)'}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)^2} = 12 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)^2}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)^2}.$$

$\square$

⑯ $y = (3 - \sin x)^3.$

Lời giải.

$$y' = 3(3 - \sin x)^2 \cdot (3 - \sin x)' = -3 \cos x (3 - \sin x)^2.$$

$\square$

BÀI 2.

① $y = (\sin x + \cos x)^8.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = \left[\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]^8 = 16 \sin^8 \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{Suy ra } y' = 16 \cdot 8 \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin^7 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 128 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin^7 \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$\square$

② $y = (2 \sin x - \cos x)^4.$

Lời giải.

$$y' = 4(2 \sin x - \cos x)'(2 \sin x - \cos x)^3 = 4(2 \cos x + \sin x)(2 \sin x - \cos x)^3.$$

$\square$

③ $y = (2 + \sin^2 2x)^8.$

Lời giải.

$$y' = 8(2 + \sin^2 2x)'(2 + \sin^2 2x)^7 = 16(\sin 2x)' \sin 2x (2 + \sin^2 2x)^7 = 16 \sin 4x (2 + \sin^2 2x)^7.$$

$\square$

④ $y = (\cos^4 x - \sin^4 x)^5$.

Lời giải.

Ta có $y = [(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)]^5 = \cos^5 2x$. Suy ra $y' = 5(\cos 2x)' \cos 2x = -5 \sin 4x$. □

⑤ $y = \sin \sqrt{x}$.

Lời giải.

$$y' = \sqrt{x}' \cos \sqrt{x} = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$
□

⑥ $y = \sqrt{\cos 2x}$.

Lời giải.

$$y' = \frac{(\cos 2x)'}{2 \cos 2x} = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$
□

⑦ $y = \sqrt{\sin x + 2x}$.

Lời giải.

$$y' = \frac{(\sin x + 2x)'}{2\sqrt{\sin x + 2x}} = \frac{\cos x + 2}{2\sqrt{\sin x + 2x}}.$$
□

⑧ $y = \cos \sqrt{2 + x^2}$.

Lời giải.

$$y' = \sqrt{2 + x^2}' \sin \sqrt{2 + x^2} = \frac{(2 + x^2)'}{2\sqrt{2 + x^2}} \sin \sqrt{2 + x^2} = \frac{x \sin \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{2 + x^2}}.$$
□

⑨ $y = \sin \sqrt{x^2 + 1}$.

Lời giải.

$$y' = \sqrt{x^2 + 1}' \cos \sqrt{x^2 + 1} = \frac{x \cos \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$
□

⑩ $y = \sqrt{2x^3 + \sin 5x}$.

Lời giải.

$$y' = \frac{(2x^3 + \sin 5x)'}{2\sqrt{2x^3 + \sin 5x}} = \frac{6x^2 + 5 \cos 5x}{2\sqrt{2x^3 + \sin 5x}}.$$
□

BÀI 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

① $y = \frac{x}{\cos x}$.

② $y = \frac{2x + \sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

③ $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$.

④ $y = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin x + \cos x}$.

⑤ $y = \frac{5x^2 + 1}{4 + 3 \sin x}$.

$$\textcircled{6} \quad y = \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x}.$$

$$\textcircled{7} \quad y = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}.$$

$$\textcircled{8} \quad y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^3.$$

Lời giải.

- ① Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$y' = \frac{(x)' \cdot \cos x - x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}.$$

- ② Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2 + 2 \cos 2x)(1 - \cos 2x) - (2x + \sin 2x) \cdot 2 \sin 2x}{(1 - \cos 2x)^2} \\ &= \frac{2 - 2 \cos 2x + 2 \cos 2x - 2 \cos^2 2x - 4x \sin 2x - 2 \sin^2 2x}{(1 - \cos 2x)^2} \\ &= -\frac{4x \sin 2x}{(1 - \cos 2x)^2}. \end{aligned}$$

- ③ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + \frac{1 - x \cot x}{\sin x}.$$

- ④ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$y = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$\text{Khi đó, } y' = \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right)' = -\cos 2x.$$

- ⑤ Ta có

$$y' = \frac{(5x^2 + 1)'(4 + 3 \sin x) - (5x^2 + 1)(4 + 3 \sin x)'}{(4 + 3 \sin x)^2} = \frac{10x(4 + 3 \sin x) - 3 \cos x(5x^2 + 1)}{(4 + 3 \sin x)^2}.$$

- ⑥ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2 \cos 2x - 2 \sin 2x)(\sin 2x - \cos 2x) - (\sin 2x + \cos 2x)(2 \cos 2x + 2 \sin 2x)}{(\sin 2x - \cos 2x)^2} \\ &= \frac{-2[(\sin 2x - \cos 2x)^2 + (\sin 2x + \cos 2x)^2]}{(\sin 2x - \cos 2x)^2} = \frac{-2(1 - 2 \sin 2x \cos 2x + 1 + 2 \sin 2x \cos 2x)}{(\sin 2x - \cos 2x)^2} \\ &= -\frac{4}{(\sin 2x - \cos 2x)^2}. \end{aligned}$$

- ⑦ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 + \cos x)(x - \sin x) - (x + \sin x)(1 - \cos x)}{(x - \sin x)^2} \\ &= \frac{x - \sin x + x \cos x - \sin x \cos x - x + x \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{(x - \sin x)^2} \\ &= \frac{2(x \cos x - \sin x)}{(x - \sin x)^2}. \end{aligned}$$

⑧ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$y' = \frac{3 \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \cdot \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{3 \sin^2 x(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^4} = \frac{3 \sin^2 x}{(1 + \cos x)^3}.$$

□

BÀI 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$. Tính $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{\sin x + 1}.$$

Vậy $f'(0) = -1$, $f'(\pi) = -1$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 2$.

□

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y = \sqrt{\tan 4x}$.

② $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$.

③ $y = \cot^3 \sqrt{x^2 - x + 1}$.

④ $y = \cos^4 \sqrt{2x + 1}$.

⑤ $y = \sqrt{1 - \cot^2 x}$.

⑥ $y = \sqrt{2 \sin^2 x - 3 \cos 2x + 5}$.

⑦ $y = \sqrt{\cot^2(x^2 + 1)}$.

⑧ $y = \sqrt{\cot^3 2x}$.

BÀI 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y = x \cos x$.

② $y = x \sin x$.

③ $y = (2x + 1) \sin x$.

④ $y = (5 - x) \cos 5x$.

⑤ $y = (4 - x^2) \cos 2x$.

⑥ $y = (2 - x^2) \sin 3x$.

⑦ $y = (x - \sin x)(\pi - x - \sin x)$.

⑧ $y = x \cot 2x$.

⑨ $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

⑩ $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

BÀI 7. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

$$\textcircled{1} y = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

$$\textcircled{2} y = \frac{\cos^4 3x - 1}{\sqrt{\cos 2x} - 2}.$$

$$\textcircled{3} y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}.$$

$$\textcircled{4} y = \frac{1 + \tan^2 3x}{1 - \tan^2 3x}.$$

$$\textcircled{5} y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

$$\textcircled{6} y = \frac{4x - 2}{\sqrt{4 \cot x - \sin x} + \sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{7} y = \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}.$$

$$\textcircled{8} y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}.$$

$$\textcircled{9} y = \frac{2 - \sin 2x}{\cos^3 x + \sin^3 x}.$$

$$\textcircled{10} y = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}.$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} - \frac{2 \sin x \cos x \cos x}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} = \frac{-\sin x (1 + \sin^2 x) - \sin x (1 - \sin^2 x)}{(1 + \sin^2 x) \sqrt{1 + \sin^2 x}} \\ &= -\frac{2 \sin x}{(1 + \sin^2 x) \sqrt{1 + \sin^2 x}}. \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ Điều kiện xác định của hàm số là $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4 \cos^3 3x \cdot (-3 \sin 3x) (\sqrt{\cos 2x} - 2) - (\cos^4 3x - 1) \frac{-2 \sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}}{(\sqrt{\cos 2x} - 2)^2} \\ &= \frac{(\cos^4 3x - 1) \sin 2x}{(\sqrt{\cos 2x} - 2)^2 \sqrt{\cos 2x}} - \frac{12 \sin 3x \cos^3 3x}{\sqrt{\cos 2x} - 2}. \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2 \sin x \cos x (1 + \cos^2 x) + 2 \cos x \sin x \cdot \sin^2 x}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{2 \sin x \cos x (1 + \cos^2 x + \sin^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2} \\ &= \frac{4 \sin x \cos x}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{2 \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}. \end{aligned}$$

- ④ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$y = \frac{1 + \tan^2 3x}{1 - \tan^2 3x} = \frac{1}{\cos^2 3x (1 - \tan^2 3x)} = \frac{1}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \frac{1}{\cos 6x}.$$

Khi đó, $y' = -\frac{(\cos 6x)'}{\cos^2 6x} = \frac{6 \sin 6x}{\cos^2 6x}.$

- ⑤ Điều kiện xác định của hàm số là $\cos x + x \sin x \neq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{[\cos x - (\cos x - x \sin x)] (\cos x + x \sin x) - (\sin x - x \cos x) [-\sin x + (\sin x + x \cos x)]}{(\cos x + x \sin x)^2} \\ &= \frac{x \sin x (\cos x + x \sin x) - x \cos x (\sin x - x \cos x)}{(\cos x + x \sin x)^2} = \frac{x \sin x \cos x + x^2 \sin^2 x - x \sin x \cos x + x^2 \cos^2 x}{(\cos x + x \sin x)^2} \\ &= \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}. \end{aligned}$$

- ⑥ Với điều kiện xác định của hàm số ta có

$$y' = \frac{4(\sqrt{4 \cot x - \sin x} + \sqrt{x}) - (4x - 2) \left[\frac{-4(1 + \cot^2 x) - \cos x}{2\sqrt{4 \cot x - \sin x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right]}{(\sqrt{4 \cot x - \sin x} + \sqrt{x})^2}.$$

- ⑦ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\sin x (\cos x - \sin x) - \cos x (-\sin x - \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2} = \frac{-\sin x \cos x + \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x}{1 - \sin 2x} \\ &= \frac{1}{1 - \sin 2x}. \end{aligned}$$

- ⑧ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos x (\sin x + \cos x) - \sin x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x \sin x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin 2x + 1} \\ &= \frac{1}{\sin 2x + 1}. \end{aligned}$$

- ⑨ Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$y = \frac{2 - \sin 2x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{2(1 - \sin x \cos x)}{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)} = \frac{2}{\sin x + \cos x}.$$

Khi đó

$$y' = -\frac{2(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} = -\frac{2(\cos x - \sin x)}{\sin 2x + 1}.$$

⑩ Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-2 \cos x \sin x (1 + \sin^2 x) - \cos^2 x \cdot 2 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{-2 \sin x \cos x (1 + \sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} \\ &= -\frac{2 \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2}. \end{aligned}$$

□

Nhóm bài tập chứng minh đẳng thức, giải phương trình chứa đạo hàm

1 **VÍ DỤ**

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh $y' - y^2 - 1 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Khi đó

$$y' - y^2 - 1 = 1 + \tan^2 x - \tan^2 x - 1 = 0.$$

Ta có điều phải chứng minh.

□

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x - 2 \cos x$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2 \cos 2x + 2 \sin x$. Khi đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

□

2 **BÀI TẬP ÁP DỤNG**

BÀI 1. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh

① $xy + x(2 \cos x - y) = 2(y' - \sin x)$.

② $y' - x \cos x = \cos x \tan x$, với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \sin x + x \cos x$.

Khi đó

① Khi đó

$$\begin{aligned} xy + x(2 \cos x - y) &= 2(y' - \sin x) \\ \Leftrightarrow xy + 2x \cos x - xy &= 2(\sin x + x \cos x - \sin x) \\ \Leftrightarrow 2x \cos x &= 2x \cos x \text{ (luôn đúng)}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

② Với mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$y' - x \cos x = \sin x + x \cos x - x \cos x = \sin x = \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x \tan x.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$. Chứng minh $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2 \cos x \sin x (1 + \sin^2 x) - \cos^2 x \cdot 2 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{-2 \sin x \cos x (1 + \sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} \\ &= -\frac{2 \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2}. \end{aligned}$$

Lại có $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}, f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8}{9}$.

Do đó

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} - 3 \cdot \left(-\frac{8}{9}\right) = 3.$$

□

BÀI 3. Cho hàm số $y = \cos^2 x + \sin x$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2 \cos x \sin x + \cos x = -\cos x(2 \sin x - 1)$.

Khi đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow -\cos x(2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy phương trình $y' = 0$ có các nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. □

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Cho hàm số $y = \cot 2x$. Chứng minh $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có $y' = -2(1 + \cot^2 2x)$.

Khi đó

$$y' + 2y^2 + 2 = -2(1 + \cot^2 2x) + 2 \cot^2 2x + 2 = -2 - 2 \cot^2 2x + 2 \cot^2 2x + 2 = 0.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 5. Cho các hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$. Chứng minh $3f'(x) - 2g'(x) = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

$$g(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

Khi đó.

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \sin 2x \cdot 2 \cos 2x = -\sin 4x \text{ và } g'(x) = -\frac{3}{4} \cdot 2 \sin 2x \cdot 2 \cos 2x = -\frac{3}{2} \sin 4x.$$

Vì vậy,

$$3f'(x) - 2g'(x) = -3 \sin 4x - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} \sin 4x\right) = 0.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 6. Cho hàm số $y = 3 \sin 2x + 4 \cos 2x + 10x$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6 \cos 2x - 8 \sin 2x + 10$.

Khi đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6 \cos 2x - 8 \sin 2x + 10 = 0. \quad (*)$$

Ta thấy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của phương trình (*).

Đặt $t = \tan x$, phương trình (*) trở thành

$$6 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 8 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 10 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6t^2 - 16t + 10 + 10t^2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 16t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

với $t = 2$ thì

$$\tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = \arctan 2 + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. □

BÀI 2. ĐẠO HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho đồ thị $(C): y = f(x)$, $M(x_0; y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến Δ với (C) tại M là

$$\Delta: \boxed{y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0}$$

Trong đó, $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm ($y_0 = f(x_0)$).

$f'(x_0) = k$ là hệ số góc của tiếp tuyến ($k = y'(x_0) = f'(x_0)$).

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

 **DẠNG 2.1. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp điểm (tại điểm M) (hoặc biết hoành độ hoặc tung độ).**

Phương pháp giải

— **Bước 1.** Tính $y' = f'(x)$ và tính hệ số góc $k = f'(x_0)$.

— **Bước 2.** Phương trình tiếp tuyến có dạng $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

1 Ví dụ

VÍ DỤ 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(0; 1)$ thuộc đồ thị $(C): y = 2x^3 - 6x + 1$.

Lời giải.

— Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

— Ta có, $y' = 6x^2 - 6 \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(0) = -6$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ với (C) tại M là $\Delta: y = y'(0)(x - 0) + 1 \Rightarrow \Delta: y = -6x + 1$. □

VÍ DỤ 2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(1; -1)$ thuộc $(C): y = 3x^3 - 5x^2 + 1$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có, $y' = 9x^2 - 10x \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(1) = -1$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y = -1(x - 1) - 1 \Rightarrow \Delta: y = -x$.

□

VÍ DỤ 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(1; 1)$ thuộc $(C): y = 2x^3 - 6x + 1$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y' = 6x^2 - 6 \Rightarrow$ hệ số góc $k = y'(1) = 0$.
- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = 1$.

□

VÍ DỤ 4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(-2; 5)$ thuộc $(C): y = \frac{3x+1}{x+1}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(-2) = 2$.
- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = 2(x + 2) + 5 = 2x + 9$.

□

VÍ DỤ 5. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(2; 4)$ thuộc $(C): y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(2) = -1$.
- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = -(x - 2) + 4 = -x + 6$.

□

VÍ DỤ 6. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(0; 3)$ thuộc $(C): y = x + 1 - \frac{2}{2x-1}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = 1 + \frac{4}{(2x-1)^2} \Rightarrow$ hệ số góc $k = y'(0) = 5$.
- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = 5(x - 0) + 3 = 5x + 3$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(1; 0)$ thuộc $(C): y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải.

- Ta có $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(1) = 0$.
- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = 0$.

□

BÀI 2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(1; 2)$ thuộc $(C): y = -x^4 + 3x^2$.

Lời giải.

- Ta có $y' = -4x^3 + 6x \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(1) = 2$.
- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = 2(x - 1) + 2 = 2x$.

□

BÀI 3. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = -1$.

Lời giải.

- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$. Suy ra tiếp điểm là $M(-1; 0)$.
- Ta có $y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(-1) = 5$.
- Vậy phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = 5(x + 1) + 0 = 5x + 5$.

□

BÀI 4. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = 1$.

Lời giải.

- Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$. Suy ra tiếp điểm là $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$.
- Ta có $y' = \frac{3}{(x + 1)^2} \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(1) = \frac{3}{4}$.
- Vậy phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = \frac{3}{4}(x - 1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

□

BÀI 5. Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng -1 .

Lời giải.

- Với $x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Suy ra tiếp điểm là $M\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.
- Ta có $y' = \frac{-3}{(x - 1)^2} \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(-1) = -\frac{3}{4}$.
- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = -\frac{3}{4}(x + 1) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

□

BÀI 6. Cho hàm số $y = \frac{2x - 2}{x - 2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

- Với $x_0 = \frac{5}{2} \Rightarrow y_0 = 6$. Suy ra tiếp điểm là $M\left(\frac{5}{2}; 6\right)$.
- Ta có $y' = -\frac{2}{(x - 2)^2} \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'\left(\frac{5}{2}\right) = -8$.

— Phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = -8\left(x - \frac{5}{2}\right) + 6 = -8x + 26$.

□

BÀI 7. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng -1 .

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = -1 \Rightarrow \frac{x_0 - 3}{x_0 + 1} = -1 \Rightarrow x_0 = 1$. Nên $M(1; -1)$.

Mà $y' = \frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow k = y'(1) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta: y = y'(1)(x - 1) - 1$.

Suy ra $\Delta: y = x - 2$ là tiếp tuyến cần tìm.

□

BÀI 8. Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng 3 .

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = 3 \Rightarrow \frac{2x_0 - 2}{x_0 - 2} = 3 \Rightarrow x_0 = 4$. Nên $M(4; 3)$.

Mà $y' = \frac{-2}{(x-2)^2} \Rightarrow k = y'(4) = -\frac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta: y = y'(4)(x - 4) + 3$.

Suy ra $\Delta: y = -\frac{1}{2}x + 5$ là tiếp tuyến cần tìm.

□

BÀI 9. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng 4 .

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = 4 \Rightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 - 1 = 4 \Rightarrow x_0 = 1$. Nên $M(1; 4)$.

Mà $y' = 6x^2 + 6x \Rightarrow k = y'(1) = 12$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta: y = y'(1)(x - 1) + 4$.

Suy ra $\Delta: y = 12x - 8$ là tiếp tuyến cần tìm.

□

BÀI 10. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng 1 .

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = 1 \Rightarrow x_0^3 + 3x_0^2 + 1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \end{cases}$. Nên $M_1(-3; 1)$ và $M_2(0; 1)$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Tại $M_1(-3; 1)$. Ta có $k = y'(-3) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_1: y = y'(-3)(x + 3) + 1$.

Suy ra $\Delta_1: y = 9x + 28$.

Tại $M_2(0; 1)$. Ta có $k = y'(0) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là $\Delta_2: y = y'(0)(x + 0) + 1$.

Suy ra $\Delta_2: y = 1$.

□

BÀI 11. Cho hàm số $y = \sqrt{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng 2 .

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = 2 \Rightarrow \sqrt{x_0 + 2} = 2 \Rightarrow x_0 = 2$. Nên $M(2; 2)$.

Mà $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow k = y'(2) = \frac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta: y = y'(2)(x - 2) + 2$.

Suy ra $\Delta: y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ là tiếp tuyến cần tìm.

□

BÀI 12. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = 0 \Rightarrow x_0^4 - 2x_0^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Nên $M_1(-1; 0)$ và $M_2(1; 0)$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$.

Tại $M_1(-1; 0)$. Ta có $k = y'(-1) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_1: y = y'(-1)(x + 1)$.

Suy ra $\Delta_1: y = 0$.

Tại $M_2(1; 0)$. Ta có $k = y'(1) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là $\Delta_2: y = y'(1)(x + 1)$.

Suy ra $\Delta_2: y = 0$. □

BÀI 13. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại giao điểm của (C) với trục tung.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) với trục tung $x = 0$. Suy ra $M(0; -1)$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow k = y'(0) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y = y'(0)x - 1$.

Suy ra $\Delta: y = -3x - 1$. □

BÀI 14. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = \frac{x+3}{x-1}$ tại giao điểm của (C) với trục tung.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) với trục tung $x = 0$. Suy ra $M(0; -3)$.

Ta có $y' = \frac{-4}{(x-1)^2} \Rightarrow k = y'(0) = -4$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y = y'(0)x - 3$.

Suy ra $\Delta: y = -4x - 3$. □

BÀI 15. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại giao điểm của (C) với trục hoành.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) với trục hoành $y = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x+1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Suy ra $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow k = y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y = y'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Suy ra $\Delta: y = 4x + 2$. □

BÀI 16. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = 2x - \sqrt{2x^2 + 1}$ tại giao điểm của (C) với trục hoành.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) với trục hoành $y = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x - \sqrt{2x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

Ta có $y' = 2 - \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} \Rightarrow k = y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y = y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Suy ra $\Delta: y = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

BÀI 17. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = \frac{x+2}{x+1}$ tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d: y - 2 = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) với $d: y - 2 = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+2}{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0$. Suy ra $M(0; 2)$.

Ta có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow k = y'(0) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y = y'(0)x + 2$.

Suy ra $\Delta: y = -x + 2$. □

BÀI 18. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d: y + 1 = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là giao điểm của (C) với $d: y + 1 = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \end{cases}$.

Suy ra $M_1(-3; -1)$ và $M_2(0; -1)$.

Ta có $y' = x^2 + 4x + 3$.

Tại $M_1(-3; -1)$. Ta có $k = y'(-3) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_2: y = y'(-3)(x + 3) - 1$.

Suy ra $\Delta_1: y = -1$.

Tại $M_2(0; -1)$. Ta có $k = y'(0) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là $\Delta_2: y = y'(0)x - 1$.

Suy ra $\Delta_2: y = 3x - 1$. □

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 25.

Cho $(C): y = \frac{3-2x}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = x - 3$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) và d .

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\frac{3-2x_0}{x_0-1} = x_0 - 3$ (1).

Với điều kiện $x_0 \neq 1$ thì $(1) \Leftrightarrow 3 - 2x_0 = (x_0 - 1)(x_0 - 3) \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 3 - 2x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ (nhận)} \\ x_0 = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}$

$\Rightarrow M_1(0; -3), M_2(2; -1)$.

Ta có: $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

$x_0 = 0 \Rightarrow k_1 = y'(0) = -1$. Phương trình tiếp tuyến Δ_1 với (C) tại $M_1(0; -3)$ là

$$\Delta_1: y = (-1) \cdot (x - 0) - 3 \Rightarrow \Delta_1: y = -x - 3.$$

$x_0 = 2 \Rightarrow k_2 = y'(2) = -1$. Phương trình tiếp tuyến Δ_2 với (C) tại $M_2(2; -1)$ là

$$\Delta_2: y = (-1) \cdot (x - 2) - 1 \Rightarrow \Delta_2: y = -x + 1.$$

□

BÀI 26.

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -x - 3$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) và d .

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = -x_0 - 3$ (1).

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)(x_0^2 - 4x_0 + 5) = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)[(x_0 - 2)^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

$\Rightarrow M(-1; -2)$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = y'(-1) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến Δ với (C) tại $M(-1; -2)$ là

$$\Delta: y = 9 \cdot (x + 1) - 2 \Rightarrow \Delta: y = 9x + 7.$$

□

BÀI 27.

Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{11}{8}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = 4x + 4$ có hoành độ dương.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$, $x_0 > 0$ là giao điểm của (C) và đường thẳng d có hoành độ dương.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x_0^3 - \frac{3}{2}x_0^2 - \frac{9}{4}x_0 + \frac{11}{8} = 4x_0 + 4$ (1).

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow x_0^3 - \frac{3}{2}x_0^2 - \frac{25}{4}x_0 - \frac{21}{8} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{7}{2} \text{ (nhận)} \\ x_0 = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \\ x_0 = -\frac{3}{2} \text{ (loại)}. \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; 18\right).$$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3x - \frac{9}{4} \Rightarrow k = y'\left(\frac{7}{2}\right) = 24$.

Phương trình tiếp tuyến Δ với (C) tại $M\left(\frac{7}{2}; 18\right)$ là

$$\Delta: y = 24 \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) + 18 \Rightarrow \Delta: y = 24x - 66.$$

□

BÀI 28.

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = x + 3$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) và d .

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\frac{2x_0+1}{x_0-1} = x_0 + 3$ (1).

Với điều kiện $x_0 \neq 1$ thì $(1) \Leftrightarrow 2x_0 + 1 = (x_0 - 1)(x_0 + 3) \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 3 = 2x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \text{ (nhận)} \\ x_0 = -2 \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1(2; 5), M_2(-2; 1)$.

Ta có: $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

$x_0 = 2 \Rightarrow k_1 = y'(2) = -3$. Phương trình tiếp tuyến Δ_1 với (C) tại $M_1(2; 5)$ là

$$\Delta_1: y = (-3) \cdot (x - 2) + 5 \Rightarrow \Delta_1: y = -3x + 11.$$

$x_0 = -2 \Rightarrow k_2 = y'(-2) = -\frac{1}{3}$. Phương trình tiếp tuyến Δ_2 với (C) tại $M_2(-2; 1)$ là

$$\Delta_2: y = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (x + 2) + 1 \Rightarrow \Delta_2: y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

□

DẠNG 2.2. Tiếp tuyến cho sản hệ số góc, song song - vuông góc

Phương pháp giải:

① Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $k = y'(x_0) = a$, giải phương trình $y'(x_0) = a \Rightarrow x_0 \Rightarrow y_0$.

② Nhắc lại:

- $d_1: y = a_1x + b_1 \Rightarrow k_{d_1} = a_1.$
- $d_2: y = a_2x + b_2 \Rightarrow k_{d_2} = a_2.$
- $d_1 // d_2 \Rightarrow k_{d_1} = k_{d_2} \Leftrightarrow a_1 = a_2.$
- $d_1 \perp d_2 \Rightarrow k_{d_1} \cdot k_{d_2} = -1 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1.$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1.

Cho hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) , biết hệ số góc $k = 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = k$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow k = \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow M_1(0; 0) \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M_2(-2; 2). \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ_1 với (C) tại $M_1(0; 0)$ là

$$\Delta_1: y = 1 \cdot (x - 0) + 0 \Rightarrow \Delta_1: y = x.$$

Phương trình tiếp tuyến Δ_2 với (C) tại $M_2(-2; 2)$ là

$$\Delta_2: y = 1 \cdot (x + 2) + 2 \Rightarrow \Delta_2: y = x + 4.$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1.

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) , biết hệ số góc $k = 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = k$.

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow k = \frac{2}{(x_0+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M_1(0; -1) \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow M_2(-2; 3). \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ_1 với (C) tại $M_1(0; -1)$ là

$$\Delta_1: y = 2 \cdot (x - 0) - 1 \Rightarrow \Delta_1: y = 2x - 1.$$

Phương trình tiếp tuyến Δ_2 với (C) tại $M_2(-2; 3)$ là

$$\Delta_2: y = 2 \cdot (x + 2) + 1 \Rightarrow \Delta_2: y = 2x + 7.$$

□

BÀI 2.

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) , biết hệ số góc $k = -3$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = k$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow k = \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M_1(0; -1) \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow M_2(2; 5). \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ_1 với (C) tại $M_1(0; -1)$ là

$$\Delta_1: y = (-3) \cdot (x - 0) - 1 \Rightarrow \Delta_1: y = -3x - 1.$$

Phương trình tiếp tuyến Δ_2 với (C) tại $M_2(2; 5)$ là

$$\Delta_2: y = (-3) \cdot (x - 2) + 5 \Rightarrow \Delta_2: y = -3x + 11.$$

□

BÀI 3.

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) , biết hệ số góc $k = 3$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = k$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow k = \frac{3}{(x_0+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M_1(0; -1) \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow M_2(-2; 5). \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến Δ_1 với (C) tại $M_1(0; -1)$ là

$$\Delta_1: y = 3 \cdot (x - 0) - 1 \Rightarrow \Delta_1: y = 3x - 1.$$

Phương trình tiếp tuyến Δ_2 với (C) tại $M_2(-2; 5)$ là

$$\Delta_2: y = 3 \cdot (x + 2) + 5 \Rightarrow \Delta_2: y = 3x + 11.$$

□

BÀI 4.

Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) , biết hệ số góc $k = 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = k$.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow k = 3x_0^2 - 2x_0 = 1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M_1(1; 2) \\ x_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{50}{27} \Rightarrow M_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{50}{27}\right). \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến Δ_1 với (C) tại $M_1(1; 2)$ là

$$\Delta_1: y = 1 \cdot (x - 1) + 2 \Rightarrow \Delta_1: y = x + 1.$$

Phương trình tiếp tuyến Δ_2 với (C) tại $M_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{50}{27}\right)$ là

$$\Delta_2: y = 1 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{50}{27} \Rightarrow \Delta_2: y = x + \frac{59}{27}.$$

□

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Cho hàm số $y = -x^3 + 5x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết hệ số góc $k = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 10x$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm của (Δ) với (C) . Vì hệ số góc của tiếp tuyến Δ là 3 nên ta có

$$-3x_0^2 + 10x_0 = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 10x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\text{— Với } x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 15 \Rightarrow (\Delta): y = 3(x - 3) + 15 = 3x + 6.$$

$$\text{— Với } x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_0 = -\frac{67}{27} \Rightarrow (\Delta): y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{67}{27} = 3x - \frac{94}{27}.$$

□

BÀI 6. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm của (Δ) với (C). Vì hệ số góc của tiếp tuyến (d) có giá trị là $k = 1$ nên ta có phương trình sau

$$\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 1 = -x_0^2 + 2x_0 - 1 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

— Khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow (d): y = -x - 2$.

— Khi $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow (d): y = -(x - 2) + 4 = -x + 6$.

□

BÀI 7. Với (C): $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C), biết $k = -1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{(2x - 3)(x - 1) - (x^2 - 3x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 5x + 3 - (x^2 - 3x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm của (Δ) với (C). Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng -1 nên

$$\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 1 = -x_0^2 + 2x_0 - 1 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

— Khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -4 \Rightarrow (d): y = -x - 4$.

— Khi $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow (d): y = -(x - 2) + 2 = -x + 4$.

□

BÀI 8. Cho hàm số $y = \sqrt{2x + 1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có: $y' = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm của (Δ) với (C). Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng $\frac{1}{3}$ nên

$$\frac{1}{\sqrt{2x_0 + 1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_0 = 4.$$

Khi $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 3$, khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$(\Delta): y = \frac{1}{3}(x - 4) + 3 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

□

BÀI 9. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x + 2$, biết tiếp tuyến song song với (d): $y = 3x - 2$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm của (Δ) với (C).

Ta có $y' = 2x - 3$. Vì $(\Delta) \parallel (d) \Rightarrow y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M(3; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến (Δ) tại điểm M là

$$(\Delta): y = 3(x - 3) + 2 = 3x - 7.$$

□

BÀI 10. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = x^2 - x + 2$, biết Δ vuông góc với $(d): 5y = -x + 300$.

Lời giải.

Ta có $5y = -x + 300 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + 600 \Rightarrow$ hệ số góc của đường thẳng (d) là $k_d = -\frac{1}{5}$.

Ta có $y' = 2x - 1$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến Δ .

Vì $\Delta \perp (d) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot k_d = -1 \Leftrightarrow k_d \cdot (2x_0 - 1) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = 5 \Leftrightarrow x_0 = 3 \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 8 \\ f'(x_0) = 2x_0 - 1 = 5. \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = 5(x - 3) + 8 = 5x - 7$. □

BÀI 11. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$, biết tiếp tuyến song song với $(d): 4x - y + 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $(d): y = 4x + 2 \Rightarrow$ hệ số góc của (d) là $k_d = 4$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến (Δ) với đồ thị hàm số (C) .

Ta có $y' = x^2 + x - 2$. Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = x_0^2 + x_0 - 2$.

Vì tiếp tuyến (Δ) song song với (d) nên $f'(x_0) = k_d \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 - 2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ x_0 = 2. \end{cases}$

— Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -\frac{2}{3} \Rightarrow (\Delta): y = 4(x - 2) - \frac{2}{3} = 4x - \frac{26}{3}$.

— Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{6} \Rightarrow (\Delta): y = 4(x + 3) + \frac{1}{6} = 4x + \frac{73}{6}$. □

BÀI 12. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) , biết Δ vuông góc với đường thẳng $(d): x + 9y = 0$.

Lời giải.

Ta có $(d): y = -\frac{1}{9}x \Rightarrow$ hệ số góc của (d) là $k_d = -\frac{1}{9}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến (Δ) với đồ thị hàm số (C) .

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$. Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0$.

Vì tiếp tuyến (Δ) vuông góc với (d) nên $f'(x_0) \cdot k_d = -1 \Leftrightarrow (3x_0^2 + 6x_0) \left(-\frac{1}{9}\right) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3. \end{cases}$

— Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$ và $f'(x_0) = 9 \Rightarrow (\Delta): y = 9(x - 1) + 2 = 9x - 7$.

— Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -2$ và $f'(x_0) = 9 \Rightarrow (\Delta): y = 9(x + 3) - 2 = 9x + 25$. □

BÀI 13. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{2x + 1}{1 - 2x}$, biết Δ song song với đường thẳng $d: 4x - y - 8 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0 + 1}{1 - 2x_0}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0) = \frac{4}{(1 - 2x_0)^2}$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên $y'(x_0) = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{(1 - 2x_0)^2} = 4 \Leftrightarrow (1 - 2x_0)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1. \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y = 4(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = 4x + 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = 4(x - 1) + (-3) \Leftrightarrow y = 4x - 7$. □

BÀI 14. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 10$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) , biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 3x - y - 10 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; x_0^3 - 3x_0^2 + 6x_0 + 10)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 6$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên $y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 6 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = 3(x - 1) + 14 \Leftrightarrow y = 3x + 11$. □

BÀI 15. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{3x - 1}{x + 2}$, biết tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $d: x - 7y + 3 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0; \frac{3x_0 - 1}{x_0 + 2}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0) = \frac{7}{(x_0 + 2)^2}$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên $y'(x_0) = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{(x_0 + 2)^2} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow (x_0 + 2)^2 = 49 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ x_0 = -9. \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 5$ là $y = \frac{1}{7}(x - 5) + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{9}{7} \Leftrightarrow x - 7y + 9 = 0$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -9$ là $y = \frac{1}{7}(x + 9) + 4 \Leftrightarrow x - 7y + 37 = 0$. □

BÀI 16. Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 6x - y - 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; -x_0^4 - x_0^2 + 6)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0) = -4x_0^3 - 2x_0$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên $y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $y = 6(x + 1) + 4 \Leftrightarrow y = 6x + 10$. □

BÀI 17. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{2x^2 + x - 3}{2x - 1}$, biết Δ song song với đường thẳng $d: y = 5x + 3$.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0^2 + x_0 - 3}{2x_0 - 1}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0) = \frac{4x_0^2 - 4x_0 + 5}{(2x_0 - 1)^2}$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên $y'(x_0) = 5 \Leftrightarrow \frac{4x_0^2 - 4x_0 + 5}{(2x_0 - 1)^2} = 5 \Leftrightarrow 4x_0^2 - 4x_0 + 5 = 5(2x_0 - 1)^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y = 5(x - 0) + 3 \Leftrightarrow y = 5x + 3$ (loại).

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = 5(x - 1) \Leftrightarrow y = 5x - 5$. □

BÀI 18. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{x - 1}{x + 1}$, biết Δ vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y - 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0) = \frac{2}{(x_0 + 1)^2}$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d nên $y'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(x_0 + 1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2. \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y = 2(x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ là $y = 2(x + 2) + 3 \Leftrightarrow y = 2x + 7$. □

BÀI 19. Cho hàm số $y = \sqrt{1 - x - x^2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) , biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: x + 2y = 0$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; \sqrt{1 - x_0 - x_0^2})$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0) = \frac{-1 - 2x_0}{2\sqrt{1 - x_0 - x_0^2}}$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên $y'(x_0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1 - 2x_0}{2\sqrt{1 - x_0 - x_0^2}} = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x_0 = \sqrt{1 - x_0 - x_0^2} \Rightarrow (1 + 2x_0)^2 = 1 - x_0 - x_0^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -1. \end{cases}$$

Thử lại chỉ có $x_0 = 0$ thỏa mãn. Vậy nghiệm của phương trình là $x_0 = 0$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y = -\frac{1}{2}(x - 0) + 1 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$. □

BÀI 20. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{2x-1}{1-4x}$, biết Δ vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y + 10 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{1-4x_0}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0) = \frac{-2}{(1-4x_0)^2}$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d nên $y'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = -2$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(1-4x_0)^2} = -2 \Leftrightarrow (1-4x_0)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y = -2(x-0) - 1 \Leftrightarrow y = -2x - 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$ là $y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0 \Leftrightarrow y = -2x + 1$. □

BÀI 21. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = x^3 + 6x^2 - 9x + 5$, biết Δ có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2 + 12x - 9$. Suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 12x_0 - 9$.

Xác định hệ số góc nhỏ nhất:

Cách 1:

Áp dụng $(a \pm b)^2 + c \geq c \Rightarrow k_{\min} = c$.

Ta có $k = 3x_0^2 + 12x_0 - 9 = 3(x_0^2 + 4x_0 + 4) - 21 = 3(x_0 + 2)^2 - 21 \geq -21 \Rightarrow k_{\min} = -21$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$.

Cách 2:

Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

x_0	$-\infty$	-2	$+\infty$
k	$+\infty$	-21	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0 = -2, k_{\min} = y'(-2) = -21$.

Cách 3:

Sử dụng công thức

$$\begin{cases} k_{\min} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0 \\ k_{\max} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0. \end{cases}$$

$y''(x_0) = 6x_0 + 12 = 0 \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow k_{\min} = y'(-2) = -21$.

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 39 \Rightarrow M(-2; 39)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(-2; 39)$: $y = k_{\min} \cdot (x + 2) + 39 = -21(x + 2) + 39 = -21x - 3$. □

BÀI 22. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 3x - 2$, biết Δ có hệ số góc lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = -3x^2 + 12x - 3$. Suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = -3x_0^2 + 12x_0 - 3$.

Xác định hệ số góc lớn nhất:

Cách 1:

Áp dụng $-(a \pm b)^2 + c \geq c \Rightarrow k_{\max} = c$.

Ta có $k = -3x_0^2 + 12x_0 - 3 = -3(x_0^2 - 4x_0 + 4) + 9 = -3(x_0 - 2)^2 + 9 \leq 9 \Rightarrow k_{\max} = 9$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$.

Cách 2:

Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

x_0	$-\infty$	2	$+\infty$
k	$-\infty$	9	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0 = 2, k_{\max} = y'(2) = 9$.

Cách 3:

Sử dụng công thức

$$\begin{cases} k_{\min} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0 \\ k_{\max} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0. \end{cases}$$

$$y''(x_0) = -6x_0 + 12 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow k_{\max} = y'(2) = 9.$$

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 8 \Rightarrow M(2; 8)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(2; 8)$: $y = k_{\max} \cdot (x - 2) + 8 = 9(x - 2) + 8 = 9x - 10$. □

Nhận xét. Thông thường ta dùng cách 1. Cách 2, cách 3 thường dùng trong trắc nghiệm hoặc bài toán chứa tham số m .

BÀI 23. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) : $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$, biết Δ có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x$. Suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0$.

Xác định hệ số góc nhỏ nhất:

Cách 1:

Áp dụng $(a \pm b)^2 + c \geq c \Rightarrow k_{\min} = c$.

$$\text{Ta có } k = 6x_0^2 - 6x_0 = 6\left(x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2} = 6\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow k_{\min} = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x_0 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Cách 2:

Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

x_0	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
k	$+\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}, k_{\min} = y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Cách 3:

Sử dụng công thức

$$\begin{cases} k_{\min} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0 \\ k_{\max} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0. \end{cases}$$

$$y''(x_0) = 12x_0 - 6 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow k_{\min} = y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$: $y = k_{\min} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$. $\square$

BÀI 24. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 1$, biết Δ có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$. Suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.

Xác định hệ số góc nhỏ nhất:

Cách 1:

Áp dụng $(a \pm b)^2 + c \geq c \Rightarrow k_{\min} = c$.

Ta có $k = 3x_0^2 - 6x_0 = 3(x_0^2 - 2x_0 + 1) - 3 = 3(x_0 - 1)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow k_{\min} = -3$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Cách 2:

Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

x_0	$-\infty$	1	$+\infty$
k	$+\infty$	-3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0 = 1, k_{\min} = y'(1) = -3$.

Cách 3:

Sử dụng công thức

$$\begin{cases} k_{\min} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0 \\ k_{\max} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0. \end{cases}$$

$y''(x_0) = 6x_0 - 6 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow k_{\min} = y'(1) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M(1; -1)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(1; -1)$: $y = k_{\min} \cdot (x - 1) - 1 = -3(x - 1) - 1 = -3x + 2$. $\square$

BÀI 25. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) : $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, biết Δ có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + 5$. Suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 + 5$.

Xác định hệ số góc nhỏ nhất:

Cách 1:

Áp dụng $(a \pm b)^2 + c \geq c \Rightarrow k_{\min} = c$.

Ta có $k = 3x_0^2 - 4x_0 + 5 = 3\left(x_0^2 - \frac{4}{3}x_0 + \frac{4}{9}\right) + \frac{11}{3} = 3\left(x_0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \geq \frac{11}{3} \Rightarrow k_{\min} = \frac{11}{3}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x_0 - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{2}{3}$.

Cách 2:

Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

x_0	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
k	$+\infty$	$\frac{11}{3}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0 = \frac{2}{3}, k_{\min} = y' \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{11}{3}$.

Cách 3:

Sử dụng công thức

$$\begin{cases} k_{\min} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0 \\ k_{\max} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0. \end{cases}$$

$$y''(x_0) = 6x_0 - 4 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow k_{\min} = y' \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{11}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến:

$$\text{Ta có: } x_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{47}{27} \Rightarrow M \left(\frac{2}{3}; \frac{47}{27} \right).$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } \Delta \text{ tại } M \left(\frac{2}{3}; \frac{47}{27} \right): y = k_{\min} \cdot \left(x_0 - \frac{2}{3} \right) + \frac{47}{27} = \frac{11}{3} \left(x_0 - \frac{2}{3} \right) + \frac{47}{27} = \frac{11}{3}x - \frac{19}{27}. \quad \square$$

BÀI 26. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = -2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, biết Δ có hệ số góc lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = -6x^2 + 6x - 6$. Suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = -6x_0^2 + 6x_0 - 6$.

Xác định hệ số góc lớn nhất:

Cách 1:

Áp dụng $-(a \pm b)^2 + c \geq c \Rightarrow k_{\max} = c$.

$$\text{Ta có } k = -6x_0^2 + 6x_0 - 6 = -6 \left(x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} \right) - \frac{9}{2} = -3 \left(x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{2} \leq -\frac{9}{2} \Rightarrow k_{\max} = -\frac{9}{2}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x_0 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Cách 2:

Áp dụng công thức đỉnh parabol $I \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

x_0	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
k	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	$-\infty$

$$\text{Từ bảng biến thiên của parabol } \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}, k_{\max} = y' \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{9}{2}.$$

Cách 3:

Sử dụng công thức

$$\begin{cases} k_{\min} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0 \\ k_{\max} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0. \end{cases}$$

$$y''(x_0) = -12x_0 + 6 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow k_{\max} = y' \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{9}{2}.$$

Phương trình tiếp tuyến:

$$\text{Ta có: } x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow M \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right).$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } \Delta \text{ tại } M \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right): y = k_{\max} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}x + \frac{3}{4}. \quad \square$$

BÀI 27. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = -x^3 + 4x^2 + 12x - 2$, biết Δ có hệ số góc lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = -3x^2 + 8x + 12$. Suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = -3x_0^2 + 8x_0 + 12$.

Xác định hệ số góc lớn nhất:

Cách 1:

Áp dụng $-(a \pm b)^2 + c \geq c \Rightarrow k_{\max} = c$.

Ta có $k = -3x_0^2 + 8x_0 + 12 = -3\left(x_0^2 - \frac{8}{3}x_0 + \frac{16}{9}\right) + \frac{52}{3} = -3\left(x_0 - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{52}{3} \leq \frac{52}{3} \Rightarrow k_{\max} = \frac{52}{3}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x_0 - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{4}{3}$.

Cách 2:

Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

x_0	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
k	$-\infty$	$\frac{52}{3}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0 = \frac{4}{3}, k_{\max} = y'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{52}{3}$.

Cách 3:

Sử dụng công thức

$$\begin{cases} k_{\min} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0 \\ k_{\max} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0. \end{cases}$$

$y''(x_0) = -6x_0 + 8 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{4}{3} \Rightarrow k_{\max} = y'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{52}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0 = \frac{4}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{506}{27} \Rightarrow M\left(\frac{4}{3}; \frac{506}{27}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M\left(\frac{4}{3}; \frac{506}{27}\right)$: $y = k_{\max} \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right) + \frac{506}{27} = \frac{52}{3} \left(x - \frac{4}{3}\right) + \frac{506}{27} = \frac{52}{3}x - \frac{118}{27}$.

Hay $\Delta: 468x - 27y - 118 = 0$. □

BÀI 28. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = -x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, biết Δ có hệ số góc lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = -3x^2 - 4x + 5$. Suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = -3x_0^2 - 4x_0 + 5$.

Xác định hệ số góc lớn nhất:

Cách 1:

Áp dụng $-(a \pm b)^2 + c \geq c \Rightarrow k_{\max} = c$.

Ta có $k = -3x_0^2 - 4x_0 + 5 = -3\left(x_0^2 + \frac{4}{3}x_0 + \frac{4}{9}\right) + \frac{19}{3} = -3\left(x_0 + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{19}{3} \leq \frac{19}{3} \Rightarrow k_{\max} = \frac{19}{3}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x_0 + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{2}{3}$.

Cách 2:

Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

x_0	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
k	$-\infty$	$\frac{19}{3}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0 = -\frac{2}{3}$, $k_{\max} = y' \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{19}{3}$.

Cách 3:

Sử dụng công thức

$$\begin{cases} k_{\min} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0 \\ k_{\max} = y'(x_0), \text{ với } y''(x_0) = 0. \end{cases}$$

$$y''(x_0) = -6x_0 - 4 = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{2}{3} \Rightarrow k_{\max} = y' \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{19}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến:

$$\text{Ta có: } x_0 = -\frac{2}{3} \Rightarrow y_0 = -\frac{79}{27} \Rightarrow M \left(-\frac{2}{3}; -\frac{79}{27} \right).$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } \Delta \text{ tại } M \left(-\frac{2}{3}; -\frac{79}{27} \right): y = k_{\max} \cdot \left(x + \frac{2}{3} \right) - \frac{79}{27} = \frac{19}{3} \left(x + \frac{2}{3} \right) - \frac{79}{27} = \frac{19}{3}x + \frac{35}{27}. \quad \square$$

 DẠNG 2.3. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết điểm đi qua

VÍ DỤ 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(0; 1)$.

Lời giải.

$$\text{— Gọi hoành độ tiếp điểm là } x_0. \text{ Suy ra } \begin{cases} y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 \\ y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 6 \end{cases}.$$

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1.$$

Mà $M(0; 1) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} & (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(0 - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 = 1 \\ \Leftrightarrow & -2x_0^3 - 3x_0^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = 0 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{— Thế } x_0 = 0, x = -\frac{3}{2} \text{ vào phương trình tiếp tuyến ta được } \Delta_1 : y = -6x, \Delta_2 : y = -\frac{33}{4}x + 1. \quad \square$$

VÍ DỤ 2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1; 6)$.

Lời giải.

$$\text{— Gọi hoành độ tiếp điểm là } x_0. \text{ Suy ra } \begin{cases} y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1 \\ y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 - 9 \end{cases}.$$

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = (3x_0^2 - 6x_0 - 9)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1.$$

Mà $M(-1; 6) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} & (3x_0^2 - 6x_0 - 9)(-1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1 = 6 \\ \Leftrightarrow & -2x_0^3 + 6x_0 + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

— Thế $x_0 = -1$, $x_0 = 2$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1 : y = 6$ và $\Delta_2 : y = -9x - 3$.

□

VÍ DỤ 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = x^3 - 2x^2 + x + 4$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-4; -24)$.

Lời giải.

— Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0 . Suy ra $\begin{cases} y_0 = x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 + 4 \\ y'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 + 1 \end{cases}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = (3x_0^2 - 4x_0 + 1)(x - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 + 4.$$

Mà $M(-4; -24) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} & (3x_0^2 - 4x_0 + 1)(-4 - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 + 4 = -24 \\ \Leftrightarrow & -2x_0^3 - 10x_0^2 + 16x_0 + 24 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = -6 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

— Thế $x_0 = -6$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1 : y = 133x + 508$, $\Delta_2 : y = 8x + 8$ và $\Delta_3 : y = 5x - 4$.

□

BÀI 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = 2x^4 - 4x^2 - 1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(1; -3)$.

Lời giải.

— Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0 . Suy ra $\begin{cases} y_0 = 2x_0^4 - 4x_0^2 - 1 \\ y'(x_0) = 8x_0^3 - 8x_0 \end{cases}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = (8x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 - 1.$$

Mà $M(1; -3) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} & (8x_0^3 - 8x_0)(1 - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 - 1 = -3 \\ \Leftrightarrow & -6x_0^4 + 8x_0^3 + 4x_0^2 - 8x_0 + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{1}{3} \\ x_0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

— Thế $x_0 = -1$, $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_0 = 1$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1 : y = -3$, $\Delta_2 : y = -\frac{64}{27}x - \frac{17}{27}$.

□

BÀI 2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = x^4 + x^2 + 1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1; 3)$.

Lời giải.

— Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0 . Suy ra $\begin{cases} y_0 = x_0^4 + x_0^2 + 1 \\ y'(x_0) = 4x_0^3 + 2x_0 \end{cases}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$\Delta : y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = (4x_0^3 + 2x_0)(x - x_0) + x_0^4 + x_0^2 + 1.$$

Mà $M(-1; 3) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} & (4x_0^3 + 2x_0)(-1 - x_0) + x_0^4 + x_0^2 + 1 = 3 \\ \Leftrightarrow & -3x_0^4 - 4x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x_0 = -1. \end{aligned}$$

— Thế $x_0 = -1$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta : y = -6x - 3$.

□

BÀI 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = \frac{2x+1}{x+1}$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1; 3)$.

Lời giải.

— Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0 . Suy ra $\begin{cases} y_0 = \frac{2x_0+1}{x_0+1} \\ y'(x_0) = \frac{1}{(x_0+1)^2} \end{cases}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0+1}.$$

Mà $M(-1; 3) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x_0+1)^2}(-1 - x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0+1} = 3 \\ \Leftrightarrow & 3 = \frac{2x_0}{x_0+1} \\ \Rightarrow & x_0 = -3. \end{aligned}$$

— Thế $x_0 = -3$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta : y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$.

□

BÀI 4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = \frac{2x+1}{x-1}$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-7; 5)$.

Lời giải.

— Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0 . Suy ra $\begin{cases} y_0 = \frac{2x_0+1}{x_0-1} \\ y'(x_0) = \frac{-3}{(x_0-1)^2} \end{cases}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$\Delta : y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1}.$$

Mà $M(-7; 5) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} & \frac{-3}{(x_0-1)^2}(-7 - x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} = 5 \\ \Rightarrow & 3x_0^2 - 12x_0 - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

— Thế $x_0 = -1$ và $x_0 = 5$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1 : y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ và $\Delta_2 : y = -\frac{3}{16}x + \frac{59}{16}$.

□

BÀI 5. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = \frac{2x-1}{x+1}$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1; 4)$.

Lời giải.

— Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0 . Suy ra $\begin{cases} y_0 = \frac{2x_0-1}{x_0+1} \\ y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2} \end{cases}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$\Delta : y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1}.$$

Mà $M(-1; 4) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} \frac{3}{(x_0+1)^2}(-1 - x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1} &= 4 \\ \Rightarrow 2x_0 &= -8 \\ \Leftrightarrow x_0 &= -4. \end{aligned}$$

— Thế $x_0 = -4$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta : y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$.

□

BÀI 6. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(0; 1)$.

Lời giải.

— Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0 . Suy ra $\begin{cases} y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 \\ y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 6 \end{cases}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1.$$

Mà $M(0; 1) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(0 - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow -2x_0^3 - 3x_0^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{3}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

— Thế $x_0 = 0, x_0 = -\frac{3}{2}$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1 : y = -6x + 1, \Delta_2 : y = -\frac{33}{4}x + 1$.

□

BÀI 7. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C) : y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1; 6)$.

Lời giải.

— Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0 . Suy ra $\begin{cases} y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1 \\ y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 - 9 \end{cases}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \text{ hay } y = (3x_0^2 - 6x_0 - 9)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1.$$

Mà $M(-1; 6) \in \Delta$ nên

$$\begin{aligned} & (3x_0^2 - 6x_0 - 9)(-1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1 = 6 \\ \Leftrightarrow & -2x_0^3 + 6x_0 + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

— Thế $x_0 = -1, x_0 = 2$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1: y = 6, \Delta_2: y = -9x - 3$.

□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2mx^2 - m^2x + 1$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ song song với đường thẳng $d: y = -5x + \frac{11}{3}$.

A. $m = -1$.

B. $m = 9$.

C. $m \in \{-1, 9\}$.

D. $m \in \{1, 9\}$.

Lời giải.

Đặt $y = f(x)$, khi đó ta có $f'(x) = x^2 + 4mx - m^2 \Rightarrow f'(2) = -m^2 + 8m + 4$.

Tiếp tuyến $(\Delta) \parallel (d)$ nên $f'(2) = -5 \Leftrightarrow -m^2 + 8m + 4 = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = -1 \end{cases}$.

Với $m = 9$ thì $(\Delta_1): y = -5(x - 2) - \frac{259}{3} \Leftrightarrow y = -5x - \frac{229}{3}$ (nhận do $\Delta_1 \parallel d$).

Với $m = -1$ thì $(\Delta_2): y = -5(x - 2) - \frac{19}{3} \Leftrightarrow y = -5x + \frac{11}{3}$ (loại do $\Delta_2 \equiv d$).

Vậy $m = 9$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)**.

□

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Hỏi tham số m thuộc khoảng nào sau đây thì tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$.

A. $(-\infty; -3]$.

B. $(-3; 1)$.

C. $[1; 5)$.

D. $[5; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $y = f(x)$, khi đó ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(1) = -3$.

Tiếp tuyến $(\Delta) \perp (d)$ nên $m^2 - 4 = -3 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

Ta có tiếp tuyến của (C) là $(\Delta): y = -3(x - 1) - 2 \Leftrightarrow -3x + 1$.

Với $m = 1$ thì đường thẳng d có phương trình $y = -3x + 1$ (loại $m = 1$ do d trùng với Δ).

Với $m = -1$ thì đường thẳng d có phương trình $y = -3x - 3$ (nhận).

Vậy $m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán và nghiệm này nằm trong $(-\infty, -3]$.

Chọn đáp án **(A)**.

□

Câu 3. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C) . Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1. Hỏi tham số m thuộc khoảng nào sau đây thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại A vuông góc với đường thẳng $d: x - 4y + 1 = 0$.

A. $(-3; 2)$.

B. $(-\infty; -3]$.

C. $[1; 5)$.

D. $[5; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $y = f(x)$. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4(m + 1)x \Rightarrow f'(1) = -4m$.

Ta viết lại phương trình $(d): x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x + 1)$.

Tiếp tuyến $(\Delta) \perp (d)$ nên $\frac{1}{4} \cdot (-4m) = -1 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1 \in (-3; 2)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)**.

□

Câu 4. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (2m - 1)x + 2m - 3$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với $d: x - 2y - 4 = 0$.

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -2$.

D. $m = 4$.

Lời giải.

Có $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + (2m - 1)x + 2m - 3$ (C_m).

Gọi K là hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ x_0 .

Khi đó $K = f'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 + (2m - 1) \Rightarrow K' = -6x_0 + 6$.

Ta xét bảng biến thiên của K

x_0	$-\infty$	1	$+\infty$
$K'(x_0)$	+	0	-
$K(x_0)$	$-\infty$	$2m+2$	$-\infty$

Từ BBT ta thấy tại $x_0 = 1$ thì K đạt GTLN là $2m + 2$.

(d): $x - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x - 4)$ có hệ số góc $K_d = \frac{1}{2}$.

Để (d) vuông góc tiếp tuyến thì $K_d \cdot K = -1 \Leftrightarrow (2m + 2) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 5. Hỏi tham số m thuộc khoảng nào sau đây thì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m - 2)x + 3m$ vuông góc với đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$.

A. $(-\infty; 4)$.

B. $[-4; 3)$.

C. $[3; 5)$.

D. $[5; +\infty)$.

Lời giải.

Có $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + (m - 2)x + 3m$ (C_m).

Gọi K là hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ x_0 .

Khi đó $K = f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 + (m - 2) \Rightarrow K' = 6x_0 + 6$.

Ta xét bảng biến thiên của K

x_0	$-\infty$	-1	$+\infty$
$K'(x_0)$	-	0	+
$K(x_0)$	$+\infty$	$m - 5$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy tại $x_0 = -1$ thì K đạt GTNN là $m - 5$.

(d): $x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$ có hệ số góc $K_d = 1$.

Để (d) vuông góc tiếp tuyến thì $K_d \cdot K = -1 \Leftrightarrow m - 5 = -1 \Leftrightarrow m = 4 \in [3; 5)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 - 1$ có đồ thị (C), phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1; 1)$ cắt (C) tại điểm thứ hai là B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $AB = 4\sqrt{26}$.

B. $AB = 10$.

C. $AB = \sqrt{105}$.

D. $AB = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $y = f(x)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow f'(1) = 5$.

Phương trình tiếp tuyến (Δ) tại $A(1; 1)$ là $y = 5(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 5x - 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) là

$$\begin{aligned} 5x - 4 &= x^3 + x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có $x_B = -3 \Rightarrow y_B = 5 \cdot (-3) - 4 = -19$ nên $B(-3; -19)$.

Có $\overrightarrow{AB} = (-4; -20) \Rightarrow AB = 4\sqrt{26}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1; 5)$ và B là giao điểm thứ hai của Δ với (C). Tính diện tích S của tam giác OAB , với O là gốc tọa độ.

A. $S = 12$.

B. $S = 6$.

C. $S = 15$.

D. $S = 24$.

Lời giải.

Đặt $y = f(x)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(1) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến (Δ) tại $A(1; 5)$ là $y = 9(x - 1) + 5 \Leftrightarrow y = 9x - 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) là

$$9x - 4 = x^3 + 3x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}.$$

Ta có $x_B = -5 \Rightarrow y_B = 9 \cdot (-5) - 4 = -49$ nên $B(-5; -49) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-6; -54)$.

Phương trình đường thẳng AB nhận $\vec{n} = (54; -6)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua $A(1; 5)$ là

$$54(x - 1) - 6(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 54x - 6y - 24 = 0.$$

$$\text{Có } S_{OAB} = \frac{1}{2}d(O, AB) \cdot AB = \frac{1}{2}|54 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 24| = 12.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 + mx + 1 - m$ có đồ thị (C) , phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1; 2)$ cắt (C) tại điểm thứ hai là B . Tìm tổng các giá trị của m sao cho $AB = 3\sqrt{2}$.

A. 2.

B. 1.

C. -6.

D. 8.

Lời giải.

Đặt $y = f(x)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 + m \Rightarrow f'(1) = m + 3$.

Phương trình tiếp tuyến (Δ) tại $A(1; 2)$ là $y = (3 + m)(x - 1) + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) là

$$(3 + m)(x - 1) + 2 = x^3 + mx + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow 3x + mx - 1 - m = x^3 + mx + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có $x_B = -2 \Rightarrow y_B = -3m - 7$ nên $B(-2; -3m - 7) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3; -3m - 9)$.

$$AB = \sqrt{9 + 9^2 + 54m + 9m^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -4. \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là -6.

Chọn đáp án **C** □

Câu 9. Cho $A(-1; y_A) \in (C): y = 2x^3 - 3x^2 + m$. Biết tiếp tuyến của (C) tại A cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là B . Tính tổng các giá trị của m để $\triangle OAB$ vuông tại gốc tọa độ O .

A. -49.

B. -44.

C. -54.

D. 54.

Lời giải.

$A(-1; y_A) \in (C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m \Rightarrow y_A = m - 5 \Rightarrow A(-1; m - 5)$.

$f'(x) = 6x^2 - 6x \Rightarrow f'(-1) = 12$.

Phương trình tiếp tuyến tại A là $y = 12(x + 1) + m - 5$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến:

$$2x^3 - 3x^2 + m = 12(x + 1) + m - 5$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{7}{2}; m + 49\right).$$

Có $\overrightarrow{OA} = (-1; m - 5); \quad \overrightarrow{OB} = \left(\frac{7}{2}; m + 49\right)$.

Để $\triangle OAB$ vuông tại O thì

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2} + (m - 5)(m + 49) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 44m - \frac{497}{2} = 0$$

Phương trình bậc hai trên có $ac < 0$ nên có 2 nghiệm phân biệt $m_1; m_2$. Theo định lý Viète thì $m_1 + m_2 = -44$.

Vậy tổng các giá trị của m thỏa yêu cầu đề bài là -44.

Chọn đáp án **B** □

Câu 10. Tìm a để từ $A(a; 1)$ kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.

Tiếp tuyến qua $A(a; 1)$ là $y = k(x - a) + 1$.

Điều kiện tiếp xúc

$$\begin{aligned} & \begin{cases} k(x-a) + 1 = \frac{-x+2}{x-1} \\ k = -\frac{1}{(x-1)^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \frac{a-x}{(x-1)^2} + 1 = \frac{-x+2}{x-1} \\ \Leftrightarrow & 2x^2 - 6x + 3 + a = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Để từ A kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị thì $(*)$ phải có nghiệm kép $\neq 1$ hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - 2a = 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \neq 1 \text{ (luôn đúng)} \\ \Delta' = 3 - 2a > 0 \\ 2 - 6 + 3 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1. \end{cases}$$

Tổng các giá trị của a là $\frac{5}{2}$. □

Câu 11. Tìm m để từ $A(-2; m)$ kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.

Tiếp tuyến qua $A(-2; m)$ là $y = k(x + 2) + m$.

Điều kiện tiếp xúc

$$\begin{aligned} & \begin{cases} k(x+2) + m = \frac{2x+1}{x-1} \\ k = -\frac{3}{(x-1)^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & -3 \cdot \frac{x+2}{(x-1)^2} + m = \frac{2x+1}{x-1} \\ \Leftrightarrow & -3x - 6 + m(x^2 - 2x + 1) = (2x+1)(x-1) \\ \Leftrightarrow & (m-2)x^2 + (-2-2m)x + m-5 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

$(*)$ có $\Delta' = (-m-1)^2 - (m-5)(m-2) = 9m-9$.

Để từ A kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị thì $(*)$ phải có nghiệm kép $\neq 1$ hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1 hoặc có 1 nghiệm khác 1.

— Nếu $(*)$ có 1 nghiệm. Khi đó $m = 2$.

Thế $m = 2$ vào $(*)$, ta được $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (thỏa $x \neq 1$) nên nhận $m = 2$.

— Nếu $(*)$ có nghiệm kép thì $\Delta' = 9m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó nghiệm của phương trình là $-\frac{b}{2a} = \frac{2+2}{2(1-2)} = -2 \neq 1$ nên nhận $m = 1$.

— Nếu $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Để phương trình có 1 nghiệm bằng 1 và 1 nghiệm khác 1 thì $m - 2 - 2 - 2m + m - 5 = 0 \Leftrightarrow -9 = 0$ (vô lý).

Vậy $m = 1$ và $m = 2$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Câu 12. Tìm m để từ $A(-1; 2)$ kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{x-m}{x-1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.

Tiếp tuyến qua $A(-1; 2)$ là $y = k(x + 1) + 2$.

Điều kiện tiếp xúc

$$\begin{aligned} & \begin{cases} k(x + 1) + 2 = \frac{x - m}{x - 1} \\ k = -\frac{-1 + m}{(x - 1)^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \frac{(x + 1)(m - 1)}{(x - 1)^2} + 2 = (x - m)(x - 1) \\ \Leftrightarrow & x^2 + (2m - 4)x + 1 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

(*) có $\Delta' = (m - 2)^2 - 1 = m^2 - 4m + 3$.

Để từ A kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị thì (*) phải có nghiệm kép $\neq 1$ hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

— Nếu (*) có nghiệm kép thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3. \end{cases}$

Với $m = 1$ thì nghiệm phương trình là $-\frac{b}{2a} = 1$ (loại).

Với $m = 3$ thì nghiệm phương trình là $-\frac{b}{2a} = -1 \neq 1$ (nhận $m = 3$).

— Nếu (*) có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1. \end{cases}$

Để phương trình có 1 nghiệm bằng 1 và 1 nghiệm khác 1 thì $1 + 2m - 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (không thỏa $m < 1$).

Vậy $m = 3$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Câu 13. Tìm m để từ $A(0; m)$ kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{x + 2}{x - 1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.

Tiếp tuyến qua $A(0; m)$ là $y = kx + m$.

Điều kiện tiếp xúc

$$\begin{aligned} & \begin{cases} kx + m = \frac{x + 2}{x - 1} \\ k = -\frac{3}{(x - 1)^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & -3x + m(x - 1)^2 = (x - 2)(x - 1) \\ \Leftrightarrow & (m - 1)x^2 + (-2m - 4)x + m + 2 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

(*) có $\Delta' = (m + 2)^2 - (m - 1)(m + 2) = 3m + 6$.

Để từ A kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị thì (*) phải có nghiệm kép $\neq 1$ hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1 hoặc có 1 nghiệm khác 1.

— Nếu $m = 1$ thì (*) trở thành $-6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \neq 1$ nên nhận $m = 1$.

— Nếu $m \neq 1$ và $\Delta' = 3m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Khi đó phương trình có nghiệm kép là $-\frac{b}{2a} = -1 \neq 1$ nên nhận $m = -\frac{1}{2}$.

— Nếu $m \neq 1$ và $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Để phương trình có 1 nghiệm bằng 1 và 1 nghiệm khác 1 thì $m - 1 - 2m - 4 + m + 2 = 0 \Leftrightarrow -3 = 0$ (vô lí)

Vậy $m = 1$ và $m = -\frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Tổng hợp kiến thức cần nhớ về tiếp tuyến

① Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Bước 1: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Suy ra hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0) = f'(x_0)$.

Bước 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $M(x_0; y_0)$ có dạng $d: k(x - x_0) + y_0$

⚠ Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0 = f(x_0)$. Tương tự khi đề cho y_0 .

Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C) . Đặc biệt $Ox: y = 0$, trục tung $Oy: x = 0$.

Nếu đề bài cho hệ số góc tiếp tuyến là k , ta làm theo các bước sau:

— **Bước 1:** Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính $y' = f'(x)$.

— **Bước 2:** Ta có $k = f'(x_0)$ và giải phương trình này ta sẽ tìm được x_0 , suy ra y_0 .

— **Bước 3:** Ứng với mỗi tiếp điểm, ta tìm được các tiếp tuyến $d: y = k(x - x_0) + y_0$.

Ngoài ra đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

— Nếu tiếp tuyến $d \parallel \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

— Nếu tiếp tuyến $d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$.

— Nếu tiếp tuyến tạo với trục hoành Ox một góc α thì $k = \tan \alpha$ (hoặc $-\tan \alpha$).

— Nếu tiếp tuyến tạo với $d: y = ax + b$ một góc α thì $\frac{k - a}{1 + ka} = \tan \alpha$ (hoặc $-\tan \alpha$).

② Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ kẻ từ $A(x_A; y_A)$ (qua A).

— **Bước 1:** Gọi $M(a; f(a))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(a) = f'(a)$ theo a .

— **Bước 2:** Tiếp tuyến dạng $d: y = f'(a)(x - a) + y(a)$ (*).
Vì điểm $A(x_A; y_A) \in d \Leftrightarrow y_A = f'(a)(x_A - a) + y(a)$ và giải được a .

— **Bước 3:** Thế a vào (*) ta tìm được tiếp tuyến cần tìm.

③ Điều kiện tiếp xúc của hai đường cong. Cho hai đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$.

Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và (C') là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. (*)

— Phương trình (*) được gọi là phương trình hoành độ điểm chung của (C) và (C') .

— Số nghiệm của (*) chính là số điểm chung của hai đồ thị.

— Trục hoành Ox có phương trình $y = 0$, trục tung Oy có phương trình $x = 0$.

Điều kiện tiếp xúc: (C) tiếp xúc với $(C') \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Từ điểm A kẻ được n tiếp tuyến đến (C) khi hệ tiếp xúc có n nghiệm phân biệt.

1 RÈN LUYỆN LẦN 1

Câu 1. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ bằng
A. -2. B. -1. C. 2. D. 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^3 + x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_0 = -1$.

Suy ra, hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(-1) = -2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-5}$ tại điểm $A(-1; 0)$ có hệ số góc bằng

- A. $\frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{6}$. C. $\frac{6}{25}$. D. $-\frac{6}{25}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Ta có $y' = \frac{-6}{(x-5)^2}$.

Vì $A(-1; 0)$ là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là $k = y'(-1) = -\frac{1}{6}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $M(-1; -2)$ là

- A. $y = 9x + 11$. B. $y = 9x - 11$. C. $y = 9x - 7$. D. $y = 9x + 7$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì M là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(-1) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = 9(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 7.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 4$ tại điểm $A(1; 2)$ là

- A. $y = 3x + 5$. B. $y = 2x + 4$. C. $y = -2x + 4$. D. $y = -2x$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 6x$.

Vì A là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là $k = y'(1) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là

$$y = -2(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = -2x + 4.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 5. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm $M(0; -1)$ là

- A. $y = 3x + 1$. B. $y = 3x - 1$. C. $y = -3x - 1$. D. $y = -3x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Vì M là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(0) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = 3(x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = 3x - 1.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 6. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-2x}{x+1}$ tại điểm $A\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ là

- A. $y = \frac{1}{2}x$. B. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. C. $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$. D. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$.

Vì A là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là $k = y'(1) = \frac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là

$$y = \frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 5x + 1 + \frac{1}{2(x-1)}$ tại điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là

- A. $y = 2x - \frac{3}{2}$. B. $y = -2x + \frac{3}{2}$. C. $y = 3x - 1$. D. $y = 3x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = 5 - \frac{1}{2(x-1)^2}$.

Vì A là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là $k = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là

$$y = 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = 3x + 1.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 8. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ tại điểm $M(0; 1)$ là

- A. $y = \frac{1}{2}x + 1$. B. $y = -\frac{1}{2}x + 1$. C. $y = -x + 1$. D. $y = x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Vì M là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(0) = \frac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = \frac{1}{2}(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 9. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -3$

- A. $y = 30x + 25$. B. $y = 9x - 25$. C. $y = 30x - 25$. D. $y = 9x + 25$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_0 = -3$ và $y_0 = -2$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(-3) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = 9(x + 3) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 25.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 10. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

- A. $y = -8x - 6$. B. $y = 8x - 6$. C. $y = -8x + 10$. D. $y = 8x + 10$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 + 4x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_0 = 1$ và $y_0 = 2$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(1) = 8$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = 8(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = 8x - 6.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 11. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

- A. $y = -x - 3$. B. $y = x - 1$. C. $y = -x + 2$. D. $y = -x - 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_o = -1$ và $y_o = -2$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(-1) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = -1(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = -x - 3.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 12. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm thuộc đồ thị có hoành độ x_o thỏa mãn $y''(x_o) = 0$ là

A. $y = -3x + 3$.

B. $y = 9x + 7$.

C. 0 .

D. $y = -3x - 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y'' = 6x - 6$.

Theo đề $y''(x_o) = 0 \Leftrightarrow 6x_o - 6 = 0 \Leftrightarrow x_o = 1$.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_o = 1$ và $y_o = 0$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(1) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = -3(x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = -3x + 3.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 13. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ x_o thỏa mãn $2y''(x_o) + y'(x_o) + 15 = 0$ là

A. $y = 9x + 7$.

B. $y = 9x + 6$.

C. $y = 9x$.

D. $y = 9x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y'' = 6x - 6$.

Theo đề $2y''(x_o) + y'(x_o) + 15 = 0 \Leftrightarrow 2(6x_o - 6) + 3x_o^2 - 6x_o + 15 = 0 \Leftrightarrow 3x_o^2 + 6x_o + 3 = 0 \Leftrightarrow x_o = -1$.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_o = -1$ và $y_o = -3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(-1) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = 9(x + 1) - 3 \Leftrightarrow y = 9x + 6.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 14. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

A. $y = 2x$.

B. $y = 9x - 11$.

C. $y = 54x + 32$.

D. $y = 2x + 4$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x + 1$.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y_o = 2$ và x_o là nghiệm của phương trình

$$x_o^3 - x_o^2 + x_o + 1 = 2 \Leftrightarrow x_o^3 - x_o^2 + x_o - 1 = 0 \Leftrightarrow x_o = 1.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(1) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = 2(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 15. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là

A. $y = 20x - 35$.

B. $y = -20x - 35$ và $y = 20x + 35$.

C. $y = 20x - 35$ và $y = -20x - 35$.

D. $y = -20x + 35$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 6x$.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y_o = 5$ và x_o là nghiệm của phương trình

$$x_o^4 - 3x_o^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x_o^4 - 3x_o^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 = -1 \text{ (vô nghiệm)} \\ x_o^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x_o^2 = 4 \Leftrightarrow x_o = \pm 2.$$

- Với $M_1(2; 5) \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là $k_1 = y'(2) = 20$.
Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là

$$y = 20(x - 2) + 5 \Leftrightarrow y = 20x - 35.$$

- Với $M_2(-2; 5) \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là $k_2 = y'(-2) = -20$.
Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là

$$y = -20(x + 2) + 5 \Leftrightarrow y = -20x - 35.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 16. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x-4}$ tại điểm có tung độ bằng 3 là

- A.** $x + 4y - 20 = 0$. **B.** $x + 4y - 5 = 0$. **C.** $4x + y - 2 = 0$. **D.** $4x + y - 5 = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Ta có $y' = \frac{-4}{(x-4)^2}$.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y_o = 3$ và x_o là nghiệm của phương trình

$$\frac{2x_o - 4}{x_o - 4} = 3 \Leftrightarrow 2x_o - 4 = 3(x_o - 4) \Leftrightarrow x_o = 8.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(8) = -\frac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = -\frac{1}{4}(x - 8) + 3 \Leftrightarrow x + 4y - 20 = 0.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 17. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-2}$ tại điểm có tung độ bằng 3 là

- A.** $6x - 3y + 7 = 0$. **B.** $3x + 6y + 7 = 0$. **C.** $3x - 6y + 7 = 0$. **D.** $3x + 6y - 7 = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Ta có $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y_o = 3$ và x_o là nghiệm của phương trình

$$\sqrt{3x_o - 2} = 3 \Leftrightarrow x_o = \frac{11}{3}.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{11}{3}\right) + 3 \Leftrightarrow 3x - 6y + 7 = 0.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 18. Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x-3}$ với trục hoành

- A.** $y = -2x + 4$. **B.** $y = -3x + 1$. **C.** $y = 2x - 4$. **D.** $y = 2x$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-3)^2}$.

Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành, xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x-4}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0, x \neq 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Suy ra $M(2; 0)$ là tiếp điểm.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(2) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = -2(x - 2) + 0 \Leftrightarrow y = -2x + 4.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 19. Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ với trục tung là

A. $y = -x + 2$.

B. $y = -x + 1$.

C. $y = x - 2$.

D. $y = -x - 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$.

Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung, suy ra $M(0; 2)$ là tiếp điểm.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(0) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = -1(x - 0) + 2 \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 20. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = -x^3 + 3x^2 - 6x - 11$ tại giao điểm của (C) với trục tung là

A. $y = 6x - 11$ và $y = 6x - 1$.

B. $y = 6x - 1$.

C. $y = -6x - 11$ và $y = -6x - 1$.

D. $y = -6x - 11$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 6$.

Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung, suy ra $M(0; -11)$ là tiếp điểm.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k = y'(0) = -6$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = -6(x - 0) - 11 \Leftrightarrow y = -6x - 11.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 21. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{3-2x}{x-1}$ tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x - 3$ là

A. $y = -x + 3$ và $y = -x - 1$.

B. $y = -x - 3$ và $y = -x + 1$.

C. $y = x - 3$ và $y = x + 1$.

D. $y = -x + 3$ và $-x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $y = x - 3$, xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{3-2x}{x-1} = x-3 \Leftrightarrow 3-2x = (x-3)(x-1), x \neq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0, x \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

— Với $x = 0 \Rightarrow M_1(0; -3) \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là $k_1 = y'(0) = -1$.
Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là

$$y = -1(x - 0) - 3 \Leftrightarrow y = -x - 3.$$

— Với $x = 2 \Rightarrow M_2(2; -1) \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là $k_2 = y'(2) = -1$.
Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại $M_2(2; -1)$ là

$$y = -1(x - 2) - 1 \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

Vậy, có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = -x - 3$ và $y = -x + 1$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 22. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Số phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 3$.

Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $d: y = -x - 2$, xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3 + 3x - 2 = -x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2. \end{cases}$$

— Với $x = 0 \Rightarrow M_1(0; -2)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là $k_1 = y'(0) = 3$.
Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là

$$y = 3(x - 0) - 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2.$$

— Với $x = -2 \Rightarrow M_2(-2; 0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là $k_2 = y'(-2) = -9$.
Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là

$$y = -9(x + 2) + 0 \Leftrightarrow y = -9x - 18.$$

— Với $x = 2 \Rightarrow M_3(2; 4)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_3 là $k_3 = y'(2) = -9$.
Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_3 là

$$y = -9(x - 2) + 4 \Leftrightarrow y = -9x + 22.$$

Vậy, có ba tiếp tuyến cần tìm là $y = 3x - 2$; $y = -9x - 18$ và $y = -9x + 22$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 23. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -3 .

- A. $y = -3x - 2$. B. $y = -3$. C. $y = -3x - 5$. D. $y = -3x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm.

Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng -3 nên

$$y'(x_o) = -3 \Leftrightarrow 3x_o^2 - 6x_o = -3 \Leftrightarrow 3x_o^2 - 6x_o + 3 = 0 \Leftrightarrow x_o = 1 \Rightarrow y_o = -2.$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = -3(x - 1) - 2 \Leftrightarrow y = -3x + 1.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 24. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{x-1}{x+1}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc là $\frac{1}{2}$.

- A. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$. B. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.
C. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$. D. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm.

Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng $\frac{1}{2}$ nên

$$y'(x_o) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(x_o+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_o+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_o+1 = 2 \\ x_o+1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 1 \\ x_o = -3. \end{cases}$$

— Với $x_0 = 1 \Rightarrow M_1(1; 0)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là

$$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

— Với $x_0 = -3 \Rightarrow M_2(-3; 2)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là

$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Vậy, có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 25. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x$ có phương trình là

A. $y = 9x + 40$.

B. $y = 9x - 40$.

C. $y = 9x + 32$.

D. $y = 9x - 32$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 9$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Vì tiếp tuyến song song với d nên

$$y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 9 = 9 \Leftrightarrow 3x_0(x_0 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

— Với $x_0 = 0 \Rightarrow M_1(0; 0)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là

$$y = 9(x - 0) + 0 \Leftrightarrow y = 9x.$$

— Với $x_0 = 4 \Rightarrow M_2(4; 4)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là

$$y = 9(x - 4) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 32.$$

Vậy, chỉ có một tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x - 32$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 26. Tìm tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ song song với đường thẳng $y = -3x + 15$

A. $y = -3x + 1$ và $y = -3x - 7$.

B. $y = -3x - 1$ và $y = -3x + 11$.

C. $y = -3x - 1$.

D. $y = -3x + 11$ và $y = -3x + 5$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -3x + 15$ nên

$$y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 1 \\ x_0 - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

— Với $x_0 = 2 \Rightarrow M_1(2; 5)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là

$$y = -3(x - 2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11.$$

— Với $x_0 = 0 \Rightarrow M_2(0; -1)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là

$$y = -3(x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = -3x - 1.$$

Vậy, có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = -3x - 1$ và $y = -3x + 11$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 27. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ vuông góc với $d: y = -\frac{1}{9}x + 2$ là

- A. $y = -\frac{1}{9}x + 18$ và $y = -\frac{1}{9}x + 5$.
 B. $y = \frac{1}{9}x + 18$ và $y = \frac{1}{9}x - 14$.
 C. $y = 9x + 18$ và $y = 9x - 14$.
 D. $y = 9x + 18$ và $y = 9x + 5$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d nên

$$y'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

— Với $x_0 = 2 \Rightarrow M_1(2; 4)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là

$$y = 9(x - 2) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 14.$$

— Với $x_0 = -2 \Rightarrow M_2(-2; 0)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là

$$y = 9(x + 2) - 0 \Leftrightarrow y = 9x + 18.$$

Vậy, có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x + 18$ và $y = 9x - 14$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 28. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{2x+1}$ vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{5}x$ là

- A. $y = 5x + 3$ và $y = 5x - 2$.
 B. $y = 5x - 8$ và $y = 5x - 2$.
 C. $y = 5x + 8$ và $y = 5x - 2$.
 D. $y = 5x + 8$ và $y = 5x + 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có $y' = \frac{5}{(2x+1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{5}x$ nên

$$y'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{(2x_0+1)^2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0+1=1 \\ 2x_0+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_0=-1 \end{cases}.$$

— Với $x_0 = 0 \Rightarrow M_1(0; -2)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là

$$y = 5(x - 0) - 2 \Leftrightarrow y = 5x - 2.$$

— Với $x_0 = -1 \Rightarrow M_2(-1; 3)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là

$$y = 5(x + 1) + 3 \Leftrightarrow y = 5x + 8.$$

Vậy, có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = 5x + 8$ và $y = 5x - 2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 29. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = \frac{3}{2}x^4 + x^2 - 1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 8y + 16 = 0$.

- A. $y = -8x + \frac{13}{2}$.
 B. $y = 8x + \frac{13}{2}$.
 C. $y = -8x - \frac{13}{2}$.
 D. $y = 8x - \frac{13}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^3 + 2x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{8}x - 2$ nên

$$y'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 8 \Leftrightarrow 6x_0^3 + 2x_0 = 8 \Leftrightarrow 6x_0^3 + 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow M\left(1; \frac{3}{2}\right)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = 8(x - 1) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = 8x - \frac{13}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 30. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ có hệ số góc nhỏ nhất là

- A. $6x + y - 5 = 0$. B. $6x + y + 5 = 0$. C. $6x - y + 3 = 0$. D. $6x + y - 7 = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 - 12x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại M là

$$k = y'(x_0) = 6x_0^2 - 12x_0 = 6[(x_0 - 1)^2 - 1] \geq -6.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x_0 = 1$.

Do đó, tại $M(1; -1)$ thì tiếp tuyến với đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất là $k = -6$.

Vậy, phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = -6(x - 1) - 1 \Leftrightarrow 6x + y - 5 = 0.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 31. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y = -x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ có hệ số góc lớn nhất là

- A. $2x - y = 0$. B. $x - 2y + 1 = 0$. C. $2x + y = 0$. D. $x + 2y + 1 = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 5$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại M là

$$k = y'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 - 5 = -3(x_0 - 1)^2 - 2 \leq -2.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x_0 = 1$.

Do đó, tại $M(1; -2)$ thì tiếp tuyến với đồ thị hàm số có hệ số góc lớn nhất là $k = -2$.

Vậy, phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$$y = -2(x - 1) - 2 \Leftrightarrow 2x + y = 0.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 32. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 - 1$ có đồ thị (C) , phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1; 1)$ cắt (C) tại điểm B . Tính độ dài đoạn AB .

- A. $4\sqrt{26}$. B. 10. C. $\sqrt{105}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 + 2x$; $y'(1) = 5$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1; 1)$ là $d: y = 5(x - 1) + 1 = 5x - 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$x^3 + x^2 - 1 = 5x - 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Tọa độ $B(-3; -19)$. Độ dài $AB = 4\sqrt{26}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ tiếp điểm bằng tung độ tiếp điểm.

- A. $y = 2x + 2$. B. $y = -2x - 2$. C. $y = 2x - 2$. D. $y = -2x + 2$.

Lời giải.

Gọi $A(x_0; \sqrt{2x_0^2 - 4})$ thuộc đồ thị hàm số. Ta có: $\sqrt{2x_0^2 - 4} = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2$.

$y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 4}}$; $y'(2) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $A(2; 2)$ là $d: y = 2(x - 2) + 2 = 2x - 2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 34. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ đi qua điểm $A(-1; 4)$ có phương trình là

- A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. B. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. C. $y = \frac{1}{3}x + 4$. D. $y = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3}$.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0+1}\right)$ thuộc đồ thị hàm số. Ta có: $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$; $y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y = \frac{3}{(x_0+1)^2} \cdot (x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1}$.

Do tiếp tuyến đi qua $A(-1; 4)$ nên ta có phương trình:

$$\frac{3(-1-x_0)}{(x_0+1)^2} + \frac{2x_0-1}{x_0+1} = 4 \Leftrightarrow x_0 = -4.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-4; 3)$ là $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + x + 1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M có hoành độ $x = 1$. Tìm tham số m để thỏa mãn $k \cdot f(-1) < 0$.

- A. $m > 2$. B. $m \leq -2$. C. $-2 < m < 1$. D. $m \geq 1$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 + 2mx + 1$; $k = y'(1) = 2m + 4$.

Điều kiện bài toán: $k \cdot f(-1) < 0 \Leftrightarrow (2m+4) \cdot (m-1) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 36. Gọi d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 1$ tại hai điểm lần lượt có hoành độ là x_1 và x_2 . Biết x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$. Tìm tham số m để d_1 song song d_2 .

- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.

Lời giải.

$y' = x^2 + x - 6$.

Hệ số góc của d_1, d_2 lần lượt là $y'(x_1) = x_1^2 + x_1 - 6$ và $y'(x_2) = x_2^2 + x_2 - 6$.

Ta có $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 1 = 0$ ($x_1 \neq x_2$).

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$ nên $x_1 + x_2 = -m$. Suy ra $m = 1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 37. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3mx + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(1; 3)$.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Lời giải.

Gọi $M(1; 3m)$ thuộc đồ thị hàm số. $y' = 3x^2 - 4x + 3m$; $y'(1) = 3m - 1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M : $y = (3m-1)x + 1$. Vì tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 3)$ nên suy ra $m = 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 38. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - mx^2 + 3m + 1$ tại điểm có hoành độ bằng -1 đi qua điểm $A(0; 2)$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.

Lời giải.

Gọi $M(-1; 2m+2)$ thuộc đồ thị hàm số. $y' = 4x^3 - 2mx$; $y'(-1) = 2m - 4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M : $y = (2m-4)x + 4m - 2$.

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $A(0; 2)$ nên suy ra $m = 1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 39. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ có hoành độ bằng 1. Hỏi giá trị của tham số m thuộc khoảng nào thì tiếp tuyến tại điểm M sẽ vuông góc với đường thẳng d có phương trình $x - 4y - 2018 = 0$.

- A. $(-\infty; -3)$. B. $[-3; 0)$. C. $[0; 5)$. D. $[5; +\infty)$.

Lời giải.

Gọi $M(1; 1-m)$ thuộc đồ thị hàm số. $y' = 4x^3 - 2(m+1)x$; $y'(1) = 2 - 2m$.

Đường thẳng d có hệ số góc $k_d = \frac{1}{4}$.

Vì tiếp tuyến tại điểm M vuông góc với đường thẳng d nên $y'(1) = 2 - 2m = -4 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x-1}$ có đồ thị là (C_m) và điểm $A(-1; 2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để có đúng một tiếp tuyến của (C_m) đi qua A . Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Điều kiện $m \neq 1$.

Gọi $M(x_0; \frac{x_0-m}{x_0-1})$ thuộc đồ thị hàm số.

$$y' = \frac{m-1}{(x-1)^2}; y'(x_0) = \frac{m-1}{(x_0-1)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y = \frac{m-1}{(x_0-1)^2} \cdot (x-x_0) + \frac{x_0-m}{x_0-1}$.

Do tiếp tuyến đi qua $A(-1; 2)$ nên ta có phương trình:

$$\frac{m-1}{(x_0-1)^2} \cdot (-1-x_0) + \frac{x_0-m}{x_0-1} = 2.$$

Biến đổi phương trình ta được: $x_0^2 + (2m-4)x_0 + 1 = 0$ ($x_0 \neq 1$).

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $(2m-4)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Do điều kiện $m \neq 1$ nên chỉ có $m = 3$ thỏa điều kiện bài toán.

Tổng tất cả các giá trị thực của m bằng 3.

Chọn đáp án **C** □

2 RÈN LUYỆN LẦN 1

Câu 1. Tiếp tuyến tại điểm là nghiệm $y' = 0$ của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ thì

- A. Song song với đường thẳng. B. Song song với trục hoành.
C. Có hệ số góc dương. D. Có hệ số góc bằng -1 .

Lời giải.

Gọi x_0 là nghiệm phương trình $y' = 0 : y'(x_0) = 0$. Khi đó tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 sẽ có hệ số góc $k = y'(x_0) = 0$ nên tiếp tuyến song song với trục hoành.

Chọn đáp án **B** □

Câu 2. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 8x^2 + 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \sqrt{2}$ bằng

- A. $-6\sqrt{2}$. B. $-7\sqrt{2}$. C. $-8\sqrt{2}$. D. $-9\sqrt{2}$.

Lời giải.

$y' = 4x^3 - 16x$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = \sqrt{2}$ là $y'(\sqrt{2}) = -8\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 3. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = x^3 - 2x + 1$ tại điểm $M(-1; 2)$ bằng

- A. 3. B. -5 . C. 25. D. 1.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 2$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(-1; 2)$ bằng $y'(-1) = 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ có hệ số góc bằng

- A. -4 . B. $\frac{47}{12}$. C. $-\frac{13}{4}$. D. $-\frac{17}{4}$.

Lời giải.

$$f'(x) = x^2 - x - 4; f''(x) = 2x - 1.$$

$$f''(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{2}$ bằng $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{4}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 5. Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

- A. -3 . B. 3. C. -4 . D. 0.

Lời giải.

$$y' = 3x^2 - 6x = 3(x-1)^2 - 3 \geq -3; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng -3 tại điểm có hoành độ bằng 1 .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $A(1; 0)$ là

- A. $y = -3x + 3$. B. $y = -3x + 1$. C. $y = 3x + 1$. D. $y = 3x + 3$.

Lời giải.

$$y' = 3x^2 - 6x; y'(1) = -3.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $A(1; 0)$ là $y = -3(x-1) = -3x + 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm $A(2; 3)$ là

- A. $y = -3x + 9$. B. $y = -x + 5$. C. $y = 3x - 3$. D. $y = x + 1$.

Lời giải.

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}; y'(2) = -1.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm $A(2; 3)$ là $y = -(x-2) + 3 = -x + 5$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 8. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 là

- A. $y = -3x - 5$. B. $y = 3x + 13$. C. $y = 3x + 5$. D. $y = -3x + 13$.

Lời giải.

$$y' = \frac{3}{(x+2)^2}; y'(-3) = 3 \text{ và } y(-3) = 4.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng -3 là $y = 3(x+3) + 4 = 3x + 13$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 9. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

- A. $y = x - 1$. B. $y = x + 1$. C. $y = x - 2$. D. $y = x + 2$.

Lời giải.

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; y'(0) = 1 \text{ và } y(0) = 1.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là $y = x + 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 10. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

- A. $y = -8x - 6$. B. $y = 8x - 6$. C. $y = -8x + 10$. D. $y = 8x + 10$.

Lời giải.

$$y' = 4x^3 + 4x; y'(1) = 8 \text{ và } y(1) = 2.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là $y = 8(x-1) + 2 = 8x - 6$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 11. Gọi đường thẳng $y = ax + b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Giá trị của $a - b$ bằng

- A. 3 . B. 2 . C. -1 . D. 1 .

Lời giải.

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2}; y'(1) = \frac{3}{4} \text{ và } y(1) = \frac{1}{2}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 1 là $y = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Suy ra $a = \frac{3}{4}, b = -\frac{1}{4}$. Vậy $a - b = 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 12. Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình

$y''(x) = 0$ có dạng

- A. $3x + 3y + 7 = 0$. B. $7x - 3y = 0$. C. $7x + 3y = 0$. D. $3x - 3y - 7 = 0$.

Lời giải.

$$y' = x^2 + 2x; y'' = 2x + 2.$$

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1. \text{ Suy ra } y'(-1) = -1 \text{ và } y(-1) = -\frac{4}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -1 là $y = -1 \cdot (x + 1) - \frac{4}{3} = -x - \frac{7}{3}$ hay $3x + 3y + 7 = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $(7x-11) \cdot f'(x) = 10$.

A. $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ hoặc $y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$.

B. $y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$ hoặc $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$.

C. $y = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$ hoặc $y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$.

D. $y = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$ hoặc $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$f'(x) = -\frac{10}{(x-3)^2}.$$

$$(7x-11) \cdot f'(x) = 10 \Leftrightarrow \frac{11-7x}{(x-3)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

① $x = 1: f'(1) = -\frac{5}{2}$ và $f(1) = -2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$.

② $x = -2: f'(-2) = -\frac{2}{5}$ và $f(-2) = 1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 14. Điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ có hoành độ $x_0 > 0$ và $y''(x_0) = -1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm M là và .

A. $y = -3x + \frac{5}{4}$.

B. $y = 3x + \frac{5}{4}$.

C. $y = 3x - \frac{19}{4}$.

D. $y = -3x - \frac{19}{4}$.

Lời giải.

$$y' = x^3 - 4x; y'' = 3x^2 - 4.$$

$$y''(x_0) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1. \text{ Chọn } x_0 = 1. \text{ Suy ra } y'(1) = -3 \text{ và } y(1) = -\frac{7}{4}.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là } y = -3(x-1) - \frac{7}{4} = -3x + \frac{5}{4}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 15. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2$ tại điểm M có tung độ bằng 5 là

A. $y = -12x - 7$.

B. $y = 12x - 7$.

C. $y = -12x + 17$.

D. $y = 12x + 17$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số. Theo đề bài $y_0 = 2x_0^3 + 3x_0^2 = 5 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(1) \cdot (x-1) + y_0 = 12(x-1) + 5 = 12x - 7$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 16. Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 9$ tại điểm có tung độ bằng 9 là

A. $y = 1$ và $y = 9x - 1$.

B. $y = 19$ và $y = 9x - 8$.

C. $y = 9$ và $y = 9x - 18$.

D. $y = 0$ và $y = 9x - 1$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } M(x_0, y_0) \text{ là điểm thuộc đồ thị hàm số. Theo đề bài } y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 9 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

① $x_0 = 0$: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(0) \cdot (x-0) + y_0 = 0(x-0) + 9 = 9$.

② $x_0 = 3$: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(3) \cdot (x-3) + y_0 = 9(x-3) + 9 = 9x - 18$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 17. Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị $y = \frac{2x-4}{x-3}$ với trục hoành là

A. $y = 2x$.

B. $y = -2x + 4$.

C. $y = -2x - 4$.

D. $y = 2x - 4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành $\frac{2x-4}{x-3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$$y' = -\frac{2}{(x-3)^2}; y'(2) = -2.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2(x-2) = -2x+4$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 18. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -5 .

A. $y = -5x + 2$ và $y = -5x + 22$.

B. $y = -5x + 2$ và $y = -5x - 22$.

C. $y = 5x + 2$ và $y = -5x + 22$.

D. $y = -5x - 2$ và $y = -5x + 22$.

Lời giải.

$$y' = -\frac{5}{(x-2)^2}. \text{ Giải } y' = -5 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

① $x = 3$: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -5(x-3) + 7 = -5x + 22$.

② $x = 1$: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -5(x-1) - 3 = -5x + 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 19. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

A. $y = -9x - 43$.

B. $y = -9x + 43$.

C. $y = -9x - 27$.

D. $y = -9x - 11$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y' = x^2 + 6x$. Mà theo giả thiết, tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$ nên

$$y'(x_0) = -9 \Rightarrow x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow (x_0 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3.$$

$$\text{Do đó } y_0 = \frac{(-3)^3}{3} + 3 \cdot (-3)^2 - 2 = 16 \Rightarrow M(-3; 16).$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là

$$y = -9 \cdot (x - x_0) + y_0 = -9 \cdot (x + 3) + 16 = -9x - 11.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 20. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = -x^3 + 3x^2 + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 3x + 2$.

A. $y = 3x$.

B. $y = 3x - 6$.

C. $y = -3x + 3$.

D. $y = 3x + 6$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$. Mà tiếp tuyến song song với $d: y = 3x + 2$ nên có hệ số góc $k = 3$. Do đó

$$y'(x_0) = 3 \Rightarrow -3x_0^2 + 6x_0 = 3 \Leftrightarrow -3(x_0 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

$$\text{Do đó } y_0 = 3 \Rightarrow M(1; 3).$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là

$$y = 3 \cdot (x - x_0) + y_0 = 3 \cdot (x - 1) + 3 = 3x. \text{ (nhận)}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 21. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x - y + 2 = 0$.

A. $y = 3x + 14$ và $y = 3x + 2$.

B. $y = 3x + 14$.

C. $y = 3x + 5$ và $y = 3x - 8$.

D. $y = 3x - 8$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$. Mà tiếp tuyến song song với $\Delta: y = 3x + 2$ nên có hệ số góc $k = 3$. Do đó

$$y'(x_0) = 3 \Rightarrow \frac{3}{(x_0+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+2 = 1 \\ x_0+2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M(-1; -1)$. Do đó phương trình tiếp tuyến là

$$y = 3 \cdot (x + 1) - 1 = 3x + 2. \text{ (loại vì trùng với } \Delta \text{)}$$

Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow M(-3; 5)$. Do đó phương trình tiếp tuyến là

$$y = 3 \cdot (x + 3) + 5 = 3x + 14. \text{ (nhận)}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = x$.

A. $y = x - 1$.

B. $y = -x - \frac{23}{27}$.

C. $y = -x - 1$.

D. $y = -x - 1, y = -x - \frac{23}{27}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x$. Mà tiếp tuyến vuông góc với $d: y = x$ nên có hệ số góc $k = -1$. Do đó

$$y'(x_0) = -1 \Rightarrow 3x_0^2 - 4x_0 = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow M(1; -2)$. Do đó phương trình tiếp tuyến là

$$y = -1 \cdot (x - 1) - 2 = -x - 1.$$

Với $x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_0 = -\frac{32}{27} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -\frac{32}{27}\right)$. Do đó phương trình tiếp tuyến là

$$y = -1 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{32}{27} = -x - \frac{23}{27}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 23. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 2$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 9y - 9 = 0$.

A. $y = \frac{1}{9}x + 18$ và $y = \frac{1}{9}x - 14$.

B. $y = -9x + 18$ và $y = -9x + 5$.

C. $y = 9x + 18$ và $y = 9x + 5$.

D. $y = 9x + 18$ và $y = 9x - 14$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Mà tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x + 1$ nên có hệ số góc $k = 9$. Do đó

$$y'(x_0) = 9 \Rightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow M(2; 4)$. Do đó phương trình tiếp tuyến là

$$y = 9 \cdot (x - 2) + 4 = 9x - 14.$$

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow M(-2; 0)$. Do đó phương trình tiếp tuyến là

$$y = 9 \cdot (x + 2) = 9x + 18.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 24. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -4x^3 + 3x + 1$ đi qua $A(-1; 2)$ có phương trình là

A. $y = -9x + 7$ hoặc $y = -x + 2$.

B. $y = -9x - 11$ hoặc $y = -x + 2$.

C. $y = -9x + 11$ hoặc $y = 2$.

D. $y = -9x - 7$ hoặc $y = 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Gọi d là tiếp tuyến cần tìm. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm. Khi đó ta có $\begin{cases} y_0 = -4x_0^3 + 3x_0 + 1 \\ y'(x_0) = -12x_0^2 + 3 \end{cases}$.

Do đó phương trình tiếp tuyến d là

$$y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 = (-12x_0^2 + 3) \cdot (x - x_0) - 4x_0^3 + 3x_0 + 1.$$

Mà $A(-1; 2) \in d$ nên ta có

$$\begin{aligned} 2 &= (-12x_0^2 + 3) \cdot (-1 - x_0) - 4x_0^3 + 3x_0 + 1 \\ \Leftrightarrow 8x_0^3 + 12x_0^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(2x_0 - 1)(x_0 + 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 1 = 0 \\ (x_0 + 1)^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_0 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x_0 = \frac{1}{2}$ ta có $d: y = 2$.

Với $x_0 = -1$ ta có $d: y = -9x - 7$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 25. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ tại điểm $A(-3; -2)$ cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai là B . Điểm B có tọa độ là

- A. $B(-1; 0)$. B. $B(1; 10)$. C. $B(2; 33)$. D. $B(-2; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 8x + 4$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $A(-3; -2)$ là

$$d: y = y'(-3) \cdot (x + 3) - 2 = 7x + 19.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 7x + 19 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3. \end{cases}$$

Do đó, điểm B có tọa độ $(2; 33)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1; 5)$ và B là giao điểm thứ hai của Δ với (C) . Diện tích tam giác AOB bằng

- A. 12. B. 6. C. 15. D. 24.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y = 3x^2 + 6x$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $A(1; 5)$ là

$$d: y = y'(1) \cdot (x - 1) + 5 = 9x - 4.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^3 + 3x^2 + 1 = 9x - 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1. \end{cases}$$

Do đó, điểm B có tọa độ $(-5; -49)$. Suy ra $AB = 6\sqrt{82}$.

Mà $d(O; AB) = d(O; d) = \frac{4}{\sqrt{82}}$ nên diện tích tam giác AOB bằng

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(O; AB) = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{82} \cdot \frac{4}{\sqrt{82}} = 12.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 27. Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại điểm $M(2; 5)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B . Diện tích tam giác AOB (với O là gốc tọa độ) bằng

- A. $\frac{121}{6}$. B. $\frac{119}{6}$. C. $\frac{123}{6}$. D. $\frac{125}{6}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $M(2; 5)$ là

$$d: y = y'(2) \cdot (x - 2) + 5 = -3x + 11.$$

Do A là giao điểm của d với Ox nên có tọa độ $\left(\frac{11}{3}; 0\right) \Rightarrow OA = \frac{11}{3}$.

Do B là giao điểm của d với Oy nên có tọa độ $(0; 11) \Rightarrow OB = 11$.

Ta có tam giác AOB vuông tại O nên có diện tích bằng

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{3} \cdot 11 = \frac{121}{6}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 28. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ bằng 0 cắt hai trục tọa độ tại A và B . Diện tích tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{4}$.

D. 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Gọi $M(0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 1} = 1 \Rightarrow M(0; 1)$ và $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $M(0; 1)$ là

$$d: y = y'(0) \cdot x + 1 = x + 1.$$

Do A là giao điểm của d với Ox nên có tọa độ $(-1; 0) \Rightarrow OA = 1$.

Do B là giao điểm của d với Oy nên có tọa độ $(0; 1) \Rightarrow OB = 1$.

Ta có tam giác AOB vuông tại O nên có diện tích bằng

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 29. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(1; -2)$.

A. $m = 1$.

B. $m = 3$.

C. $m = -3$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Gọi $M(1; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = \frac{m-1}{1-2} = 1-m \Rightarrow M(1; 1-m)$ và $y' = \frac{1-2m}{(x-2)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $M(1; 1-m)$ là

$$d: y = y'(1) \cdot (x - 1) + 1 - m = (1 - 2m) \cdot x + m.$$

Mà d đi qua $A(1; -2)$ nên ta có

$$-2 = (1 - 2m) \cdot 1 + m \Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ có hàm số (C) . Biết a, b là các giá trị thực sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 0$.

B. $a + b = -1$.

C. $a + b = 2$.

D. $a + b = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{a}\right\}$.

Ta có $y' = \frac{-2-ab}{(ax-2)^2}$. Do $M(1; -2) \in (C)$ và tiếp tuyến tại M song song với d có hệ số góc $k = -3$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -2 = \frac{1+b}{a-2} \\ y'(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3-2a \\ \frac{-2-ab}{(a-2)^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3-2a \\ 3a^2 - 12a + 10 + ab = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $(a; b) = \{(1; 1), (2; -1)\}$.

Ta loại đi đáp án $(a; b) = (2; -1)$ vì khi đó tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ nên $M(1; -2) \notin (C)$.

Vậy $(a; b) = (1; 1) \Rightarrow a + b = 2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 31. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (2m - 1)x + 2m - 3$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với $d: x - 2y - 4 = 0$.

A. $m = -2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 4$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 2m - 1$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến Δ của đồ thị tại $M(x_0; y_0)$, khi đó $k = y'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 + 2m - 1$.

Ta có $k = -3(x_0^2 - 2x_0 + 1) + 2m + 2 = -3(x_0 - 1)^2 + 2m + 2 \leq 2m + 2$. Do đó $k_{\max} = 2m + 2$ khi $x_0 = 1$.

Mặt khác ta có Δ vuông góc với $d: y = \frac{1}{2}x - 2$ nên có hệ số góc bằng -2 , suy ra $2m + 2 = -2 \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 32. Hỏi m thuộc khoảng nào sau đây thì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m - 2)x + 3m$ vuông góc với đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$.

A. $(-\infty; -4)$.

B. $[-4; 3)$.

C. $[3; 5)$.

D. $[5; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m - 2$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến Δ của đồ thị tại $M(x_0; y_0)$, khi đó $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + m - 2$.

Ta có $k = 3(x_0^2 - 2x_0 + 1) + m - 5 = 3(x_0 - 1)^2 + m - 5 \geq m - 5$. Do đó $k_{\min} = m - 5$ khi $x_0 = 1$.

Mặt khác ta có Δ vuông góc với $d: y = x + 2$ nên có hệ số góc bằng -1 , suy ra $m - 5 = -1 \Leftrightarrow m = 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2mx^2 - m^2x + 1$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ song song với đường thẳng $d: 15x + 3y - 2 = 0$.

A. $m = 9$.

B. $m = 1, m = 9$.

C. $m = -1$.

D. $m = -1, m = 9$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 + 4mx - m^2$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ nên $k = y'(2) = 4 + 8m - m^2$.

Mặt khác tiếp tuyến lại song song với $d: y = -5x + \frac{2}{3}$ nên $k = -5 \Leftrightarrow 4 + 8m - m^2 = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 9 \end{cases}$

Với $m = -1$ thì tiếp tuyến lúc đó có phương trình $y = -5(x - 2) - \frac{19}{3} = -5x + \frac{11}{3}$.

Với $m = 9$ thì tiếp tuyến lúc đó có phương trình $y = -5(x - 2) - \frac{259}{3} = -5x - \frac{229}{3}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 34. Tìm tổng các giá trị của tham số m để từ điểm $A(m; 1)$ kẻ đúng một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x-1}$.

A. 1.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số qua $A(m; 1)$ có dạng $y = k(x - m) + 1$.

Để từ A kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị thì hệ

$$\begin{cases} \frac{2-x}{x-1} = k(x-m)+1 & (1) \\ -\frac{1}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

có duy nhất một nghiệm. Thay (2) vào (1) ta được

$$\frac{2-x}{x-1} = \frac{m-x}{(x-1)^2} + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 3 + m = 0. \quad (*)$$

Để hệ trên có một nghiệm duy nhất thì phương trình (*) phải có nghiệm kép khác 1 hoặc có hai nghiệm phân

biệt trong đó có một nghiệm bằng 1. Do đó ta có

$$\begin{cases} \Delta' = 3 - 2m = 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \neq 1 \\ \Delta' = 3 - 2m > 0 \\ 2 - 6 + 3 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 35. Tìm tổng các giá trị của tham số m để từ điểm $A(-1; m)$ kẻ đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

A. -1.

B. 4.

C. -3.

D. -2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số qua $A(-1; m)$ có dạng $y = k(x + 1) + m$.

Để từ A kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị thì hệ

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x + 1) + m & (1) \\ 3x^2 - 6x = k & (2) \end{cases}$$

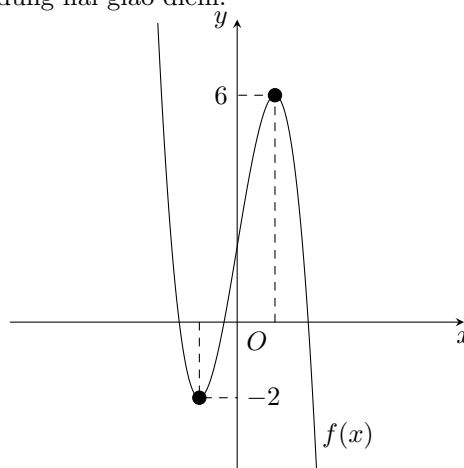
có đúng hai nghiệm. Thay (2) vào (1) ta được

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x + 1) + m \Leftrightarrow -2x^3 + 6x + 2 = m. \quad (*)$$

Để hệ trên có đúng hai nghiệm thì phương trình (*) có đúng hai nghiệm phân biệt, điều này tương đương với đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^3 + 6x + 2$ và đường thẳng $y = m$ có đúng hai giao điểm.

Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta thấy để đồ thị hàm số và đường thẳng $y = m$ có đúng hai giao điểm thì $m = -2$ hoặc $m = 6$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là $-2 + 6 = 4$.



Chọn đáp án **B** □

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{x - m}{x - 1}$ có đồ thị là (C_m) và điểm $A(-1; 2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để có một tiếp tuyến của (C_m) đi qua A tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Gọi $B\left(b; \frac{b - m}{b - 1}\right) \in (C_m)$ là tiếp điểm. ($b \neq 1$)

Ta có $y' = \frac{m - 1}{(x - 1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại B là

$$d: y = y'(b) \cdot (x - b) + \frac{b - m}{b - 1} = \frac{m - 1}{(b - 1)^2} \cdot (x - b) + \frac{b - m}{b - 1}.$$

Mà d đi qua $A(-1; 2)$ nên ta có

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{m - 1}{(b - 1)^2} \cdot (-1 - b) + \frac{b - m}{b - 1} \\ \Leftrightarrow 2(b - 1)^2 &= (m - 1)(-1 - b) + (b - m)(b - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2b^2 - 4b + 2 &= b(1 - m) + 1 - m + b^2 + b(-1 - m) + m \\ \Leftrightarrow 2b^2 - 4b + 2 &= b^2 - 2mb + 1 \\ \Leftrightarrow b^2 + b(2m - 4) + 1 &= 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Mặt khác d tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân nên $y'(b) = \pm 1$ hay $\frac{m-1}{(b-1)^2} = \pm 1$.

TH1. $\frac{m-1}{(b-1)^2} = 1 \Leftrightarrow m-1 = b^2 - 2b + 1 \Leftrightarrow m = b^2 - 2b + 2$. Thay vào (*) ta được

$$b^2 + b(2b^2 - 4b) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2b^3 - 3b + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} & (\text{nhận}) \\ b = 1. & (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Với } b = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{13}{4}.$$

TH2. $\frac{m-1}{(b-1)^2} = -1 \Leftrightarrow m-1 = -b^2 + 2b - 1 \Leftrightarrow m = -b^2 + 2b$. Thay vào (*) ta được

$$b^2 + b(-2b^2 + 4b - 4) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2b^2 + 5b^2 - 4b + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} & (\text{nhận}) \\ x = 1. & (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Với } b = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{3}{4}; \frac{13}{4} \right\}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 37. Tìm tổng các giá trị của tham số m để từ điểm $A(m; 0)$ kẻ đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau.

A. $\frac{1}{27}$.

B. $\frac{15}{18}$.

C. $\frac{\sqrt{217}}{9}$.

D. $\frac{\sqrt{217}}{18}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Đường thẳng đi qua A có dạng $d: y = k(x - m)$.

Để từ A kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị thì hệ

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 = k(x - m) & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$$

có đúng 2 nghiệm phân biệt. Thay (2) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 &= (3x^2 + 6x)(x - m) \\ \Leftrightarrow x(x^2 + 3x) - x(3x + 6)(x - m) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 + 3x - 3x^2 - 6x + 3mx + 6m) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x^2 + x(3m - 3) + 6m = 0. \end{cases} & (*) \end{aligned}$$

Ta thấy với $x = 0$ thì tiếp tuyến qua A là $d: y = 0$, khi đó không có tiếp tuyến nào của đồ thị vuông góc với d . Vậy để từ A kẻ được đúng 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 0 và thỏa $(3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1$, suy ra

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ m \neq 0 \\ (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m - 3)^2 + 48m > 0 \\ m \neq 0 \\ 9x_1^2x_2^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 30m + 9 > 0 \\ m \neq 0 \\ 9P^2 + 18PS + 36P = -1 \end{cases}$$

với $S = x_1 + x_2 = \frac{3m-3}{2}$, $P = x_1x_2 = -3m$ (hệ thức Vi-et). Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right) \\ m \neq 0 \\ 81m^2 - 27m(3m - 3) - 108m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right) \\ m = \frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 38. Tìm tổng các giá trị của tham số m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m-2)x - m^2$ đi qua điểm $A(-1; 4)$.

A. 3.

B. -1.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + (m-2)$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại $M(x_0; y_0)$, khi đó $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + (m-2)$.

Ta có $k = 3(x_0^2 - 2x_0 + 1) + m - 5 = 3(x_0 - 1)^2 + m - 5 \geq m - 5$. Do $k_{\min} = m - 5$ khi $x_0 = 1$.

Khi đó tiếp tuyến có dạng $d: y = (m-5) \cdot (x-1) - m^2 + m - 4$. Mà d đi qua $A(-1; 4)$ nên ta có

$$4 = -2(m-5) - m^2 + m - 4 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2. \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $-2 + 1 = -1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 39. Tìm m để đường thẳng $d: y = m - x$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các tiếp tuyến của (C) tại A và B song song nhau.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$m - x = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow (m-x)(x+1) = x-1 \Leftrightarrow x^2 + (2-m)x - 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến tại chúng song song với nhau thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa $y'(x_1) = y'(x_2)$. Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} \Delta = (2-m)^2 + 4(1+m) > 0 \\ \frac{2}{(x_1+1)^2} = \frac{2}{(x_2+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 > 0 \\ (x_1+1)^2 = (x_2+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+1 = x_2+1 \\ x_1+1 = -x_2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ (loại)} \\ x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Viet cho phương trình $(*)$ ta có $x_1 + x_2 = m - 2$. Do đó $m - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 40. Tìm m để đường thẳng $d: y = m(x-2) - 2$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại ba điểm $A(2; -2), B, D$ để tích các hệ số góc tiếp tuyến tại B, D của (C) là 27.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 2 &= m(x-2) - 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 - m(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 2) - m(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 2 - m) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - x - 2 - m = 0. \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Để d cắt (C) tại ba điểm A, B, D và tích các hệ số góc tiếp tuyến tại B, D là 27 thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 2 thỏa $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = 27$. Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} \Delta = 1 + 4(2+m) > 0 \\ 2^2 - 2 - 2 - m \neq 0 \\ (3x_1^2 - 6x_1) \cdot (3x_2^2 - 6x_2) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \\ 9x_1^2x_2^2 - 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ 9P^2 - 18PS + 36P = 27 \end{cases}$$

với $S = x_1 + x_2 = 1$, $P = x_1x_2 = -2 - m$. Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ 9(2+m)^2 + 18(2+m) - 36(2+m) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ 9m^2 + 18m - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **B**

□

BÀI 3. ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ VI PHÂN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- ① **Đạo hàm cấp hai.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm trên $(a; b)$. Khi đó, hệ thức $y' = f'(x)$ xác định một hàm số mới trên $(a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , và kí hiệu là y'' hay $f''(x)$. Ta có

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

- ② Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$.

- ③ **Tổng quát,** cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n - 1$, kí hiệu là $f^{(n-1)}(x)$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$). Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$. Ta có

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

- ④ **Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai:** đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s(t)$ tại thời điểm t .

- ⑤ **Vi phân.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Giả sử Δx là số gia của x . Khi đó, ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx , kí hiệu là $df(x)$ hoặc là dy . Tức là

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x$$

B VÍ DỤ MINH HOẠ

📁 DẠNG 3.1. Tính đạo hàm cấp cao của một hàm số

Phương pháp giải

- Tính đạo hàm cấp một y' .
- Lần lượt tính các đạo hàm cấp 2, 3, ..., n của hàm số $y = f(x)$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

① $y = x^5 - 2x^2 + 1, n = 3.$

② $y = \sin 2x + \cos 2x, n = 5.$

Lời giải.

① $y = x^5 - 2x^2 + 1, n = 3.$

Ta có $y' = 5x^4 - 4x \Rightarrow y'' = (5x^4 - 4x)' = 20x^3 - 4 \Rightarrow y^{(3)} = (20x^3 - 4)' = 60x^2.$

② $y = \sin 2x + \cos 2x$

Ta có $y' = 2 \cos 2x - 2 \sin 2x \Rightarrow y'' = (2 \cos 2x - 2 \sin 2x)' = -4 \sin 2x - 4 \cos 2x$

$\Rightarrow y^{(3)} = (-4 \sin 2x - 4 \cos 2x)' = -8 \cos 2x + 8 \sin 2x.$

Suy ra $y^{(4)} = (-8 \cos 2x + 8 \sin 2x)' = 16 \sin 2x + 16 \cos 2x \Rightarrow y^{(5)} = (16 \sin 2x + 16 \cos 2x)' = 32 \cos 2x - 32 \sin 2x.$

□

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1.$

Lời giải.

Ta có $y' = (2x^3 - 3x^2 + 4x - 1)' = 6x^2 - 6x + 4.$ Suy ra $y'' = (6x^2 - 6x + 4)' = 12x - 6.$

□

BÀI 2. Tính đạo hàm cấp bốn của hàm số $y = 5x^4 + 4x^3 - 7x + 2019.$

Lời giải.

Ta có: $y' = 20x^3 + 12x^2 - 7 \Rightarrow y'' = 60x^2 + 24x \Rightarrow y^{(3)} = 120x + 24.$

Suy ra $y^{(4)} = 120.$

□

BÀI 3. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{1}{1-x}.$

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$

□

BÀI 4. Tính đạo hàm cấp năm của hàm số $y = \sin(2x + 1) + x^3 + 5.$

Lời giải.

Ta có: $y' = 2 \cos(2x + 1) + 3x^2 \Rightarrow y'' = -4 \sin(2x + 1) + 6x \Rightarrow y^{(3)} = -8 \cos(2x + 1) + 6.$

Suy ra $y^{(4)} = 16 \sin(2x + 1) \Rightarrow y^{(5)} = 32 \cos(2x + 1).$

□

BÀI 5. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x - 2020.$ Tính giá trị của $f^{(4)}(-1); f^{(4)}(0).$

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 10x^4 + 16x^3 - 6x + 1 \Rightarrow f''(x) = 40x^3 + 48x^2 - 6 \Rightarrow f^{(3)}(x) = 120x^2 + 96x \Rightarrow f^{(4)}(x) = 240x + 96.$

Suy ra $f^{(4)}(-1) = 240 \cdot (-1) + 96 = -144$ và $f^{(4)}(0) = 96.$

□

BÀI 6. Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x + \frac{1}{2}x^2 - x.$ Tính $f''\left(\frac{\pi}{6}\right); f^{(3)}(\pi).$

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2 \cos 2x + x - 1 \Rightarrow f''(x) = -4 \sin 2x + 1 \Rightarrow f^{(3)}(x) = -8 \cos 2x.$

Suy ra $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 = 1 - 2\sqrt{3}; f^{(3)}(\pi) = -8 \cos(2\pi) = -8.$

□

BÀI 7. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t.$ Trong đó, t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ s.

Lời giải.

Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9.$

Suy ra gia tốc của chuyển động tại thời điểm t là $a(t) = v'(t) = 6t - 6.$

Vậy $a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12$ m/s².

□

BÀI 8. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t.$ Trong đó, t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động khi gia tốc bị triệt tiêu.

Lời giải.

Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9.$

Suy ra gia tốc của chuyển động tại thời điểm t là $a(t) = v'(t) = 6t - 6.$

Gia tốc bị triệt tiêu khi $a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

Suy ra $v(1) = -12$ m/s.

□

BÀI 9. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$ thỏa $2(y')^2 = (y-1)y''.$

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y''(x) = -\frac{14}{(x+4)^3}$.

Suy ra $(y-1)y'' = -\left(\frac{x-3}{x+4} - 1\right) \cdot \frac{14}{(x+4)^3} = 2 \cdot \frac{49}{(x+4)^4} = 2(y')^2$.

Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 10. Chứng minh rằng hàm số $y = x \sin x$ thỏa $xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x \Rightarrow y'' = \cos x + (\cos x - x \sin x) = 2 \cos x - x \sin x$.

Suy ra $xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2 \sin x - 2x \cos x + x(2 \cos x - x \sin x) = 0$.

Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 11. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$ thỏa $(y')^2 + (y'')^2 = 2$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x$.

Suy ra $y' = \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x - \cos x$.

Do đó $(y')^2 + (y'')^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (-\sin x - \cos x)^2 = (1 - 2 \sin x \cos x) + (1 + 2 \sin x \cos x) = 2$.

Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 12. Chứng minh rằng hàm số $y = \tan^2 2x$ thỏa $y'' - 32y - 24y^2 = 8$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2 \tan 2x \cdot (\tan 2x)' = 4 \tan 2x(1 + \tan^2 2x) = 4 \tan 2x + 4 \tan^3 2x$.

Suy ra $y'' = 8(1 + \tan^2 2x) + 24 \tan^2 2x(1 + \tan^2 2x) = 24 \tan^4 2x + 32 \tan^2 2x + 8$.

Do đó $y'' - 32y - 24y^2 = (24 \tan^4 2x + 32 \tan^2 2x + 8) - 32 \tan^2 2x - 24 \tan^4 2x = 8$.

Ta có điều phải chứng minh. □

📌 DẠNG 3.2. Tìm vi phân của một hàm số

Phương pháp giải

— Tính $f'(x)$.

— Áp dụng công thức $dy = f'(x)dx$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tìm vi phân của các hàm số sau

① $y = x^3 - 5x + 1$.

② $y = \sin^3 x$.

Lời giải.

① $y = x^3 - 5x + 1$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 5$. Suy ra $dy = (3x^2 - 5)dx$.

② $y = \sin^3 x$.

Ta có $y' = 3 \sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$.

Suy ra $dy = 3 \sin^2 x \cos x dx$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm vi phân của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -6x^2 + 6x$. Suy ra $dy = y'dx = (-6x^2 + 6x)dx$. □

BÀI 2. Tìm vi phân của các hàm số $y = \frac{2x+1}{x+3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{5}{(x+3)^2}$. Suy ra $dy = y'dx = \frac{5}{(x+3)^2}dx$. □

BÀI 3. Tìm vi phân của các hàm số $y = \sin^2 x - \sin x \cos x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2 \sin x \cos x - \cos 2x = \sin 2x - \cos 2x$. Suy ra $dy = (\sin 2x - \cos 2x)dx$. □

BÀI 4. Tìm vi phân của các hàm số $y = \sqrt{2x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Suy ra $dy = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$. □

BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG V

BÀI 1. Dùng định nghĩa, tìm đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2+5} - 1$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$.

Ta có $\Delta y = \sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + 5} - 1 - \sqrt{x_0^2 + 5} + 1 = \sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + 5} - \sqrt{x_0^2 + 5}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + 5} - \sqrt{x_0^2 + 5}}{\Delta x} \\ &= \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x(\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + 5} + \sqrt{x_0^2 + 5})} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta^2 x}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + 5} + \sqrt{x_0^2 + 5}} \\ &= \frac{2x_0 + \Delta x}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + 5} + \sqrt{x_0^2 + 5}}. \end{aligned}$$

Nên $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 + \Delta x}{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2 + 5} + \sqrt{x_0^2 + 5}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Vậy $f'(2) = \frac{2}{3}$. □

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x)(5 - 3x^2)$.

Lời giải.

Ta có $y = (x^2 + x)(5 - 3x^2) = -3x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 5x$.

Suy ra $y' = -12x^3 - 9x^2 + 10x + 5$. □

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+4}{3-x}$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{x+4}{3-x} = \frac{x+4}{-x+3} \Rightarrow y' = \frac{7}{(3-x)^2}$. □

BÀI 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = 4x^3 + 3x - \frac{2}{x} + \sqrt{x}$.

Lời giải.

Ta có $y = 4x^3 + 3x - \frac{2}{x} + \sqrt{x}$

Suy ra $y' = 12x^2 + 3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. □

BÀI 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{5x^3 - 3x^2 + 1}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \frac{15x^2 - 6x}{2\sqrt{5x^3 - 3x^2 + 1}}$. □

BÀI 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^4}{4} + 3x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 5$.

Lời giải.

Với mọi giá trị thực của x , $y' = x^3 + 9x^2 + \frac{5}{2}x$. □

BÀI 7. Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x^2 - 1)(3x + 5)$.

Lời giải.

Với mọi giá trị thực của x , $y' = 4x(3x + 5) + 3(2x^2 - 1) = 18x^2 + 20x - 3$. □

BÀI 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Lời giải.

$$\text{Với mọi } x \in \mathbb{R}, y' = \frac{3x^2\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x^3-1)}{x^2+1} = \frac{2x^4 + 3x^2 + x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \quad \square$$

BÀI 9. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x+4)\sqrt{x^2+4}$.

Lời giải.

$$\text{Với mọi } x \in \mathbb{R}, y' = \sqrt{x^2+4} + \frac{x(x+4)}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x^2+4x+4}{\sqrt{x^2+4}}. \quad \square$$

BÀI 10. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{3x+1} - \frac{5}{x^2+2}$.

Lời giải.

$$\text{Với mọi } x > -\frac{1}{3}, y' = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} - \frac{5 \cdot (-2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} + \frac{10x}{(x^2+2)^2}. \quad \square$$

BÀI 11. Cho hàm số $g(x) = (-6x^2 + 96)^{2015}$. Tính $g'(0)$.

Lời giải.

$$\text{Với mọi } x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2015(-6x^2 + 96)^{2014}(-12x). \text{ Suy ra } g'(0) = 0. \quad \square$$

BÀI 12. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = (x-2)' \sqrt{x^2+1} + (x-2)[\sqrt{x^2+1}]' = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}. \quad \square$$

BÀI 13. Tính đạo hàm y' của hàm số $y = \sqrt{x^2-6x+8}$ và giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 4. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+8}} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}.$$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (loại).}$$

Vậy phương trình $y' = 0$ vô nghiệm. $\square$

BÀI 14. Cho $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 2$. Giải bất phương trình: $f'(x) \geq -2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 4x - 6.$$

$$\text{Khi đó } f'(x) \geq -2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ x \geq 2. \end{cases}$$

$$\text{Vậy bất phương trình có tập nghiệm là } S = (-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [2; +\infty). \quad \square$$

BÀI 15. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = (x^3 + 7x) \left(2x - \frac{4}{x} \right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = (3x^2 + 7) \left(2x - \frac{4}{x} \right) + (x^3 + 7x) \left(2 + \frac{4}{x^2} \right) = 8x^3 + 20x. \quad \square$$

BÀI 16. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{-x^2 - 3}{x^3 + 4x + 2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-2x(x^3 + 4x + 2) - (-x^2 - 3)(3x^2 + 4)}{(x^3 + 4x + 2)^2} = \frac{x^4 + 5x^2 - 4x + 12}{(x^3 + 4x + 2)^2}. \quad \square$$

BÀI 17. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{3x^2 - x + 1}{x + 5}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(6x-1)(x+5) - (3x^2-x+1)}{(x+5)^2} = \frac{3(x^2+10x-2)}{(x+5)^2}. \quad \square$$

BÀI 18. Tính đạo hàm của các hàm số sau: $y = (4 - 5x)(-2x + 1)$.

Lời giải.

Ta có $y = 10x^2 - 13x + 4$.

Khi đó $y' = 20x - 13$. □

BÀI 19. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

Lời giải.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+2} - (x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{x^2+2 - (x^2+x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{2-x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}.$$
□

BÀI 20. Cho hàm số $y = \frac{2-3x}{x^2-x+1}$. Tính $y'(1)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-3(x^2-x+1) - (2-3x)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{3x^2-4x-1}{(x^2-x+1)^2}.$$

$$\text{Khi đó, } y'(1) = \frac{-2}{1} = -2.$$

$$\text{Vậy } y'(-1) = -2. \quad \square$$

BÀI 21. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = (x^2 - 2x + 3)(2x + 1)^3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)(2x+1)^3 + (x^2-2x+3) \cdot 3(2x+1)^2 \cdot 2 \\ &= (2x+1)^2[(2x-2)(2x+1) + 6(x^2-2x+3)] \\ &= (2x+1)^2(10x^2-14x+16). \end{aligned}$$
□

BÀI 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$.

Lời giải.

Với $x = -1$. Hàm số đã cho không có đạo hàm.

Với $x \neq -1$, $y = x + 2$. Khi đó, $y' = 1$. □

BÀI 23. Cho hàm số $f(x) = \frac{50x+15}{40-x}$. Tính $A = \frac{f'(39)}{2015} - \frac{1}{2} \cdot f''(41)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } y'(x) = \frac{2015}{(40-x)^2} \rightarrow f'(39) = 2015.$$

$$f''(x) = \frac{-4030}{(40-x)^3} \rightarrow f''(41) = 4030.$$

$$\text{Khi đó, } A = 1 - 2015 = -2014. \quad \square$$

BÀI 24. Tính đạo hàm của hàm số $y = 3x^5 - \frac{4}{x^3} + (2x+1)\sqrt{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= (3x^5)' - \left(\frac{4}{x^3}\right)' + ((2x+1)\sqrt{x})' \\ &= 15x^4 + \frac{4}{x^6} \cdot (x^3)' + (2x+1)'\sqrt{x} + (2x+1)(\sqrt{x})' \\ &= 15x^4 + \frac{12x^2}{x^6} + 2\sqrt{x} + (2x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 15x^4 + \frac{12x^2}{x^6} + 2\sqrt{x} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$
□

BÀI 25. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\textcircled{1} y = 2x^3 - 4\sqrt{x} - \frac{3}{x} - 1.$$

$$\textcircled{2} y = \frac{x^2-2x-3}{x+5}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = 6x^2 - \frac{4}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \frac{(x^2 - 2x - 3)'(x + 5) - (x + 5)'(x^2 - 2x - 3)}{(x + 5)^2} = \frac{(2x - 2)(x + 5) - (x^2 - 2x - 3)}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 7}{(x + 5)^2}.$$

□

BÀI 26. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\textcircled{1} \quad y = (2x^3 + 2)(x^2 + 1).$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{5 - 3x - x^2}{x - 2}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = (2x^3 + 2)'(x^2 + 1) + (2x^3 + 2)(x^2 + 1)' = 6x^2(x^2 + 1) + 2x(2x^3 + 2) = 6x^4 + 6x^2 + 4x^4 + 4x = 10x^4 + 6x^2 + 4x.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \frac{(5 - 3x - x^2)'(x - 2) - (5 - 3x - x^2)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{(-3 - 2x)(x - 2) - (5 - 3x - x^2)}{(x - 2)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x - 2)^2}.$$

□

BÀI 27. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x\sqrt{x}}{x^2 - 1}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(x\sqrt{x})'(x^2 - 1) - x\sqrt{x}(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{\frac{3\sqrt{x}}{2}(x^2 - 1) - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-\frac{x^2\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^2}.$$

□

BÀI 28. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\textcircled{1} \quad y = \left(\frac{2x + 1}{3x + 1}\right)^{2015}.$$

$$\textcircled{2} \quad y = (1 - x)\sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = 2015 \left(\frac{2x + 1}{3x + 1}\right)^{2014} \cdot \left(\frac{2x + 1}{3x + 1}\right)' = 2015 \left(\frac{2x + 1}{3x + 1}\right)^{2014} \cdot \frac{-1}{(3x + 1)^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = (1 - x)' \sqrt{x^2 - 2x + 5} + (1 - x) \sqrt{x^2 - 2x + 5}' = -\sqrt{x^2 - 2x + 5} + (1 - x) \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = -\frac{2x^2 - 4x + 6}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

□

BÀI 29. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x - 5.$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x + 2}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = (-3x^2 + 3x - 7)^{15}.$$

$$\textcircled{4} \quad y = (x - 5)\sqrt{x^2 + 2x - 1}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad y' = 5x^3 + 4x^2 - 1.$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \frac{(2x^2 - 5x + 1)'(x + 2) - (2x^2 - 5x + 1)(x + 2)'}{(x + 2)^2} = \frac{(4x - 5)(x + 2) - (2x^2 - 5x + 1)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 8x - 11}{(x + 2)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad y' = 15(-3x^2 + 3x - 7)^{14} \cdot (-3x^2 + 3x - 7)' = -45(2x - 1)(-3x^2 + 3x - 7)^{14}.$$

$$\textcircled{4} \quad y' = \sqrt{x^2 + 2x - 1} + (x - 5) \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} = \frac{2x^2 - 2x - 6}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}.$$

□

BÀI 30. Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 5x$. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa $y' > 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 8x + 5$.

Khi đó $y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$ hoặc $x < 1$. □

BÀI 31. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-6x+5}}$.

Lời giải.

Với mọi $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$, $y' = \frac{3\sqrt{x^2-6x+5} - \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+5}} \cdot (3x+2)}{(\sqrt{x^2-6x+5})^2} = \frac{-11x+21}{(x^2-6x+5)\sqrt{x^2-6x+5}}$. □

BÀI 32. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2-1} - 2x$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \\ 2\sqrt{x^2-1} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \\ x \geq 0 \\ x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. □

BÀI 33. Giải bất phương trình $y' \geq 0$ biết $y = x - 2 + \frac{4}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - \frac{8}{x^3}$.

Điều kiện $x \neq 0$.

Do đó

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{8}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 8}{x^3} \geq 0.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$\frac{x^3 - 8}{x^3}$		+	- 0 +	

Dựa vào bảng xét dấu ta có: $x \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.

Vậy $S = (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$. □

BÀI 34. Giải bất phương trình $y' \leq 0$ biết $y = (x-1)\sqrt{2x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x-1)'\sqrt{2x+1} + (x-1)[\sqrt{2x+1}]' = \sqrt{2x+1} + \frac{(x-1)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x-2}{\sqrt{2x+1}}$.

Khi đó $y' \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{\sqrt{2x+1}} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 \leq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$.

Vậy $S = \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. □

BÀI 35. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = (2-x^3)(x+1)^2$.

Lời giải.

Ta có $y = (2-x^3)(x+1)^2 = -x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x + 2$. □

BÀI 36. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{2x^3+x^2-3x+1}{x^2+x+1}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \frac{(6x^2+2x-3)(x^2+x+1) - (2x^3+x^2-3x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^4+4x^3+10x^2-4}{(x^2+x+1)^2}$. □

BÀI 37. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x - \sqrt{12x - 2x^3}$. Tính y' và giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

$$y' = x^2 - 2 - \frac{12 - 6x^2}{2\sqrt{12x - 2x^3}} = x^2 - 2 - \frac{6 - 3x^2}{\sqrt{12x - 2x^3}}.$$

Điều kiện: $12x - 2x^3 \geq 0$.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2) \left(1 + \frac{3}{\sqrt{12x - 2x^3}} \right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

So sánh điều kiện, hai giá trị x đều thỏa mãn.

Vậy $x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$. □

BÀI 38. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^4 - x^2 + 3$ tại điểm có hoành độ là -1 .

Lời giải.

Ta có: $y' = 4x^3 - 2x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Do $x_0 = -1$ nên $y_0 = x_0^4 - x_0^2 + 3 = 3$; $y'(x_0) = 4x_0^3 - 2x_0 = -2$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^4 - x^2 + 3$ tại điểm $M(-1; 3)$ có dạng

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = -2(x + 1) + 3 \Leftrightarrow y = -2x + 1.$$

□

BÀI 39. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 6x = -3x(x + 2)$.

Gọi $M(2; y_M) \in (C)$. Khi đó $y_M = y(2) = -19$ suy ra tọa độ $M(2; -19)$.

Ta có hệ số góc tiếp tuyến là $y'(2) = -24$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y = -24(x - 2) - 19 \Leftrightarrow y = -24x + 29.$$

□

BÀI 40. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-3}{(x - 2)^2}.$$

Gọi $M(a; 3) \in (C)$ với $a \neq 2$. Khi đó $\frac{2a - 1}{a - 2} = 3 \Leftrightarrow a = 5$. Suy ra tọa độ $M(5; 3)$.

Tiếp tuyến với (C) tại M có hệ số góc $k = y'(5) = -\frac{1}{3}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là

$$y = -\frac{1}{3}(x - 5) + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}.$$

□

BÀI 41. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1 - 3x}{x + 2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } y' = -\frac{7}{(x + 2)^2}.$$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Khi đó, x_0 là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1 - 3x_0}{x_0 + 2} = 4 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $y'(-1) = -7$.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại $A(-1; 4)$ là $y = -7(x + 1) + 4$ hay $y = -7x - 3$. □

BÀI 42. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - x^2 + 3$ tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'(1) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = x - 1 + 3 \Leftrightarrow y = x + 2.$$

□

BÀI 43. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(0) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = 3x + 1.$$

□

BÀI 44. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Khi $x = 2$ ta có $y = 1$ và $y'(2) = 8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 là: $y - 1 = y'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = 8x - 15$. □

BÀI 45. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-3}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-8}{(x-3)^2}, \forall x \neq 3$.

Tọa độ giao điểm của (C) và trục hoành là $A(-1; 0)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(-1; 0)$ là: $y - 0 = y'(-1)(x - (-1)) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. □

BÀI 46. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tìm tọa độ giao điểm A giữa đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm A có hoành độ dương.

Lời giải.

Với mọi $x \neq 1, y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Tọa độ $(x; y)$ với $x > 0$ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = \frac{x+1}{x-1} \\ y = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ y = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(2; 3)$ là $y - 3 = y'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 7$. □

BÀI 47. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ tại điểm $M \in (C)$ có tung độ bằng 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 - 12x$.

Gọi $M(a; 3) \in (C)$. Khi đó $2a^3 - 6a^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow 2a^2(a - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$.

Vậy có hai điểm thuộc (C) có tung độ bằng 3 là $M_1(0; 3)$ và $M_2(3; 3)$.

. Tiếp tuyến với (C) tại M_1 là có hệ số góc $k_1 = y'(0) = 0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với (C) tại M_1 là: $y = 3$.

. Tiếp tuyến với (C) tại M_2 là có hệ số góc $k_2 = y'(3) = 18$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với (C) tại M_2 là:

$$y = 18(x - 3) + 3 \Leftrightarrow y = 18x - 51.$$

□

BÀI 48. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{2x - 1}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 5x + 2019$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq \frac{1}{2}$.

Ta có $y' = \frac{4x^2 - 4x + 5}{(2x - 1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là toạ độ tiếp điểm, $(x_0 \neq \frac{1}{2})$.

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 5x + 2019$ nên $y'(x_0) = 5$.

$$\Leftrightarrow \frac{4x_0^2 - 4x_0 + 5}{(2x_0 - 1)^2} = 5 \Leftrightarrow 4x_0^2 - 4x_0 + 5 = 5(4x_0^2 - 4x_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 16x_0^2 - 16x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 & (\text{nhận}) \\ x_0 = 1 & (\text{nhận}). \end{cases}$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_1(0; 3)$ có dạng

$$\begin{aligned} y &= y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \\ \Leftrightarrow y &= 5x + 3 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_2(1; 0)$ có dạng

$$\begin{aligned} y &= y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \\ \Leftrightarrow y &= 5(x - 1) = 5x - 5 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

□

BÀI 49. Cho $(C): y = x^3 + 3x^2 + 4$, viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 9x - 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là toạ độ tiếp điểm.

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 9x - 1$ nên $y'(x_0) = 9$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3. \end{cases}$$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 8$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_1(1; 8)$ có dạng

$$\begin{aligned} y &= y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \\ \Leftrightarrow y &= 9(x - 1) + 8 = 9x - 1 \text{ (loại do trùng với } d). \end{aligned}$$

Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 4$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_2(-3; 4)$ có dạng

$$\begin{aligned} y &= y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \\ \Leftrightarrow y &= 9(x + 3) + 4 = 9x + 31 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

□

BÀI 50. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 3y - 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 6x = -3x(x + 2)$.

Gọi $N(a; b) \in (C)$.

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 3y - 2 = 0$ nên tiếp tuyến có hệ số góc là $k = 3$.

Khi đó $y'(a) = 3 \Leftrightarrow -3a^2 - 6a = 3 \Leftrightarrow a = -1$. Suy ra $b = y(-1) = -1$.

Vậy toạ độ $N(-1; -1)$.

Phương trình tiếp tuyến cần của (C) tại N là

$$y = 3(x + 1) - 1 \Leftrightarrow y = 3x + 2.$$

□

BÀI 51. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x) = \frac{3x - 2}{x - 2}$ biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $(\Delta): y = -4x + 19$.

Lời giải.

Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ và $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đó.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $(\Delta): y = -4x + 19 \Rightarrow f'(x_0) = -4$.

$$\text{Ta có } f'(x_0) = -\frac{4}{(x_0 - 2)^2} \text{ nên } -\frac{4}{(x_0 - 2)^2} = -4 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Khi $x_0 = 1$, tiếp tuyến cần tìm là $y = -4(x - 1) - 1 \Leftrightarrow y = -4x + 3$.

Khi $x_0 = 3$, tiếp tuyến cần tìm là $y = -4(x - 3) + 7 \Leftrightarrow y = -4x + 19$ (loại).

□

BÀI 52. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = 6x - 7$.

Lời giải.

Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ và $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đó.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $(\Delta): y = 6x - 7 \Rightarrow f'(x_0) = 6$.

Ta có $f'(x_0) = 2x_0 - 2$ nên $2x_0 - 2 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 4$.

Khi $x_0 = 4$ tiếp tuyến cần tìm là $y = 6(x - 4) + 9 \Leftrightarrow y = 6x - 15$. □

BÀI 53. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) .

① Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

② Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 3y - x + 1 = 0$.

Lời giải.

① Giao điểm của (C) và trục tung là $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = y'(0)(x - 0) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

② Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ và $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đó.

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 3y - x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $f'(x_0) = -3$.

Ta có $f'(x_0) = \frac{-3}{(x_0 - 2)^2}$ nên $\frac{-3}{(x_0 - 2)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = 1. \end{cases}$

Khi $x_0 = 3$, tiếp tuyến cần tìm là $y = -3(x - 3) + 4 \Leftrightarrow y = -3x + 13$.

Khi $x_0 = 1$, tiếp tuyến cần tìm là $y = -3(x - 1) - 2 \Leftrightarrow y = -3x + 1$. □

BÀI 54. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) biết Δ song song với đường thẳng $d: 4x - y - 7 = 0$.

Lời giải.

Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ và $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đó.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 4x - y - 7 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 4$.

Ta có $f'(x_0) = \frac{4}{(2x_0 - 1)^2}$ nên $\frac{4}{(2x_0 - 1)^2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 0. \end{cases}$

Khi $x_0 = 1$, tiếp tuyến cần tìm là $y = 4(x - 1) - 3 \Leftrightarrow y = 4x - 7$ (loại).

Khi $x_0 = 0$, tiếp tuyến cần tìm là $y = 4x + 1$.

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = 4x + 1$. □

BÀI 55. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x$ có đồ thị (C) .

① Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 0.

② Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

③ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = x + 2015$.

Lời giải.

① Ta có $y_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1. \end{cases}$

Với $x_0 = 0$ ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y'(0) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = y'(0)(x - 0) + y(0) \Leftrightarrow y = x.$$

Với $x_0 = 1$ ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y'(1) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = y'(1)(x - 1) + y(1) \Leftrightarrow y = 0.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa bài toán là $y = x$ và $y = 0$.

- ② Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y'(2) = 5$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = y'(2)(x - 2) + y(2) \Leftrightarrow y = 5(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = 5x - 8.$$

- ③ Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M(x_0; y(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$ và $y'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đó.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = x + 2015 \Rightarrow y'(x_0) = 1$.

Ta có $y'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 + 1$ nên $x_0^2 - 4x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ x_0 = 0. \end{cases}$

Khi $x_0 = 4$ tiếp tuyến cần tìm là $y = (x - 4) + 36 \Leftrightarrow y = x + 32$.

Khi $x_0 = 0$ tiếp tuyến cần tìm là $y = x$.

Vậy hai tiếp tuyến cần tìm là $y = x + 32$ và $y = x$.

□

BÀI 56. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3.

Lời giải.

Gọi $A\left(a, \frac{2a - 1}{a + 1}\right)$ là tiếp điểm.

Theo giả thiết ta có $y'(a) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(a + 1)^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2. \end{cases}$

— $a = 0$. Khi đó, $A(0; -1)$ và tiếp tuyến tương ứng có phương trình là $y = 3x - 1$.

— $a = -2$. Khi đó, $A(-2; 5)$ và tiếp tuyến tương ứng có phương trình là $y = 3x + 11$.

□

BÀI 57. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x + 1}{2x - 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 3$.

Lời giải.

Với mọi $x \neq \frac{1}{2}$, $y' = \frac{-4}{(2x - 1)^2}$.

Gọi $A\left(a, \frac{2a + 1}{2a - 1}\right)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'(a) = -4 \Leftrightarrow (2a - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1. \end{cases}$

— $a = 0$. Suy ra $A(0; -1)$ và phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y - (-1) = -4(x - 0) \Leftrightarrow y = -4x - 1$ (nhận).

— $a = 1$. Suy ra $A(1; 3)$ và phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y - 3 = -4(x - 1) \Leftrightarrow y = -4x + 7$ (nhận).

□

BÀI 58. Cho hàm số $y = \frac{x + 2}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = 3x + 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x - 1)^2}, \forall x \neq 1$.

Gọi $A\left(a, \frac{a + 2}{a - 1}\right)$ là tiếp điểm.

Tiếp tuyến của (C) tại A vuông góc với d khi và chỉ khi $y'(a) \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow \frac{-3}{(a - 1)^2} \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow (a - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 4 \\ a = -2. \end{cases}$$

— $a = -2$.

Khi đó, $A(-2; 0)$ và phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

— $a = 4$.

Khi đó, $A(4; 2)$ và phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

□

BÀI 59. Cho đường cong $(C): y = f(x) = -4x^3 - 3x^2 + 5x - 7$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với $d: y = -x$.

Lời giải.

Ta có $y' = -12x^2 - 6x + 5$.

Gọi $M(a; b) \in (C)$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm M là $k = -12a^2 - 6a + 5$.

Do tiếp tuyến của (C) song song với $d: y = -x$ nên ta có

$$-12a^2 - 6a + 5 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = -11 \\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{23}{4} \end{cases}$$

* Tại $M(-1; -11)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y = -(x + 1) - 11 \Leftrightarrow y = -x - 12.$$

* Tại $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{23}{4}\right)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{23}{4} \Leftrightarrow y = -x - \frac{21}{4}.$$

Kết luận: Có hai tiếp tuyến là $y = -x - 11$ và $y = -x - \frac{21}{4}$.

□

BÀI 60. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với $d: y = -3x - 7$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 10x$.

Gọi $M(a; b) \in (C)$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm M là $k = 3a^2 - 10a$.

Do tiếp tuyến của (C) song song với $d: y = -3x - 7$ nên ta có

$$3a^2 - 10a = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow b = -16 \\ a = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{40}{27} \end{cases}$$

* Tại $M(3; -16)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y = -3(x - 3) - 16 \Leftrightarrow y = -3x - 7(\text{loại}).$$

* Tại $M\left(\frac{1}{3}; \frac{40}{27}\right)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y = -3\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{40}{27} \Leftrightarrow y = -3x + \frac{67}{27}.$$

Kết luận: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -3x + \frac{67}{27}$.

□

BÀI 61. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(\Delta): x + 3y + 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(a; b) \in (C)$ với $a \neq 1$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm M là $k = \frac{-3}{(a-1)^2}$.

Do tiếp tuyến của (C) song song với $(\Delta): x + 3y + 1 = 0$ nên ta có

$$\frac{-3}{(a-1)^2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \Rightarrow b = 3 \\ a = -2 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

* Tại $M(4; 3)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y = -\frac{1}{3}(x - 4) + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}.$$

* Tại $M(-2; 1)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y = -\frac{1}{3}(x + 2) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Kết luận: Có hai tiếp tuyến là $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$ và $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. □

BÀI 62. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x + y + 7 = 0$.

Lời giải.

$$y' = 3x^2 - 10x.$$

Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x + y + 7 = 0$ hay $y = -3x - 7$ nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng -3 .

$$\text{Ta có: } y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 10x_0 = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Với $x_0 = 3$ thì $y_0 = 16$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(3; 16)$ là: $y = -3(x - 3) + 16$ hay $y = -3x + 25$ (loại).

Với $x_0 = \frac{1}{3}$ thì $y_0 = \frac{40}{27}$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(\frac{1}{3}; \frac{40}{27}\right)$ là: $y = -3\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{40}{27}$ hay $y = -3x + \frac{67}{27}$.

Vậy $y = -3x + \frac{67}{27}$. □

BÀI 63. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{-x + 2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x - y - 14 = 0$.

Lời giải.

$$y' = \frac{3}{(-x + 2)^2}.$$

Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x - y - 14 = 0$ hay $y = 3x - 14$ nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng 3 .

$$\text{Ta có: } y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(-x_0 + 2)^2} = 3 \Leftrightarrow (-x_0 + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_0 + 2 = 1 \\ -x_0 + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1; 1)$ là: $y = 3(x - 1) + 1$ hay $y = 3x - 2$.

Với $x_0 = 3$ thì $y_0 = -5$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(3; -5)$ là: $y = 3(x - 3) - 5$ hay $y = 3x - 14$ (loại).

Vậy $y = 3x - 2$. □

BÀI 64. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) biết d vuông góc với đường thẳng $\Delta : x - 3y - 3 = 0$.

Lời giải.

$$y' = -3x^2 + 6x - 3.$$

Vì tiếp tuyến d vuông góc với $\Delta : x - 3y - 3 = 0$ hay $y = \frac{1}{3}x - 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng -3 .

Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 - 3 = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(0; 2)$ là: $y = -3x + 2$.

Với $x_0 = 2$ thì $y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(2; 0)$ là: $y = -3(x - 2)$ hay $y = -3x + 6$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài là $y = -3x + 2, y = -3x + 6$. □

BÀI 65. Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : x + y - 3 = 0$.

Lời giải.

$$y' = 3x^2 + 4x.$$

Vì tiếp tuyến song song với $d : x + y - 3 = 0$ hay $y = -x + 3$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng -1 .

Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 4x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(-1; 0)$ là: $y = -(x + 1)$.

Với $x_0 = -\frac{1}{3}$ thì $y_0 = -\frac{22}{27}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(-\frac{1}{3}; -\frac{22}{27})$ là: $y = -\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{22}{27}$

hay $y = -x - \frac{31}{27}$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài là $y = -x - 1$ và $y = -x - \frac{31}{27}$. □

BÀI 66. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - 7y - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $y' = -\frac{7}{(x+2)^2}$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với $d: x - 7y - 1 = 0$ hay $y = \frac{1}{7}x - \frac{1}{7}$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng -7 .

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'(x_0) = -7 \Leftrightarrow -\frac{7}{(x_0+2)^2} = -7 \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 4$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(-1; 4)$ là: $y = -7(x + 1) + 4$ hay $y = -7x - 3$.

Với $x_0 = -3$ thì $y_0 = -10$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $B(-3; -10)$ là: $y = -7(x + 3) - 10$ hay $y = -7x - 31$. Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài là $y = -7x - 3$ và $y = -7x - 31$. □

BÀI 67. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $C: y = f(x) = \frac{x-2}{x-1}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = x + 2$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Vì tiếp tuyến song song với $d: y = x + 2$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 1.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$.

Với $x_0 = 2$ thì $y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(2; 0)$ là: $y = x - 2$.

Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $B(0; 2)$ là: $y = x + 2$ (loại).

Vậy $y = x - 2$. □

BÀI 68. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + x^2 - 4x - 2$ tại giao điểm của đồ thị với đường thẳng $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 2x - 4$.

Gọi M là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $x = 1$. Suy ra tọa độ $M(1; -4)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm M là $k = y'(1) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

$$y = x - 1 - 4 \Leftrightarrow y = x - 5.$$

Kết luận: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = x - 5$. □

BÀI 69. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tạo với trục Ox , Oy tam giác vuông cân tại O . Viết phương trình tiếp tuyến đó.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Gọi $M\left(a; \frac{a-1}{a+1}\right) \in (C)$ với $a \neq -1$.

Vì $\triangle OAB$ vuông cân tại O nên tiếp tuyến tại điểm $M\left(a; \frac{a-1}{a+1}\right) \in (C)$ phải song song với đường phân giác

$y = x$ hoặc $y = -x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M bằng 1 hoặc -1 . Khi đó

$$\begin{cases} \frac{2}{(a+1)^2} = 1 \\ \frac{2}{(a+1)^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (a+1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + \sqrt{2} \\ a = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

* Với $a = -1 + \sqrt{2}$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 2 - 2\sqrt{2}$.

* Với $a = -1 - \sqrt{2}$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 2 + 2\sqrt{2}$.

Kết luận: Có hai tiếp tuyến là $y = x + 2 - 2\sqrt{2}$ và $y = x + 2 + 2\sqrt{2}$. □

BÀI 70. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$.

Lời giải.

Ta có $y = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } y' &= (x^2 - 2)' \sin x + (x^2 - 2)(\sin x)' + (2x)' \cos x + 2x(\cos x)' \\ &= 2x \sin x + (x^2 - 2) \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x = x^2 \cos x. \end{aligned}$$
□

BÀI 71. Tính đạo hàm của hàm số $y = x \sin 2x$.

Lời giải.

Với mọi giá trị thực của x , $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x$. □

BÀI 72. Tính đạo hàm hàm số $y = \frac{1}{2} \sin^2 2x - \frac{1}{4} \cos 4x$.

Lời giải.

Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$,

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot (\sin 2x)' - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (-\sin 4x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (-\sin 4x) = \sin 4x + \sin 4x = 2 \sin 4x.$$

□

BÀI 73. Tính đạo hàm của hàm số $y = (3 - 2 \tan^2 x)^3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = 3(3 - 2 \tan^2 x)^2 (3 - 2 \tan^2 x)' = -12 \tan x (3 - 2 \tan^2 x) (1 + \tan^2 x).$$
□

BÀI 74. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^3 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = \tan^3 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Suy ra } y' = 3 \tan^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \left[\tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \right]' = 6 \tan^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \left[1 + \tan^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$
□

BÀI 75. Tính đạo hàm y' của hàm số $y = \frac{\sin x}{x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\cos x \cdot x^2 - 2x \cos x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \cos x}{x^3}.$$
□

BÀI 76. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \tan \left(\frac{x+1}{x+3} \right)$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq -3 \\ \frac{x+1}{x+3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{\left(\frac{x+1}{x+3} \right)'}{\cos^2 \left(\frac{x+1}{x+3} \right)} = \frac{\frac{2}{(x+3)^2}}{\cos^2 \left(\frac{x+1}{x+3} \right)} = \frac{2}{(x+3)^2 \cos^2 \left(\frac{x+1}{x+3} \right)}.$$
□

BÀI 77. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \sin \sqrt{1+x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = (\sqrt{1+x^2})' \cos \sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cos \sqrt{1+x^2}.$$
□

BÀI 78. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{\cos x(\sin x - \cos x) - \sin x(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}$. □

BÀI 79. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{x^2 + 1}} \cdot \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{x^2 + 1}} \cdot \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$
 □

BÀI 80. Cho hàm số $y = f(x) = \cos^3 \sqrt{3x^2 - 2\pi x}$. Tính $f'(\pi)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \cos^2 \sqrt{3x^2 - 2\pi x} \cdot \sin \sqrt{3x^2 - 2\pi x} \cdot (\sqrt{3x^2 - 2\pi x})' \\ &= -3 \cos^2 \sqrt{3x^2 - 2\pi x} \cdot \sin \sqrt{3x^2 - 2\pi x} \cdot \frac{6x - 2\pi}{2\sqrt{3x^2 - 2\pi x}}. \end{aligned}$$

Vậy $f'(\pi) = -3 \cos^2 \pi \cdot \sin \pi \cdot \frac{4\pi}{2\pi} = 0$. □

BÀI 81. Cho hàm số $y = \sin 2x - \cot \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$. Tính $y'(-\frac{\pi}{3})$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2 \cos 2x + \frac{1}{\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}$.

Khi đó, $y'(-\frac{\pi}{3}) = 2 \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sin^2 \left(-\frac{2\pi}{3} \right)} = \frac{1}{3}$. □

BÀI 82. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{x^2 + 1}$.

Lời giải.

$$y' = \cos \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \cos \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$
 □

BÀI 83. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^2 \sqrt{1 - 3x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= (\cos^2 \sqrt{1 - 3x})' \\ &= 2 \cos \sqrt{1 - 3x} \cdot (\cos \sqrt{1 - 3x})' \\ &= -2 \cos \sqrt{1 - 3x} \cdot \sin \sqrt{1 - 3x} \cdot (\sqrt{1 - 3x})' \\ &= -2 \cos \sqrt{1 - 3x} \cdot \sin \sqrt{1 - 3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - 3x}} (1 - 3x)' \\ &= -\frac{3 \sin 2\sqrt{1 - 3x}}{2\sqrt{1 - 3x}}. \end{aligned}$$

□

BÀI 84. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y = (4x^2 - 3) \cos x$.

② $y = (4 - \sin^2 3x)^5$.

Lời giải.

① $y' = (4x^2 - 3)' \cos x + (4x^2 - 3) (\cos x)' = 8x \cos x - (4x^2 - 3) \sin x$.

② $y' = 5(4 - \sin^2 3x)^4 \cdot (4 - \sin^2 3x)' = -5(4 - \sin^2 3x)^4 \cdot 2 \cdot \sin 3x \cdot 3 \cos 3x = -15(4 - \sin^2 3x)^4 \cdot \sin 6x$. □

BÀI 85. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x + \sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \frac{(2x + \sin 2x)'(1 - \cos 2x) - (2x + \sin 2x)(1 - \cos 2x)'}{(1 - \cos 2x)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2 + 2 \cos 2x)(1 - \cos 2x) - 2 \sin 2x(2x + \sin 2x)}{(1 - \cos 2x)^2} \\
 &= \frac{-4x \sin 2x}{(1 - \cos 2x)^2}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 86. Tính đạo hàm của các hàm số sau

① $y = (5 \sin x - 3)(3 \cos x - 1).$

② $y = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos x - \sin x}.$

Lời giải.

① $y' = 5 \cos x(3 \cos x - 1) - 3 \sin x(5 \sin x - 3) = 15 \cos 2x - 5 \cos x + 9 \sin x.$

② $y = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos x - \sin x} = \cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow y' = \cos 2x.$

□

BÀI 87. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x(\cos x + \cot^2 x).$

Lời giải.

Với mọi $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có $y = \sin x + \cot x.$

Do đó, $y' = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x}.$

□

BÀI 88. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$

Lời giải.

Với mọi $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $y' = \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$

□

BÀI 89. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}.$

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, $y' = \frac{2 \sin x \cos x(1 + \cos^2 x) + 2 \cos x \sin x \cdot \sin^2 x}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{2 \sin x \cos x(1 + \sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{2 \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}.$

□

BÀI 90. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{-\sin x \cdot \sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x \cdot \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} \\
 &= \frac{-\sin x(1 + \sin^2 x) - \cos^2 x \sin x}{(1 + \sin^2 x)\sqrt{1 + \sin^2 x}} \\
 &= \frac{-\sin x(1 + \sin^2 x) - (1 - \sin^2 x) \sin x}{(1 + \sin^2 x)\sqrt{1 + \sin^2 x}} \\
 &= \frac{-2 \sin x}{(1 + \sin^2 x)\sqrt{1 + \sin^2 x}}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 91. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = x \sin^3(2x + 1).$

Lời giải.

Ta có $y' = \sin^3(2x + 1) + 6x \sin^2(2x + 1) \cos(2x + 1) = \sin^2(2x + 1) (\sin(2x + 1) + 6x \cos(2x + 1)).$

□

BÀI 92. Tính đạo hàm của các hàm số sau: $y = \cos(x + 1)^3.$

Lời giải.

Ta có $y' = -((x + 1)^3)' \sin(x + 1)^3 = -3(x + 1)^2 \sin(x + 1)^3.$

□

BÀI 93. Tính đạo hàm của các hàm số sau: $y = \frac{\tan 2x}{1 - \tan^2 2x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\tan 2x)'(1 - \tan^2 2x) - \tan 2x(1 - \tan^2 2x)'}{(1 - \tan^2 2x)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}(1 - \tan^2 2x) - \tan 2x(-2 \tan 2x \frac{2}{\cos^2 2x})}{(1 - \tan^2 2x)^2} \\ &= \frac{2(1 + \tan^2 2x)(1 - \tan^2 2x) + 4 \tan^2 2x(1 + \tan^2 2x)}{(1 - \tan^2 2x)^2} \\ &= \frac{2 - 2 \tan^4 2x + 4 \tan^2 2x + 4 \tan^4 2x}{(1 - \tan^2 2x)^2} \\ &= \frac{2(1 + \tan^2 2x)^2}{(1 - \tan^2 2x)^2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 94. Cho hàm số $y = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$. Tính y' và chứng minh $y' - \tan^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x) - (\sin x - \cos x)(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} \\ &= \frac{2}{(\cos x + \sin x)^2} \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= 1 + \tan^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra, $y' - \tan^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ (đpcm).

□

BÀI 95. Cho hàm số $y = \sin 2x + \cos 2x + 12$. Tính y' và giải phương trình $y' = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2 \cos 2x - 2 \sin 2x = -2\sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\text{Lại có } y' = 2 \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

□

BÀI 96. Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x}$. Chứng minh rằng $y' = \cos x - \cos 2x$.

Lời giải.

Với mọi x khác $\pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3 \sin^2 x \cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot \sin^3 x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\sin^2 x[3 \cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x]}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 x)[3 \cos x(1 + \cos x) + 1 - \cos^2 x]}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)(2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1)}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)^2(2 \cos x + 1)}{(1 + \cos x)^2} \\
 &= (1 - \cos x)(2 \cos x + 1) = \cos x - (2 \cos^2 x - 1) \\
 &= \cos x - \cos 2x.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 97. Cho hàm số $y = f(x) = (x + \sqrt{1 + x^2})^{10}$. Chứng minh: $100y = y''(1 + x^2) + y'x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 y' &= 10(x + \sqrt{1 + x^2})^9 (x + \sqrt{1 + x^2})' \\
 &= 10(x + \sqrt{1 + x^2})^9 \cdot \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} \\
 &= \frac{10(x + \sqrt{1 + x^2})^{10}}{\sqrt{1 + x^2}}. \\
 \Rightarrow y' \sqrt{1 + x^2} &= 10(x + \sqrt{1 + x^2})^{10}.
 \end{aligned}$$

Đạo hàm hai vế, ta được

$$\begin{aligned}
 y'' \sqrt{1 + x^2} + y' \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} &= 100(x + \sqrt{1 + x^2})^9 \cdot \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} \\
 \Leftrightarrow y''(1 + x^2) + y'x &= 100y \text{ (đpcm)}.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 98. Cho hàm số $y = \frac{x - 3}{x + 4}$. Chứng minh: $2(y')^2 = (y - 1) \cdot y''$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{7}{(x + 4)^2}. \\
 y'' &= -\frac{14(x + 4)}{(x + 4)^4} = -\frac{14}{(x + 4)^3}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } 2(y')^2 = \frac{98}{(x + 4)^4}.$$

$$(y - 1) \cdot y'' = \left(\frac{x - 3}{x + 4} - 1 \right) \cdot \frac{-14}{(x + 4)^3} = \frac{-7}{x + 4} \cdot \frac{-14}{(x + 4)^3} = \frac{98}{(x + 4)^4}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

□

BÀI 99. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Chứng minh rằng $2y + y' \tan x + y'' - 2 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } y' &= 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \\
 \text{và } y'' &= (\sin 2x)' = 2 \cos 2x = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x. \text{ Do đó}
 \end{aligned}$$

$$2y + y' \tan x + y'' - 2 = 2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 2 = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0.$$

□

BÀI 100. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh rằng $xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \sin x + x \cos x \Rightarrow y'' = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x.$$

$$\text{Khi đó } xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2 \sin x - 2(\sin x + x \cos x - \sin x) + 2x \cos x - x^2 \sin x = 0.$$

□

BÀI 101. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x}$. Chứng minh rằng $y \cdot y' + y^3 \cdot y'' = x$.

Lời giải.

$$\text{Tập xác định: } \mathcal{D} = (-\infty; -2] \cup [0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$$

$$\text{Khi đó } y'' = \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \frac{(x + 1)(x + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x}}}{x^2 + 2x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x}(x^2 + 2x)}.$$

$$\text{Vậy } y \cdot y' + y^3 \cdot y'' = \sqrt{x^2 + 2x} \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} + \left(\sqrt{x^2 + 2x} \right)^3 \cdot \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x}(x^2 + 2x)} = x + 1 - 1 = x.$$

□

BÀI 102. Cho hàm số $y = \sin^2 x + (m+1)\sin x + \frac{m}{\pi}x^2 + 2019$ với m là tham số thuộc $\mathbb{R}$. Chứng minh phương trình $y' = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 2\sin x \cos x + (m+1)\cos x + \frac{2mx}{\pi}$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m = 0$ ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m \neq 0$ ta có $y'(-\frac{\pi}{2}) = -m$; $y'(\frac{\pi}{2}) = m$.

Khi đó $y'(-\frac{\pi}{2}) \cdot y'(\frac{\pi}{2}) = -m^2 < 0 \quad \forall m \neq 0$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có nghiệm trên $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ với mọi $m \neq 0$.

Kết luận: Vậy phương trình $y' = 0$ luôn có nghiệm với mọi m . □

PHẦN



HÌNH HỌC

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

BÀI 1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

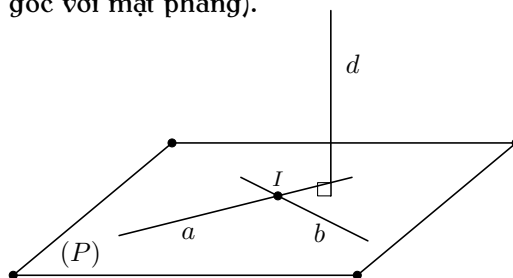
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.

Định lý 1 (Sử dụng để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .

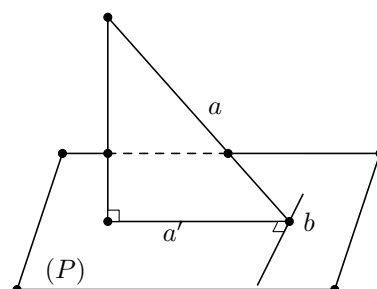
$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \subset (P), b \subset (P) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$$



Hệ quả 1. Đường thẳng đã vuông góc với mặt phẳng rồi, sẽ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng.

Định lý 2 (Định lý ba đường vuông góc).

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P) . Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P) .



B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1.1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, đường thẳng vuông góc với đường thẳng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tâm O và $SA \perp (ABCD)$, Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD .

- 1) Chứng minh $BC \perp SB$ và $CD \perp SD$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$ (1).

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SA$ (2).

Mà $SA \subset (SAB)$, $AB \subset (SAB)$ nên từ (1) và (2), ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $CD \perp AD$ (3).

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SA$ (4).

Mà $SA \subset (SAD)$, $AD \subset (SAD)$ nên từ (3) và (4), ta có $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. $\square$

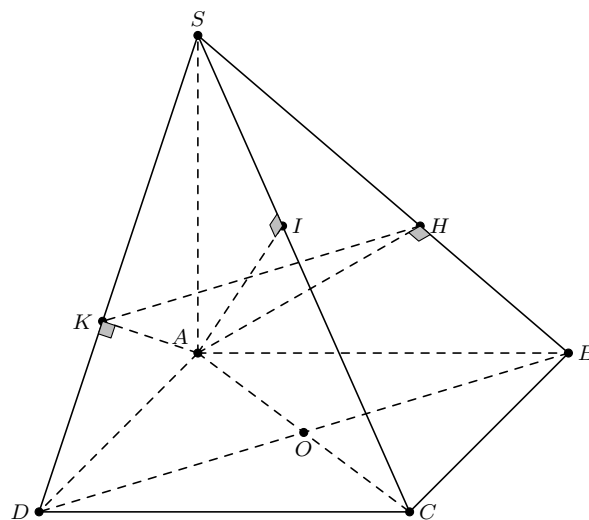
- 2) Chứng minh $BD \perp (SAC)$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$ (5).

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp SA$ (6).

Mà $SA \subset (SAC)$, $AC \subset (SAC)$ nên từ (5) và (6), ta có $BD \perp (SAC)$. $\square$



- 3) Chứng minh $HK \perp (SAC)$.

Lời giải.

Ta có hai tam giác vuông SAB và SAD có SA chung, $AB = AD$ nên $\triangle SAB = \triangle SAD$.

Mà AH , AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB , SAD nên $AK = AH \Rightarrow SK = SH$.

Xét $\triangle SBD$ có $\frac{SK}{SD} = \frac{SH}{SB} \Rightarrow HK \parallel BD$. Mặt khác $BD \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp (SAC)$. $\square$

- 4) Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

Lời giải.

Ta có H là hình chiếu của A lên SB nên $AH \perp SB$ (7).

Do $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $AH \perp BC$ (8).

Mà $SB \subset (SBC)$, $BC \subset (SBC)$ nên từ (7) và (8), ta có $AH \perp (SBC)$. $\square$

- 5) Chứng minh $AK \perp (SCD)$.

Lời giải.

Ta có K là hình chiếu của A lên SD nên $AK \perp SD$ (9).

Do $CD \perp (SAD)$ mà $AK \subset (SAD)$ nên $AK \perp CD$ (10).

Mà $SD \subset (SCD)$, $CD \subset (SCD)$ nên từ (9) và (10), ta có $AK \perp (SCD)$. $\square$

- 6) Gọi I là hình chiếu của A lên SC . Chứng minh AH , AI , AK đồng phẳng.

Lời giải.

Vì I là hình chiếu của A lên SC nên $AI \perp SC$ (11).

Do $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (12).

Mặt khác $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$ (13).

Từ (11), (12), (13) suy ra AI , AH , AK đồng quy. $\square$

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH , AK lần lượt là các đường cao trong các tam giác SAB và SAC .

- 1) Chứng minh tam giác SBC vuông.

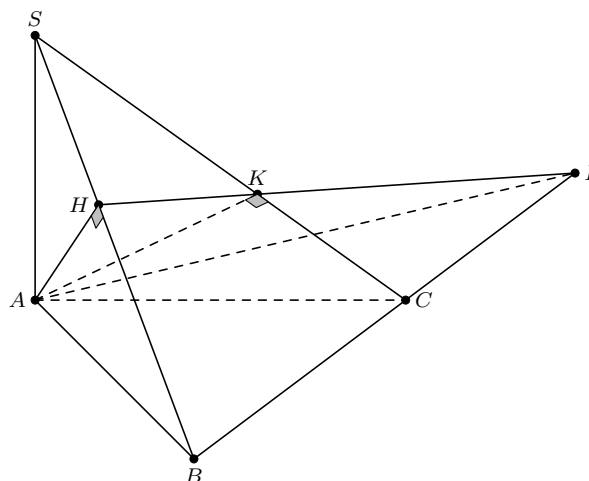
Lời giải.

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại B nên $AB \perp BC$ (1).
 Vì $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp SA$ (2).
 Mà $SA \subset (SAB)$, $AB \subset (SAB)$ nên từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B . $\square$

- 2) Chứng minh tam giác AHK vuông.

Lời giải.

Ta có AH là đường cao của $\triangle SAB$ nên $AH \perp SB$ (3).
 Theo chứng minh trên, ta có $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $AH \perp BC$ (4).
 Mặt khác $SB \subset (SBC)$, $BC \subset (SBC)$ nên từ (3) và (4), suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HK$.
 Do đó $\triangle AHK$ vuông tại H . $\square$



- 3) Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

Lời giải.

Vì AK là đường cao của tam giác SAC nên $AK \perp SC$ (5).
 Theo chứng minh trên, ta có $AH \perp (SBC)$ nên $AH \perp SC$ (6).
 Mặt khác $AH \subset (AHK)$, $AK \subset (AHK)$ nên từ (5) và (6), suy ra $SC \perp (AHK)$. $\square$

- 4) Chứng minh tam giác SHK vuông.

Lời giải.

Theo chứng minh trên thì $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp HK \Rightarrow SK \perp HK \Rightarrow \triangle SHK$ vuông tại K . $\square$

- 5) Gọi I là giao điểm của HK và BC . Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

Lời giải.

Do I là giao điểm của HK và BC nên $AI \subset (ABC)$.
 Mặt khác do $SA \perp (ABC)$ nên $AI \perp SA$ (7).
 Do I là giao điểm của HK và BC nên $AI \subset (AHK)$.
 Theo chứng minh trên thì $SC \perp (AHK)$ nên $AI \perp SC$ (8).
 Mà $SA \subset (SAC)$, $SC \subset (SAC)$ nên từ (7) và (8), suy ra $AI \perp (SAC)$. $\square$

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là những tam giác cân tại A và D . Gọi I là trung điểm của BC và AH là đường cao của tam giác ADI .

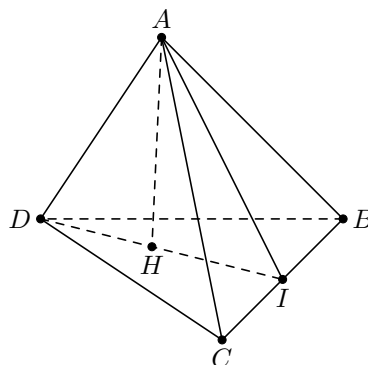
- ① Chứng minh $BC \perp AD$.

Lời giải.

Ta có $\triangle ABC$ cân tại A nên $AI \perp BC$.
 Tương tự $DI \perp BC$.
 Suy ra $BC \perp (ADI)$, mà $AD \subset (ADI)$ nên $BC \perp AD$. $\square$

② Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Lời giải.



Ta có $AH \perp DI$ và $BC \perp AH$ (do $BC \perp (ADI)$) nên $AH \perp (BCD)$. □

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B . Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SN = 2NB$.

① Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. □

② Chứng minh $NG \perp (SAC)$.

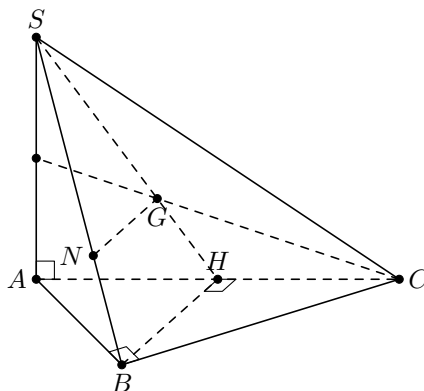
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AC .

Ta có $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC)$ (1).

Mặt khác $\frac{SG}{SH} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$ nên $NG \parallel BH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $NG \perp (SAC)$.



□

BÀI 5. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , biết $SB \perp (ABC)$ và $SB = AB$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC và AB .

① Chứng minh $AC \perp (SAB)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SA \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB). \quad \square$$

② Chứng minh $BH \perp (SAC)$.

Lời giải.

Ta có $BH \perp AC$ (do $AC \perp (SAB)$) (1).

Mặt khác $BH \perp SA$ (do tam giác SAB cân tại B) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$. $\square$

③ Chứng minh $KI \perp SA$.

Lời giải.

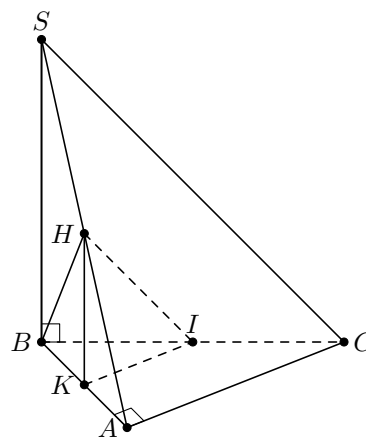
$$\text{Do } \begin{cases} KI \parallel AC \\ AC \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow KI \perp (SAB) \Rightarrow KI \perp SA. \quad \square$$

④ Chứng minh $AB \perp IH$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} HK \parallel SB \\ SB \perp AB \end{cases} \Rightarrow HK \perp AB \quad (3).$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} KI \parallel AC \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow KI \perp AB \quad (4).$$



Từ (3) và (4) ta suy ra $AB \perp (HKI) \Rightarrow AB \perp IH$. $\square$

BÀI 6. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H .

① Chứng minh $OA \perp BC, OB \perp CA$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$$

$$\text{Và } \begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC.$$

$\square$

② Chứng minh H là trực tâm $\triangle ABC$.

Lời giải.

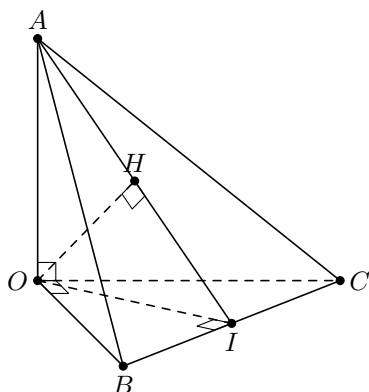
$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp OA \\ BC \perp OH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AC \perp OB \\ AC \perp OH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC . $\square$

- ③ Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Lời giải.



Gọi $I = AH \cap BC$. Ta có $OI \perp BC$ nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. $\square$

- ④ Chứng minh rằng $S_{\triangle ABC}^2 = S_{\triangle OAB}^2 + S_{\triangle OBC}^2 + S_{\triangle OAC}^2$.

Lời giải.

Ta có

$$S_{\triangle OBC}^2 = \frac{1}{4} \cdot OI^2 \cdot BC^2 = \frac{1}{4} \cdot IH \cdot IA \cdot BC^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot IA \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \cdot IH \cdot BC = S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC}.$$

Tương tự

$$S_{\triangle OAB}^2 = S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HAB}$$

$$S_{\triangle OAC}^2 = S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HAC}$$

Khi đó

$$S_{\triangle OAB}^2 + S_{\triangle OBC}^2 + S_{\triangle OAC}^2 = S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HAB} +$$

$$S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC} + S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HAC}$$

$$= S_{\triangle ABC} \cdot (S_{\triangle HAB} + S_{\triangle HBC} + S_{\triangle HAC})$$

$$= S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC}^2. \quad \square$$

- ⑤ Chứng minh các góc $\triangle ABC$ đều nhọn.

Lời giải.

Xét tam giác ABC ta có

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{OA^2 + OB^2 + OA^2 + OC^2 - (OB^2 + OC^2)}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$= \frac{OA^2}{AB \cdot AC} > 0. \text{ Nên } \widehat{BAC} \text{ là góc nhọn.}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{OA^2 + OB^2 + OB^2 + OC^2 - (OA^2 + OC^2)}{2 \cdot AB \cdot BC}$$

$$= \frac{OB^2}{AB \cdot BC} > 0. \text{ Nên } \widehat{ABC} \text{ là góc nhọn.}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC^2 + CB^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot CB} = \frac{OA^2 + OC^2 + OB^2 + OC^2 - (OA^2 + OB^2)}{2 \cdot AC \cdot CB}$$

$$= \frac{OC^2}{AC \cdot CB} > 0. \text{ Nên } \widehat{ACB} \text{ là góc nhọn.}$$

$\square$

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC .

- ① Chứng minh AH, SK, BC đồng quy.

Lời giải.

Gọi $I = SK \cap BC$. Ta có $\begin{cases} BC \perp SI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AI$. Mà H là trực tâm của tam giác ABC nên A, H, I thẳng hàng. $\square$

- ② Chứng minh $SC \perp (BHK)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$ (1).

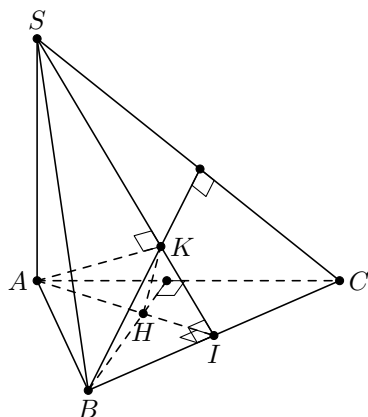
Mặt khác $BK \perp SC$ (do K là trực tâm của tam giác SBC) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (BHK)$. $\square$

③ Chứng minh $HK \perp (SBC)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} HK \perp SC \text{ (do } SC \perp (BHK)) \\ HK \perp BC \text{ (do } BC \perp (SAI)) \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$.



□

BÀI 8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD) .

① Chứng minh H là trực tâm của tam giác BCD .

② Chứng minh $AD \perp BC$.

Lời giải.

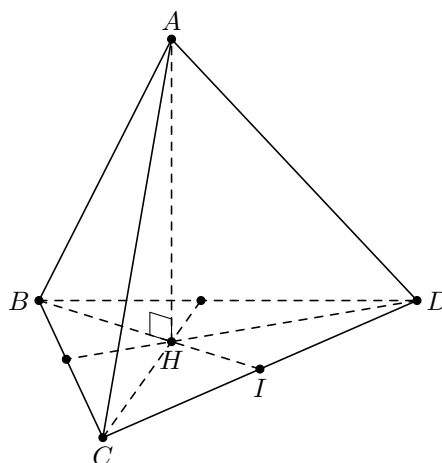
Ta có $\begin{cases} AB \perp CD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$ (1).

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp BD \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACH) \Rightarrow BD \perp BH$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra H là trực tâm của tam giác BCD . □

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} DH \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AD$.



□

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD .

① Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.

Lời giải.

Do $\triangle SAB$ đều cạnh a , H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$; $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle BHC$ vuông tại B có $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

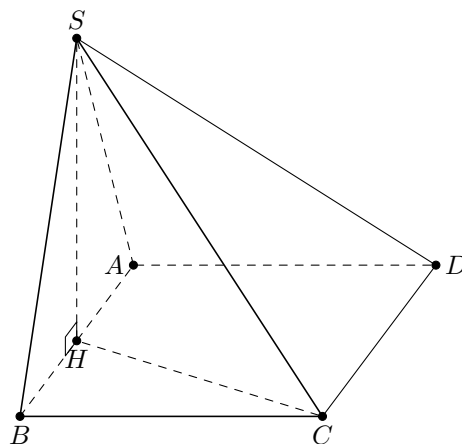
Xét $\triangle SHC$ có

$$\begin{cases} SH^2 + HC^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} = 2a^2 \\ SC^2 = 2a^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow SH^2 + HC^2 = SC^2 \Rightarrow \triangle SHC$ vuông tại H

$\Rightarrow SH \perp HC$.

$$\text{Có } \begin{cases} SH \perp AB \\ SH \perp HC \\ AB \cap HC = \{H\} \\ AB, HC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$



□

② Chứng minh $AC \perp SK$.

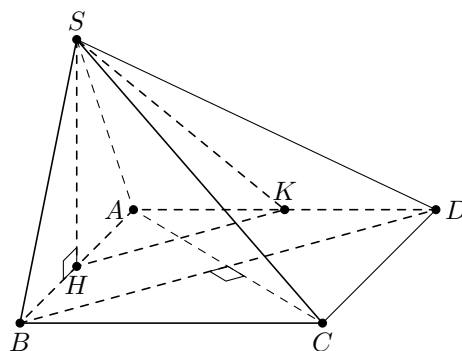
Lời giải.

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$. (1)

Có $\begin{cases} HK \perp BD \text{ (} HK \text{ là đường trung bình trong } \triangle ABD) \\ AC \perp BD \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp HK$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.



□

③ Chứng minh $CK \perp SD$.

Lời giải.

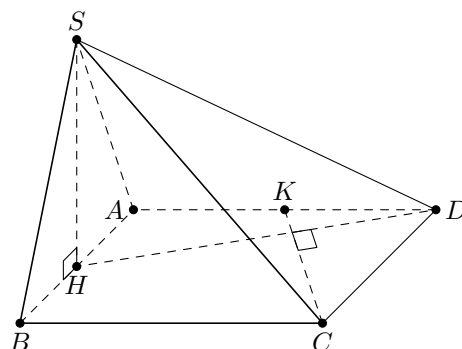
Xét $\triangle AHD$ và $\triangle DKC$ có

$$\begin{cases} AH = DK \\ \widehat{HAD} = \widehat{KDC} \Rightarrow \triangle HAD = \triangle KDC \text{ (c.g.c)} \\ AD = CD \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{DKC}$.

Mà $AD \perp CD \Rightarrow DH \perp CK$.

Do $\begin{cases} CK \perp HD \\ CK \perp SH \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow CK \perp SD$.



□

BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$.

① Chứng minh tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Áp dụng định lí cô-sin trong tam giác SAB có

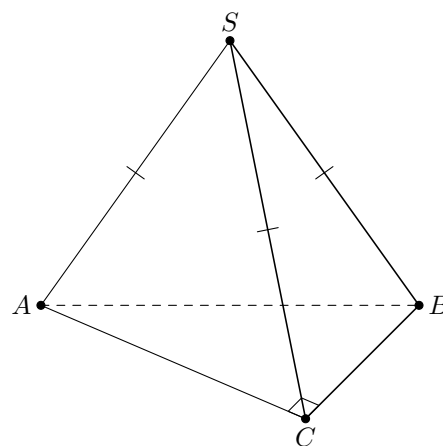
$$\begin{aligned} AB^2 &= SA^2 + SB^2 - 2 \cdot SA \cdot SB \cos \widehat{ASB} \\ &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2. \end{aligned}$$

$\triangle SBC$ vuông cân tại $S \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

$\triangle SCA$ đều cạnh $a \Rightarrow AC = a$.

Xét $\triangle ABC$ có $\begin{cases} AC^2 + BC^2 = 3a^2 \\ AB^2 = 3a^2 \end{cases}$

$\Rightarrow AB^2 = CA^2 + CB^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .



□

- ② Xác định hình chiếu H của S trên mặt phẳng (ABC) . Tính độ dài SH theo a .

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) .

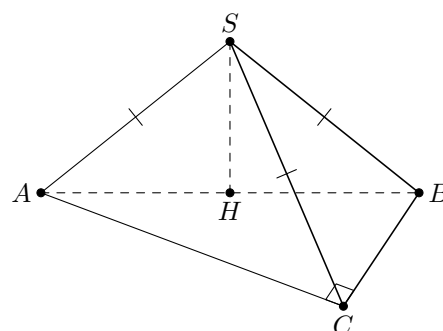
Do $SA = SB = SC \Rightarrow HA = HB = HC$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Mà $\triangle ABC$ vuông tại C nên H là trung điểm cạnh huyền AB .

Xét $\triangle HSA$ có

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$



□

BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$.

- ① Chứng minh tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Theo giả thiết các tam giác SAB và SAC đều cạnh a

$\Rightarrow AB = AC = a$.

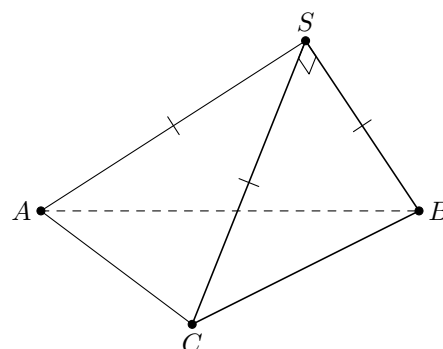
$\triangle SBC$ vuông cân tại S

$\Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle ABC$ có

$AB^2 + AC^2 = 2a^2 = BC^2$.

Vậy $\triangle ABC$ vuông cân tại A .



□

- ② Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh $SG \perp (ABC)$.

Lời giải.

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A , G là tâm đường tròn ngoại tiếp nên

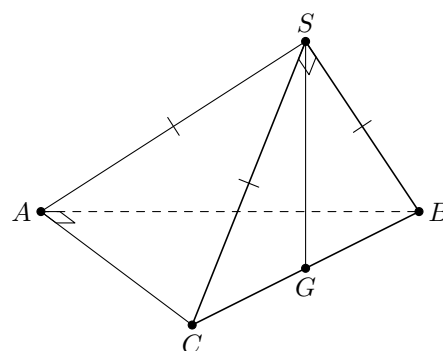
G là trung điểm cạnh BC và $AG = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\triangle SBC$ vuông cân tại S nên $\begin{cases} SG \perp BC & (1) \\ SG = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Xét $\triangle SAG$ có $SG^2 + AG^2 = a^2 = SA^2$

$\Rightarrow \triangle SAG$ vuông tại $G \Rightarrow SG \perp AG$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SG \perp (ABC)$.



□

BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O . Gọi M, N là trung điểm của BC, CD và $SA = SB = SC = SD$. Gọi H là hình chiếu của O lên cạnh SN .

① Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

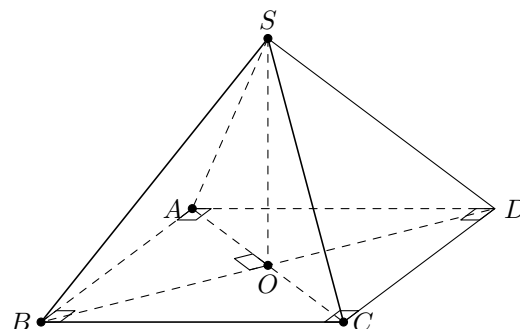
Lời giải.

Do $SA = SC \Rightarrow \triangle SAC$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp AC$. (1)

Do $SB = SD \Rightarrow \triangle SBD$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$. (2)

Lại có $AC, BD \subset (ABCD), AC \cap BD = \{O\}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $SO \perp (ABCD)$.



□

② Chứng minh $MN \perp SA$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC$. (1)

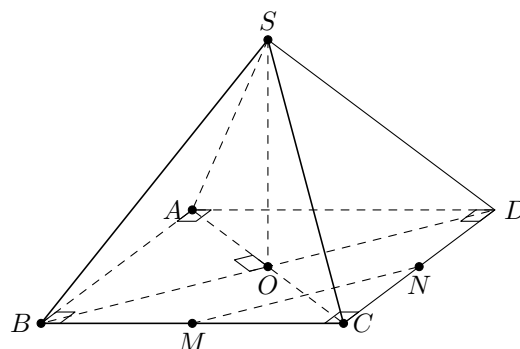
$SO \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp SO$. (2)

Lại có $AC, SO \subset (SAC), SO \cap AC = \{O\}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $BD \perp (SAC)$.

Mà $MN \parallel BD$ (MN là đường trung bình trong $\triangle BCD$).

Vậy $MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp SA$.



□

③ Chứng minh $OH \perp (SCD)$.

Lời giải.

$\triangle SCD$ cân tại $S \Rightarrow CD \perp SN$. (1)

$SO \perp (SBCD) \Rightarrow CD \perp SO$. (2)

$SN, SO \subset (SON), SN \cap SO = \{S\}$. (3)

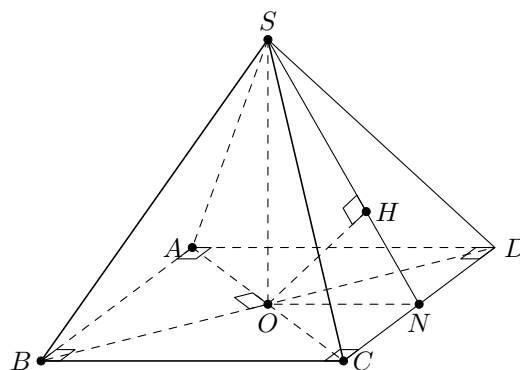
Từ (1), (2) và (3) suy ra $CD \perp (SON)$

$\Rightarrow OH \perp CD$. (4)

H là hình chiếu của O lên $SN \Rightarrow OH \perp SN$. (5)

Mà $CD, SN \subset (SCD), CD \cap SN = \{N\}$. (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $OH \perp (SCD)$.



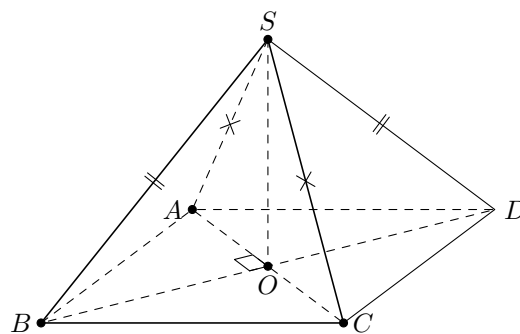
□

BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

① Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải.

Do $SA = SC \Rightarrow \triangle SAC$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp AC$. (1)
 Do $SB = SD \Rightarrow \triangle SBD$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$. (2)
 Lại có $AC, BD \subset (ABCD)$, $AC \cap BD = \{O\}$. (3)
 Từ (1), (2), (3) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

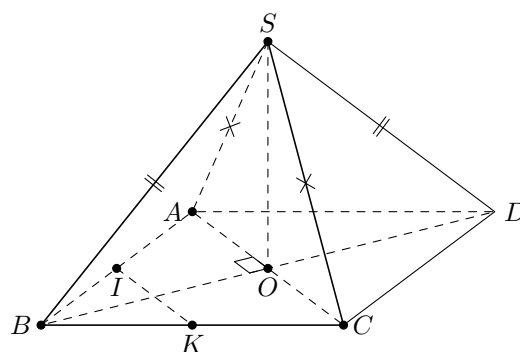


□

② Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh $IK \perp SD$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$. (1)
 $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$. (2)
 Lại có $BD, SO \subset (SBD)$, $SO \cap BD = \{O\}$. (3)
 Từ (1), (2), (3) suy ra $AC \perp (SBD)$.
 Mà $IK \parallel AC$ (IK là đường trung bình trong $\triangle BAC$).
 Vậy $IK \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp SD$.



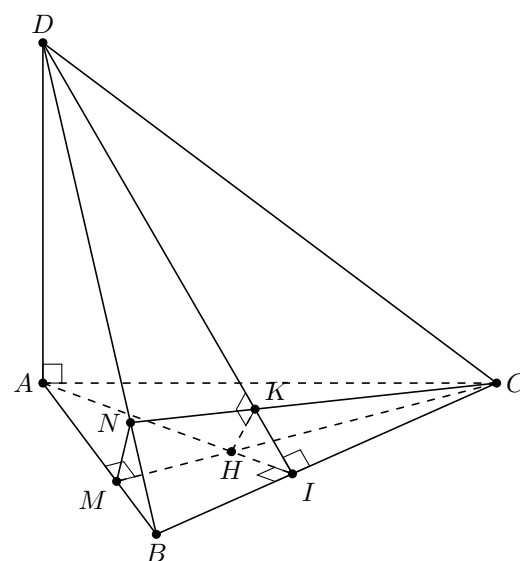
□

BÀI 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$. Gọi AI là đường cao và H là trực tâm của $\triangle ABC$. Hạ HK vuông góc với DI tại K .

① Chứng minh: $HK \perp BC$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} DA \perp BC \text{ (do } DA \perp (ABC)) \\ AI \perp BC \text{ (AI là đường cao của } \triangle ABC) \end{cases}$
 $\Rightarrow BC \perp (DAI)$, mà $HK \subset (DAI)$
 $\Rightarrow BC \perp HK$.



□

② Chứng minh K là trực tâm của $\triangle DBC$.

Lời giải.

Do $BC \perp (DAI)$ nên $DI \perp BC$

$\Rightarrow DI$ là đường cao của $\triangle DBC$.

Ta có: $\begin{cases} HK \perp BC \text{ (cmt)} \\ HK \perp DI \text{ (gt)} \end{cases}$

$\Rightarrow HK \perp (DBC) \Rightarrow HK \perp DB$.

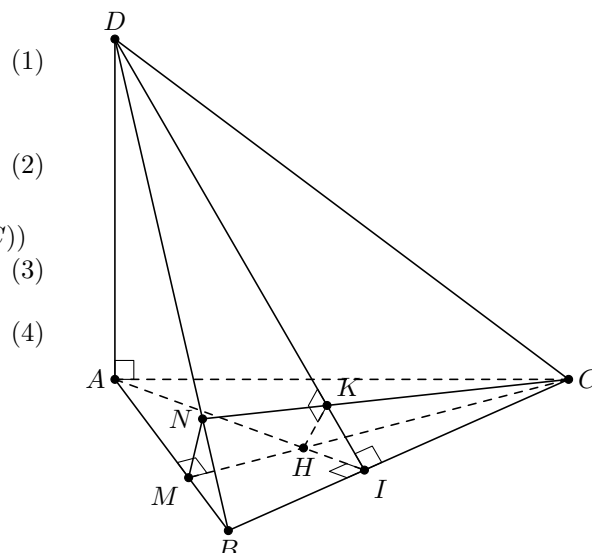
Lại có: $\begin{cases} CH \perp AB \text{ (H là trực tâm } \triangle ABC) \\ DA \perp CH \text{ (do } DA \perp (ABC), CH \subset (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow CH \perp (DAB) \Rightarrow CH \perp DB$.

Từ (2), (3) $\Rightarrow DB \perp (CHK) \Rightarrow CK \perp DB$

$\Rightarrow CK$ là đường cao của $\triangle DBC$.

Từ (1), (4) $\Rightarrow K = DI \cap CK$ là trực tâm $\triangle DBC$.



□

BÀI 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi I, J là trung điểm của AB và CD .

① Chứng minh: $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$.

Lời giải.

$\triangle SAB$ đều, có cạnh $AB = a$, SI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao

$\Rightarrow SI \perp AB$ và $SI = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.

$\triangle SCD$ vuông cân tại S , có cạnh $CD = a$, SJ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow SJ \perp CD$ và $SJ = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} a$.

I, J là trung điểm của AB và CD

$\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow IJ = \frac{AD + BC}{2} = a$.

Ta có: $SI^2 + SJ^2 = \frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{4} a^2 = a^2 = IJ^2$

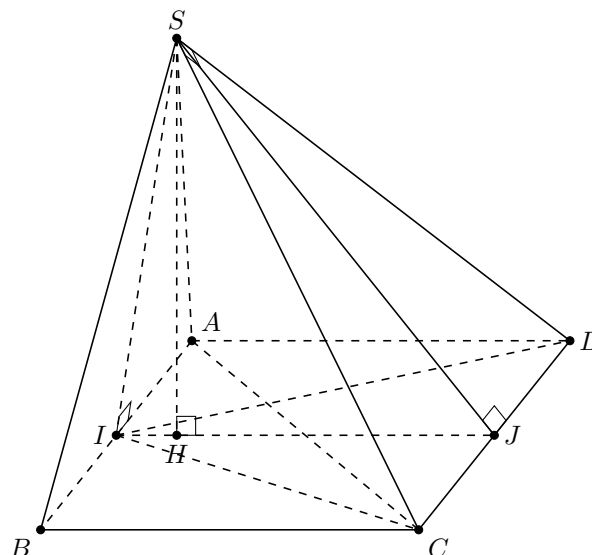
$\Rightarrow \triangle SIJ$ vuông tại S (Định lý Py-ta-go đảo).

Ta có: $\begin{cases} SI \perp SJ \\ SI \perp CD \text{ (do } SI \perp AB, AB \parallel CD) \end{cases}$

$\Rightarrow SI \perp (SCD)$.

Ta có: $\begin{cases} SI \perp SJ \\ SJ \perp AB \text{ (do } SJ \perp CD, AB \parallel CD) \end{cases}$

$\Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

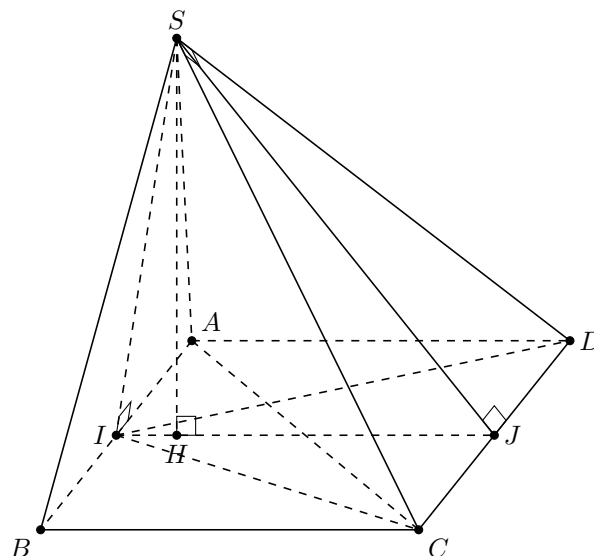


□

② Gọi SH là đường cao của $\triangle SIJ$. Chứng minh $SH \perp (ABCD)$ và tính độ dài SH .

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} SI \perp CD \text{ (do } SI \perp (SCD)) \\ IJ \perp CD \end{cases}$
 $\Rightarrow CD \perp (SIJ)$, mà $SH \subset (SIJ)$
 $\Rightarrow CD \perp SH$.
 Ta có: $\begin{cases} SH \perp CD \\ SH \perp IJ \end{cases}$
 $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
 ΔSIJ vuông tại S , có đường cao SH
 $\Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SJ^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2}$
 $\Rightarrow SH^2 = \frac{3}{16}a^2 \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{4}a$.



□

BÀI 16. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $CC' = a$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của BC và BB' .

① Chứng minh: $AI \perp BC'$ và $AM \perp BC'$.

Lời giải.

ΔABC đều, có cạnh AI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao $\Rightarrow AI \perp BC$.

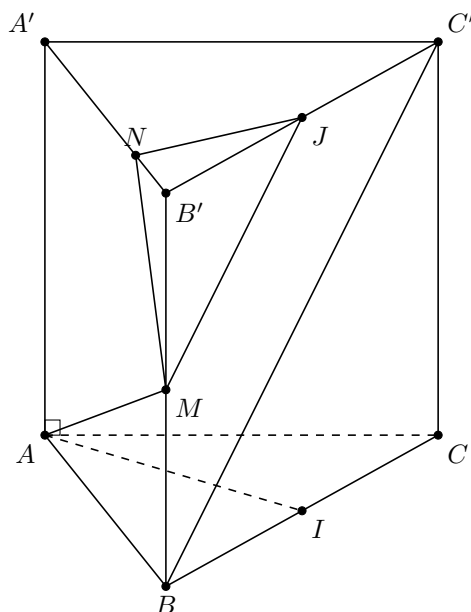
$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AI \perp CC'$.

Do đó $AI \perp (BB'C'C) \Rightarrow AI \perp BC'$.

Ta có $BB'C'C$ là hình vuông nên có $BC' \perp B'C$.

Mặt khác, IM là đường trung bình của $\Delta BB'C$ suy ra $IM \parallel B'C$. Do đó $IM \perp BC'$.

Ta có $\begin{cases} BC' \perp AI \\ BC' \perp MI \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (AMI) \Rightarrow BC' \perp AM$.

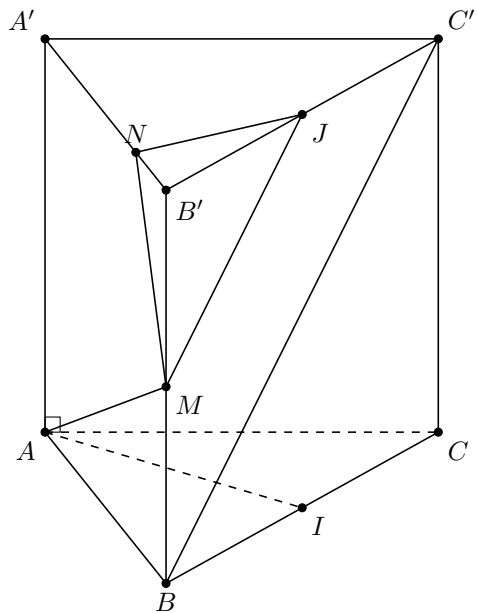


□

② Gọi J là trung điểm của $B'C'$ và điểm N thuộc cạnh $A'B'$ sao cho $A'B' = 4NB'$. Chứng minh rằng $AM \perp (MNJ)$.

Lời giải.

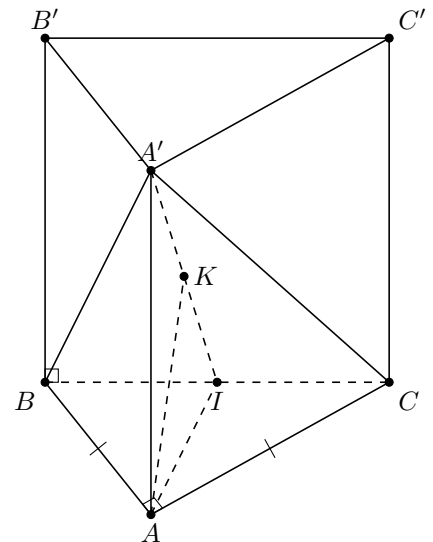
Vậy $\begin{cases} AM \perp MJ \\ AM \perp MN \end{cases} \Rightarrow AM \perp (MNJ).$

☐BÀ
I, P

①

Lời giải.

Khi đó $\begin{cases} B'C' \perp AI \\ B'C' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'I).$

☐

②

Lời giải.

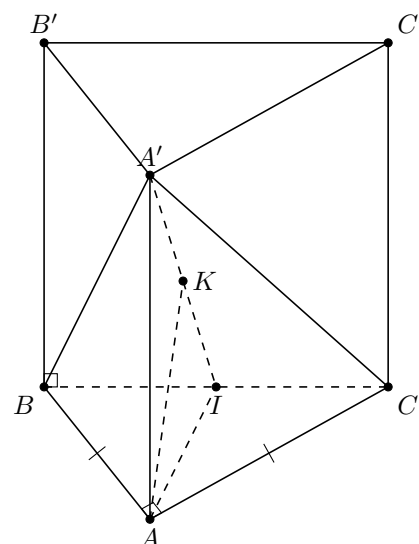
Ta có $\begin{cases} B'C' \perp (AA'I) \\ AK \subset (AA'I) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp AK.$

Mà $B'C' \parallel BC$ nên $AK \perp BC.$

Mặt khác, $\triangle ABC$ vuông cân tại A có $BC = 2a \Rightarrow AI = a = AA'.$

Do đó $\triangle AA'I$ vuông cân tại A . Suy ra $AK \perp A'I.$

Khi đó $\begin{cases} AK \perp A'I \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (A'BC).$



□

BÀI 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$ và $A'H \perp (ABC).$

① Chứng minh: $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'.$

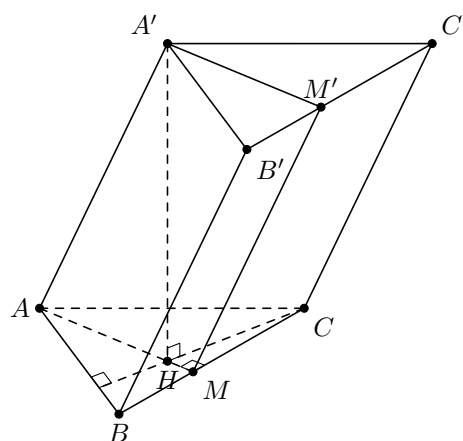
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH (AH \text{ là đường cao}) \\ BC \perp A'H (Do A'H \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (AA'H)$

$\Rightarrow BC \perp AA'.$

Do $BC \parallel B'C'$ nên $AA' \perp B'C'.$



□

② Gọi MM' là giao tuyến của hai mặt phẳng (AHA') và $(BCC'B')$ trong đó M thuộc BC và M' thuộc $B'C'$. Chứng minh tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật.

Lời giải.

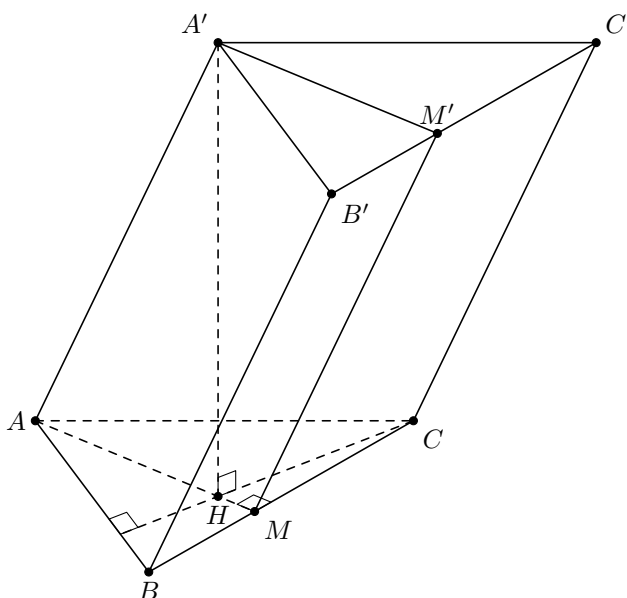
Trong $(A'AM)$, ta dựng $A'M' \parallel AM$ với $M' \in B'C'.$ Khi đó $(AHA') \equiv (AA'M'M)$ và $(AHA') \cap (BCC'B') = MM'.$

Ta có tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành.

Mặt khác, $\begin{cases} AA' \parallel BB' \\ AA' \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp BB'.$

Do đó tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Do $BC \perp (AA'M)$ nên $BC \perp MM',$ suy ra MM' là đường cao của hình chữ nhật.



DẠNG 1.2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

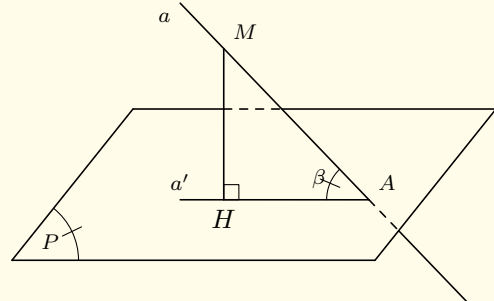
— Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc tạo bởi đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

— Gọi α giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn, tức là $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Bước 1 . Xác định giao điểm của a và (P) là $a \cap (P) = A$.

Bước 2 . Tìm hình chiếu H của M lên mặt phẳng (P) , chứng minh $MH \perp (P)$ tại H .

Bước 3 . Suy ra hình chiếu của a lên (P) là AH .
Ta có $(a; (P)) = (AM; AH) = \beta$. Tính góc β bằng hệ thức lượng.



Lưu ý. Nếu gặp bài toán quá khó, ta có thể giải bằng công thức $\sin \beta = \frac{MH}{AM} = \frac{d(M; (P))}{AM}$, trong đó $d(M; (P))$ là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

Định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Định lý hàm số cosin: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tìm hình chiếu của chân đường vuông góc A xuống mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

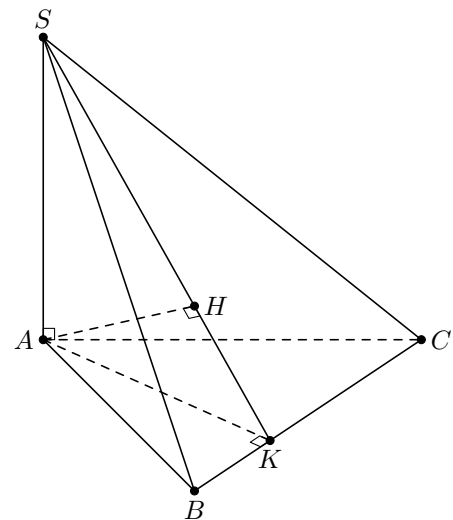
Đựng $\begin{cases} AK \perp BC, (K \in BC) \\ AH \perp SK, (H \in SK). \end{cases}$

Khi đó H là hình chiếu của A lên (SBC) .

Thật vậy $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp AH$.

Ta có $\begin{cases} AH \perp SK \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Suy ra H là hình chiếu của A lên (SBC) .



VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông (hoặc hình chữ nhật). Gọi I là trung điểm của AB , biết $SI \perp (ABCD)$. Tìm hình chiếu của chân đường vuông góc I lên mặt phẳng (SCD) .

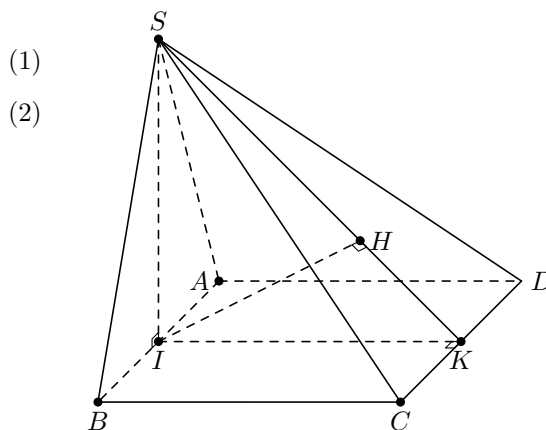
Lời giải.

Gọi K là trung điểm của $CD \Rightarrow IK \perp CD$.

Kẻ $IH \perp SK$ tại H .

Ta có $\begin{cases} CD \perp IK \\ CD \perp SI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIK) \Rightarrow CD \perp IH$.

Từ (1), (2) $\Rightarrow IH \perp (SCD)$.



□

Nhận xét. Tổng quát: Tìm hình chiếu của chân đường vuông góc đến mặt bên của hình chóp.

Bước 1. Xác định giao tuyến của mặt bên và mặt đáy là d .

Bước 2. Từ chân đường vuông góc I dựng $IK \perp d$ và $IH \perp SK$ với S là đỉnh của hình chóp.

Bước 3. Chứng minh IH vuông góc với mặt bên, suy ra H là hình chiếu vuông góc cần tìm.

Lưu ý: Khi đó, người gọi độ dài đoạn IH là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SCD) .

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh, cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của các cạnh BC . Xác định và tính góc giữa

① đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải.

Ta có $SC \cap (SAB) = S$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

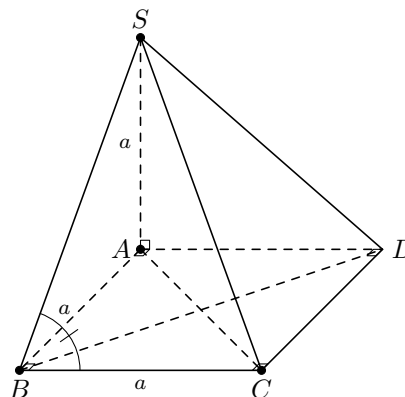
Suy ra SB là hình chiếu của SC trên (SAB) .

Khi đó $(SC; (SAB)) = (SC; SB) = \widehat{BSC}$.

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B

$$\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{BSC} = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



□

② đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

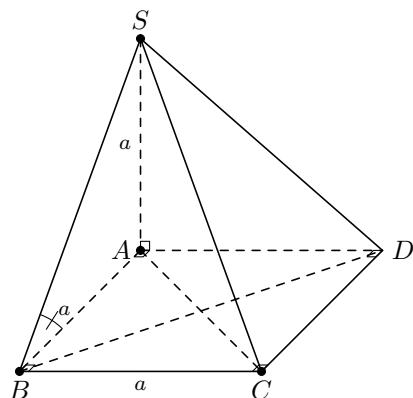
Lời giải.

Ta có $SB \cap (ABCD) = B$. Mặt khác $SA \perp (ABCD)$ nên AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Do đó $(SB; (ABCD)) = (SB; AB) = \widehat{SBA}$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có $AB = SA = a$

$\Rightarrow \triangle SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{SBA} = 45^\circ$.



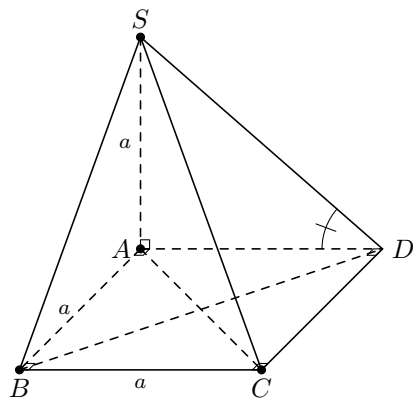
□

③ đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

Ta có AD là hình chiếu của SD trên $(ABCD)$.

Do đó $(SD; (ABCD)) = (SD; AD) = \widehat{SDA} = 45^\circ$.



□

④ đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

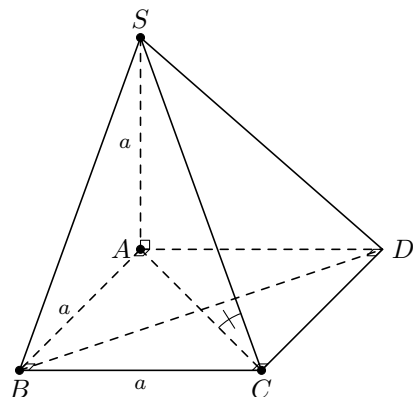
Ta có $SC \cap (ABCD) = C$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.

Do đó $(SC; (ABCD)) = (SC; AC) = \widehat{SCA}$.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có $SA = a$, $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



□

⑤ đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

Ta có $SO \cap (ABCD) = O$.

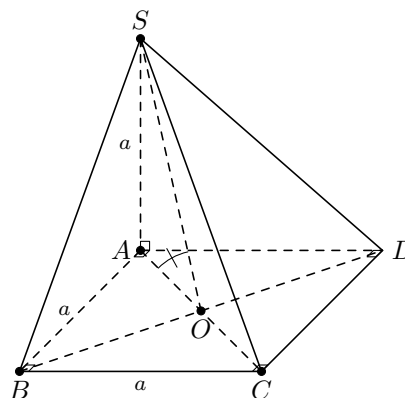
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AO là hình chiếu của SO trên $(ABCD)$.

Do đó $(SO; (ABCD)) = (SO; AO) = \widehat{SOA}$.

Xét $\triangle SAO$ vuông tại A có $SA = a$, $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{SOA} = \arctan \sqrt{2}.$$



□

⑥ đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$.

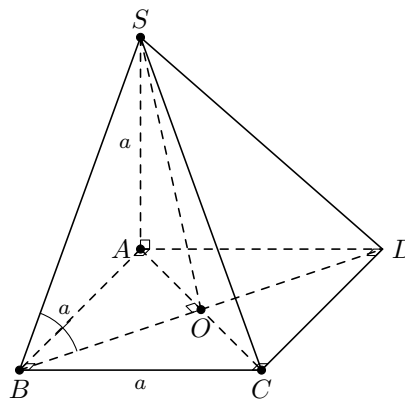
Suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC) .

Do đó $(SB; (SAC)) = (SB; SO) = \widehat{BSO}$.

Xét $\triangle SBO$ vuông tại O có $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sin \widehat{BSO} = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BSO} = 30^\circ.$$



□

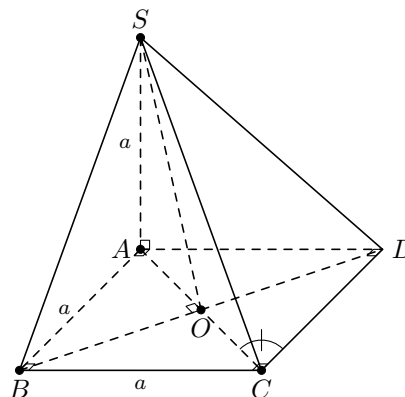
⑦ đường thẳng CD và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.

Ta có $CD \perp (SAC) = C$.

Mặt khác $DO \perp (SAC)$ nên CO là hình chiếu của CD trên (SAC) .

Do đó $(CD; (SAC)) = (CD; CO) = \widehat{OCD} = 45^\circ$.



□

⑧ đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) .

Lời giải.

Ta có $SC \cap (SAD) = S$.

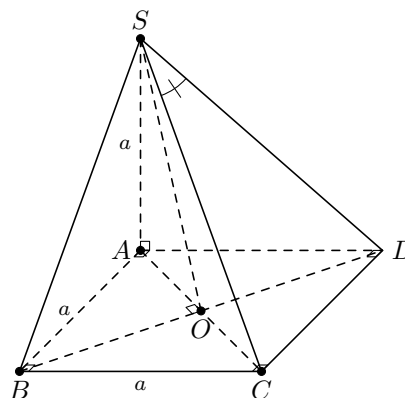
Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow SD$ là hình chiếu của SC trên (SAD) .

Do đó $(SC; (SAD)) = (SC; SD) = \widehat{CSD}$.

Xét $\triangle SCD$ vuông tại D có $CD = a$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \tan \widehat{CSD} = \frac{CD}{SD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



□

⑨ đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải.

Ta có $SA \cap (SBD) = S$.

Kẻ $AK \perp SO$ tại K .

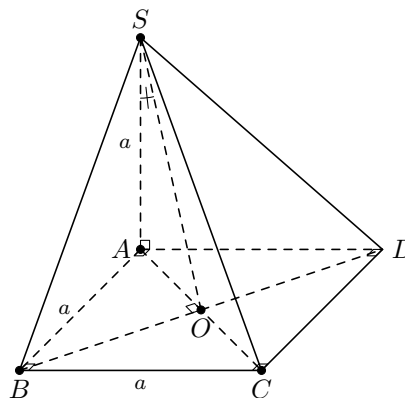
Vì $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AK$.

Suy ra SK là hình chiếu của SA trên (SBD) .

Do đó $(SA; (SBD)) = (SA; SK) = \widehat{ASO}$.

Xét $\triangle SAO$ vuông tại A có $SA = a$, $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \tan \widehat{ASO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



□

⑩ đường thẳng SA và mặt phẳng (SDM) .

Lời giải.

Ta có $SA \cap (SDM) = S$.

Kẻ $AE \perp MD$ tại E và $AF \perp SE$ tại F .

Vì $\begin{cases} MD \perp AE \\ MD \perp SA \end{cases} \Rightarrow MD \perp (SAE) \Rightarrow MD \perp AF$.

Suy ra $AF \perp (SDM)$ hay SF là hình chiếu của SA trên (SDM) .

Do $(SA; (SDM)) = (SA; SF) = \widehat{ASE}$.

Ta có $\triangle MCD$ vuông tại $C \Rightarrow MD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét $\triangle AMD$ có $S_{\triangle AMD} = \frac{1}{2}MD \cdot AE = \frac{1}{2}AD \cdot d(M; AD)$

$$\Rightarrow AE = \frac{a \cdot a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \text{ Xét } \triangle SAE \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{\frac{2a\sqrt{5}}{5}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan(SA; (SDM)) = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

□

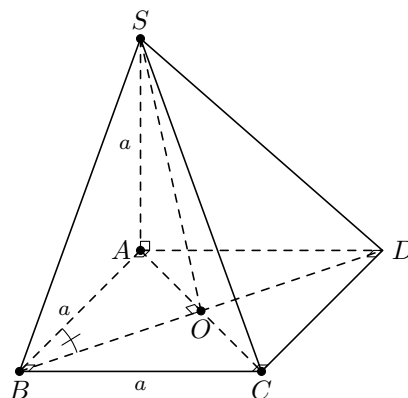
- ⑪ đường thẳng BD và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải.

Ta có $BD \cap (SAB) = B$.

Vì $AD \perp (SAB)$ nên BA là hình chiếu của BD lên (SAB) .

Do đó $(BD; (SAB)) = (BD; BA) = \widehat{DBA} = 45^\circ$.



□

- ⑫ đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

Ta có $AC \cap (SBC) = C$.

Kẻ $AI \perp SB$ tại I .

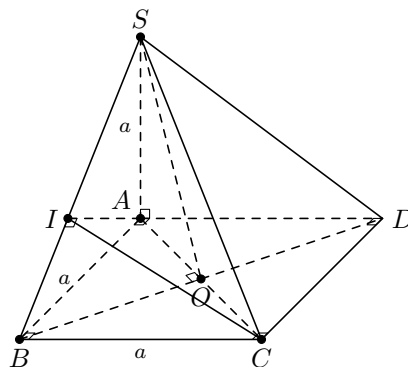
Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AI$.

Suy ra $AI \perp (SBC)$ hay IC là hình chiếu của AC trên (SBC) .

Do đó $(AC; (SBC)) = (AC; IC) = \widehat{ACI}$.

Vì $\triangle SAB$ vuông cân tại A nên $AI = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle AIC$ vuông tại $I \Rightarrow \sin \widehat{ACI} = \frac{AI}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACI} = 30^\circ$.



□

- ⑬ đường thẳng SO và mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.

Ta có $SO \cap (SCD) = S$.

Vì O là trung điểm của AC nên $d(O; (SCD)) = \frac{1}{2}d(A; (SCD))$.

Kẻ $AH \perp SD$ tại H .

Ta có $CD \perp (SAD)$ nên $CD \perp AH$.

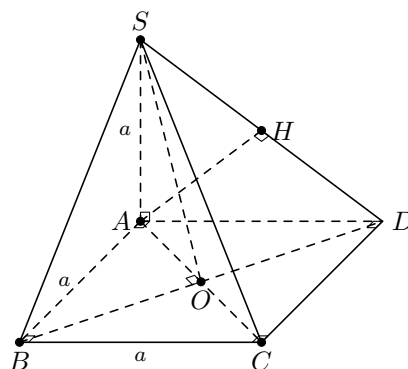
Suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AH$.

Vì $\triangle SAD$ vuông cân tại A nên $AH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác $\triangle SAO$ vuông tại A nên

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \sin(SO; (SCD)) = \frac{d(O; (SCD))}{SO} = \frac{AH}{2SO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

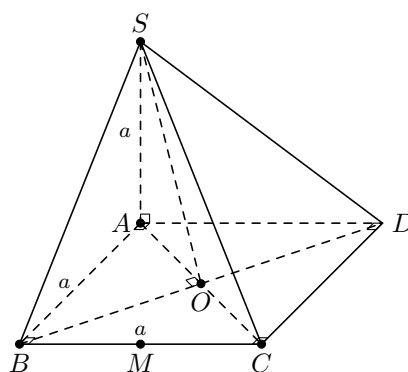


□

- ⑭ đường thẳng BM và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải.

Ta có $BM \perp (SAB) \Rightarrow (BM; (SAB)) = 90^\circ$.



□

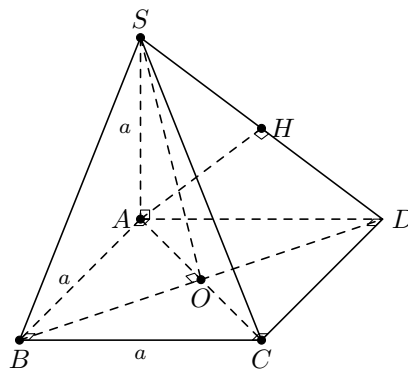
- ⑮ đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.

Ta có $SB \cap (SCD) = S$.

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(B; (SCD)) = d(A; (SCD)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\sin(SB; (SCD)) = \frac{d(B; (SCD))}{SB} = \frac{AH}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow (SB; (SCD)) = 30^\circ$.



□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tâm O , $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Xác định và tính góc giữa

- ① Góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow A$ là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của SC lên $ABCD$.

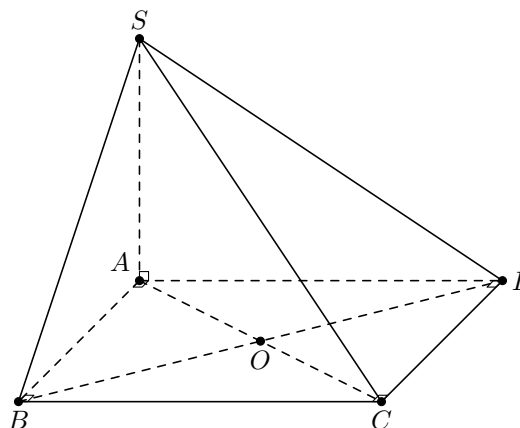
$\Rightarrow (SC; (ABCD)) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác ABC vuông tại B , ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$\Rightarrow \widehat{SCA} = \arctan \frac{\sqrt{30}}{5}.$$



□

- ② Góc giữa đường SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

AB là hình chiếu vuông góc của SB lên $ABCD$

$\Rightarrow (SB; (ABCD)) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{6}}{a} = \sqrt{6} \Rightarrow \widehat{SBA} = \arctan \sqrt{6}.$$

- ③ Góc giữa đường SD và mặt phẳng $(ABCD)$.

AD là hình chiếu vuông góc của SD lên $ABCD$

$$\Rightarrow (\widehat{SD; (ABCD)}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA}.$$

Xét tam giác SAD vuông tại A , ta có

$$\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{6}}{2a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \widehat{SDA} = \arctan \frac{\sqrt{6}}{2}. \quad \square$$

- ④ Góc giữa đường SB và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC)$$

$\Rightarrow SH$ là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC)

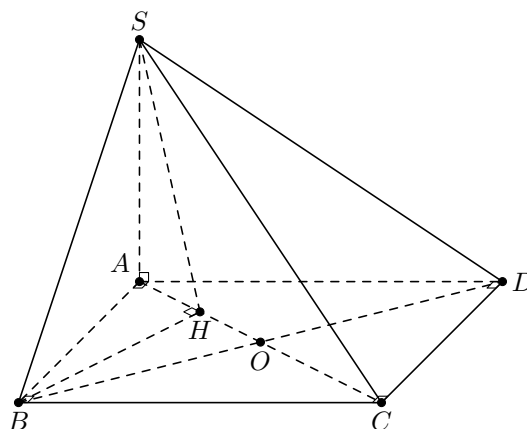
$$\Rightarrow (\widehat{SB; (SAC)}) = (\widehat{SB, SH}) = \widehat{BSH}.$$

$$\text{Ta có } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{7}$$

$$\text{và } BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Xét tam giác SBH vuông tại H , ta có

$$\sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{2\sqrt{35}}{35} \Rightarrow \widehat{BSH} = \arcsin \frac{2\sqrt{35}}{35}.$$



□

- ⑤ Góc giữa đường CD và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của D lên AC .

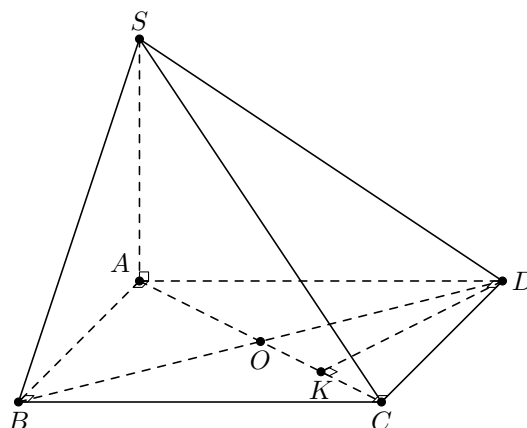
Tương tự, ta có $DK \perp (SAC) \Rightarrow CK$ là hình chiếu vuông góc của CD lên (SAC)

$$\Rightarrow (\widehat{CD; (SAC)}) = (\widehat{CD, CK}) = \widehat{DCK}.$$

$$\text{Ta có } \widehat{DCK} = \widehat{DCA}.$$

Xét tam giác ACD vuông tại D , ta có

$$\tan \widehat{DCA} = \frac{AD}{CD} = \frac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \widehat{DCA} = \arctan 2.$$

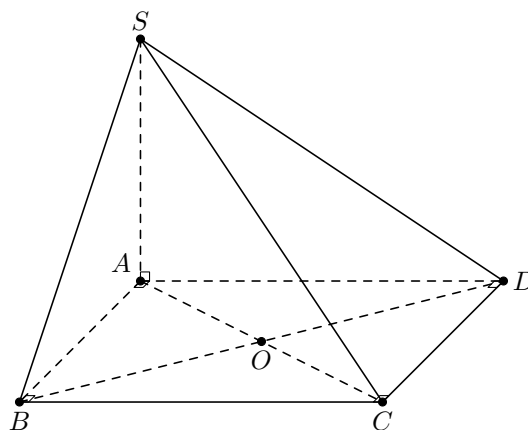


□

- ⑥ Góc giữa đường SC và mặt phẳng (SAD) .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$
 $\Rightarrow SD$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD)
 $\Rightarrow (\widehat{SC, (SAD)}) = (\widehat{SC, SD}) = \widehat{CSD}$.
 Ta có $SD = \sqrt{AD^2 + SA^2} = a\sqrt{10}$.
 Xét tam giác CSD vuông tại D , ta có
 $\tan \widehat{CSD} = \frac{CD}{SD} = \frac{a}{a\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$
 $\Rightarrow \widehat{CSD} = \arctan \frac{\sqrt{10}}{10}$.



□

- ⑦ Góc giữa đường SA và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải.

Gọi N và T lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BD và SN .

Ta có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AN \end{cases}$
 $\Rightarrow BD \perp (SAN) \Rightarrow BD \perp AT$.

Ta có $\begin{cases} AT \perp BD \\ AT \perp SN \end{cases} \Rightarrow AT \perp (SBD)$

$\Rightarrow ST$ là hình chiếu vuông góc của SA lên (SBD)

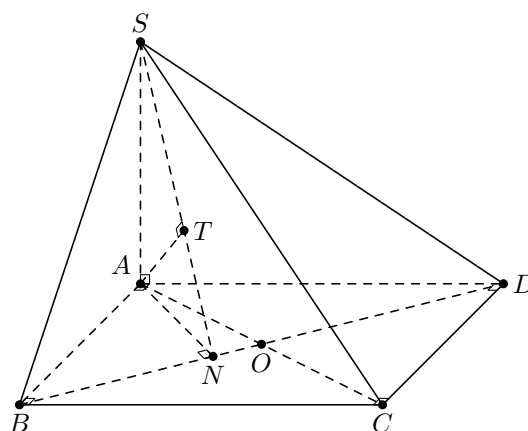
$\Rightarrow (\widehat{SA, (SBD)}) = (\widehat{SA, ST}) = \widehat{AST} = \widehat{ASN}$.

Ta có $AN = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét tam giác ASN vuông tại A , ta có

$\tan \widehat{ASN} = \frac{AN}{SA} = \frac{\frac{2a\sqrt{5}}{5}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$

$\Rightarrow \widehat{ASN} = \arctan \frac{\sqrt{30}}{15}$.



□

- ⑧ Góc giữa đường SA và mặt phẳng (SDM) .

Lời giải.

Ta có $AM = DM = a\sqrt{2}$ và $AD = 2a$.

Khi đó $AD^2 = AM^2 + DM^2$ nên $AM \perp DM$.

Gọi J là hình chiếu vuông góc của A lên SM .

Ta có $\begin{cases} DM \perp SA \\ DM \perp AM \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SAM)$
 $\Rightarrow DM \perp AJ$.

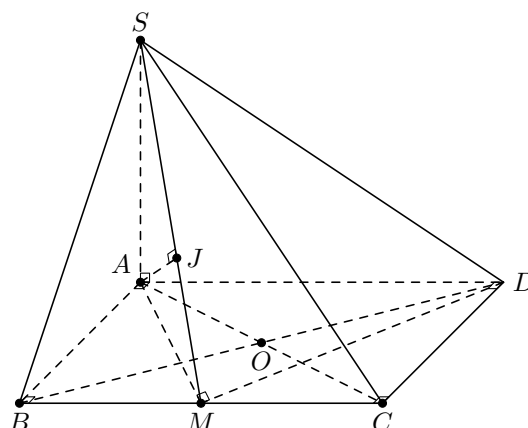
Ta có $\begin{cases} AJ \perp DM \\ AJ \perp SM \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (SDM)$

$\Rightarrow SJ$ là hình chiếu vuông góc của SA lên (SDM)

$\Rightarrow (\widehat{SA, (SDM)}) = (\widehat{SA, SJ}) = \widehat{ASJ} = \widehat{ASM}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A , ta có

$\tan \widehat{ASM} = \frac{AM}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASM} = 30^\circ$.



□

- ⑨ Góc giữa đường BD và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu vuông góc của DB lên (SAB)

$$\Rightarrow (\widehat{BD, (SAB)}) = (\widehat{BD, BA}) = \widehat{DBA}.$$

Xét tam giác ABD vuông tại A , ta có

$$\tan \widehat{DBA} = \frac{AD}{AB} = 2 \Rightarrow \widehat{DBA} = \arctan 2.$$

□

- (10) Góc giữa đường AC và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên SB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AF.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AF \perp SB \\ AF \perp BC \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBC)$$

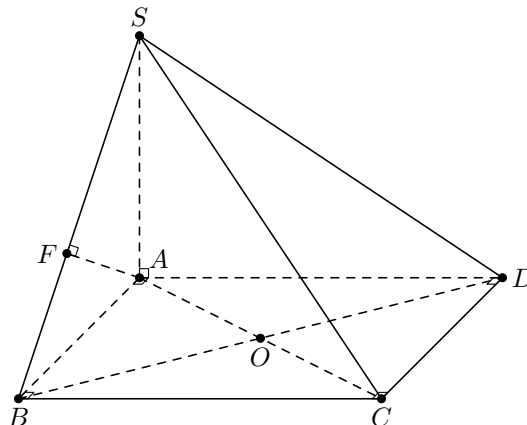
$\Rightarrow FC$ là hình chiếu vuông góc của AC lên (SBC)

$$\Rightarrow (\widehat{AC, (SBC)}) = (\widehat{AC, FC}) = \widehat{ACF}.$$

$$\text{Ta có } AF = \frac{AB \cdot SA}{SB} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

Xét tam giác ACF vuông tại F , ta có

$$\sin \widehat{ACF} = \frac{AF}{AC} = \frac{\sqrt{210}}{35} \Rightarrow \widehat{ACF} = \arcsin \frac{\sqrt{210}}{35}.$$



□

- (11) Góc giữa đường SO và mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.

Gọi G là hình chiếu vuông góc của A lên SD và I là trung điểm của CG .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AG \perp SD \\ AG \perp CD \end{cases} \text{ (do } CD \perp (SAD))$$

$$\Rightarrow AG \perp (SCD).$$

Mà $OI \parallel AG$ (do OI là đường trung bình ứng với cạnh AG của tam giác ACG)

Suy ra $OI \perp (SCD)$

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu vuông góc của SO lên (SCD)

$$\Rightarrow (\widehat{SO, (SCD)}) = (\widehat{SO, SI}) = \widehat{OSI}.$$

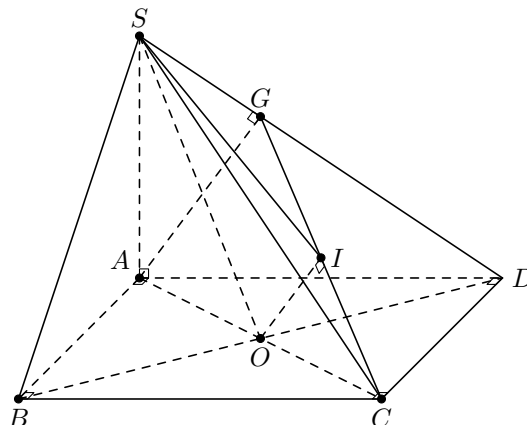
$$\text{Ta có } AG = \frac{AD \cdot SA}{SD} = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

$$\Rightarrow OI = \frac{AG}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \frac{a\sqrt{29}}{2}.$$

Xét tam giác OSI vuông tại I , ta có

$$\sin \widehat{OSI} = \frac{OI}{SO} = \frac{2\sqrt{15}}{15\sqrt{29}} \Rightarrow \widehat{OSI} = \arcsin \frac{2\sqrt{15}}{15\sqrt{29}}.$$



□

- (12) Góc giữa đường SB và mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.

Gọi P là điểm thuộc mặt phẳng (SCD) sao cho $CDGP$ là hình bình hành.

Do $AB = CD$ và $AB \parallel CD$ nên $ABPG$ cũng là hình bình hành.

Suy ra $BP = AG = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$ và $BP \parallel AG$.

Mặt khác $AG \perp (SCD)$ nên $BP \perp (SCD)$

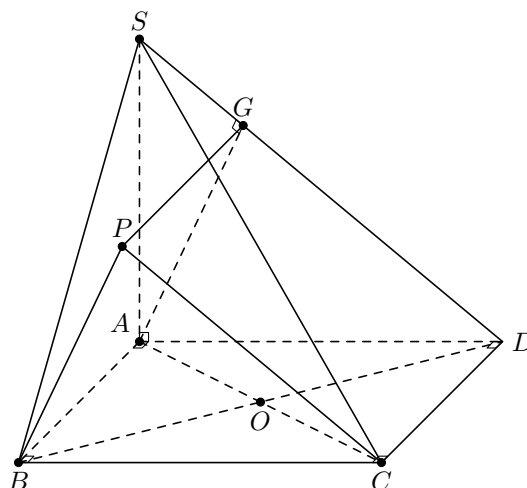
$\Rightarrow SP$ là hình chiếu vuông góc của B lên (SCD)

$\Rightarrow \widehat{(SB, (SCD))} = \widehat{(SB, SP)} = \widehat{BSP}$.

Xét tam giác SBP vuông tại P , ta có

$$\sin \widehat{BSP} = \frac{BP}{SB} = \frac{\frac{2a\sqrt{15}}{5}}{a\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$\Rightarrow \widehat{BSP} = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{5}.$$



□

- 13** Góc giữa đường BD và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

Gọi Q là điểm thuộc mặt phẳng (SBC) sao cho $BCQF$ là hình bình hành.

Do $AD = BC$ và $AD \parallel BC$ nên $ADQF$ cũng là hình bình hành.

Suy ra $DQ = AF = \frac{a\sqrt{42}}{7}$ và $DQ \parallel AF$.

Mặt khác $AF \perp (SBC)$ nên $DQ \perp (SBC)$

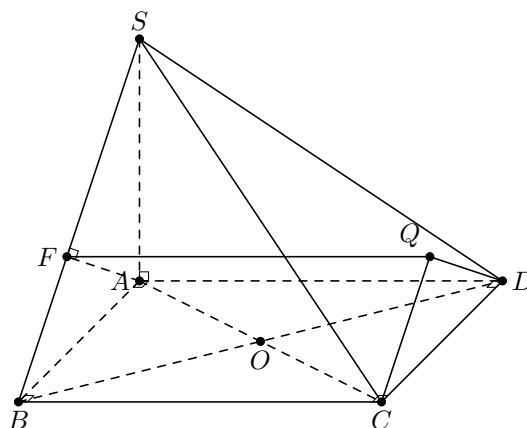
$\Rightarrow BQ$ là hình chiếu vuông góc của BD lên (SBC)

$\Rightarrow \widehat{(BD, (SBC))} = \widehat{(BD, BQ)} = \widehat{DBQ}$.

Xét tam giác DBQ vuông tại Q , ta có

$$\sin \widehat{DBQ} = \frac{DQ}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{42}}{7}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{210}}{35}$$

$$\Rightarrow \widehat{DBQ} = \arcsin \frac{\sqrt{210}}{35}.$$

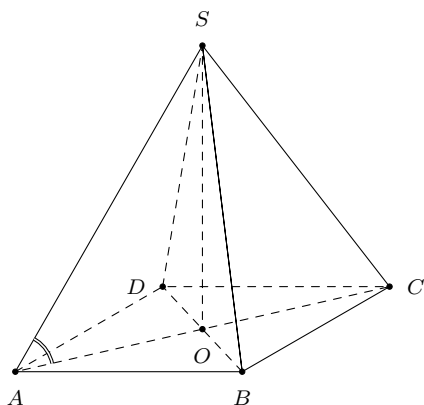


□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC và biết rằng $SA = SB = SC = SD = a$. Xác định và tính góc giữa

① Đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

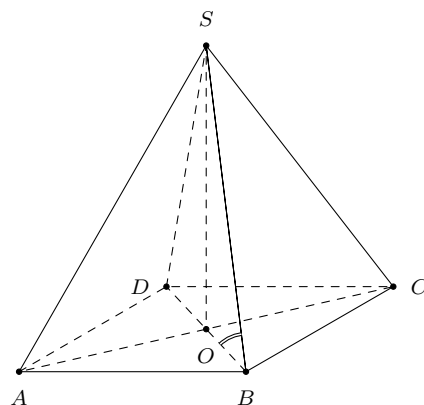


Do $\triangle SAC$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp AC$.
Do $\triangle SBD$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$.
Suy ra $SO \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa SA và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SAO}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 45^\circ. \quad \square$$

② Đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

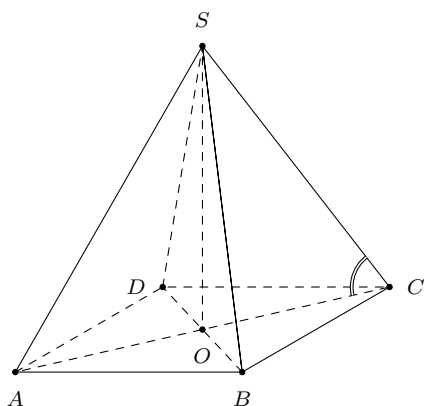


Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa SB và $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SBO}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{SBO} = \frac{OB}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \Rightarrow \widehat{SBO} = 45^\circ. \quad \square$$

③ Đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD) .

Lời giải.

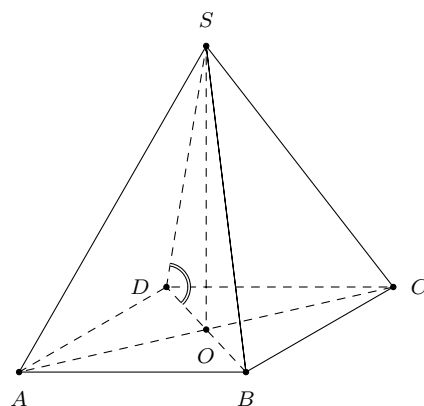


Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa SC và $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SCO}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{SCO} = \frac{OC}{SC} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \Rightarrow \widehat{SCO} = 45^\circ. \quad \square$$

④ Đường thẳng SD và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.

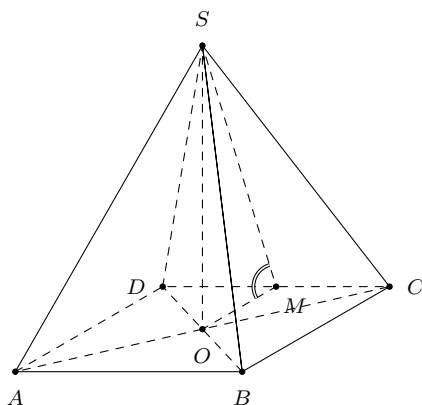


Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa SD và $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SDO}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{SDO} = \frac{OD}{SD} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \Rightarrow \widehat{SDO} = 45^\circ. \quad \square$$

⑤ Đường thẳng SO và mặt phẳng (SCD) .

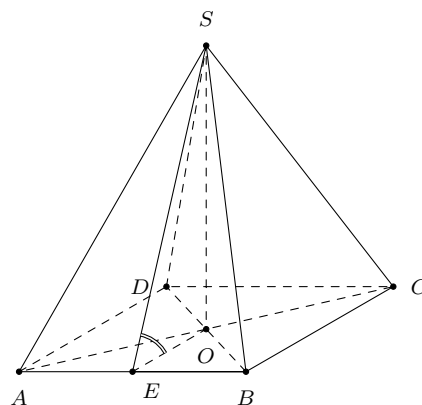
Lời giải.



Ta có $\begin{cases} OM \perp CD \\ SM \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SMO) \Rightarrow SM$
 chính là hình chiếu vuông góc của SO lên (SDC) .
 Do đó góc giữa SO và (SDC) chính là góc $\widehat{OSM}$.
 Do $\triangle SAC$ vuông cân tại $S \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.
 Ta có $OM = \frac{a}{2}$.
 Ta có $\tan \widehat{OSM} = \frac{OM}{SO} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\square$

⑥ Đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) .

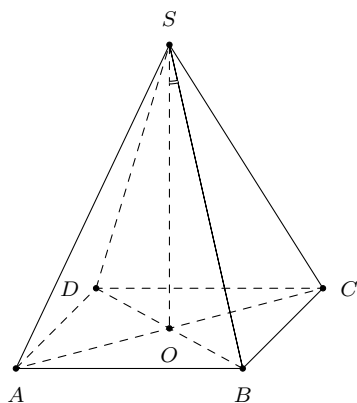
Lời giải.



Ta có $\begin{cases} OE \perp AB \\ SE \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SEO) \Rightarrow SE$ chính
 là hình chiếu của SO lên (SAB) .
 Do đó góc giữa SO và (SAB) chính là góc giữa
 $(\widehat{SO, SE}) = \widehat{OSE}$.
 Ta có $OE = \frac{a}{2}$.
 Ta có $\tan \widehat{OSM} = \frac{OE}{SO} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\square$

⑦ Đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

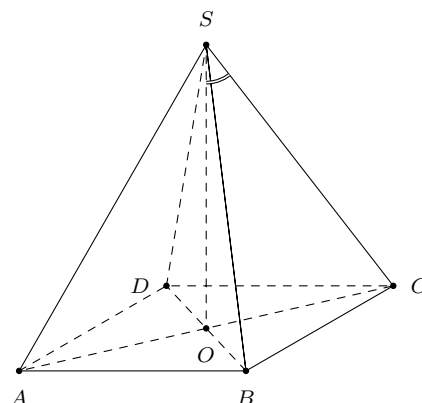
Lời giải.



Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SO \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC) \Rightarrow SO$ chính
 là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC) .
 Do đó góc giữa SB và (SAC) chính là góc $\widehat{BSO}$.
 Ta có $\tan \widehat{BSO} = \frac{OB}{SO} = 1 \Rightarrow \widehat{BSO} = 45^\circ$. $\square$

⑧ Đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD) .

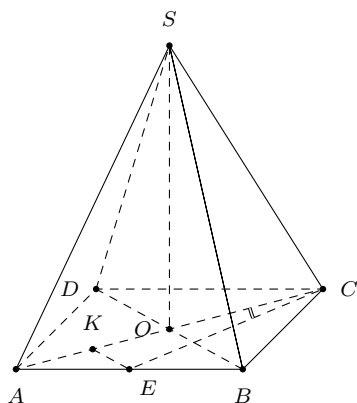
Lời giải.



Ta có $\begin{cases} CO \perp BD \\ CO \perp SO \end{cases} \Rightarrow CO \perp (SBD) \Rightarrow SO$ là
 hình chiếu vuông góc của SC lên (SBD) .
 Do đó góc giữa SC và (SBD) chính là góc $\widehat{CSO}$.
 Ta có $\tan \widehat{CSO} = \frac{OC}{SO} = 1 \Rightarrow \widehat{CSO} = 45^\circ$. $\square$

⑨ Đường thẳng EC và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của E lên AC . Ta có $\begin{cases} EK \perp AC \\ EK \perp SO \end{cases} \Rightarrow EK \perp (SAC) \Rightarrow EK$ chính là

hình chiếu vuông góc của EC lên (SAC) .

Suy ra góc giữa EC và (SAC) chính là góc $\widehat{ACE}$.

Ta có $EC = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

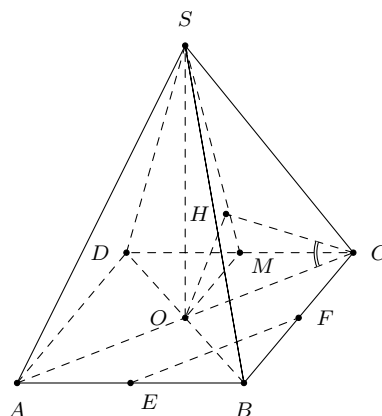
Xét $\triangle AEC$ ta có

$$\cos \widehat{ACE} = \frac{AC^2 + EC^2 - AE^2}{2AC \cdot EC} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Suy ra $\widehat{ACE} = \arccos \frac{3\sqrt{10}}{10}$. $\square$

⑩ Đường thẳng EF và mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.



Ta có $EF \parallel AC \Rightarrow$ góc giữa EF và (SCD) chính là góc giữa AC và (SCD) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SM .

Ta có $OH \perp SM$, mặt khác $\begin{cases} CD \perp OM \\ DC \perp SO \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SOM) \Rightarrow DC \perp OH \Rightarrow OH \perp (SCD)$.

Suy ra góc giữa AC và (SCD) chính là góc $\widehat{OCH}$.

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

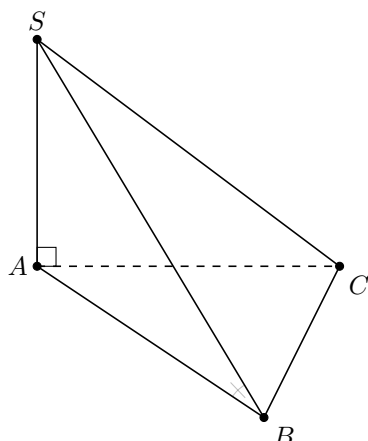
Ta có $\triangle HOC$ vuông tại $H \Rightarrow \sin \widehat{OCH} = \frac{OH}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\widehat{OCH} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$, tam giác ABC đều cạnh a . Xác định và tính góc giữa

① Đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.



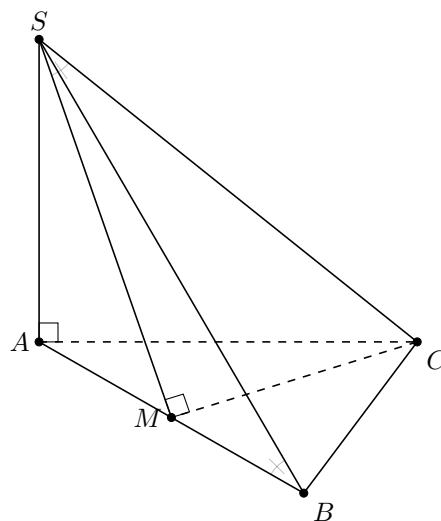
Ta có AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC) . Suy ra $\widehat{SBA}$ là góc giữa SB và (ABC) .

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \widehat{SBA} = \arctan 2.$$

□

② Đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải.



Gọi M là trung điểm AB , ta có

$$\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB).$$

$\Rightarrow SM$ là hình chiếu của SC trên (SAB) . Do đó $\widehat{MSC}$ là góc giữa SC và (SAB) .

$$\sin \widehat{MSC} = \frac{MC}{SC} = \frac{MC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

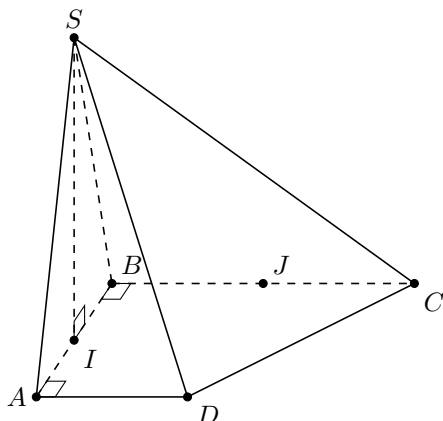
$$\Rightarrow \widehat{MSC} = \arcsin \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B và đáy lớn BC . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC , biết $SI \perp (ABCD)$ và $AB = AD = a, BC = 2a, SI = a$. Xác định góc tạo bởi

① Đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.



Ta có $SI \perp (ABCD)$, suy ra IB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$. Do đó $\widehat{SBI}$ là góc giữa đường thẳng SB và $(ABCD)$.

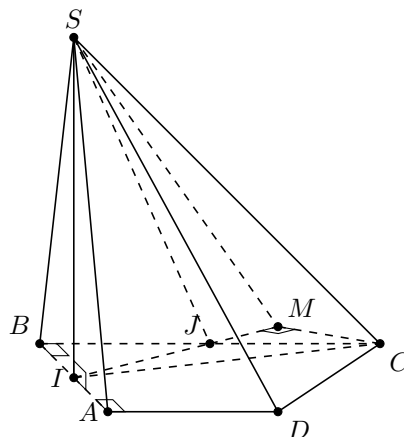
$$\tan \widehat{SBI} = \frac{SI}{BI} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2.$$

$$\Rightarrow \widehat{SBI} = \arctan 2.$$

□

② Đường thẳng SC và mặt phẳng (SIJ)

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $CM \perp IJ$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} CM \perp IJ \\ CM \perp SI \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SIJ).$$

$\Rightarrow SM$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SIJ) .

Do đó góc $\widehat{CSM}$ là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SIJ) . Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

$$AC \parallel IM \text{ nên } CM = d(J, AC) = \frac{2S_{JAC}}{AC}.$$

$$S_{JAC} = S_{ABC} - S_{JBA} = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow CM = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$SC = \sqrt{SI^2 + IC^2} = \sqrt{SI^2 + IB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}.$$

$$\sin \widehat{CSM} = \frac{CM}{SC} = \frac{2\sqrt{105}}{105} \Rightarrow \widehat{CSM} = \arcsin \frac{2\sqrt{105}}{105}.$$

□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $SD = a\sqrt{3}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a .

① Chứng minh: (SBD) là mặt phẳng trung trực của đoạn AC .

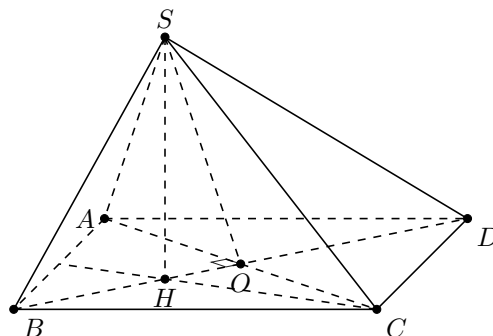
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Suy ra H thuộc BO .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

Ta lại có O là trung điểm AC nên (SBD) là mặt phẳng trung trực của AC .



□

- ② Chứng minh tam giác SBD vuông.

Lời giải.

Ta có $\triangle SAC = \triangle BAC$ ($c - c - c$) $\Rightarrow SO = BO = \frac{1}{2}BD$ nên tam giác SBD vuông tại S . $\square$

- ③ Xác định và tính góc giữa SD và $(ABCD)$.

Lời giải.

Ta có HD là hình chiếu của SD trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{SDH}$ là góc giữa SD và $(ABCD)$. Xét tam giác vuông SBD , có $\tan \widehat{SDB} = \frac{SB}{SD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SDB} = 30^\circ$. $\square$

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a .

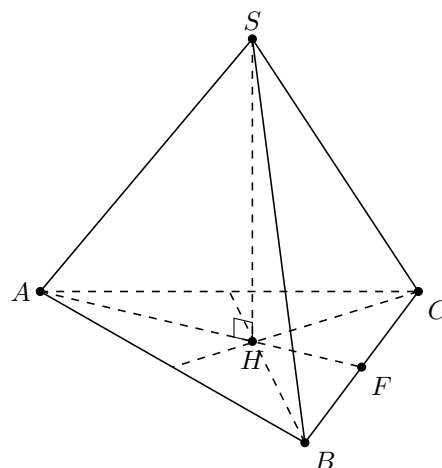
- ① Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) . Tính SH .

Lời giải.

Ta có $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có $HA = \frac{2}{3}AF = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Xét tam giác SHA vuông tại H , có

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{4}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2} = a.$$



- ② Xác định và tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.

Ta có AH là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) , do đó $\widehat{SAH}$ là góc giữa đường thẳng SA và (ABC) .

$$\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^\circ \quad \square$$

BÀI 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD , $AB = BC = DC = a$, $DA = 2a$. Vẽ $AH \perp SC$ và M là trung điểm SB . Góc giữa SB và $(ABCD)$ bằng 45° . Xác định và tính góc giữa

① Đường thẳng AM và mặt (SBD) .

Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{SBA} = 45^\circ$ là góc giữa SB và $(ABCD)$.

Khi đó $\triangle SAB$ là tam giác vuông cân tại $A \Rightarrow AM \perp SB$ (1).

Kẻ BE vuông góc với AD , ta có $AE = \frac{a}{2}$ và $ED = \frac{3a}{2}$.

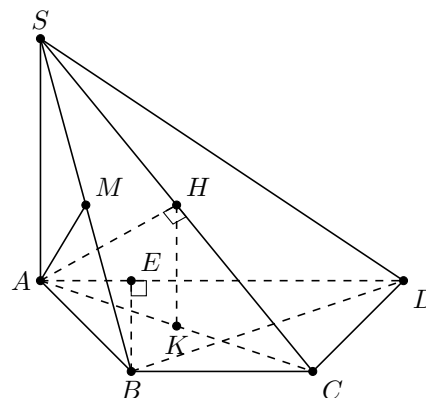
Xét tam giác vuông ABE , có $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác BED , có $BD = \sqrt{BE^2 + ED^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AB^2 + BD^2 = AD^2$ nên $\triangle ABD$ vuông tại B .

Ta có $\begin{cases} AB \perp BD \\ AS \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp AM$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM \perp (SBD)$. Hay $(AM; (SBD)) = 90^\circ$.



□

② Đường AH và $(ABCD)$

Lời giải.

Trong tam giác SAC , kẻ $HK \perp AC \Rightarrow HK \perp (ABCD)$, nên AK là hình chiếu của AH trên $(ABCD)$, suy ra $\widehat{HAC}$ là góc giữa AH và $(ABCD)$.

Xét tam giác SAC , ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông AHC , có $\cos \widehat{HAC} = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HAC} = 60^\circ$.

□

BÀI 2. MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

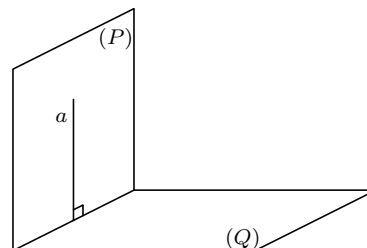
① Định nghĩa

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

② Các định lí và hệ quả cần nhớ

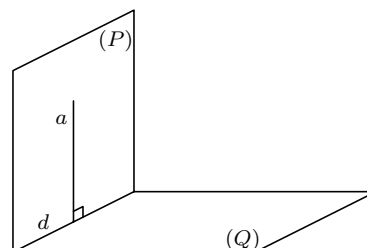
a) **Định lí 1.** Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ a \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



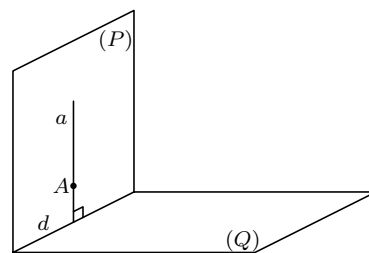
Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (Q) , vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P) .

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (Q) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$



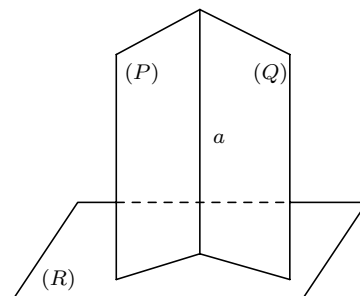
Hệ quả 2. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P) .

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$$



b) **Định lý 2.** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

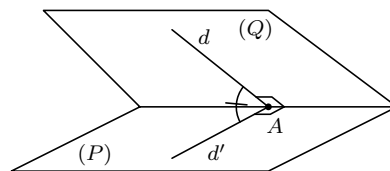
$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \subset (R)$$



③ Góc giữa hai mặt phẳng

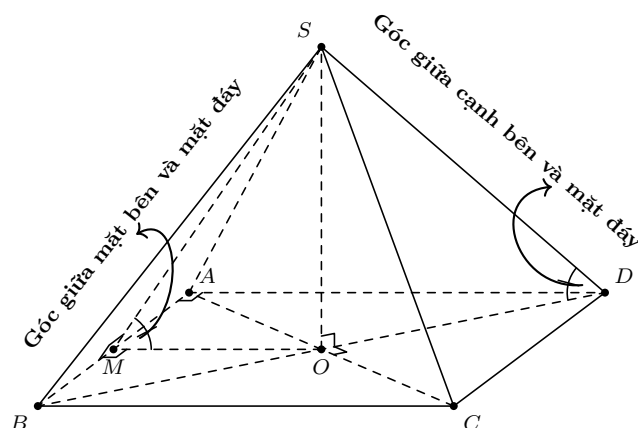
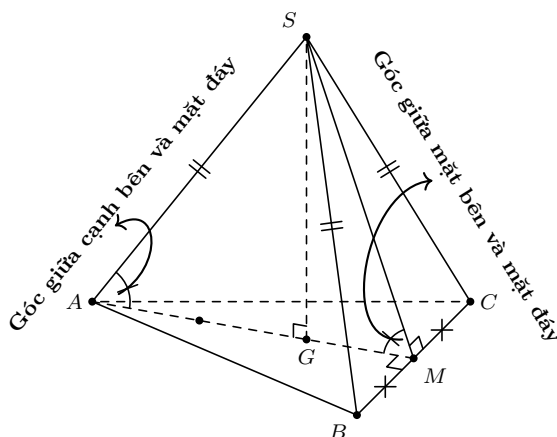
Để tìm góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) = u \\ u \perp d \subset (Q) \\ u \perp d' \subset (P) \end{cases} \Rightarrow [(P), (Q)] = (d, d') = \alpha$$



④ Hình chóp đều và 5 tính chất cần nhớ

- ① Đáy là đa giác đều (hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều, hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông).
- ② Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy (hình chóp tam giác đều có chân đường cao trùng với trọng tâm G, hình chóp tứ giác đều có chân đường cao trùng với tâm O của hình vuông).
- ③ Các mặt bên là những tam giác cân và bằng nhau.
- ④ Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau.
- ⑤ Góc giữa các mặt bên và mặt đáy đều bằng nhau.



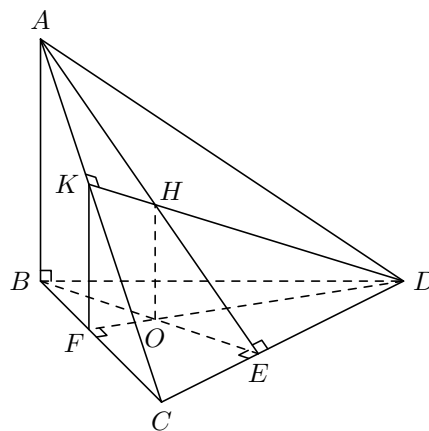
DẠNG 2.1. Chứng minh mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$, có $AB \perp (BCD)$. Trong $\triangle BCD$ vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O . Trong (ACD) vẽ $DK \perp AC$. Gọi H là trực tâm $\triangle ACD$.

- ① Chứng minh $(ACD) \perp (ABE)$. ② Chứng minh $(ACD) \perp (DFK)$. ③ Chứng minh $OH \perp (ACD)$.

Lời giải.

- ① Ta có $CD \perp AB$ (do $AB \perp (BCD)$) và $CD \perp BE$ (do BE là đường cao $\triangle BCD$).
Do đó ta được $CD \perp (ABE)$.
Mà $CD \subset (ACD)$ nên $(ACD) \perp (ABE)$.
- ② Ta có $DF \perp BC$ (gt) và $DF \perp AB$ (do $AB \perp (BCD)$).
Suy ra $DF \perp (ABC)$ (do $AB, BC \subset (ABC)$) và $DF \perp AC$.
Mặt khác $AC \perp DK$ (gt).
Từ đây suy ra $AC \perp (DFK)$ (do $DF, DK \subset (DFK)$).
Do đó $(ACD) \perp (DFK)$ (do $AC \subset (ACD)$).
- ③ Theo câu a) ta có $CD \perp (ABE)$. Suy ra $CD \perp AE$ (do $AE \subset (ABE)$) nên AE là đường cao thứ hai của $\triangle ACD$.
Do đó suy ra $CH \perp AD$ (do H là trực tâm $\triangle ACD$).
Mà O là trực tâm $\triangle BCD$ nên suy ra $CO \perp BD$ và $CO \perp AB$ (do $AB \perp (BCD)$).
Suy ra $CO \perp (ABD)$ (do $AB, BD \subset (ABD)$). Suy ra $CO \perp AD$.
Kết hợp ở trên ta lại có $CH \perp AD$.
Từ đây suy ra $AD \perp (COH)$ (do $CO, CH \subset (COH)$).
Suy ra $AD \perp OH$ (do $OH \subset (COH)$).
Theo câu b) ta có $AC \perp (DFK)$ suy ra $AC \perp OH$ (do $OH \subset (DFK)$).
Từ đây suy ra $OH \perp (ACD)$ (do $AC, AD \subset (ACD)$).



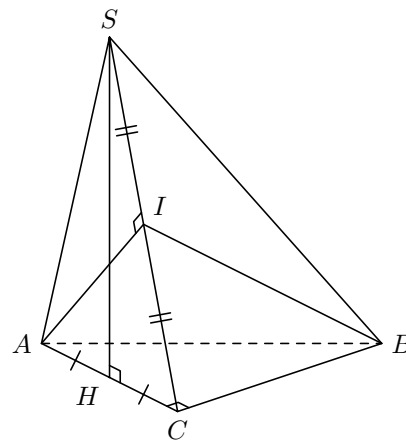
□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Gọi I là trung điểm SC .

- ① Chứng minh $(SBC) \perp (SAC)$. ② Chứng minh $(ABI) \perp (SBC)$.

Lời giải.

- ① Gọi H là trung điểm AC . Suy ra $AH \perp AC$ (do $\triangle SAC$ đều).
Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến là AC và $SH \perp AC$ nên suy ra $SH \perp (ABC)$.
Do đó $SH \perp BC$ (do $BC \subset (ABC)$).
Mặt khác $BC \perp AC$ (do $\triangle ABC$ vuông tại C). Suy ra $BC \perp (SAC)$ (do $SH, AC \subset (SAC)$).
Do đó $(SBC) \perp (SAC)$ (do $BC \subset (SBC)$).
- ② Theo câu a) ta có $(SBC) \perp (SAC)$ theo giao tuyến là SC .
Mà $AI \perp SC$ (do $\triangle SAC$ đều và I là trung điểm SC).
Suy ra $AI \perp (SBC)$.
Do đó $(ABI) \perp (SBC)$ (do $AI \subset (ABI)$).



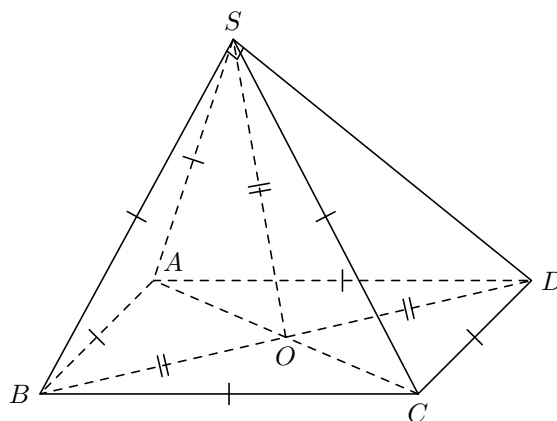
□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a và $SA = SB = SC = a$.

- ① Chứng minh $(SBD) \perp (ABCD)$. ② Chứng minh $\triangle SBD$ vuông.

Lời giải.

- ① Gọi $O = AC \cap BD$. Xét $\triangle SAC$ có $SA = SC$ nên $\triangle SAC$ cân tại S và O là trung điểm AC .
Suy ra $SO \perp AC$.
Mặt khác $AC \perp BD$ (tính chất đường chéo hình thoi).
Do đó $AC \perp (SBD)$ (do $SO, BD \subset (SBD)$).
Suy ra $(SBD) \perp (ABCD)$ (do $AC \subset (ABCD)$).
- ② Xét $\triangle SAC$ và $\triangle ABC$ có $SA = AB = SC = BC = a$ và AC là cạnh chung nên $\triangle SAC = \triangle ABC$ (c.c.c).
Suy ra $SO = OB$ (do SO và OB là 2 đường trung tuyến tương ứng của 2 tam giác).
Mà $OD = OB$ nên $SO = OB = OD$. Xét $\triangle SBD$ có SO là đường trung tuyến và $SO = OB = OD$.
Từ đây suy ra $\triangle SBD$ vuông tại S .



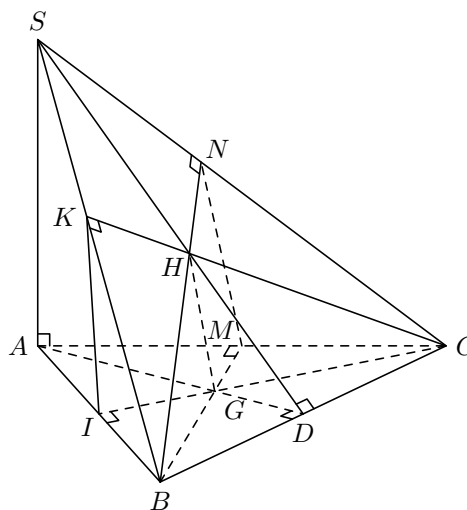
□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và $SA \perp (ABC)$. Gọi D là trung điểm của BC .

- a) Chứng minh $(SAD) \perp (SBC)$ b) Kẻ $CI \perp AB$, $CK \perp SB$. Chứng minh $SB \perp (ICK)$.
- c) Kẻ $BM \perp AC$, $MN \perp SC$. Chứng minh $SC \perp BN$. d) Chứng minh $(CIK) \perp (SBC)$ và $(BMN) \perp (SBC)$.
- e) Gọi $G = MB \cap CI$ và $H = CK \cap BN$. Chứng minh $GH \perp (SBC)$.

Lời giải.

- a) Ta có D là trung điểm của BC nên suy ra $AD \perp BC$ (do $\triangle ABC$ đều).
Mặt khác $SA \perp BC$ (do $SA \perp (ABC)$).
Suy ra $BC \perp (SAD)$ (do $SA, AD \subset (SAD)$).
- b) Ta có $IC \perp AB$ và $IC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$).
Suy ra $IC \perp (SAB)$ (do $SA, AB \subset (SAB)$).
Do đó $IC \perp SB$ (do $SB \subset (SAB)$).
Mặt khác $SB \perp KC$ (gt).
Suy ra $SB \perp (ICK)$ (do $IC, KC \subset (ICK)$).
- c) Ta có $BM \perp AC$ (gt) và $BM \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$).
Suy ra $BM \perp (SAC)$ (do $SA, AC \subset (SAC)$)
và $BM \perp SC$ (do $SC \subset (SAC)$).
Mặt khác $SC \perp MN$ (gt).
Do đó $SC \perp (BMN)$ (do $BM, MN \subset (BMN)$).
Suy ra $SC \perp BN$ (do $BN \subset (BMN)$).



- d) Theo câu b) ta có $SB \perp (CIK)$ nên suy ra $(SBC) \perp (CIK)$ (do $SB \subset (SBC)$).
Và theo câu c) ta cũng chứng minh được $SC \perp (BMN)$ nên suy ra $(SBC) \perp (BMN)$ (do $SC \subset (SBC)$).
- e) Theo câu b) ta có $SB \perp (CIK)$. Suy ra $SB \perp GH$ (do $GH \subset (CIK)$).
Mặt khác theo câu c) ta cũng có $SC \perp (BMN)$.
Suy ra $SC \perp GH$ (do $GH \subset (BMN)$).
Từ đây suy ra $GH \perp (SBC)$.

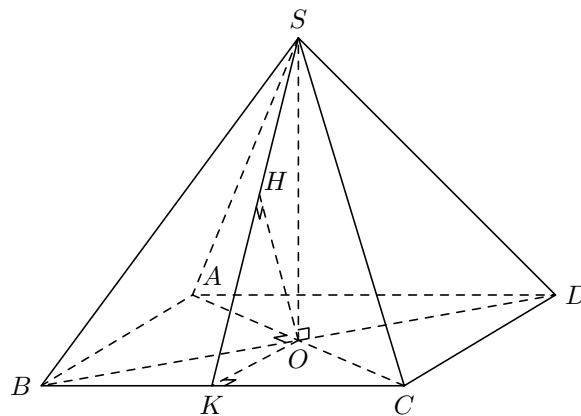
□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình thoi tâm O . Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$.

- ① Chứng minh $SO \perp (ABCD)$ ② Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$
- ③ Kẻ $OK \perp BC$. Chứng minh $BC \perp (SOK)$. ④ Chứng minh $(SBC) \perp (SOK)$
- ⑤ Kẻ $OH \perp SK$. Chứng minh $OH \perp (SBC)$.

Lời giải.

- ① Ta có (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với $(ABCD)$ theo giao tuyến là SO . Suy ra $SO \perp (ABCD)$.
- ② Ta có $SO \perp BD$ (do $SO \perp (ABCD)$).
Mà $BD \perp AC$ (tính chéo đường chéo hình thoi).
Suy ra $BD \perp (SAC)$ (do $SO, AC \subset (SAC)$).
Do đó $(SBD) \perp (SAC)$ (do $BD \subset (SBD)$).
- ③ Ta có $SO \perp BC$ (do $SO \perp (ABCD)$). Mà $OK \perp BC$ (gt). Nên suy ra $BC \perp (SOK)$ (do $OK, SO \subset (SOK)$).
- ④ Theo câu c) ta có $BC \perp (SOK)$ nên suy ra $(SBC) \perp (SOK)$ (do $BC \subset (SBC)$).
- ⑤ Theo câu d) ta có $(SBC) \perp (SOK)$ theo giao tuyến là SK . Mà $OH \subset (SOK)$ và $OH \perp SK$ nên suy ra $OH \perp (SBC)$.



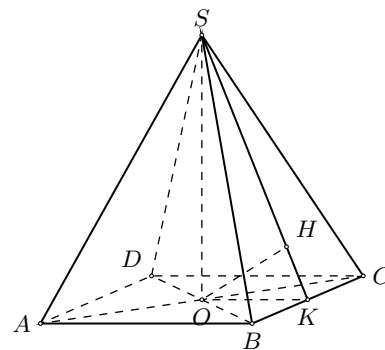
□

DẠNG 2.2. Chứng minh một phẳng vuông góc với một phẳng

BÀI 1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O . Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy $ABCD$.

- ① Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.
- ② Chứng minh: $(SAC) \perp (SBD)$.
- ③ Kẻ $OK \perp BC$. Chứng minh: $BC \perp (SOK)$.
- ④ Chứng minh: $(SBC) \perp (SOK)$.
- ⑤ Kẻ $OH \perp SK$. Chứng minh: $OH \perp (SBC)$.



Lời giải.

- ① Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.
Ta có: $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ AC = (SAC) \cap (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO.$
Ta có: $\begin{cases} (SBD) \perp (ABCD) \\ BD = (SBD) \cap (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO.$
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ có: $AC \cap BD = O$.
Vậy: $SO \perp (ABCD)$.
- ② Chứng minh: $(SAC) \perp (SBD)$.
Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \\ SO, BD \subset (SBD); SO \cap BD = O \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD).$
Mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

③ Kẻ $OK \perp BC$. Chứng minh: $BC \perp (SOK)$.

$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$ Mặt khác $\begin{cases} OK \perp BC \\ OK, SO \subset (SOK); SO \cap OK = O \end{cases}$
 Vậy $BC \perp (SOK)$.

④ Chứng minh: $(SBC) \perp (SOK)$.

Từ câu (4) ta có $BC \perp (SOK)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SOK)$

⑤ Kẻ $OH \perp SK$. Chứng minh: $OH \perp (SBC)$.

Từ câu (4) ta có $BC \perp (SOK) \Rightarrow BC \perp OH$

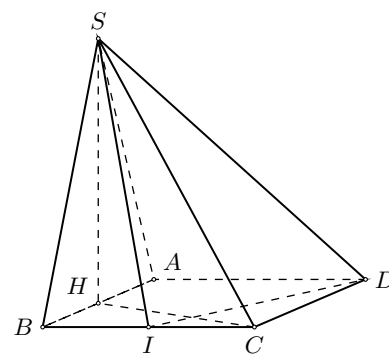
Mặt khác $\begin{cases} OH \perp SK \\ SK, BC \subset (SBC); SK \cap BC = K \end{cases}$

Vậy $OH \perp (SBC)$.

□

BÀI 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC .



① Chứng minh: $SH \perp (ABCD)$.

② Chứng minh: $(SAB) \perp (SAD)$.

③ Chứng minh: $(SAB) \perp (SBC)$.

④ Chứng minh: $(SHC) \perp (SDI)$.

Lời giải.

① Chứng minh: $SH \perp (ABCD)$.

Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

Có $\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

② Chứng minh: $(SAB) \perp (SAD)$.

Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH (SH \perp (ABCD)) \Rightarrow AD \perp (SAB) \\ AB, SH \subset (SAB) \end{cases}$

Mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$

③ Chứng minh: $(SAB) \perp (SBC)$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH (SH \perp (ABCD)) \Rightarrow BC \perp (SAB) \\ AB, SH \subset (SAB) \end{cases}$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

④ Chứng minh: $(SHC) \perp (SDI)$.

Có $\triangle BCH = \triangle CDI (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BCH} = \widehat{CDI}$

Mà $\widehat{CDI} + \widehat{DIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCH} + \widehat{DIC} = 90^\circ$

Vậy $HC \perp DI$

Có $\begin{cases} DI \perp CH \\ DI \perp SH (SH \perp (ABCD)) \Rightarrow DI \perp (SHC) \\ CH, SH \subset (SHC) \end{cases}$

Mà $DI \subset (SDI) \Rightarrow (SHC) \perp (SDI)$

□

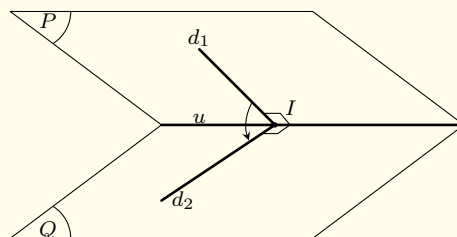
DẠNG 2.3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp giải

- ① **Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy:** Sử dụng định nghĩa.

Để tìm góc giữa mặt bên và mặt đáy đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = u \\ u \perp d_1 \subset (P) \\ u \perp d_2 \subset (Q) \\ d_1 \cap d_2 = I \in u \end{cases} \Rightarrow ((P), (Q)) = (d_1; d_2).$$



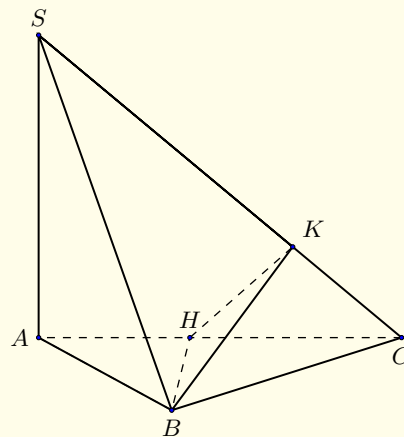
- ② **Góc giữa hai mặt bên liên tiếp trong đó có một mặt chứa đường cao**
 Tìm đường thẳng cắt hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến hai mặt.

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tìm góc giữa (SAC) và (SBC) .

- Giao tuyến: $SC = (SAC) \cap (SBC)$.
- Từ điểm B dựng $BH \perp AC \subset (SAC)$.
- Dựng $HK \perp SC$ (giao tuyến).
- Chứng minh: $BH \perp (SAC), SC \perp (BHK)$.

$$\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ HK \perp SC \\ BK \perp SC \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SAC); (SBC)) = (HK, BK) = \widehat{HKB}.$$

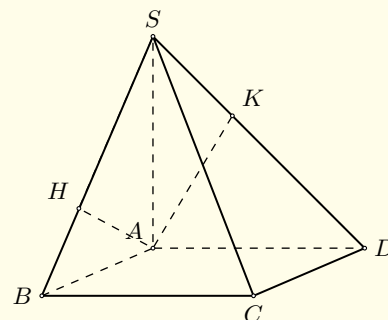


- ③ **Góc giữa hai mặt bên liên tiếp không chứa đường cao**
 Là Góc nhọn giữa hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng.

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông hoặc hình chữ nhật. Tính góc giữa (SBC) và (SCD) .

- Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
- Chứng minh $AK \perp (SCD)$.

Suy ra $((SBC); (SCD)) = (AH, AK) = \widehat{HAK}$ hoặc là góc $180^\circ - \widehat{HAK}$ vì góc giữa hai mặt là nhọn.



- ④ **Sử dụng công thức chiếu diện tích $S' = S \cdot \cos \varphi$**
 Chẳng hạn hình ở mục (3), nếu đề yêu cầu tính góc giữa hai mặt phẳng $((SBD)); (ABD))$, ta có thể sử dụng hình chiếu diện tích như sau:
 Xét mặt phẳng (SBD) : hình chiếu S xuống (ABD) là A , hình chiếu B, D xuống (ABD) là chính nó nên góc α giữa hai mặt phẳng được xác định bởi $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta SBD} \cdot \cos \alpha$.

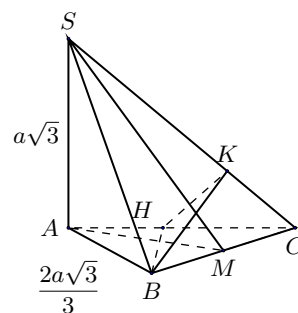
- ⑤ **Trường hợp góc khó xác định**

Công thức khoảng cách: $\sin \varphi = \frac{d(A, (Q))}{d(A, u)}$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) . Và $A \in (P), (P) \cap (Q) = u$

BÀI 1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC .



- ① Chứng minh: $(SAM) \perp (SBC)$.
- ② Xác định và tính góc: $((SBC); (ABC))$
- ③ Xác định và tính góc: $((SAC); (SBC))$

Lời giải.

- ① Chứng minh: $(SAM) \perp (SBC)$.

Ta có:
$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \\ AM \cap SA = A \\ AM, SA \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$$

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SAM) \perp (SBC)$.

- ② Xác định và tính góc: $((SBC); (ABC))$

Xác định góc:

Ta có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AM, AM \subset (ABC) & (1) \Rightarrow (SBO); (ABC) = (AM; SM) = \widehat{AMS} \\ BC \perp SM, AM \subset (SBC) & (2) \end{cases}$$

Giải thích (1): Tam giác ABC đều có AM là trung tuyến cũng đồng thời là đường cao nên $BC \perp AM$.

Giải thích (2): $\triangle SAB = \triangle SAC$ (c.g.c)

Suy ra $SB = SC \Rightarrow \triangle SAB$ cân tại S và có SM là trung tuyến cũng là đường cao nên $BC \perp SM$.

Tính góc: $\widehat{AMS}$

Trong tam giác SAM vuông tại A có: $\tan \widehat{AMS} = \frac{SA}{AM} = \frac{SA}{\frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AMS} = 60^\circ$.

Kết luận $((SBC); (ABC)) = \widehat{AMS} = 60^\circ$.

- ③ Xác định và tính góc: $((SAC); (SBC))$

Xác định góc:

Dựng $BC \perp AC$ và dựng $HK \perp SC$.

Có
$$\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC.$$

Có
$$\begin{cases} SC \perp HK \\ SC \perp BH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp BK.$$

Mà
$$\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ SC \perp BK, BK \subset (SBC) \Rightarrow ((SAC); (SBC)) = (BK; HK) = \widehat{BKH} \\ SC \perp HK, HK \subset (SAC) \end{cases}$$

Tính góc: $\widehat{BKH}$

Trong tam giác BKH vuông tại H có: $\tan \widehat{BKH} = \frac{BH}{HK}$

Đường cao $BH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a$.

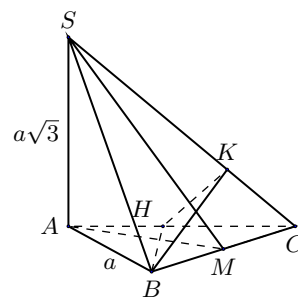
$\triangle HKC \sim \triangle SAC \Rightarrow \frac{HK}{SA} = \frac{HC}{SC} \Rightarrow HK = \frac{HC \cdot SA}{SC} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$

Do đó: $\tan \widehat{BKH} = \frac{\sqrt{39}}{3} \Rightarrow \widehat{BKH} = 64^\circ 20'$.

□

BÀI 2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC .



- ① Chứng minh: $(SAM) \perp (SBC)$. Xác định và tính góc giữa SC và (ABC) .
- ② Xác định và tính góc giữa (SBC) và (ABC)
- ③ Xác định và tính góc: $((SAC); (SBC))$

Lời giải.

- ① Chứng minh: $(SAM) \perp (SBC)$. Xác định và tính góc giữa SC và (ABC) .

Chứng minh: $(SAM) \perp (SBC)$

Do tam giác ABC đều nên ta có $AM \perp BC$

Mặt khác $BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$)

Nên ta có $BC \perp (SAM)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$

Xác định góc:

Ta có: $\begin{cases} SC \cap (ABC) = C \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow (SC, (SBC)) = \widehat{SCA}$

Tính góc:

Tam giác SAC vuông tại C nên ta có: $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \sqrt{3}$

Vậy $(SC, (SBC)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$

- ② Xác định và tính góc giữa (SBC) và (ABC)

Xác định góc:

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \subset (ABC), AM \perp BC \\ SM \subset (SBC), SM \perp BC (BC \perp (SAM)) \end{cases} \Rightarrow ((SBC); (ABC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$

Tính góc:

Xét tam giác SAM vuông tại A ta có: $\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = 2$

Vậy $((SBC); (ABC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA} = 63^\circ 43'$

- ③ Xác định và tính góc: $((SAC); (SBC))$

Xác định góc:

Dựng $BC \perp AC$ và dựng $HK \perp SC$.

Có $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Có $\begin{cases} SC \perp HK \\ SC \perp BH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp BK$.

Mà $\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ SC \perp BK, BK \subset (SBC) \\ SC \perp HK, HK \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow ((SAC); (SBC)) = (BK; HK) = \widehat{BKH}$.

Tính góc: $\widehat{BKH}$

Trong tam giác BKH vuông tại H có: $\tan \widehat{BKH} = \frac{BH}{HK}$

Đường cao $BH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle HKC \sim \triangle SAC \Rightarrow \frac{HK}{SA} = \frac{HC}{SC} \Rightarrow HK = \frac{HC \cdot SA}{SC} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó: $\tan \widehat{BKH} = 2 \Rightarrow \widehat{BKH} = 63^\circ 43'$.

□

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (BCD)$ và $AB = 3a$. Biết BCD là tam giác đều cạnh $2a$. Xác định góc giữa:

- ① (ACD) và (BCD) .

② (ABC) và (DBC) .

③ (ACD) và (ABC) .

Lời giải.

① Ta có $(ACD) \supset AD$ và $AD \perp (BCD) \Rightarrow (ACD) \perp (BCD)$
 $\Rightarrow ((ACD), (BCD)) = 90^\circ$.

② Gọi E là trung điểm của BC , ta có $(ABC) \cap (BCD) = BC$.

(1)

Xét tam giác đều BCD có $DE \perp BC$. (2)

Hai tam giác vuông ADB và ABC bằng nhau (c.g.c) nên $AB = AC$.

Tam giác ABC cân tại A nên $AE \perp BC$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $((ABC), (DBC)) = \widehat{AED}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{AED} = \frac{DE}{AE} = \frac{BD \cdot \sin 60^\circ}{\sqrt{AB^2 - BE^2}} = \frac{2a \cdot \sin 60^\circ}{\sqrt{9a^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Vậy } ((ABC), (DBC)) = \widehat{AED} = \arccos \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

③ Ta có $(ACD) \cap (ABC) = AC$. (1)

Từ B dựng $BH \perp DC \subset (ACD)$, dựng $HK \perp AC$.

Thì H chính là trung điểm của DC (do $\triangle BCD$ đều) $\Rightarrow BH \perp (ADC) \Rightarrow BH \perp AC$.

Do đó $AC \perp (BHK) \Rightarrow AC \perp HK, AC \perp BK$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $((ACD), (ABC)) = \widehat{BKH}$.

Vì $BH \perp (ADC) \Rightarrow BH \perp HK$, xét tam giác BHK vuông tại H có:

$$\tan \widehat{BKH} = \frac{BH}{HK}, \text{ với } HK = \frac{HC \cdot AD}{AC} \text{ (do hai tam giác vuông } ADC \text{ và } HCK \text{ đồng dạng)}.$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{BKH} = \frac{BH \cdot AC}{HC \cdot AD} = \frac{BC \cdot \sin 60^\circ \cdot AC}{\frac{DC}{2} \cdot \sqrt{AC^2 - DC^2}} = \frac{2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3a}{\frac{2a}{2} \cdot \sqrt{9a^2 - a^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Vậy } ((ACD), (ABC)) = \widehat{BKH} = \arctan \frac{3\sqrt{6}}{4}. \quad \square$$

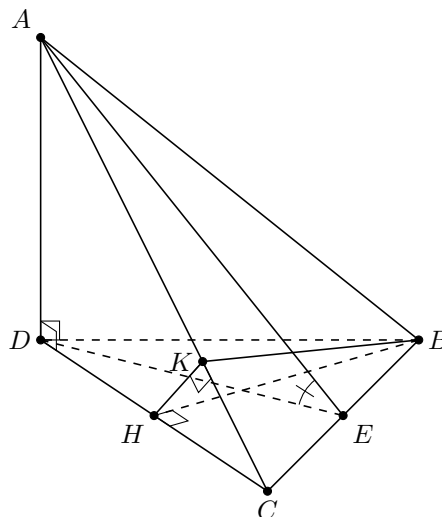
BÀI 4. Cho tứ diện $OABC$ có các cặp cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $OA = a\sqrt{3}$, $OB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $OC = a$.

① Chứng minh $(OAC) \perp (OBC)$.

② Xác định và tính góc $((OAB), (ABC))$.

③ Xác định và tính góc $((OAC), (ABC))$.

Lời giải.



① Ta có $OA \perp OB$, $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC)$.

Mà $OA \subset (OAC) \Rightarrow (OAC) \perp (OBC)$.

② Ta có $(OAB) \cap (ABC) = AB$.

$OC \perp OA$, $OC \perp OB \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$.

Trong tam giác vuông OAB hạ đường cao $OD \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp (ODC) \Rightarrow AB \perp CD$.

Từ (1), (2), (3) suy ra $((OAB), (ABC)) = \widehat{CDO}$.

Với $\tan \widehat{CDO} = \frac{OC}{OD} = \frac{OC \cdot AB}{OA \cdot OB}$ (do $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}AB \cdot OD$).

$$\tan \widehat{CDO} = \frac{OC \cdot \sqrt{OA^2 + OB^2}}{OA \cdot OB} = \frac{a \cdot \sqrt{3a^2 + \frac{6a^2}{4}}}{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = 1.$$

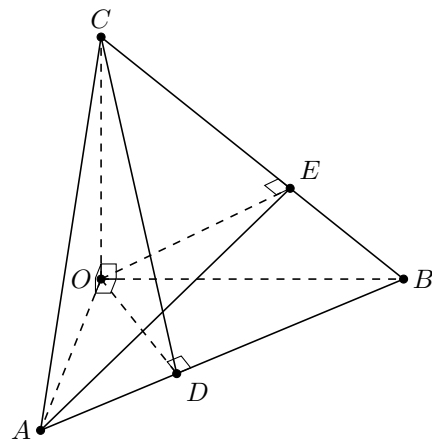
Do đó $((OAB), (ABC)) = \widehat{CDO} = \arctan 1 = 45^\circ$.

③ Trong tam giác vuông OBC hạ đường cao $OE \perp BC$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự câu trên ta được:

$$\tan \widehat{AEO} = \frac{OA \cdot BC}{OB \cdot OC} = \frac{OA \cdot \sqrt{OB^2 + OC^2}}{OB \cdot OC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{6a^2}{4} + a^2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a} = \sqrt{5}.$$

Do đó $((OAB), (ABC)) = \widehat{AEO} = \arctan \sqrt{5}$. □



BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , SA vuông góc với đáy $ABCD$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Xác định và tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

① (SAB) và (SBC) .

② (SBC) và $(ABCD)$.

③ (SCD) và $(ABCD)$.

④ (SBD) và $(ABCD)$.

⑤ (SMN) và $(ABCD)$.

Lời giải.

- ① Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC, AB \perp BC$ (do $ABCD$ vuông).
Do đó $BC \perp (SAB)$. Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$.
Hay $((SAB); (SBC)) = 90^\circ$.

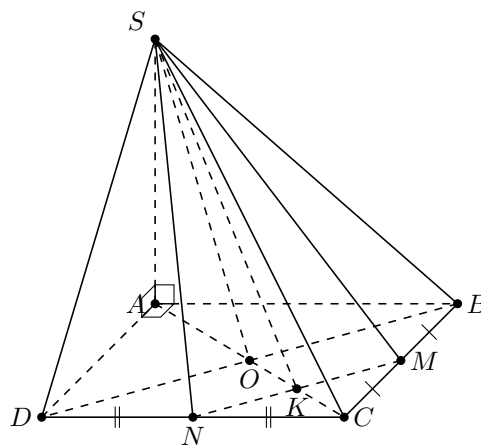
- ② $(SBC) \cap (ABCD) = BC$.
Chứng minh trên ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB, BC \perp SC$.
Do đó $((SBC); (ABCD)) = \widehat{SBA}$.
Với $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.
 $\Rightarrow ((SBC); (ABCD)) = \widehat{SBA} = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ$.

- ③ Chứng minh hoàn toàn tương tự câu trên ta được:
 $((SCD); (ABCD)) = \widehat{SDA} = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ$.

- ④ $(SBD) \cap (ABCD) = BD$. (1)
Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $ABCD$.
 $\Rightarrow BD \perp AO$ (tính chất đường chéo hình vuông) (2)
và $BD \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) (3)
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = \widehat{SOA}$.
Với $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{SA}{\frac{AC}{2}} = \frac{2SA}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} =$
 $\frac{a2\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \sqrt{6}$.
 $\Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = \widehat{SOA} = \arctan \sqrt{6}$.

- ⑤ $(SMN) \cap (ABCD) = MN$. (1)
Gọi K là giao điểm của AC và $MN \Rightarrow AK \perp BD$.
Dễ thấy $MN \parallel BD$ (do MN là đường trung bình của $\triangle BCD$).
 $\Rightarrow AK \perp MN$. (2)
và do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MN \Rightarrow MN \perp (SAK)$
 $\Rightarrow MN \perp SK$. (3)
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow ((SMN); (ABCD)) = \widehat{SKA}$.
Với $\tan \widehat{SKA} = \frac{SA}{AK} = \frac{SA}{AO + OK} = \frac{SA}{\frac{AC}{2} + \frac{AC}{4}} = \frac{4SA}{3AC}$
 $= \frac{4SA}{3\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a4\sqrt{3}}{3\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.
 $\Rightarrow ((SMN); (ABCD)) = \widehat{SKA} = \arctan \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

□



BÀI 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Hình chiếu H của đỉnh A lên mặt đáy $(A'B'C')$ trùng với trung điểm $B'C'$. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30° .

- ① Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy.
② Tính góc hợp bởi BC và AC' .
③ Tính góc giữa $(BAA'B')$ và mặt đáy.

Lời giải.

- ① Khoảng cách giữa hai mặt đáy là đường cao AH của hình trụ. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy $(A'B'C')$ là $\widehat{AA'H} = 30^\circ$.

$$\text{Tam giác } AA'H \text{ có } AH = A'H \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$AH = \frac{a}{2}.$$

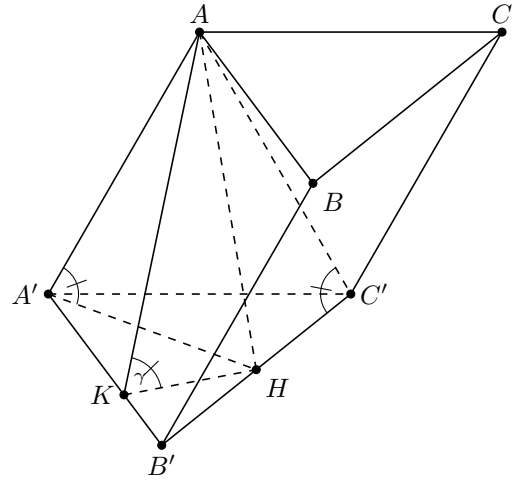
- ② $B'C' \parallel BC$ nên $\widehat{BC, AC'} = \widehat{B'C', AC'} = \widehat{AC'B'}$. Tam giác AHC' vuông tại H và có $AH = HC' = \frac{a}{2}$ nên vuông cân tại H .
Vậy $\widehat{AC'H} = \widehat{AC'B'} = 45^\circ$.

- ③ Hạ $HK \perp A'B'$ thì $AK \perp A'B'$ và $HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$,

$$(\widehat{ABB'A'}, \widehat{A'B'C'}) = \widehat{AKH} = \gamma.$$

$$\text{Tam giác } AHK \text{ có } \tan \gamma = \frac{AH}{HK} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } (\widehat{ABB'A'}, \widehat{A'B'C'}) = \widehat{AKH} = \gamma = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$



BÀI 7. Cho hình chóp $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a, OB = b, OC = c$. Hãy tính:

- ① Đường cao OH của hình chóp.
② Các góc hợp bởi mặt đáy và các mặt bên của hình chóp.

Lời giải.

- ① Hạ $OH \perp (ABC)$ ta chứng minh được H là trực tâm của tam giác ABC ; AA', BB', CC' là các đường cao trong tam giác ABC .

Tam giác COC' vuông tại O có đường cao OH , tam giác AOB vuông tại O có đường cao OC' cho:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$= \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2b^2c^2}.$$

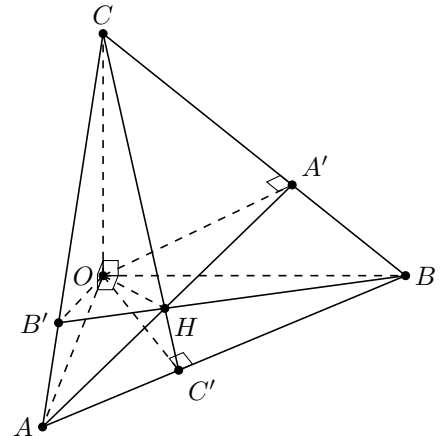
$$\text{Nên } OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}.$$

- ② Gọi α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi $mp(ABC)$ với $mp(OAB), mp(OCA)$. Ta có $((ABC), (OAB)) = \widehat{OC'C} = \alpha$.

$$\tan \alpha = \frac{OC}{OC'} = \frac{c \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \text{ hay } \cos \alpha = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}.$$

$$\text{Tương tự: } \cos \beta = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}.$$

$$\text{và } \cos \gamma = \frac{ca}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}.$$



BÀI 8. Cho tam giác đều ABC cạnh a nằm trong $mp(P)$. Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với (P) .

- ① Chứng minh tam giác ADE vuông.

- ② Tính cosin góc giữa hai mp (ADE) và (P) .

Lời giải.

- ① Gọi F là trung điểm của CE có $FE = FC = \frac{CE}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông ABD , ACE , DEF có :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = \frac{3a^2}{2}, \quad AE^2 = AC^2 + CE^2 = 3a^2;$$

$$DE^2 = DF^2 + FE^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Trong tam giác } ADE: AE^2 = AD^2 + DE^2 = \frac{3a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} = 3a^2.$$

Vậy tam giác ADE vuông tại D .

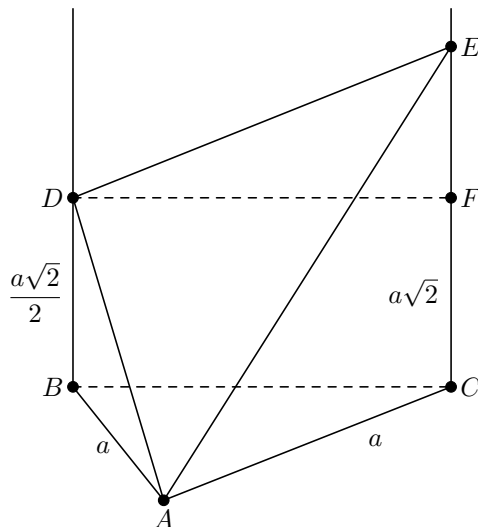
- ② Vì $BD \perp (ABC)$, $CE \perp (ABC)$ nên tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác ADE .

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và $mp(P)$.

$$S_{\triangle ABC} = \cos \varphi \cdot S_{\triangle ADE}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\frac{AB^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2} DE \cdot DA} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3a^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□



BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Tính góc giữa

- ① (SCD) và $(ABCD)$.
② (SCD) và (SAD) .

Lời giải.

- ① Gọi E, F lần lượt trung điểm của AB, CD .

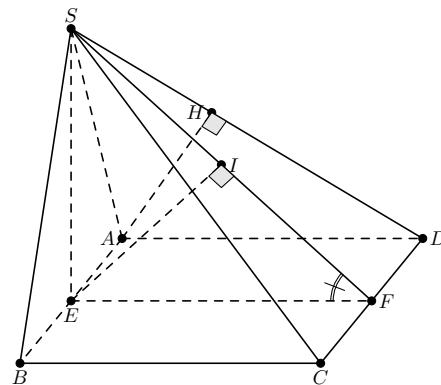
Có $SE \perp AB$ (SAB tam giác đều) $\Rightarrow SE \perp (ABCD)$

$$\text{Có } \begin{cases} CD \perp EF \\ CD \perp SE \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEF) \Rightarrow CD \perp SF.$$

Vậy $[(SCD), (ABCD)] = \widehat{SFE}$.

Trong $\triangle SEF$ vuông tại E :

$$\tan \widehat{SFE} = \frac{SE}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SFE} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



- ② $CD \perp EF$; $CD \perp SE \Rightarrow CD \perp (SEF) \Rightarrow (SCD) \perp (SEF)$.

— Dựng $EI \perp SF (I \in SF) \Rightarrow EI \perp (SCD) \Rightarrow d(E, (SCD)) = EI$.

— Trong $\triangle SEF$ vuông tại E có $\frac{1}{EI^2} = \frac{1}{ES^2} + \frac{1}{EF^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow EI = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

— Vì $AE \parallel CD \Rightarrow AE \parallel (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(E, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

— Ta có $SD^2 = SE^2 + ED^2 = SE^2 + EA^2 + AD^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + a^2 = 2a^2$.

— Dựng $AH \perp SD (H \in SD)$, vì $\triangle SAD$ cân tại A nên $AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $(SAD) \cap (SCD) = SD$, $A \in (SAD)$, $d(A, SD) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) . Sử dụng công thức tính góc ở trường hợp 3 ta được

$$\sin \varphi = \frac{d(A, (SCD))}{d(A, (SD))} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{42}}{7} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{42}}{7}.$$

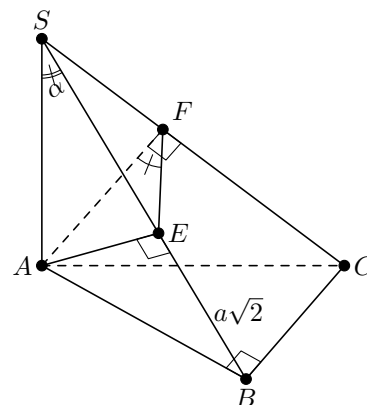
□

BÀI 10. Cho tứ diện $S.ABC$ có hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\widehat{ASB} = \alpha$.

- ① Chứng minh BC vuông góc với SB .
- ② Xác định α để hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) tạo với nhau góc 60° .

Lời giải.

- ① Chứng minh BC vuông góc với SB .
 Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$ (1)
 Theo đề bài $(SAB) \perp (SBC)$ (2)
 Và $(ABC) \cap (SBC) = BC$ (3)
 Từ (1), (2), (3) suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ (hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba).
- ② Dựng $AE \perp SB$ tại E , dựng $AF \perp SC$ tại F . Theo câu a) thì $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.
 Vậy $SC \perp (AEF) \Rightarrow SC \perp EF$.
 Hai đường thẳng AF và EF lần lượt thuộc hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) cùng vuông góc với giao tuyến SC . Nên $[(SAC), (SBC)] = \widehat{AFE} = 60^\circ$.
 Ta có $\triangle AEF$ vuông tại E (vì $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp EF$)
 có $AE = EF \cdot \tan 60^\circ = EF \cdot \sqrt{3}$.
 Xét $\triangle SAE$ có $AE = SE \cdot \tan \alpha$, xét $\triangle SEF$ có $EF = SE \cdot \sin 45^\circ = \frac{SE \cdot \sqrt{2}}{2}$.
 Suy ra $AE = EF \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow SE \cdot \tan \alpha = \frac{SE \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$
 $\Rightarrow \alpha = \arctan \frac{\sqrt{6}}{2}$.



□

BÀI 11. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $BB' = a$. Gọi I trung điểm CC' . Chứng minh tam giác $AB'I$ vuông ở A . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

Lời giải.

Gọi H trung điểm BC . Vì ABC cân tại A nên $AH \perp BC$,
do $\widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ACH} = 30^\circ$.

Ta có $AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$;

$CH = AC \cdot \cos \widehat{ACH} = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow BC = 2CH = a\sqrt{3}$.

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông: $B'C'I$, ABB' , ACI

$IB'^2 = B'C'^2 + IC'^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$;

$AB'^2 = AB^2 + BB'^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

$AI^2 = AC^2 + IC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$.

Ta có $IB'^2 = AB'^2 + AI^2 = \frac{13a^2}{4}$. Vậy tam giác $B'AI$ vuông tại A .

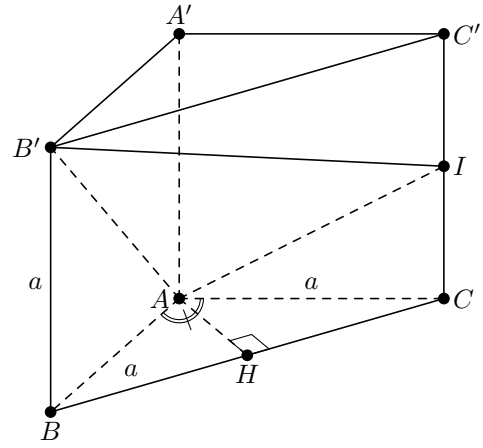
Ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle B'AI} &= \frac{1}{2} AI \cdot AB' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2} \\ &= \frac{a^2\sqrt{10}}{4} S_{\triangle ABC} \\ &= \frac{1}{2} AH \cdot BC \\ &= \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC') và $(AB'I)$ ta có

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB'I} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right) : \left(\frac{a^2\sqrt{10}}{4} \right) = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

□



📁 DẠNG 2.4. Thiết diện vuông góc

Bài toán 1. Xác định thiết diện chứa một đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng a không vuông góc với (α) . Xác định mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với (α) .

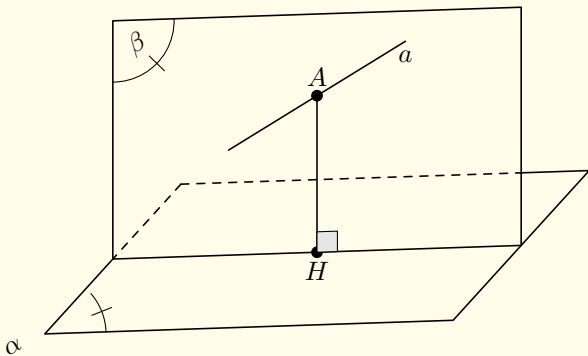
Phương pháp

- Chọn một điểm $A \in a$.
- Dựng đường thẳng b qua A và vuông góc (α) .

Suy ra mặt phẳng (a, b) là mặt phẳng (β) cần tìm.

Bài toán 2. Xác định thiết diện (α) qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d

- Tìm những đường thẳng thuộc khối chóp vuông góc với d , chẳng hạn $a, b, \dots$ Suy ra $a \parallel (\alpha), b \parallel (\alpha), \dots$



— Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của khối chóp

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (P) \\ (\alpha) \parallel a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (P) = Mx \parallel a, \dots$$

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD) , (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

Lời giải.

Dựng $AH \perp SD$ tại H . (1)

Ta có $\begin{cases} CD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \\ CD \perp AD \text{ (do } ABCD \text{ là hình vuông).} \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $AH \perp (SCD)$, mà $(\alpha) \perp (SCD)$.

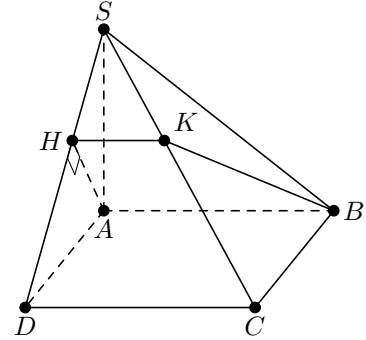
Suy ra $AH \subset (\alpha)$, do đó $(\alpha) \equiv (AHB)$.

Vì $(\alpha) \parallel CD$ nên $(\alpha) \cap (SCD) = HK \parallel CD \parallel AB$ (với $K \in SC$).

Từ đó thiết diện là hình thang $ABKH$.

Mặt khác $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp AH$.

Vậy thiết diện là hình thang vuông tại A và H .



□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O có $AB = a$, $AD = 2a$. SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD) . Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi M , N lần lượt là trung điểm của cạnh AD và BC .

$\Rightarrow MN$ đi qua O và vuông góc với AD .

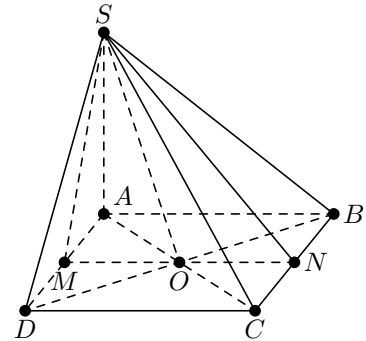
Ta có $\begin{cases} MN \perp AD \text{ (chứng minh trên)} \\ MN \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)). \end{cases}$

$\Rightarrow MN \perp (SAD)$ nên $(SMN) \perp (SAD)$.

Do đó SMN là thiết diện cần tìm.

Xét $\triangle SMN$ vuông tại M có

$$S_{\triangle SMN} = \frac{SM \cdot MN}{2} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}.$$



□

BÀI 3. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ . Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C trên (P) , D trên (Q) sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD = a$. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với CD .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \\ BD \in (Q), BD \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow BD \perp (P).$

Gọi H là trung điểm BC , ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp CD.$

Trong mặt phẳng (BCD) , kẻ $HI \perp CD \Rightarrow CD \perp (AHI)$.

Khi đó mặt phẳng (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là tam giác AHI .

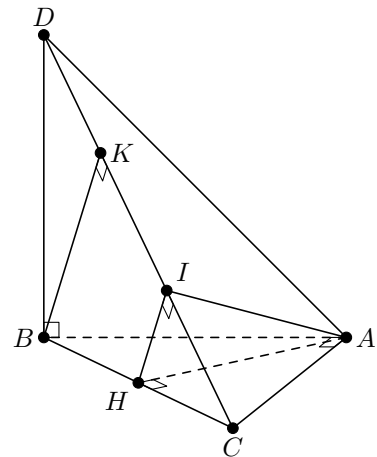
Xét tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông BCD , kẻ đường cao BK thì $BK = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác BKC có $\begin{cases} HI \parallel BK \\ H \text{ là trung điểm } BC \end{cases} \Rightarrow HI = \frac{1}{2}BK = \frac{a}{\sqrt{6}}.$

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác AHI vuông tại H và có diện tích

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}.$$



□

BÀI 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $A'B'C'$ là tam giác vuông tại A' , $A'B' = a\sqrt{3}$, $A'C' = a$,

cạnh bên $AA' = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A' và vuông góc với $B'C$. Tính diện tích thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P) ?

Lời giải.

Từ A' ta dựng $A'K' \perp B'C'$.

$$\text{Do } \begin{cases} (A'B'C') \perp (BCC'B') \\ (A'B'C') \cap (BCC'B') = B'C' \Rightarrow A'K' \perp (BCC'B') \Rightarrow A'K' \perp BC'. \\ A'K' \perp B'C' \text{ (theo cách vẽ)} \end{cases}$$

(1)

Trong mặt phẳng $(BCC'B')$ dựng $K'x \perp B'C$ và cắt $B'B$ tại điểm N . (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} BC' \perp A'K' \\ BC' \perp K'N \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'K'N).$$

$\Rightarrow$ Thiết diện cần tìm là tam giác $A'K'N$ vuông tại K' .

Xét tam giác $A'B'C'$ vuông tại A' có

$$B'C' = \sqrt{A'B'^2 + A'C'^2} = 2a = AA'.$$

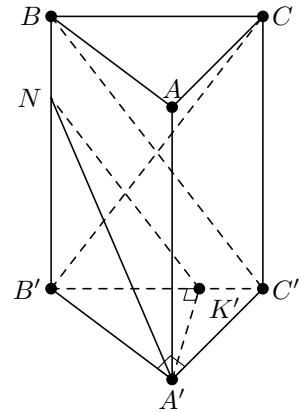
$\Rightarrow B'BCC'$ là hình vuông $\Rightarrow BC' \perp B'C$. (3)

Từ (2) và (3) ta có hai tam giác $B'K'N$, $B'C'B$ đồng dạng.

$$\text{Do đó } \frac{K'N}{C'B} = \frac{B'K'}{B'C'} \Leftrightarrow K'N = \frac{B'K' \cdot C'B}{B'C'} = \frac{A'B'^2 \cdot C'B}{B'C'^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy diện tích thiết diện là } S = \frac{1}{2} \cdot A'K' \cdot K'N = \frac{1}{2} \cdot \frac{A'B' \cdot A'C'}{B'C'} \cdot K'N = \frac{3a^2\sqrt{6}}{8}.$$

□



BÀI 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC' . Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu của AC' lên $(ABCD)$.

Mà $AC \perp BD$ nên $AC' \perp BD$. (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD \perp (AA'B'B) \\ A'B \subset (AA'B'B) \end{cases} \Rightarrow A'B \perp AD.$$

$$\text{Lại có } A'B \perp AB' \text{ suy ra } \begin{cases} A'B \perp (AB'C'D) \\ AC' \subset (AB'C'D) \end{cases} \Rightarrow AC' \perp A'B.$$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (A'BD)$. (3)

Mặt phẳng trung trực AC' là mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của AC' và $(\alpha) \perp AC'$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra mặt phẳng (α) đi qua I và song song với $(A'BD)$.

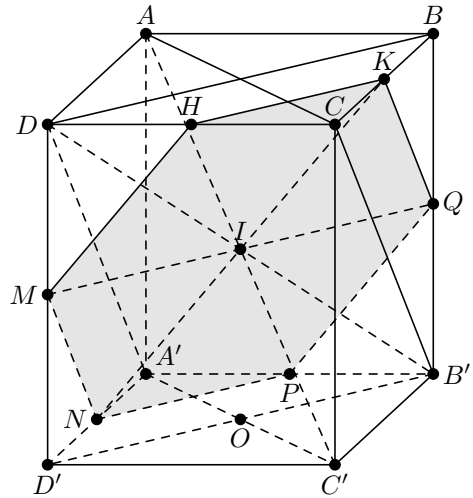
Do đó qua I dựng $MQ \parallel BD$.

$$\text{Dựng } \begin{cases} MN \parallel A'D, NP \parallel B'D' \parallel BD \\ QK \parallel B'C \parallel A'D, KH \parallel BD. \end{cases}$$

$$\text{Mà } MN = NP = PQ = QK = KH = HM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra thiết diện là lục giác đều.

□



BÀI 3. KHOẢNG CÁCH

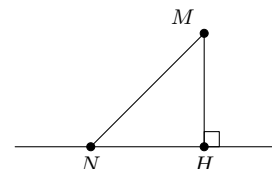
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm M và một đường thẳng Δ . Trong mặt phẳng (M, Δ) , gọi H là hình chiếu của M trên Δ . Khi đó độ dài đoạn MH là khoảng cách từ điểm M đến Δ .

Kí hiệu: $d(M, \Delta) = MH$ với $MH \perp \Delta$.

Nhận xét. $MN \geq MH, \forall N \in \Delta$ nghĩa là $MN_{\min} = MH \Leftrightarrow N \equiv H$.

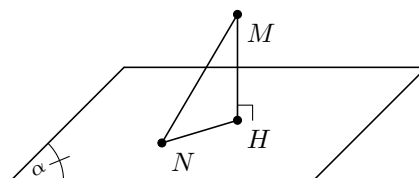


2 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Cho mặt phẳng (α) và một điểm M , gọi H là hình chiếu của M trên (α) . Khi đó, khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) .

Kí hiệu $d(M, (\alpha)) = MH$ với $MH \perp (\alpha)$.

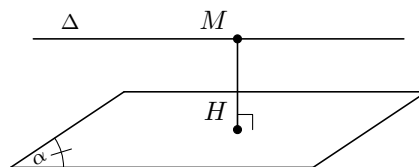
Nhận xét. $MN \geq MH, \forall N \in (\alpha)$, nghĩa là $MN_{\min} = MH \Leftrightarrow N \equiv H$.



3 KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó, khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và (α) .

Kí hiệu: $d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) = MH$ Trong đó $M \in \Delta, MH \perp (\alpha)$.

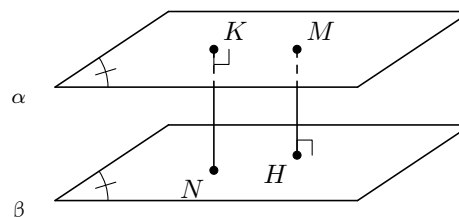


4 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Cho mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách bất kỳ từ một điểm trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) .

Kí hiệu: $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = d(N, (\alpha))$

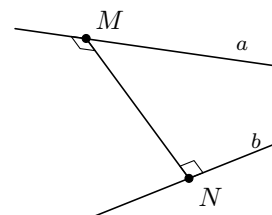
Trong đó: $M \in (\alpha), N \in (\beta)$.



5 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .

Kí hiệu: $d(a, b) = MN$ khi $\begin{cases} MN \perp a \text{ tại } M \\ MN \perp b \text{ tại } N \end{cases}$



Nhận xét. Trong hình học cổ điển, ta quan tâm đến hai bài toán khoảng cách, đó là khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta cùng xét hai dạng này.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 3.1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

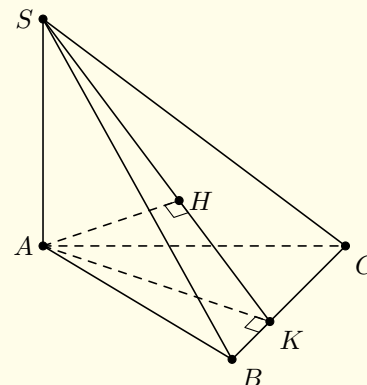
Bài toán 1. Tìm khoảng cách từ chân đường vuông góc đến mặt bên

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Xác định khoảng cách từ chân đường cao A đến mặt bên (SBC) .

Đựng $\begin{cases} AK \perp BC, (K \in BC) \\ AH \perp SK, (H \in SK). \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \quad (\text{do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK).$
 $\Rightarrow BC \perp AH.$

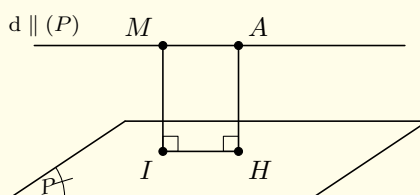
Do đó, ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SK \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$
 $\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH.$



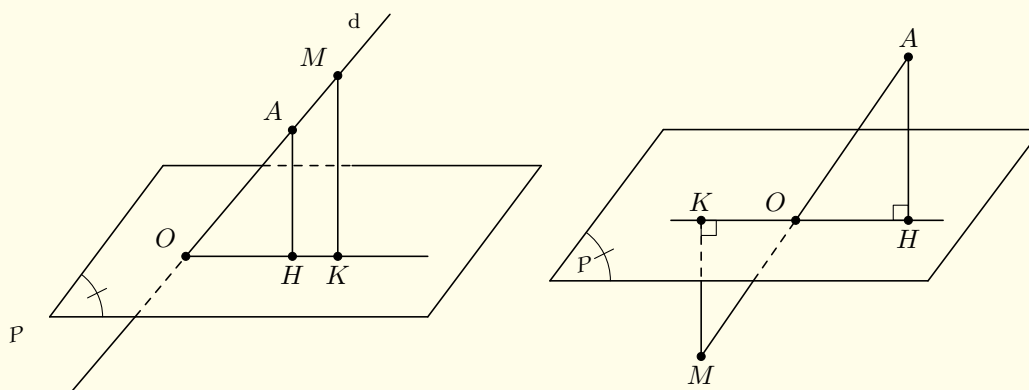
☑ Các phương pháp đưa về bài toán 1 (khoảng cách từ chân đường vuông góc)

① Sử dụng song song của đường thẳng và mặt phẳng

Đường thẳng d qua M , qua chân đường vuông góc A và $d \parallel (P)$. Khi đó $d(M, (P)) = d(A, (P)).$



② Sử dụng tỷ số khoảng cách



Nếu H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) , đường thẳng d qua hai điểm M, A và cắt (P) tại O .

Khi đó: $d(M, (P)) = \frac{OM}{OA} \cdot d(A, (P))$ (Sử dụng định lý Talet để chứng minh).

③ Tạo chân đường cao giả

Tính $d(M, (P))$ khi mặt phẳng (P) chứa đường chân đường cao thật A . Khi đó ta tạo chân đường cao giả song song với chân đường cao thật.

❖ Ví dụ

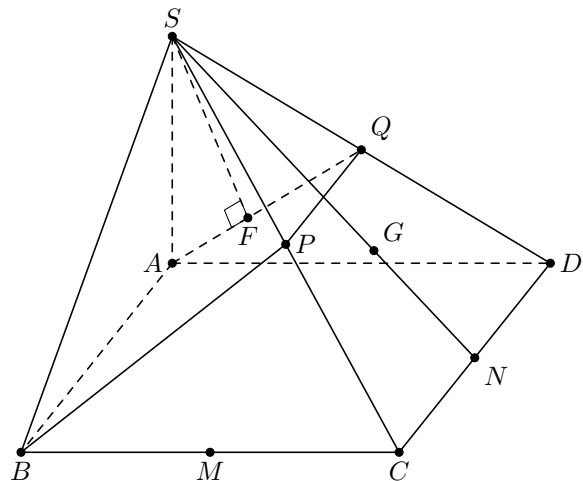
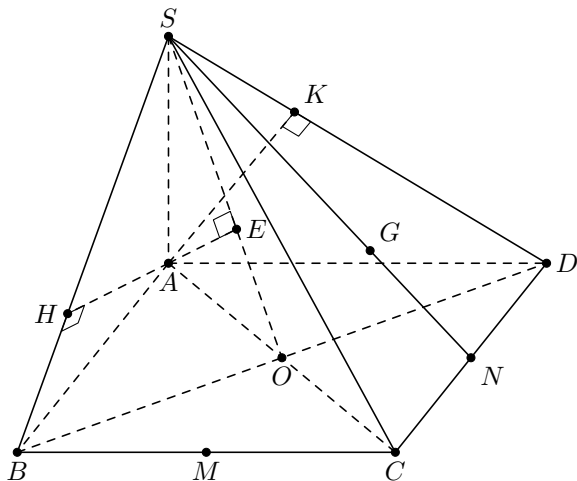
VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SC và G là trọng tâm tam giác $\triangle SCD$. Xác định và tính

① $d(A, (SBC))$

② $d(B, (SDC))$

- ③ $d(C, (SBD))$
- ④ $d(M, (SCD))$
- ⑤ $d(G, (SBC))$
- ⑥ $d(N, (ABP))$

Lời giải.



- ① Ta có $(SBC) \cap (ABCD) = BC$. Mà $AB \perp BC$ và dựng $AH \perp SB$ tại H .
Ta cần chứng minh AH vuông góc với (SBC) để có AH là khoảng cách cần tìm.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Suy ra $BC \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$. Suy ra $d(A, (SBC)) = AH$.

Xét tam giác $\triangle SAB$, có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- ② Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Mà $CD \subset (SCD)$ nên suy ra $(SCD) \perp (SAD)$ và $(SCD) \cap (SAD) = SD$.

Suy ra: Từ A kẻ $AK \perp SD$ tại $K \Rightarrow AK \perp (SCD)$.

Ta có $AB \parallel CD$, $CD \subset (SCD) \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.

Do đó $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK$.

Xét $\triangle SAD$: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow AK = \frac{SA \cdot SD}{\sqrt{SA^2 + SD^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- ③ Vì O là trung điểm của AC nên suy ra $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp OA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO)$.

Mà $BD \subset (SBD)$ nên suy ra $(SBD) \perp (SAO)$ và $(SBD) \cap (SAO) = SO$.

Từ A kẻ $AE \perp SO$ tại E . Ta có

$$d(A, (SBD)) = AE = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2a^2 + \frac{2a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

- ④ Do M là trung điểm của BC nên ta có $d(M, (SCD)) = \frac{1}{2} d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

⑤ Do G là trọng tâm tam giác $\triangle SCD$ nên

$$d(G, (SBC)) = \frac{1}{3} d(D, (SBC)) = \frac{1}{3} d(A, (SBC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

⑥ Gọi Q là trung điểm của SD nên suy ra $CD \parallel PQ$. Do đó $CD \parallel (ABPQ)$.

Tam giác SAD vuông tại A , có trung tuyến $AQ = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + SA^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $CD \parallel PQ$ và $N \in CD$ nên $d(N, (ABP)) = d(D, (ABP)) = d(D, (ABPQ)) = d(S, (ABPQ)) = d(S, (ABP))$.

Lại có $AB \perp (SAD)$ nên suy ra $(ABPQ) \perp (SAD)$ theo giao tuyến AQ .

Kẻ $SF \perp AQ$ tại F , ta có $SF \perp (ABPQ)$. Suy ra

$$d(S, (ABP)) = SF = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{\triangle SAD}}{AE} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

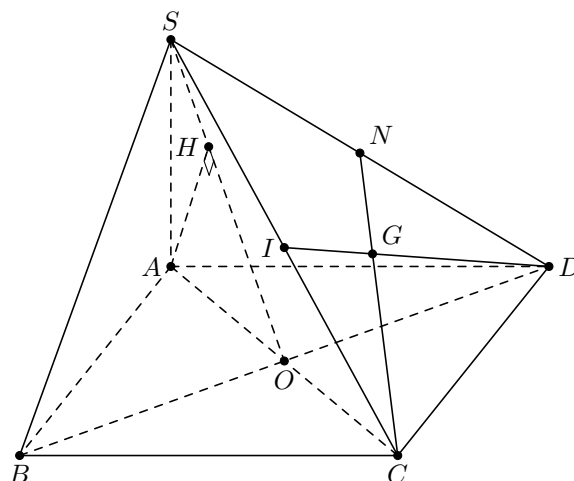
$$\text{Vậy } d(N, (ABP)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tâm O , cạnh a . Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Gọi I là trung điểm của SC và G là trọng tâm của tam giác SCD . Xác định và tính khoảng cách

- ① $d(A, (SBD))$
- ② $d(C, (SBD))$
- ③ $d(I, (SBD))$
- ④ $d(O, (SAB))$
- ⑤ $d(G, (SAB))$
- ⑥ $d(G, (SBD))$

Lời giải.



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SC, (SAB)) = \widehat{BSC} = 30^\circ$.

Xét tam giác $\triangle SBC$ vuông tại B , có $\sin 30^\circ = \frac{BC}{SC} \Rightarrow SC = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$. Suy ra $SB = a\sqrt{3}$, $SA = a\sqrt{2}$.

① Ta có $(SAC) \perp (SBD)$ và $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Từ A , kẻ $AH \perp SO \Rightarrow AH \perp (SBD)$.

$$\text{Suy ra } d(A, (SBD)) = AH = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

② Do $OA = OC$ nên $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

③ Vì I là trung điểm của SC nên $d(I, (SBD)) = \frac{1}{2} d(C, (SBD)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{5} = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

④ Do O là trung điểm của AC nên $d(O, (SAB)) = \frac{1}{2} d(C, (SAB)) = \frac{a}{2}$.

⑤ Vì G là trọng tâm $\triangle SCD$ nên $d(G, (SAB)) = \frac{2}{3} d(C, (SAB)) = \frac{2a}{3}$.

⑥ Vì G là trọng tâm của tam giác SCD nên suy ra $\frac{NG}{NC} = \frac{1}{3}$.

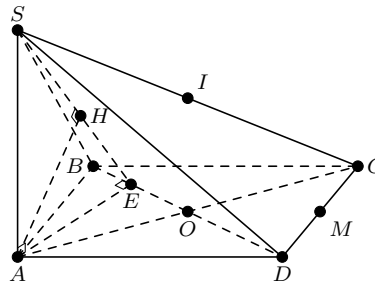
Ta có: $\frac{d(G, (SBD))}{d(C, (SBD))} = \frac{NG}{NC} = \frac{1}{3}$. Do đó $d(G, (SBD)) = \frac{1}{3} d(C, (SBD)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{10} = \frac{a\sqrt{10}}{30}$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi I , M lần lượt là trung điểm của SC , CD . Tính các khoảng cách sau

- ① $d(A, (SBD))$.
- ② $d(I, (SBD))$.
- ③ $d(A, (SBM))$.

Lời giải.



- ① Gọi E , H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BD và SE .

Ta có $\begin{cases} BD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \\ BD \perp AE \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow AH \perp BD$.

Mặt khác $AH \perp SE$, $SE \subset (SBD)$ nên $AH \perp (SBD)$. Suy ra $d(A, (SBD)) = AH$.

Tam giác ABD vuông tại A , đường cao AE có $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$.

Tam giác SAE vuông tại A , đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d(A, (SBD)) = AH = \frac{2a}{3}$.

- ② Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có I , O lần lượt là trung điểm của SC và AC nên

$$d(I, (SBD)) = \frac{1}{2} d(C, (SBD)) = \frac{1}{2} d(A, (SBD)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}.$$

Vậy $d(I, (SBD)) = \frac{a}{3}$.

- ③ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi F là giao điểm của BM và AD .

Ta thấy $MD \parallel AB$ và $MD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$ nên MD là đường trung bình của tam giác FAB , suy ra $AF = 2AD = 4a$.

Gọi G, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BF và SG .

Ta có $\begin{cases} BF \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \\ BF \perp AG \end{cases} \Rightarrow BF \perp (SAG) \Rightarrow AK \perp BF$.

Mặt khác $AK \perp SG, SG \subset (SBF)$ nên $AK \perp (SBF)$.

Suy ra $d(A, (SBM)) = d(A, (SBF)) = AK$.

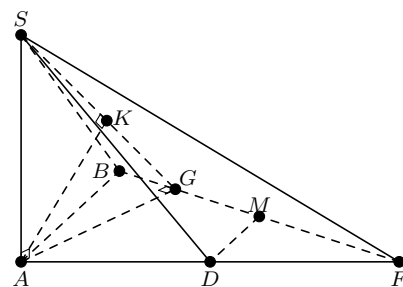
Tam giác ABF vuông tại A , đường cao AG có

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{16a^2} = \frac{17}{16a^2}.$$

Tam giác SAG vuông tại A , đường cao AK nên

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AG^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{17}{16a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{33}{16a^2} \Rightarrow AK = \frac{4a\sqrt{33}}{33}.$$

Vậy $d(A, (SBM)) = AK = \frac{4a\sqrt{33}}{33}$.

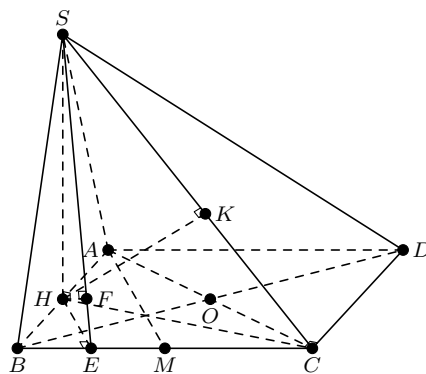


VÍ DỤ 4. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh a và $AC = a$. Từ trung điểm H của AB dựng SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ với $SH = a$. Tính các khoảng cách sau

- ① $d(H, (SCD))$.
- ② $d(O, (SCD))$.
- ③ $d(A, (SBC))$.

□

Lời giải.



- ① Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SC . Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$ nên tam giác ABC đều cạnh a , suy ra $HC \perp AB$, $HC \perp CD$ tại C .

Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SA$. Do đó $CD \perp (SHC) \Rightarrow CD \perp HK$.

Mặt khác $HK \perp SC$ nên $HK \perp (SCD)$. Vì vậy $d(H, (SCD)) = HK$.

Tam giác SHC vuông tại H có $HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SH = a$, đường cao HK . Suy ra

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $d(H, (SCD)) = HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

- ② Do O là tâm hình thoi $ABCD$ hay O là trung điểm của AC nên $d(O, (SCD)) = \frac{1}{2}d(A, (SCD))$.

Mà $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$, $H \in AB$ nên $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$.

Vậy $d(O, (SCD)) = \frac{1}{2}d(A, (SCD)) = \frac{1}{2}d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

- ③ Gọi M là trung điểm của BC . Do tam giác ABC đều cạnh a nên $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi E là trung điểm của BM , khi đó HE là đường trung bình của tam giác ABM nên $HE \perp BC$ và $HE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi F là hình chiếu vuông góc của H trên SE . Ta có

$$\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp HE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHE) \Rightarrow HF \perp BC.$$

Lại có $HF \perp SE$, $SE \subset (SBC)$ nên $HF \perp (SBC)$. Suy ra $d(H, (SBC)) = HF$.

Tam giác SHE vuông tại H , có đường cao HF nên

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{19}{3a^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

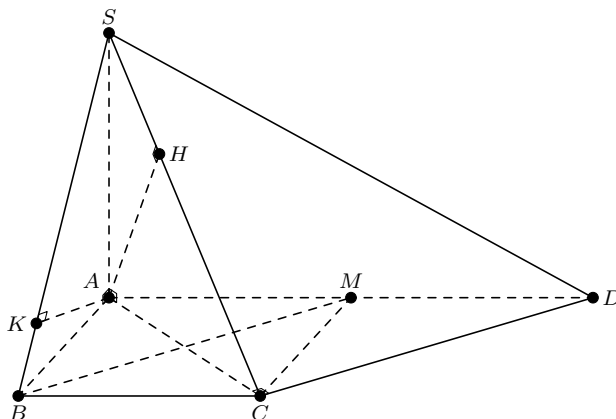
Mặt khác H là trung điểm của AB nên $d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC)) = 2HF = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

□

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B và $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính các khoảng cách sau

- ① $d(A, (SCD))$.
- ② $d(B, (SCD))$.
- ③ $d(AD, (SBC))$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AD . Ta có $AM \parallel BC$, $AM = BC = a$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAM} = 90^\circ$ nên $ABCM$ là hình vuông cạnh a .

Tam giác ACD có đường trung tuyến $CM = \frac{AD}{2} = a$ nên $\triangle ACD$ vuông tại C .

- ① Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC , ta có

$$\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH.$$

Do $ABCM$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A , đường cao AH thỏa mãn

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(A, (SCD)) = AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

- ② Tứ giác $BCDM$ có $BC \parallel MD$ và $BC = MD = a$ nên $BCDM$ là hình bình hành. Do đó $BM \parallel CD \Rightarrow BM \parallel (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(M, (SCD))$.

Lại do M là trung điểm của AD nên $d(M, (SCD)) = \frac{1}{2}d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

- ③ Do $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AK \perp BC.$$

Mặt khác $AK \perp SB$ nên suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK$.
Tam giác SAB vuông tại A , có đường cao AK thỏa mãn

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

Vậy $d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

□

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a biết rằng $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Gọi D, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BC và SD . Vì $SA \perp (ABC)$ nên ta có

$$\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp AH.$$

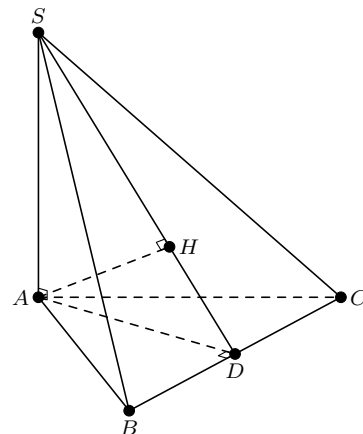
Lại có $AH \perp SD$, suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.
Tam giác ABC đều cạnh a , có AD là đường cao và là đường trung tuyến nên $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AH thỏa mãn

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{6a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

□



2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 3a$, $BC = 4a$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a .

Lời giải.

Gọi SH là đường cao của tam giác SBC .

Kẻ $HK \perp AC$, $HI \perp SK$.

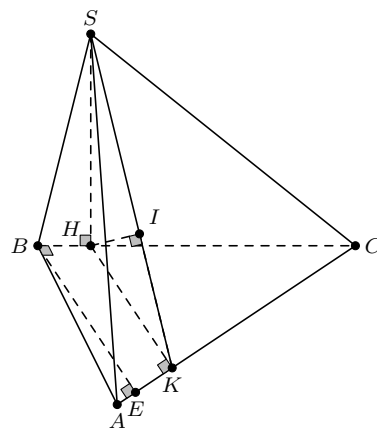
Ta có $\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) = BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$,

suy ra SH là đường cao của khối chóp $S.ABC$.

Ta có $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC \cdot \sin SBC = 2\sqrt{3}a^2$.

Mặt khác $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} SH \cdot BC \Rightarrow SH = \frac{2S_{\Delta SBC}}{BC} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông SBH , có $BH^2 = SB^2 - SH^2 = 9a^2$
 $\Rightarrow BH = 3a, HC = a$.



Kẻ $BE \perp AC$, xét tam giác vuông ABC có $BE = \frac{12}{5}a$, $HK = \frac{1}{4}BE = \frac{3}{5}a$, (do $HK \parallel BE$).

Xét tam giác vuông SHK có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{3\sqrt{7}}{14}a$.

Lại có $d(B, (SAC)) = 4 \cdot d(H, (SAC)) = 4 \cdot HI = \frac{6\sqrt{7}}{7}a$.

Vậy $d(B, (SAC)) = \frac{6\sqrt{7}}{7}a$. □

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{5}$.

① Tính chiều cao của hình chóp.

② Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) .

Lời giải.

① Gọi N là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) .

Vì $SA = SB = SC = a\sqrt{5} \Rightarrow NA = NB = NC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).

Suy ra $N \equiv M$ (N, M đều cách đều nằm trên mặt đáy và cách đều 3 đỉnh A, B, C).

Hay SM là đường cao của khối chóp.

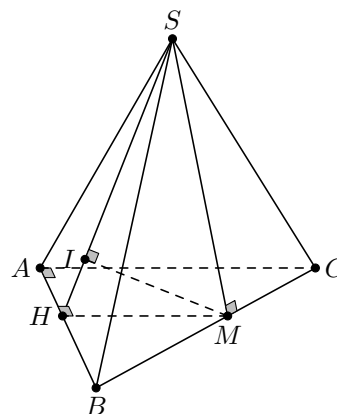
Ta có $AM = a, SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = 2a$.

Vậy chiều cao của hình chóp là $SM = 2a$.

② Kẻ $MH \perp AB$, $MI \perp SH$. Ta có $AC = a\sqrt{3}, MH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông SMH , ta có $MI = \frac{SM \cdot MH}{\sqrt{SM^2 + MH^2}} = \frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Vậy $d(M, (SAB)) = MI = \frac{2\sqrt{57}a}{19}$. □



BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $2SD = 3a$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB . Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD , H là trung điểm của AB ,
 $HI \perp DB$, $HK \perp SI$.
 Ta có SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.
 Xét hình vuông $ABCD$ có

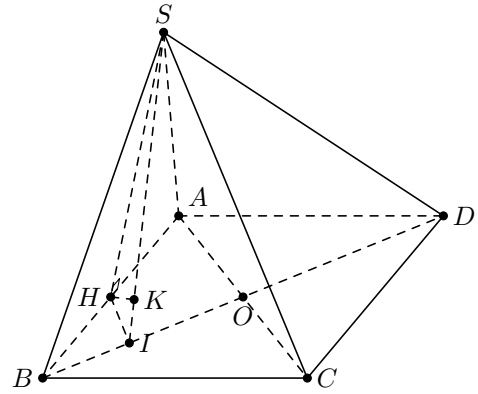
$$AC = a\sqrt{2}, AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, HI = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{2}}{4}, DH = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Xét tam giác vuông SHD , có $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = a$.

Xét tam giác vuông SHI , có $HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{a}{3}$.

Suy ra $d(A, (SBD)) = 2 \cdot d(H, (SBD)) = 2 \cdot HK = \frac{2a}{3}$.

Vậy $d(A, (SBD)) = \frac{2a}{3}$.



□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Gọi M là trung điểm của AB , biết rằng $SA = 2a\sqrt{3}$ và đường thẳng SC tạo với đáy một góc 30° . Tính theo a khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

Kẻ $HK \perp BC$, $HI \perp SK$. Ta có $HDCK$ là hình chữ nhật.

$$\text{Mà } d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{1}{2}d(H, (SBC)) = \frac{1}{2}HI.$$

$$\text{Đặt } HD = x, AD \cdot AH = SA^2 \Rightarrow 3x \cdot 4x = 12a^2 \Rightarrow x = a.$$

$$AD = 4a, SH = a\sqrt{3}.$$

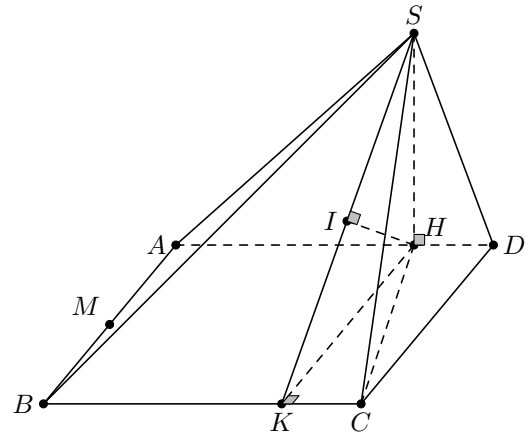
$$\text{Lại có } (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, CH}) = \widehat{SCH} = 30^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \cot 30^\circ = \frac{CH}{SH} \Rightarrow CH = SH \cdot \cot 30^\circ = 3a.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } CHK \text{ có } HK = \sqrt{CH^2 - CK^2} = 2\sqrt{2}a.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SHK \text{ có } HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2\sqrt{66}}{11}a.$$

$$\text{Vậy } d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}HI = \frac{\sqrt{66}}{11}a.$$



□

BÀI 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB , $A'H \perp (ABC)$, $\widehat{A'CH} = 60^\circ$.

$$\text{Nên } A'H = CH \cdot \tan \widehat{A'CH} = \frac{3a}{2}.$$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của H trên AC ; K là hình chiếu vuông góc của H trên $A'I$.

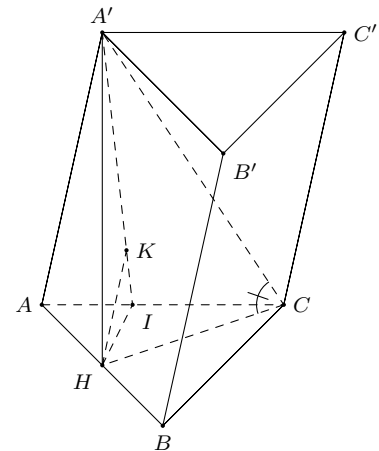
Nên khoảng cách từ H đến $(ACC'A')$ là $d = HK$.

$$HI = AH \cdot \sin \widehat{IAH} = \frac{\sqrt{3}a}{4} \text{ và } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HA'^2} = \frac{52}{9a^2}$$

$$\text{Nên } d = HK = \frac{3\sqrt{13}a}{26}.$$

Vì H là trung điểm của AB nên khoảng cách từ B đến $(ACC'A')$ là

$$d' = 2d = \frac{3\sqrt{13}a}{13}.$$



□

BÀI 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A và $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

① Tính khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$.

② Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.

- ③ Chứng minh $AB \perp (ACC'A')$. Tính khoảng cách từ A' đến (ABC') .

Lời giải.

- ① Tính khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$.

Gọi I, I' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, A' trên BC và $B'C'$.
Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng, $(ABC) \perp (BCC'B')$ theo giao tuyến BC và $AI \perp BC$, nên $AI \perp (BCC'B')$.

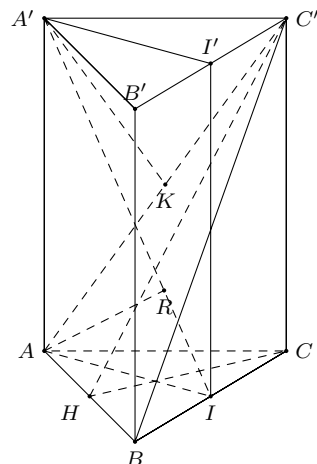
ABC là tam giác vuông tại A và $BC = 2a, AB = a\sqrt{3}$

$$\text{nên } AC = a, AI = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó khoảng cách từ A đến $(BCC'B')$ là $h = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $AA' \parallel (BCC'B')$ nên khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$ là $h_1 = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



- ② Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.

Ta có $BC \perp (AA'I'I)$ nên $(A'BC) \perp (AA'I'I)$ theo giao tuyến $A'I$.

Gọi R là hình chiếu vuông góc của A trên $A'I$, nên R cũng là hình chiếu vuông góc của A trên $(A'BC)$.

Trong tam giác vuông $A'AI$ ta có $\frac{1}{AR^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}$.

Vậy khoảng cách từ A đến $(A'BC)$ là $AR = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

- ③ Chứng minh $AB \perp (ACC'A')$. Tính khoảng cách từ A' đến (ABC') .

Ta có $AB \perp AC$ và $AB \perp AA'$ nên $AB \perp (AA'C'C)$.

Do đó $(ABC') \perp (ACC'A')$ theo giao tuyến AC' .

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A' trên giao tuyến AC'

nên K là hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC') .

Suy ra khoảng cách từ A' đến (ABC') là $A'K$.

Tam giác $AA'C'$ vuông tại A' có độ dài đường cao $h_2 = A'K = \frac{AA' \cdot A'C'}{AC'} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $h_2 = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

□

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a . Cạnh SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

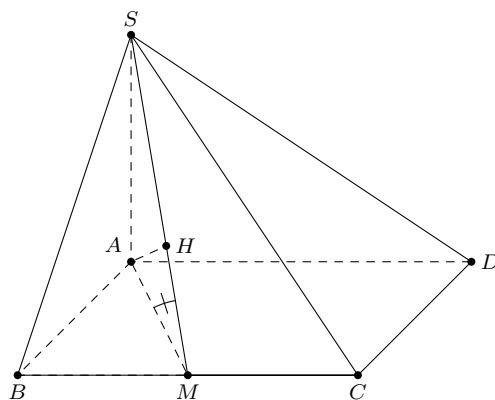
Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và tam giác ABC đều.

Do đó $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác SAM vuông tại A có $\widehat{SMA} = 45^\circ$

nên tam giác SAM vuông cân tại A và $SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SM . Khi đó $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$ suy ra $BC \perp AH$.

Do đó $AH \perp (SBC)$ nên khoảng cách từ A đến (SBC) là $h = AH$.



Ta có $AH = \frac{AM\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ và $AD \parallel BC$ nên khoảng cách từ D đến (SBC) là $h' = h = AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $h' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

□

BÀI 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) .

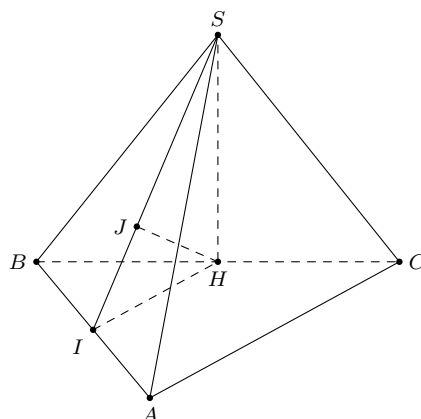
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC , tam giác SBC đều, nên $SH \perp BC$.
Mà $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến BC , nên $SH \perp (ABC)$ và $SH \perp AB$.

Gọi I là trung điểm AB , $IH \parallel AC$ và $AC \perp AB$ nên $IH \perp AB$.
Có $AB \perp IH$ và $AB \perp SH$ nên $AB \perp (SHI)$ và $(SHI) \perp (SAB)$ theo giao tuyến SI .

Gọi J là hình chiếu vuông góc của H trên SI , nên J là hình chiếu vuông góc của H trên (SAB) .

Ta có $BC = a$; $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AC = BC \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$; $IH = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{4}$.



Tam giác SHI vuông tại H nên $\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{52}{3a^2}$.

Khoảng cách từ H đến (SAB) là $HJ = \frac{\sqrt{39}}{26}a$.

Vì H là trung điểm BC nên khoảng cách từ C đến (SAB) là $d = 2HJ$.

Vậy khoảng cách từ C đến (SAB) là $d = \frac{\sqrt{39}}{13}a$. □

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB , vì $\triangle ABC$ đều nên $SH \perp AB$.

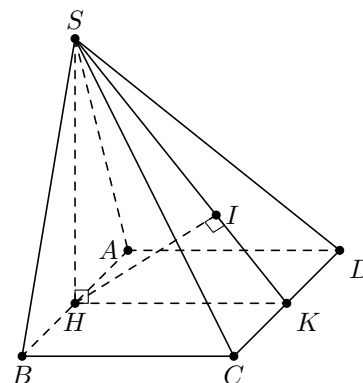
Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases}$

Gọi K là trung điểm CD . Dựng đường cao HI trong tam giác SHK .

Ta có $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp HI$.

Mặt khác $\begin{cases} HI \perp CD \\ HI \perp SK \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SCD)$.

Mà $AH \parallel (SCD)$ nên $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HI$.



Xét tam giác SHK vuông tại H có đường cao HI ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy $d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. □

BÀI 10. Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AC = AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) .

Lời giải.

Dựng đường cao AH trong tam giác ABC và đường cao AI trong tam giác DAH .

Ta có $\begin{cases} CB \perp AH \\ CB \perp DA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (DAH)$. Mặt khác $\begin{cases} AI \perp DH \\ AI \perp CB \end{cases} \Rightarrow AI \perp (BCD)$.

Nên $d(A, (BCD)) = AI$.

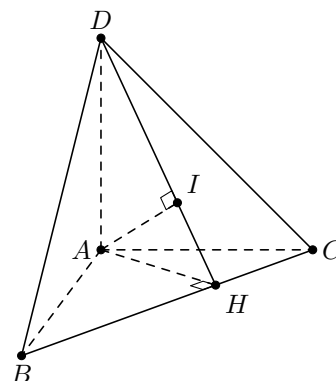
Ta có $BC^2 = 25 = AB^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A .

Suy ra $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144}$.

Xét tam giác DAH vuông tại A có đường cao AI ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{16} + \frac{25}{144} = \frac{17}{72} \Rightarrow AI = \frac{6a\sqrt{34}}{17}$$

Vậy $d(A, (BCD)) = \frac{6a\sqrt{34}}{17}$.



□

BÀI 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC .

- ① Tính $d(AM, B'C)$.
- ② Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

Lời giải.

- ① Tính $d(AM, B'C)$.

Gọi N là điểm đối xứng của B qua A .

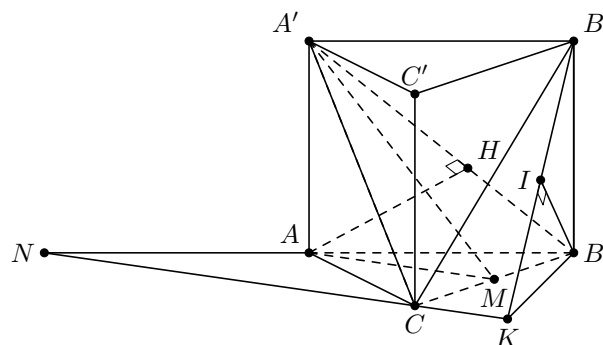
Ta suy ra $NC \parallel AM \Rightarrow AM \parallel (B'NC)$.

Nên $d(AM, B'C) = d(AM, (B'NC))$.

$$\text{Ta có } \frac{d(A, (B'NC))}{d(B, (B'NC))} = \frac{AN}{BN} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } d(A, (B'NC)) = \frac{d(B, (B'NC))}{2}.$$

Dựng đường cao BK trong tam giác BNC và đường cao BI trong tam giác $B'BK$.



$$\text{Ta có } \begin{cases} NC \perp BK \\ NC \perp B'B \end{cases} \Rightarrow NC \perp (B'BK) \Rightarrow NC \perp BI.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} BI \perp NC \\ BI \perp B'K \end{cases} \Rightarrow BI \perp (B'NC).$$

Nên $d(B, (B'NC)) = BI$.

$$\text{Xét tam giác } BNC \text{ vuông tại } B \text{ có đường cao } BK \text{ ta có } \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

Xét tam giác $B'BK$ vuông tại B có đường cao BI ta có

$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{7}{4a^2} \Rightarrow BI = \frac{2a\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (B'NC)) = \frac{d(B, (B'NC))}{2} = \frac{BI}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

- ② Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$. Dựng đường cao AH trong tam giác $A'AB$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp A'A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AB) \Rightarrow BC \perp AH.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AH \perp A'B \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BC) \text{ nên } d(A, (A'BC)) = AH.$$

Xét tam giác $A'AB$ vuông tại A có đường cao AH ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

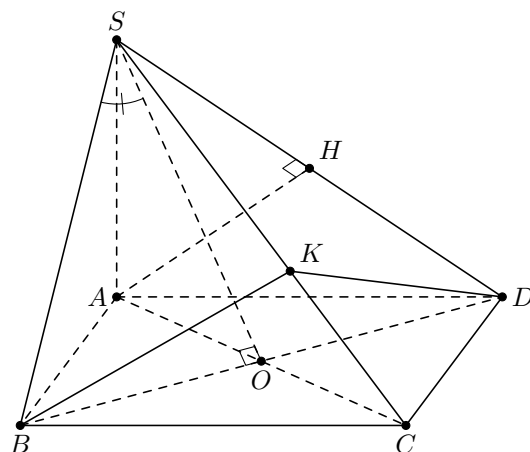
$$\text{Vậy } d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

□

BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$.

- ① Chứng minh $BD \perp SO$.
- ② Chứng minh $(SAD) \perp (SCD)$.
- ③ Xác định và tính góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) .
- ④ Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .
- ⑤ Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

Lời giải.



① Chứng minh $BD \perp SO$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

$$\text{Mà } SO \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp SO.$$

② Chứng minh: $(SAD) \perp (SCD)$. Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$. Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SAD)$.

③ Xác định và tính góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) .

Ta có $BO \perp (SAC)$ tại O nên O là hình chiếu của B lên (SAC) .

Suy ra SO là hình chiếu của SB lên (SAC) nên $\widehat{(SB, (SAC))} = \widehat{(SB, SO)}$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác SAB vuông tại A ta có

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = 2a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Mặt khác } BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SBO \text{ vuông tại } O \text{ ta có } \sin \widehat{BSO} = \frac{OB}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSO} = 30^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{(SB, (SAC))} = 30^\circ.$$

④ Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .

Dựng đường cao AH trong tam giác SAD .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp (SAD) \\ AH \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp AH.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD).$$

$$\text{Mà } AB \parallel (SCD) \text{ nên } d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH.$$

$$\text{Xét tam giác } SAD \text{ vuông tại } A \text{ có đường cao } AH \text{ ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

⑤ Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

Dựng đường cao BK trong tam giác SBC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} SC \perp BK \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BKD) \Rightarrow SC \perp KD.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SBC) \cap (SCD) = SC \\ BK \perp SC \\ DK \perp SC \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (SCD)) = (\widehat{BK, DK}).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

Xét tam giác SBC vuông tại B có đường cao BK ta có

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow BK^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

$$\text{Tính toán tương tự ta được } DK^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

Trong tam giác BKD ta có

$$\cos \widehat{BKD} = \frac{BK^2 + DK^2 - BD^2}{2 \cdot BK \cdot DK} = \frac{\frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - 2a^2}{2 \cdot \frac{2a^2}{3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BKD} = 120^\circ.$$

Vì $\widehat{BKD} = 120^\circ > 90^\circ$ nên $((SBC), (SCD)) = (\widehat{BK, DK}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

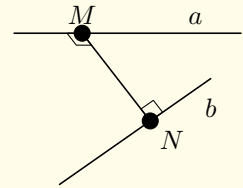
□

DẠNG 3.2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau.

① Định nghĩa

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng a, b .

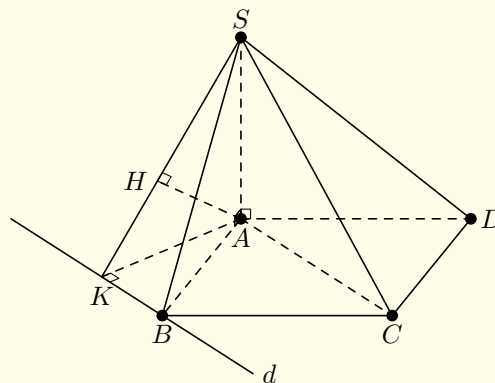
Khi đó $d(a, b) = MN$ với $\begin{cases} MN \perp a \\ MN \perp b \end{cases}$



② Phương pháp xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Sử dụng song song và đưa về bài toán tìm khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Xác định và tính khoảng cách giữa cạnh bên SB và cạnh thuộc mặt phẳng đáy AC .

Lời giải.



Bước 1. Xác định giao điểm của cạnh bên và mặt đáy.

Ta có: $SB \cap (ABCD) = B$.

Bước 2. Từ giao điểm dựng d song song với cạnh đáy.

Qua B , dựng $d \parallel AC$ và dựng $AK \perp d$ ($K \in d$). Khi đó

$$d(SB, AC) = d(AC, (SKB)) = d(A, (SKB)).$$

Bước 3. Tìm khoảng cách từ chân đến mặt bên.

Dựng $AH \perp SK$ ($K \in SK$).

Ta có $\begin{cases} KB \perp AK \\ KB \perp SA \end{cases} \Rightarrow KB \perp (SAK) \Rightarrow KB \perp AH$.

Khi đó ta có $\begin{cases} AH \perp KB \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SKB) \Rightarrow d(A, (SKB)) = AH$.

Bước 4. Sử dụng kiến thức hình học phẳng để tính độ dài đoạn AH .

□

⚠ Cần nhớ bài toán về tam diện vuông, nó thường được áp dụng.

Cho tứ diện $OABC$ với OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Khi đó đường cao OH của tứ diện $OABC$ được tính theo công thức $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

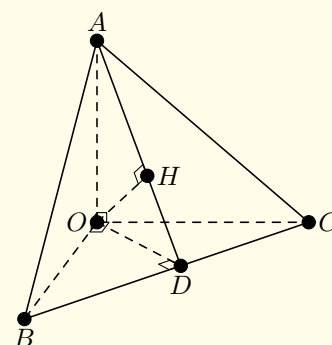
Chứng minh.

Dựng $OD \perp BC$ ($D \in BC$) và $OH \perp AD$ ($H \in AD$).

Có $\begin{cases} BC \perp OD \\ BC \perp AO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOD) \Rightarrow (ABC) \perp (AOD)$.

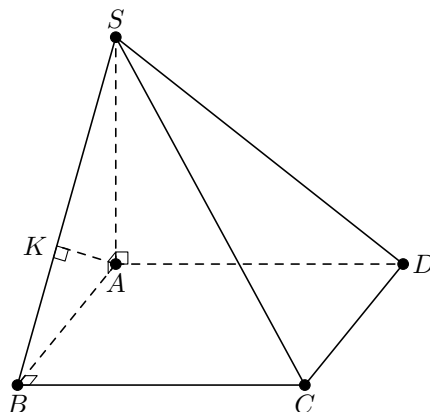
Khi đó $\begin{cases} (ABC) \perp (AOD) \\ (ABC) \cap (AOD) = AD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Suy ra $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (đpcm).



1 Ví dụ

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = h$ và $SA \perp (ABCD)$.



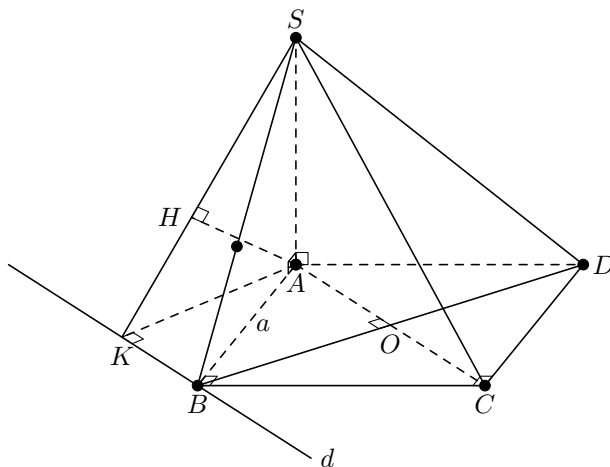
- ① Đặt và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SB và CD .

Nhận xét. Nếu hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc nhau sẽ sử dụng định nghĩa để tìm khoảng cách, tức là tìm đoạn vuông góc chung. Còn nếu không vuông góc nhau ta sẽ sử dụng đúng phương pháp kẻ song song như lý thuyết.

- ② Đặt và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AD và SB .
 ③ Đặt và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và BD .
 ④ Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và AB .
 ⑤ Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và AD .

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB , AC .

Lời giải.



— Xác định góc giữa SC và $(ABCD)$.
 Ta có $SC \cap (ABCD) = C$, $SA \perp (ABCD)$ tại A .
 Suy ra AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$

$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

Ta có $\triangle SAC$ vuông tại A và $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên $\triangle SAC$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow AC = SA = AB \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

— Xác định khoảng cách giữa CB , AC .

Ta có $SB \cap (ABCD) = B$. Từ giao điểm B , dựng $d \parallel AC$.

Từ A dựng $AK \perp d (K \in d, KB \subset (ABCD))$.

Khi đó $\begin{cases} AC \parallel KB \\ KB \subset (SKB) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (SKB) \Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBK)) = d(A, (SBK)).$

— Xác định khoảng cách từ A đến (SBK) .

Từ A dựng $AH \perp SK$.

Ta có $\begin{cases} AH \perp SK \\ AH \perp KB \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SKB) \Rightarrow d(A, (SBK)) = AH.$

Ta lại có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2}$ với $SA = a\sqrt{2}$.

Vì $AKBO$ là hình chữ nhật nên $AK = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AC, SB) = AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = a$ và cạnh bên SB tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc bằng 30° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC theo a .

Lời giải.

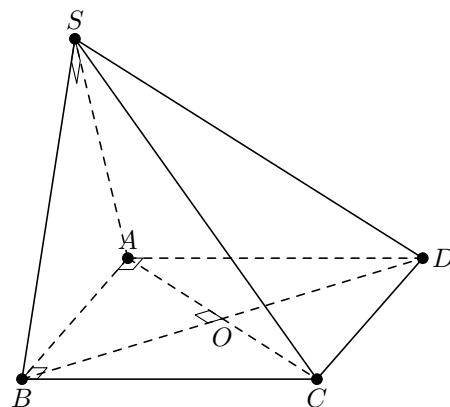
— Xét tam giác SAB .

Gọi H là chân đường cao kẻ từ S . Ta có

$$AB = \frac{SA}{\sin B} = 2a.$$

$$SB = \frac{SA}{\tan B} = a\sqrt{3}.$$

$$SH = \sqrt{\frac{SA^2 \cdot SB^2}{SA^2 + SB^2}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 3a^2}{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



— Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

Dựng $HI \parallel AD (I \in CD) \Rightarrow HI \perp CD$ (1).

Dựng $HJ \perp SI (J \in SI)$ (2).

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(H, (SCD))$ (3).

Theo đề bài $\begin{cases} SH \perp AB \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD \text{ (4).} \\ (SAB) \perp (ABCD) \end{cases}$

Từ (1), (4): $CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp HJ$ (5).

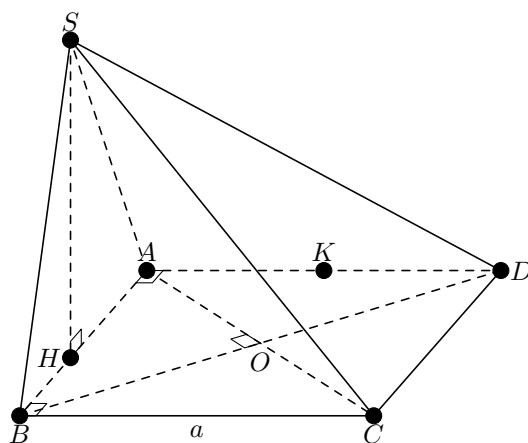
Từ (2), (3), (5) ta suy ra $HJ \perp (SCD)$. Vậy

$$d(H, (SCD)) = HJ = \sqrt{\frac{SH^2 \cdot HI^2}{SH^2 + HI^2}} = \sqrt{\frac{\frac{3a^2}{4} \cdot 4a^2}{\frac{3a^2}{4} + 4a^2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

□

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của đoạn AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a .

Lời giải.



— Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD .

Theo đề $SH \perp (ABCD)$ và ΔSAB cân tại S .

Do $HK \parallel BD \Rightarrow HK \parallel (SBD) \Rightarrow d(HK, SD) = d(HK, (SBD)) = d(H, (SBD))$.

Gọi O, I lần lượt là trung điểm $AC, BO \Rightarrow HI \perp BD$.

Dựng $HJ \perp SI (J \in SI)$

(1).

Mà $BD \perp SH$ nên $BD \perp (SHI) \Rightarrow BD \perp HJ$

(2).

Từ (1), (2) ta có $HJ \perp (SBD) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HJ$.

— Tìm các số đo liên quan.

$$AC = a\sqrt{2}.$$

$$HD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\frac{17a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}} = a\sqrt{3}.$$

— Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD .

$$d(HK, SD) = d(H, (SBD)) = HJ = \sqrt{\frac{SH^2 \cdot HI^2}{SH^2 + HI^2}} = \sqrt{\frac{3a^2 \cdot \frac{a^2}{8}}{3a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

□

2 BÀI TẬP ỨNG DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$ và $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, góc giữa mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD .

Lời giải.

Lấy điểm E thuộc AB sao cho $DE \parallel AC$ thì $AE = AB = a$.

Khi đó $AC \parallel (SDE)$ nên $d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE))$.

Kẻ $SH \perp BD$ tại H thì ta có $(SAH) \perp BD \Rightarrow AH \perp BD$.

Khi đó $((SBD), (ABCD)) = (AH, SH) = \widehat{SHA} = 60^\circ$.

$$\text{Lại có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

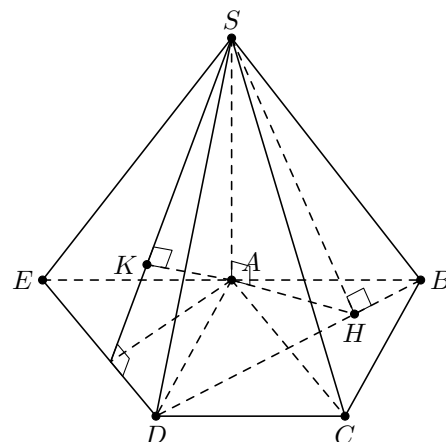
$$\text{nên } SA = AH \cdot \tan \widehat{SHA} = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$

Trong tứ diện vuông $A.SDE$ kẻ đường cao $AK \perp (SDE)$, khi đó

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{16}{9a^2}$$

$$\text{nên } d(AC, SD) = d(A, (SDE)) = AK = \frac{3a}{4}.$$

□



BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , mặt bên SAB là tam giác vuông cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .

Lời giải.

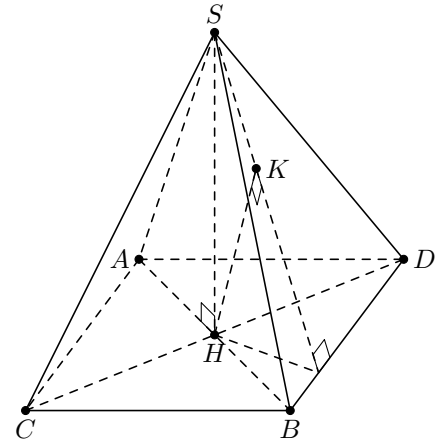
Kẻ $SH \perp AB$ tại H . Khi đó ta có $SH \perp (ABC)$ và $SH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$ thì $AC \parallel BD \Rightarrow AC \parallel (SBD)$ nên $d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD))$.

Trong tứ diện vuông $H.SBD$ có $HS = \frac{a}{2}$, $HD = HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HB = \frac{a}{2}$ kẻ đường cao $HK \perp (SBD)$ ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{28}{3a^2}$$

nên $d(H, (SBD)) = HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}$, suy ra $d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.



□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy (ABC) một góc bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC theo a .

Lời giải.

Kẻ $SH \perp BC$ tại H thì ta có $(SAH) \perp BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Khi đó $((SBC), (ABC)) = (AH, SH) = \widehat{SHA} = 60^\circ$.

Ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}.$$

$$\text{Khi đó } AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ}{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Từ đó ta có } SA = AH \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{7}}{7}.$$

Dựng hình bình hành $ACDB$, kẻ $AI \perp BD$ và $AK \perp SI$.

Ta có $(SAI) \perp BD \Rightarrow AK \perp BD \Rightarrow AK \perp (SBD)$ và $d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD)) = AK$.

$$\text{Ta có } AI = AB \cos \widehat{BAI} = a \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{7}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{19}{9a^2},$$

$$\text{nên } d(AC, SB) = AK = \frac{3a\sqrt{19}}{19}.$$

□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle SAB$ đều cạnh a , $\triangle ABC$ cân tại C . Hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB ; góc hợp bởi cạnh SC và mặt phẳng đáy bằng 30° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB , khi đó ta có $SH \perp (ABC)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

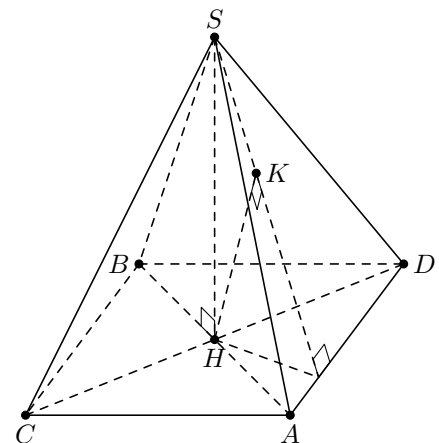
Ta có $(SC, (ABC)) = \widehat{SCH} = 30^\circ$ nên $HC = SH \cot 30^\circ = \frac{3a}{2}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$ thì $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$ nên $d(BC, SA) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = 2d(H, (SAD))$.

Trong tứ diện vuông $H.SAD$ có $HS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HD = HC = \frac{3a}{2}$, $HA = \frac{a}{2}$ kẻ đường cao $HK \perp (SAD)$ ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{52}{9a^2}$$

$$\text{nên } d(H, (SAD)) = HK = \frac{3a\sqrt{13}}{26}, \text{ suy ra } d(BC, SA) = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$



□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB

và CM theo a .

Lời giải.

Gọi N là trung điểm SA , khi đó $MN \parallel SB \Rightarrow SB \parallel (CMN) \Rightarrow d(SB, CM) = d(SB, (CMN)) = d(B, (CMN)) = d(A, (CMN))$.

Trong (ABC) , kẻ $AK \perp CM$, $K \in CM$, kẻ $AH \perp NK$, $H \in NK$.

$$\begin{cases} CM \perp AK \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAK) \Rightarrow CM \perp NK, CM \perp AH.$$

$$\begin{cases} AH \perp NK \\ AH \perp CM \end{cases} \Rightarrow AH \perp (CMN) \Rightarrow d(A, (CMN)) = AH.$$

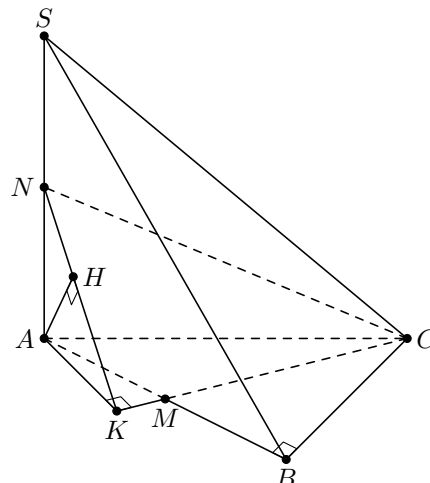
Trong $\triangle ABC$, $BC = AB \tan A = 2a\sqrt{3}$.

$$\text{Trong } \triangle MBC, CM = \sqrt{MB^2 + BC^2} = a\sqrt{13} \Rightarrow \sin M = \frac{BC}{CM} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

$$\text{Trong } \triangle AKM, AK = AM \sin M = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

$$\text{Trong } \triangle AKN, \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{29}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{87}}{29}.$$

$$\text{Vậy } d(SB, CM) = \frac{2a\sqrt{87}}{29}.$$



BÀI 6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $BC = 2a$, $AB = a$ và mặt bên $BB'C'C$ là hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' theo a .

Lời giải.

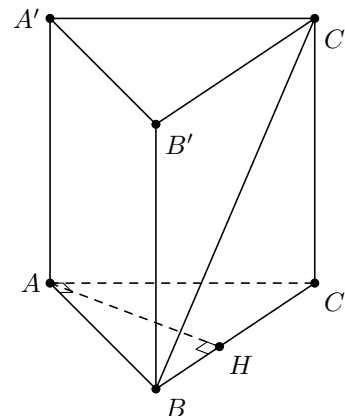
Ta có $AA' \parallel BB' \Rightarrow d(AA', BC') = d(AA', (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C))$.

Trong (ABC) kẻ $AH \perp BC$, $H \in BC$.

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BB'C'C) \Rightarrow d(A, (BB'C'C)) = AH.$$

$$\text{Trong } \triangle ABC \text{ có } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}, AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng } AA', BC' \text{ là } \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết rằng $BC = 2AB = 2AD = 2a$. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D , M là trung điểm BC . Biết rằng cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SCE) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , SD theo a .

Lời giải.

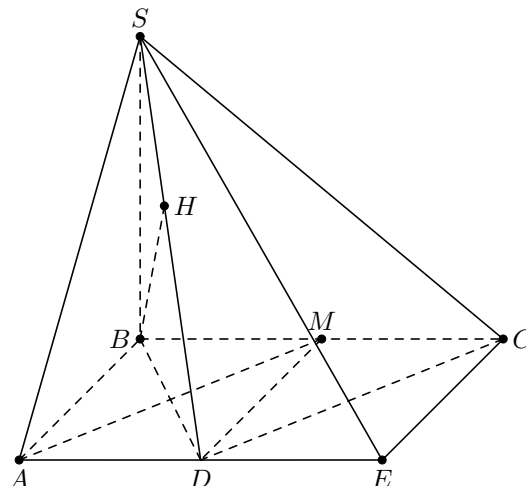
Tứ giác $AMCD$ có $MC = AD = a$, $MC \parallel AD \Rightarrow AMCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AM \parallel DC \Rightarrow d(AM, SD) = d(AM, (SDC)) = d(M, (SDC)) = \frac{1}{2}d(B, (SDC))$.

Từ giả thiết ta suy ra $AB = BM = MC = CE = ED = DA = MD$, suy ra $ABMD$, $CMDE$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{ADM} + \widehat{MDC} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ hay $BD \perp DC$.

Trong (SBD) kẻ $BH \perp SD$, $H \in SD$.

$$\begin{cases} DC \perp BD \\ DC \perp SB \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBD) \Rightarrow DC \perp BH.$$

$$\begin{cases} BH \perp SD \\ BH \perp DC \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SDC) \Rightarrow d(B, (SDC)) = BH.$$



Trong $\triangle SBD$ có $SB = 2a, BD = a\sqrt{2}$ nên

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow d(AM, SD) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, SD là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. □

BÀI 8. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , cạnh $AB = 6a$ và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Góc giữa mặt phẳng $(C'AB)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AB .

Lời giải.

Trong (ABC) kẻ $DC \parallel AB$, D, B khác phía so với đường thẳng AC . Khi đó $d(AB, B'C) = d(AB, (A'B'CD)) = d(A, (A'B'CD))$.

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow CM \perp AB \Rightarrow MC \perp DC$, ta cũng có $d(A, (A'B'CD)) = d(M, (A'B'CD))$.

Trong $(ABB'A')$ kẻ $MK \perp A'B'$, $K \in A'B'$.

Trong (CMK) kẻ $MH \perp CK$, $H \in CK$.

$$\begin{cases} KM \perp DC \\ MC \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (KMC) \Rightarrow DC \perp MH. \\ \begin{cases} MH \perp CK \\ MH \perp DC \end{cases} \Rightarrow MH \perp (A'B'CD) \Rightarrow d(M, (A'B'CD)) = MH.$$

$$\text{Trong } \triangle ABC \text{ ta có } CM = MB \tan B = a\sqrt{3}, BC = \frac{MB}{\cos B} = 2a\sqrt{3}.$$

Góc giữa hai mặt phẳng $(C'AB)$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'MC}$.

Trong $\triangle C'MC$ có $CC' = CM \cdot \tan M = 3a$.

$$\text{Trong } \triangle MCK \text{ có } MC = a\sqrt{3}, KM = CC' = 3a, \frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MK^2} + \frac{1}{MC^2} = \frac{4}{9a^2} \Rightarrow MH = \frac{3a}{2} \Rightarrow d(AB, B'C) = \frac{3a}{2}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AA', BC' là $d(AB, B'C) = \frac{3a}{2}$. □

BÀI 9. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

BÀI 10. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O , đường chéo $AC = 2a$, $SO = a\sqrt{2}$ và SO vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC . Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM .

BÀI 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

BÀI 12. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , cạnh $AB = 2a$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Mặt phẳng $(C'AB)$ tạo với đáy (ABC) một góc bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và CB' .

BÀI 13. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Góc giữa CA' và mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng 30° . Gọi I là trung điểm của AB . Tính khoảng cách giữa $A'I$ và AC theo a .

Lời giải.

* Gọi M là trung điểm của BC , ta có $IM \parallel AC$. Ta có $d(A'I; AC) = d(AC; (A'IM)) = d(A, (A'IM))$.

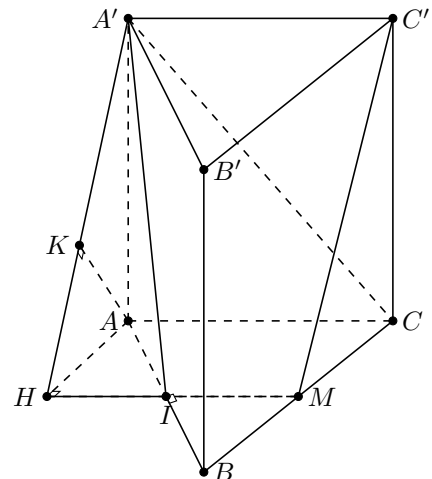
$$\text{Từ } A \text{ kẻ } AH \perp IM, \text{ ta có } \begin{cases} AH \perp IM \\ AA' \perp IM \\ AH \cap AA' = A \end{cases} \Rightarrow IM \perp (AA'H).$$

Trong mặt phẳng $(AA'I)$ kẻ $AK \perp A'H$

$$\begin{cases} AH \perp A'H \\ AK \perp IM \\ IM \cap A'H = H \end{cases} \Rightarrow AK \perp (A'IM).$$

Vậy $d(A'I; AC) = d(AC; (A'IM)) = d(A, (A'IM)) = AK$

$$* \begin{cases} CI \perp AB \\ AA' \perp CI \\ AB \cap AA' = A \end{cases} \Rightarrow CI \perp (ABA') \Rightarrow CI \perp A'I$$



$\Rightarrow$ góc giữa CA' và mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng $\widehat{CA'I} = 30^\circ$ Trong tam giác vuông $CA'I$ vuông tại I , có $CI = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\widehat{CA'I} = 30^\circ \Rightarrow A'I = \frac{3a}{2}$.

$$AH = \frac{1}{2}CI = a \frac{\sqrt{3}}{4}; AI = \frac{a}{2}.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông $A'AI$ vuông tại A ta có $AA' = a\sqrt{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông $AA'H$ vuông tại A ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}.$$

Vậy khoảng cách giữa $A'I$ và AC có độ dài bằng $AK = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$ □

BÀI 14. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , I là trung điểm của BC , $BC = a\sqrt{6}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AB, A'I$.

Lời giải.

$$\text{Từ } I \text{ kẻ } IN \perp AC. \text{ Ta có } \begin{cases} IN \perp AC \\ IN \perp AA' \\ AC \cap AA' = A \end{cases} \Rightarrow IN \perp (AA'C'C).$$

$$\text{Từ } A \text{ kẻ } AH \perp A'N \text{ trong mặt phẳng } (AA'C'), \text{ ta có } \begin{cases} AH \perp A'N \\ AH \perp NI \\ A'N \cap NI = N \end{cases} \Rightarrow AH \perp A'NI.$$

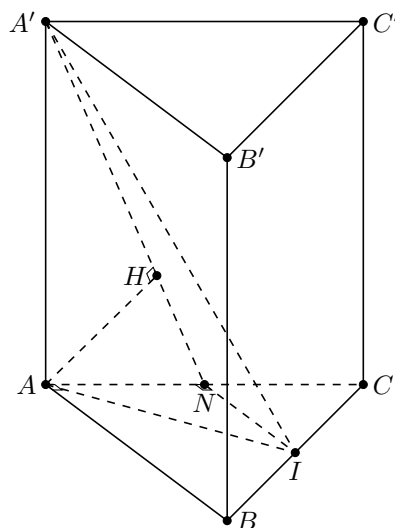
Do tam giác ABC vuông tại A nên $IN \parallel AB \Rightarrow d(AB, A'I) = d(AB, (A'NI)) = d(A, (A'NI)) = AH$.

$$\text{Do } \begin{cases} AA' \perp BC \\ AI \perp BC \\ AA' \cap AI = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AIA') \Rightarrow \text{góc giữa hai mặt phẳng } (ABC) \text{ và } (A'BC) \text{ bằng } \widehat{AIA'} = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có } AA' = AI \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{\sqrt{2}}; AN = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông $AA'N$ vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{\sqrt{14}}.$$



□

BÀI 15. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{2}$, đường thẳng $B'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A)$ một góc 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC .

Lời giải.

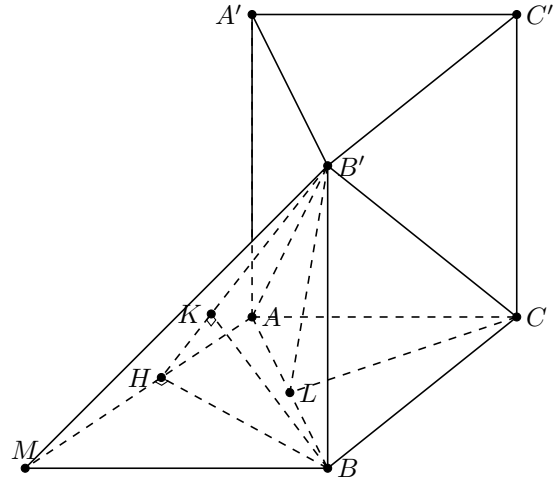
Từ A kẻ $Ax \parallel BC$, từ B kẻ $By \parallel AC$. $Ax \cap By = M$.

Từ B kẻ $BH \perp AM$, $BK \perp B'H$.

$$\text{Do } \begin{cases} AM \perp BH \\ AM \perp BB' \\ BB' \cap BH = B \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BB'H).$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} BK \perp HB' \\ BK \perp AM \\ AM \cap B'H = H \end{cases} \Rightarrow BK \perp (AHB').$$

Do $AM \parallel BC$ nên $d(BC, B'A) = d(BC, (AB'M)) = d(B, (AB'M)) = BK$.



$$\text{Từ } C \text{ kẻ } CK \perp AB, \text{ ta có ngay } \begin{cases} CL \perp AB \\ CL \perp AA' \\ AA' \cap AB = A \end{cases} \Rightarrow CL \perp (ABA') \text{ suy ra góc giữa } CB' \text{ và mặt phẳng } (ABB')$$

là $\widehat{CB'L} = 45^\circ$.

Gọi độ dài của cạnh $AB = x$, ta có $CL = x \frac{\sqrt{3}}{2} = B'K$, $HB = \frac{x}{2}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông $BB'H$ vuông tại B ta tìm được $x = 2a$.

Ta có $BH = \frac{2a\sqrt{3}}{2}$; $BB' = a\sqrt{2}$, áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông $B'BH$ ta tính được $BK = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

□

BÀI 16. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A với $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

Lời giải.

$$\text{Từ } H \text{ kẻ } HK \perp BC, \begin{cases} HK \perp BC \\ BC \perp A'H \\ HK \cap HA' = H \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'HK)$$

$(A'HK)$

Từ A kẻ $AL \perp HK$, do AL song song với BC ta cũng có $AL \perp (A'HK) \Rightarrow A'L$ là hình chiếu của AA' lên $(A'HK)$.

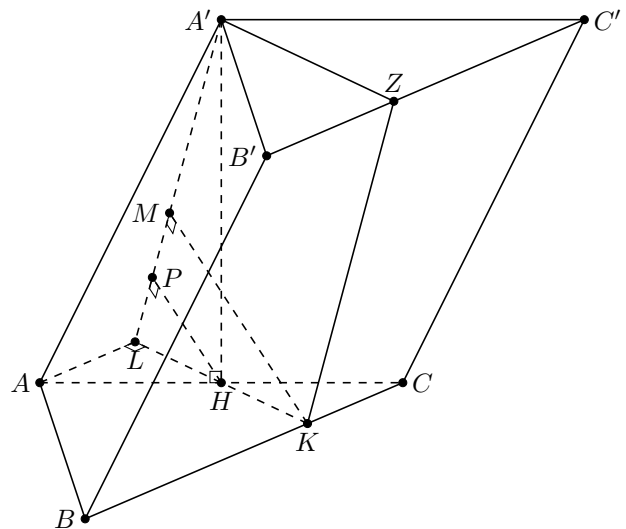
$$\text{Kẻ } KM \perp A'L \Rightarrow \begin{cases} BC \cap (A'HK) = K \\ KM \perp A'L \end{cases}$$

$d(BC, AA') = KM$

Từ A' kẻ $A'Z \parallel HK$, ta có $BC \perp (A'HK) \Rightarrow BC \perp A'Z$ mà $BC \parallel B'C'$ nên $A'Z \perp B'C'$. Do

$$(A'HK) \perp BC \text{ và } \begin{cases} (A'HK) \cap (ABC) = HK \\ (A'HK) \cap (BB'C'C) = ZK \end{cases} \Rightarrow$$

góc giữa hai mặt phẳng $(BB'C'C)$ và (ABC) bằng góc giữa hai đường $(KZ, HK) = 60^\circ$.



Lại có $AL \parallel BC$ và H là trung điểm của AC nên $HK = HL$.

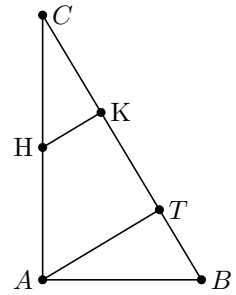
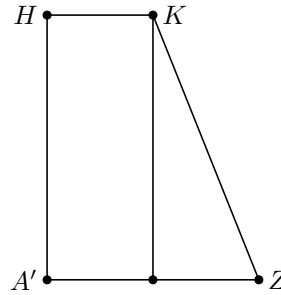
Trong tam giác vuông ABC , kẻ $AT \perp BC$, dễ dàng tính được $HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $AT = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow KL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét hình thang $A'HKZ$ có

$$A'Z = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}; \widehat{H} = \widehat{A'} = 90^\circ$$

Suy ra $A'H = \frac{3a}{4}$ nhờ góc $\widehat{ZKH} = 120^\circ$ (do góc giữa hai đường thẳng KZ và HK là 60°).

Từ H kẻ $HP \perp A'L \Rightarrow KM = 2HP$.



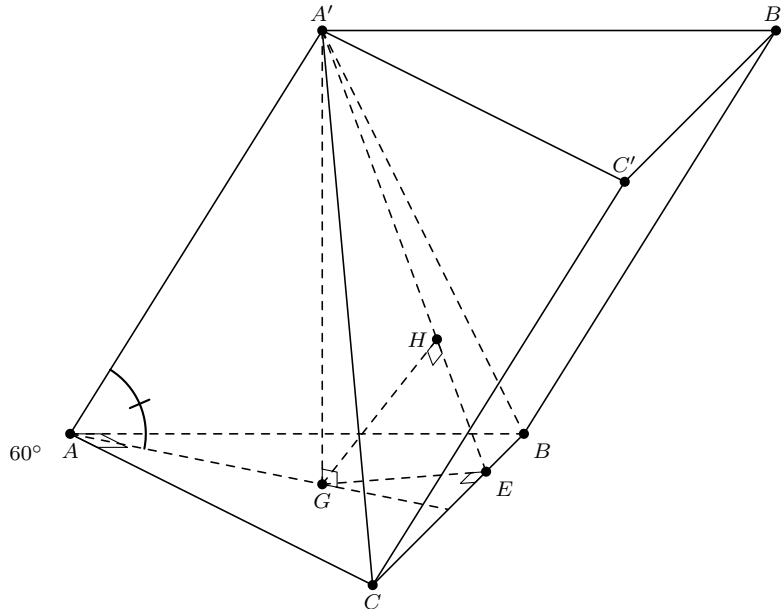
Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác $A'HL$ có

$$\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HL^2} + \frac{1}{HA'^2} \Rightarrow HP = \frac{3a}{8} \Rightarrow KM = \frac{3a}{4}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là $\frac{3a}{4}$. □

BÀI 17. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC và góc giữa AA' tạo với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và $A'C$.

Lời giải.



— Xác định (dựng hình) khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và $A'C$.

Vì $B'C' \parallel BC$ nên $d[B'C'; A'C] = d[B'C'; (A'BC)] = d[B'; (A'BC)]$.

Mặt khác $ABB'A'$ là hình bình hành nên $A'B$ cắt AB' tại trung điểm của AB' , do đó $d[B'; (A'BC)] = d[A; (A'BC)]$.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $d[A; (A'BC)] = 3d[G; (A'BC)]$.

Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ G xuống BC .

Khi đó $GE \perp BC$ và $A'G \perp BC$ nên $BC \perp (A'GE)$, suy ra $(A'BC)$ vuông góc với $(A'GE)$ theo giao tuyến là $A'E$.

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ G xuống $A'E$.

Khi đó $GH = d[G; (A'BC)]$, suy ra $d[B'C'; A'C] = 3GH$.

— Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và $A'C$.

Trong tam giác ABC , ta có $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, suy ra $\sin A = \frac{BC \cdot \sin C}{AB} = \frac{2a \cdot \sin 30^\circ}{a} = 1$.

Do đó tam giác ABC vuông tại A . Dễ dàng tính được $AC = a\sqrt{3}$.

Khi đó $GE = \frac{1}{3}d[A; BC] = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{3 \cdot 2a} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì AG là hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt phẳng (ABC) nên góc $A'AG$ là góc giữa AA' với mặt phẳng (ABC) , hay $\widehat{A'AG} = 60^\circ$.

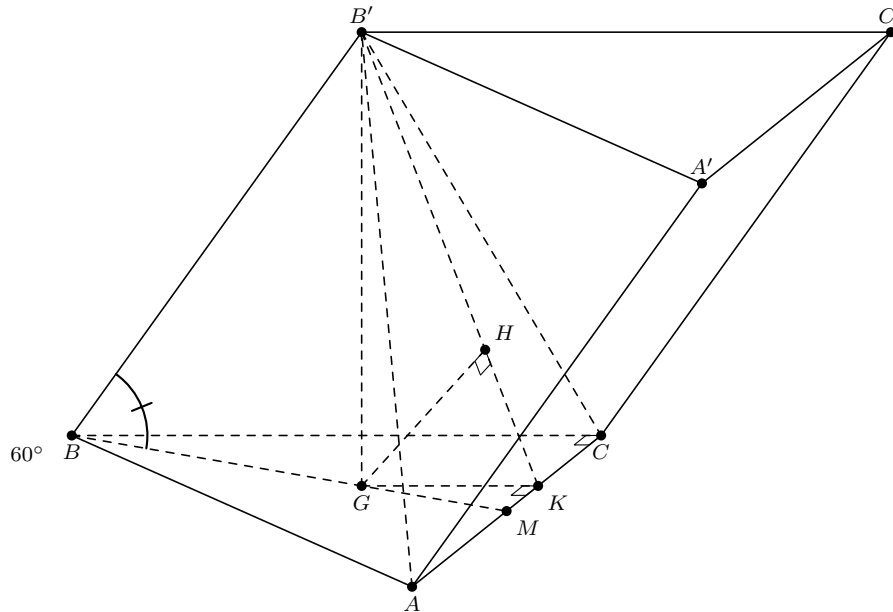
$$\text{Ta có } A'G = AG \cdot \tan 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d[B'C'; A'C] = 3GH = 3 \cdot \frac{GE \cdot GA'}{\sqrt{GE^2 + GA'^2}} = 3 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{2a\sqrt{51}}{17}.$$

□

BÀI 18. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng 60° , tam giác ABC vuông tại C , góc BAC bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC . Tính khoảng cách giữa AC và BB' theo a .

Lời giải.



- *Xác định (dựng hình) khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' .*
 Vì $BB' \parallel AA'$ nên $d[BB'; AC] = d[BB'; (AA'C'C)] = d[B; (AA'C'C)]$.
 Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $d[B; (B'AC)] = 3d[G; (B'AC)]$.
 Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ G xuống AC .
 Khi đó $GK \perp AC$ và $B'G \perp AC$ nên $AC \perp (B'GK)$, suy ra $(B'AC)$ vuông góc với $(B'GK)$ theo giao tuyến là $G'K$.
 Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ G xuống $G'K$.
 Khi đó $GH = d[G; (B'AC)]$, suy ra $d[BB'; AC] = 3GH$.

- *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' .*
 Vì BG là hình chiếu vuông góc của BB' trên mặt phẳng (ABC) nên góc $B'BG$ là góc giữa BB' với mặt phẳng (ABC) , hay $\widehat{B'BG} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } B'G = BB' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm } AC, \text{ ta có } BM = \frac{3}{2}BG = \frac{3}{2}BB' \cdot \cos 60^\circ = \frac{3}{4}a.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} BC^2 + CM^2 = BM^2 \\ 2CM = AC = \frac{BC}{\tan \widehat{BAC}} \end{cases} \Rightarrow BC^2 + \frac{BC^2}{(2\sqrt{3})^2} = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \Rightarrow BC = \sqrt{\frac{27}{52}}.$$

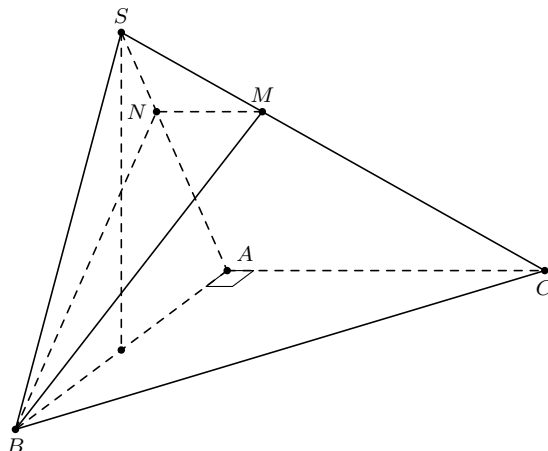
$$\text{Ta có } GK = \frac{1}{3}BC = \frac{a\sqrt{39}}{26} \text{ (do } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ và } GK \parallel BC).$$

$$\text{Vậy } d[BB'; AC] = 3GH = 3 \cdot \frac{GB' \cdot GK}{\sqrt{GB'^2 + GK^2}} = 3 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{39}}{26}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{39}}{26}\right)^2}} = \frac{3a\sqrt{42}}{28}.$$

□

BÀI 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MC = 2MS$, biết $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM theo a .

Lời giải.



Qua M , kẻ đường thẳng song song với AC , cắt SA tại N .

Suy ra $d[AC; BM] = d[AC; (BMN)] = d[A; (BMN)]$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ AB = (SAB) \cap (ABC) \text{ suy ra } AC \perp (SAB), \text{ vì } MN \parallel AC \text{ nên } MN \perp (SAB). \\ AC \perp AB \end{cases}$

Do vậy $(BMN) \perp (SAB)$, suy ra $d[A; (BMN)] = d[A; BN]$.

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác SNB , ta có

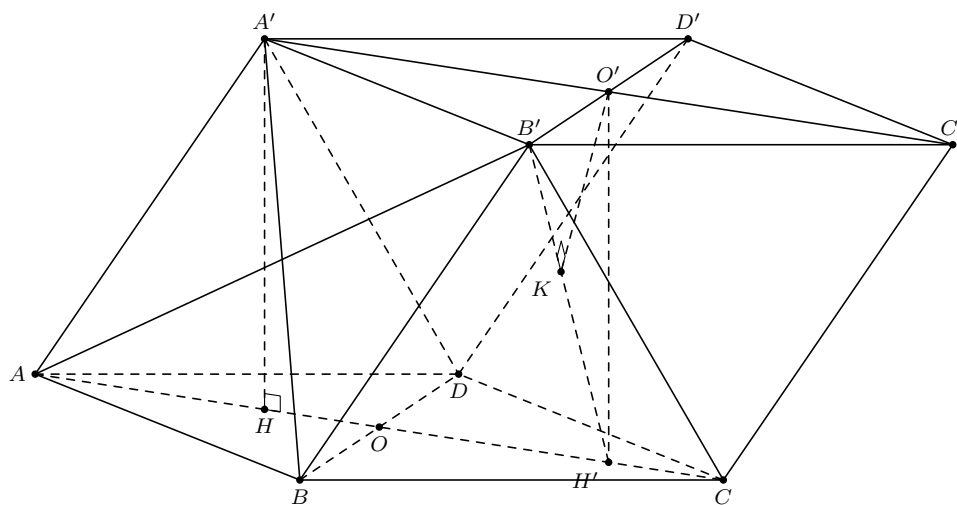
$$BN = \sqrt{SB^2 + SN^2 - 2SB \cdot SN \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d[AC; BM] = d[A; BN] = \frac{2S_{\triangle ABN}}{BN} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} S_{\triangle ABC}}{BN} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

□

BÀI 20. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình bình hành, $A'.ABD$ là hình chóp đều và $AB = AA' = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác ABD , O và O' lần lượt là giao điểm của AC với BD và $A'C'$ với $B'D'$. Vì $A'C' \parallel AC$ nên $d[A'C'; AB'] = d[A'C'; (AB'C)] = d[O'; (AB'C)]$.

Gọi H' là chân đường vuông góc kẻ từ O' xuống $(ABCD)$.

(1)

Vì $ABCD$ là hình bình hành và $\triangle ABD$ đều nên $AC \perp BD$, kéo theo $AC \perp B'D'$.

(2)

Vì $A'ABD$ là hình chóp đều nên $AH \perp AC$, kết hợp với (1) suy ra $AC \perp O'H'$.

(3)

Từ (2) và (3) ta suy ra $AC \perp (O'B'H')$, do đó $(AB'C) \perp (O'B'H')$.

Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ O' xuống $B'H'$. Suy ra $O'K = d[O'; (AB'C)] = d[A'C'; AB']$.

Ta có

$$O'H' = AH = \sqrt{AA'^2 - AH'^2} = \sqrt{AA'^2 - \left(\frac{2}{3}AO\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$B'O' = BO = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác $B'O'H$ vuông tại O' có

$$O'K = \frac{O'B' \cdot O'H'}{\sqrt{O'B'^2 + O'H'^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

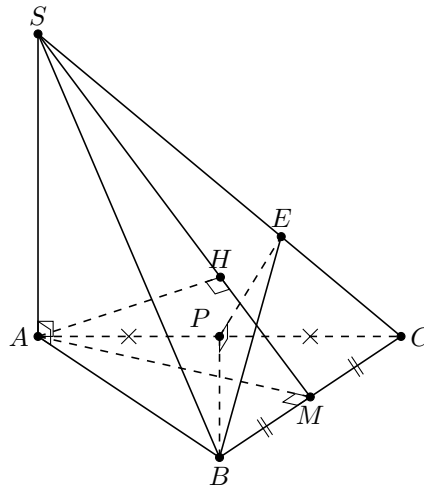
□

BÀI 4. ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG III

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC , N là trung điểm cạnh AB .

- ① Chứng minh $(SAM) \perp (SBC)$.
- ② Xác định và tính góc giữa đường thẳng SC và (ABC) .
- ③ Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .
- ④ Tính khoảng cách từ N đến (SBC) .

Lời giải.



- ① Ta có $AM \perp BC$ (tính chất tam giác đều), $SM \perp BC$ (tính chất tam giác cân)
 $\Rightarrow (SAM) \perp BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$.

- ② Ta có $SC \cap (ABC) = \{C\}$ và $SA \perp (ABC) = \{A\}$. Do đó góc tạo bởi SC và (ABC) là $\widehat{SCA}$.

Xét tam giác vuông SAC ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

- ③ Gọi P là trung điểm AC . Khi đó $BP \perp AC$ (tính chất tam giác đều), $BP \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$)
 $\Rightarrow BP \perp SC$ (1).
 Trong mặt phẳng SAC , hạ $PE \perp SA$ (2) tại E . Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (BPE)$.
 $\Rightarrow (BPE) \perp (SAC)$ và có giao tuyến là PE , $(BPE) \perp (SBC)$ và có giao tuyến là BE
 $\Rightarrow ((SAC), (SBC)) = (PE, BE)$.

Ta có $\triangle BPE$ vuông tại P (vì $BP \perp (SBC)$ tại P). $\Rightarrow \tan \widehat{BEP} = \frac{BP}{PE}$.

$$BP = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \triangle PEC \sim \triangle SAC \Rightarrow \frac{PE}{SA} = \frac{PC}{SC}.$$

$$SC = 2a, PC = \frac{a}{2}, SA = a\sqrt{3} \Rightarrow PE = \frac{PC}{SC} \cdot SA = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{BEP} = 2 \Rightarrow \widehat{BEP} = \arctan 2 \Rightarrow ((SAC), (SBC)) = \arctan 2.$$

- ④ Ta có $\frac{d(N, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{NB}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(N, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC))$.

Theo câu a) ta có $\Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SM ,
 do đó hạ $SH \perp SM$ tại H ta được $SH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

$$\text{Xét tam giác vuông } SAM, \text{ ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{5}{3a^2}$$

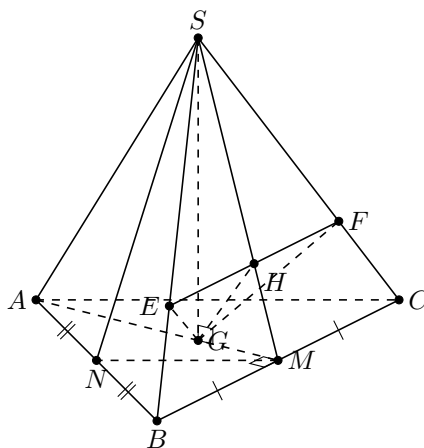
$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow d(N, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{10}.$$

□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , trọng tâm là G , SG vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SG = a$. Gọi M là trung điểm của BC và kẻ đường thẳng GH vuông góc với SM tại H .

- ① Chứng minh $BC \perp (SAG)$.
- ② Tính góc tạo bởi đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC) .
- ③ Tính góc tạo bởi hai đường thẳng SM và AC .
- ④ Kẻ đường thẳng qua H song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại E, F . Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (GEF) và (ABC) .

Lời giải.



- ① Ta có $SG \perp (ACB)$, $BC \subset (ACB) \Rightarrow SG \perp BC$.
 Mặt khác $AG \perp BC$ (tính chất tam giác đều).
 $\Rightarrow BC \perp (SAG)$.
- ② Ta có $SM \cap (ABC) = \{M\}$ và $SG \perp (ABC)$ tại G . $\Rightarrow \widehat{(SM, (ABC))} = \widehat{SMG}$.
 Ta có $\tan \widehat{SMG} = \frac{SG}{GM}$, $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \tan \widehat{SMG} = 2\sqrt{3}$
 $\Rightarrow \widehat{SMG} = \arctan 2\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{(SM, (ABC))} = \arctan 2\sqrt{3}$.

③ Gọi N là trung điểm của $AB \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow \widehat{(SM, AC)} = \widehat{(SM, MN)}$.

$$\text{Ta có } MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2} \text{ (tính chất đường trung bình), } SM = \sqrt{SG^2 + GM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{\sqrt{39}a}{6}.$$

$$\text{Xét tam giác } SMN, \text{ có } SM = SN \text{ và } \cos \widehat{SMN} = \frac{MN^2 + SM^2 - SN^2}{2MN \cdot SM} = \frac{MN}{2SM} = \frac{\sqrt{39}}{26}.$$

$$\Rightarrow \widehat{(SM, AC)} = \arccos \frac{\sqrt{39}}{26}.$$

④ Ta có $(SGM) \perp BC \subset (ABC) \Rightarrow (SGM) \perp (ABC)$. Do $EF \parallel BC \Rightarrow (SGM) \perp (GEF)$.

$$(SGM) \cap (ABC) = GM \text{ và } (SGM) \cap (GEF) = GH, \triangle GHM \text{ vuông tại } H \text{ nên } \widehat{EGM} < 90^\circ$$

$$\Rightarrow ((GEF), (ABC)) = \widehat{HGM}.$$

$$\text{Xét tam giác } SGM, \frac{1}{GH^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GM^2} = \frac{13}{a^2}$$

$$\Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \cos \widehat{HGM} = \frac{GH}{GM} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

□

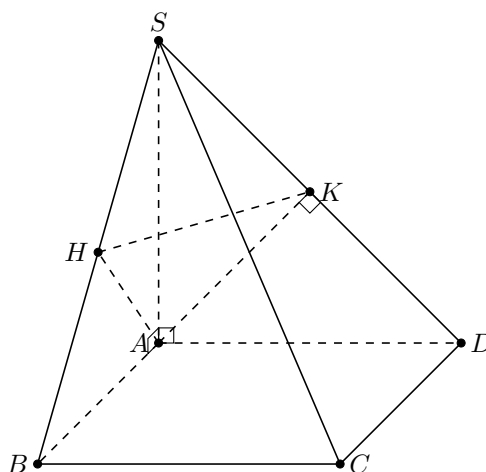
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a . Biết SAB và SAD là các tam giác vuông tại A , $SA = a$.

① Chứng minh SA là đường cao của hình chóp.

② Chứng minh các mặt bên còn lại của hình chóp là các tam giác vuông.

③ Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

Lời giải.



① Từ giả thiết, ta có $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, $AB \cap AD = A \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

② Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD) \supset BC$)

$$\Rightarrow BC \perp SB \text{ hay } \triangle SBC \text{ vuông tại } B.$$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle SDC$ vuông tại D .

③ Gọi H , K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD , nghĩa là $AH \perp SB$ và $AK \perp SD$.

Theo chứng minh câu b) ta suy ra được $BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $AK \perp (SCD) \Rightarrow ((SBC), (SCD)) = \widehat{AH, AK}$.

Theo giả thiết $\triangle SAB$ và $\triangle SAD$ vuông cân tại A , nên H , K lần lượt là trung điểm của SB và SD

$$\Rightarrow AH = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ và } HK \parallel BD, HK = \frac{1}{2}BD \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle AHK \text{ đều } \Rightarrow \widehat{AHK} = 60^\circ.$$

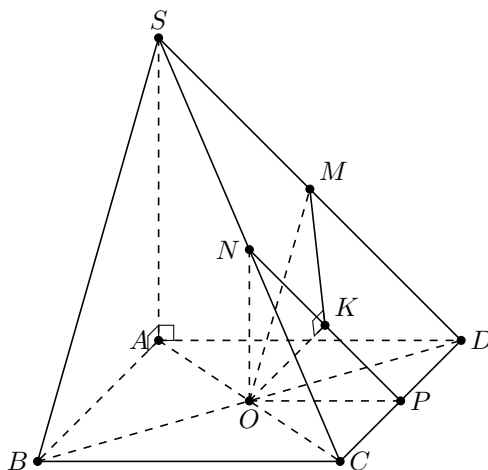
$$\text{Vậy } ((SBC), (SCD)) = 60^\circ.$$

□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết $SA = a$.

- ① Chứng minh rằng $SA \perp (SBCD)$ và $(SAB) \perp (SBC)$.
- ② Xác định góc tạo bởi SD và mặt phẳng $(ABCD)$.
- ③ Xác định góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.



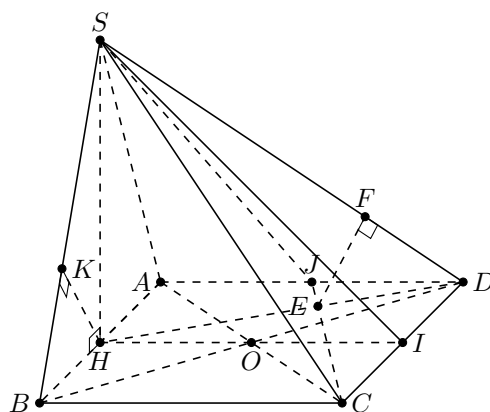
- ① Theo giả thiết, $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAD) \perp (ABCD)$, $(SAB) \cap (SAD) = SA \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.
Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD) \supset BC$)
 $\Rightarrow BC \perp (SAB)$, $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$.
- ② Ta có $SD \cap (ABCD) = D$ và $SA \perp ABCD = A \Rightarrow (\widehat{SD, (ABCD)}) = \widehat{SDA} = 45^\circ$ (vì $\triangle SAD$ vuông cân).
- ③ Gọi O là tâm đáy và M là trung điểm SD . Khi đó OM là đường trung bình của $\triangle SBD$
 $\Rightarrow OM \parallel SB$, $OM = \frac{1}{2}SB$, $OM = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\widehat{SB, (SCD)}) = (\widehat{OM, (SCD)})$.
Gọi N và P lần lượt là trung điểm SC và CD
 $\Rightarrow ON \parallel SA$, $OP \parallel AD$, $OM = OP = \frac{a}{2} \Rightarrow CD \perp (NOP) \Rightarrow (SCD) \perp (NOP)$.
Gọi K là hình chiếu của O lên $NP \Rightarrow OK \perp (SCD) \Rightarrow (\widehat{SB, (SCD)}) = \widehat{OMK}$.
Do $\triangle NOP$ vuông cân cạnh góc vuông bằng $\frac{a}{2}$, nên $OK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$
 $\Rightarrow \sin \widehat{OMK} = \frac{OK}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OMK} = 30^\circ \Rightarrow (\widehat{SB, (SCD)}) = 30^\circ$.

□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Gọi H, J lần lượt là trung điểm của AB, AD .

- ① Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$ và $(SBC) \perp (SAB)$.
- ② Xác định góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.
- ③ Tính theo a khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) và khoảng cách giữa hai đường thẳng CJ và SD .

Lời giải.



- ① Vì $\triangle SAB$ đều, nên $SH \perp AB$. Ta lại có $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$
Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SH$ (vì $SH \perp (ABCD)$) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

- ② Gọi I là trung điểm CD , ta có $\begin{cases} HI \perp CD \\ SI \perp CD \end{cases} \Rightarrow (SHI) \perp CD$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SHI) \cap (SCD) = SI \\ (SHI) \cap ABCD = HI \end{cases} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SIH}.$$

$$\tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{HI} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- ③ Do $HO \parallel (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = d(H, (SBC))$.

Ta có $(SAB) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SB , hạ đường cao AK lên cạnh SB tại K

$$\Rightarrow d(H, (SBC)) = HK = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Ta có $HD \perp CJ \Rightarrow CJ \perp (SHD)$.

Gọi $E = CJ \cap HD$, hạ EF vuông góc với SD tại $F \Rightarrow d(CJ, SD) = EF$.

$$\text{Xét tam giác vuông } CDJ, \text{ ta có } \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{JD^2} + \frac{1}{CD^2} \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{5}a}{5}$$

$$\triangle FDE \sim \triangle HDS \Rightarrow \frac{FD}{HD} = \frac{FE}{HS} \Rightarrow FE = \frac{FD}{HS} \cdot HS$$

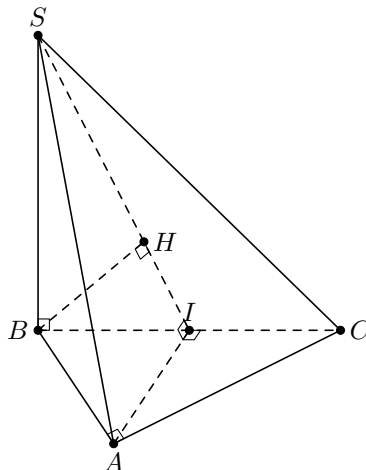
$$DE = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \sqrt{2}a \Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{30}}{20}.$$

□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A . Biết $AB = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và $SB \perp (ABC)$.

- ① Chứng minh các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.
- ② Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $(SAI) \perp (SBC)$.
- ③ Xác định và tính khoảng cách từ điểm B đến (SAI) .
- ④ Xác định và tính góc giữa SA và (SBC) .

Lời giải.



- ① Do $SB \perp (ABC)$ nên suy ra $SB \perp BA$ và $SB \perp BC$, từ đó dẫn đến các tam giác SAB và SBC là các tam giác vuông tại B .

Ta lại có $\left. \begin{array}{l} AC \perp AB \text{ } (\triangle ABC \text{ vuông tại } A) \\ AC \perp SB \text{ } (SB \perp (ABC)) \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp SA \Rightarrow \triangle SAC \text{ vuông tại } A.$

Vậy các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác vuông.

- ② Tam giác ABC cân tại A và I là trung điểm BC nên suy ra $AI \perp BC$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} AI \perp BC \\ AI \perp SB \text{ } (SB \perp (ABC)) \end{array} \right\} \Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow (SAI) \perp (SBC).$

- ③ Ta có $(SAI) \perp (SBC)$ và $(SAI) \cap (SBC) = SI$. Khi đó, kẻ $BH \perp SI$ tại H , suy ra $BH \perp (SAI)$ tại H nên $d(B, (SAI)) = BH$.

$\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

I là trung điểm BC nên $BI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\triangle SBI$ vuông tại I và có đường cao BH nên

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BS^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow BH^2 = \frac{6a^2}{5} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{30}a}{5}.$$

Vậy $d(B, (SAI)) = \frac{\sqrt{30}a}{5}$.

- ④ Ta có $AI \perp (SBC)$ tại I nên SI là hình chiếu vuông góc của SA lên (SBC) . Vậy góc giữa SA và (SBC) là góc ASI .

Xét tam giác SAI vuông tại A , ta có

$$AI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{và} \quad SI = \sqrt{SB^2 + BA^2} = 2a.$$

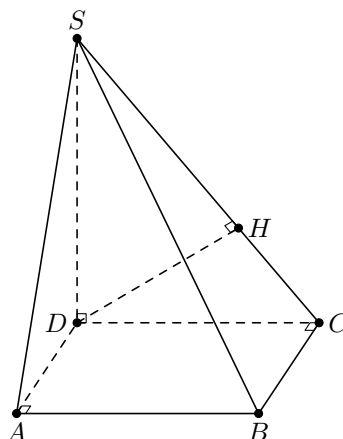
$$\text{Suy ra } \sin \widehat{ASI} = \frac{AI}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{ASI} = 20^\circ 42'.$$

□

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SD \perp (ABCD)$. Biết rằng $AD = a$, $AB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{6}$.

- ① Chứng minh các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.
- ② Chứng minh $(SBC) \perp (SCD)$.
- ③ Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.
- ④ Xác định và tính khoảng cách từ điểm D đến (SBC) .

Lời giải.



- ① Do $SD \perp (ABCD)$ nên $SD \perp DA$ và $SD \perp DC$, suy ra các tam giác SAD và SCD là các tam giác vuông tại D .

Ta có $\left. \begin{array}{l} BC \perp CD \text{ (} ABCD \text{ là hình chữ nhật)} \\ BC \perp SD \text{ (} SD \perp (ABCD)) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SCD) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \triangle SBC \text{ vuông tại } C$.

Chứng minh tương tự ta có tam giác SAB vuông tại A .

Vậy các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

- ② Do $BC \perp (SCD)$ và $BC \subset (SBC)$ nên suy ra $(SBC) \perp (SCD)$.

- ③ Ta có $\left. \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ CD \subset (ABCD); CD \perp BC \\ SC \subset (SBC); SC \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow$ góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng CD và SC , đó chính là góc SCD .

Xét tam giác vuông SCD ta có $CD = AB = a\sqrt{2}$ và $\cos \widehat{SCD} = \frac{CD}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCD} = 54^\circ 44'$.

- ④ Ta có $(SBC) \perp (SCD)$ và $(SBC) \perp (SCD) = SC$. Khi đó, kẻ $DH \perp SC$ tại H , suy ra $DH \perp (SBC)$ tại H nên $d(D, (SBC)) = DH$.

Xét tam giác SCD vuông tại D có đường cao DH , ta có

$$SD = \sqrt{SC^2 - CD^2} = 2a \quad \text{và} \quad DH = \frac{DS \cdot DC}{SC} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

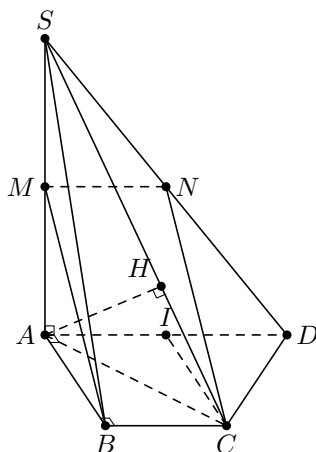
$$\text{Vậy } d(D, (SBC)) = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

□

BÀI 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $AD = 2AB = 2BC = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$.

- ① Xác định và tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
- ② Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.
- ③ Chứng minh $(SAC) \perp (SCD)$.
- ④ Gọi M là trung điểm SA . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MB và SD .

Lời giải.



- ① Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC , chính là góc SCA .

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AC$, suy ra tam giác SAC vuông tại A . Ta có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 50^\circ 46'.$$

Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $50^\circ 46'$.

② Ta có $\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \text{ (giả thiết)} \\ BC \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Ta lại có $\left. \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ AB \subset (ABCD); AB \perp BC \\ SB \subset (SBC); SB \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow$ góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng AB và SB , đó là góc SBA .

Tam giác SAB vuông tại A nên $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° .

③ Gọi I là trung điểm của AD , ta có $\left\{ \begin{array}{l} AI \parallel BC \\ AI = BC = a \end{array} \right. \Rightarrow ABCI$ là hình bình hành $\Rightarrow IC = AB = a$.

Tam giác ACD có I là trung điểm AD và $CI = \frac{AD}{2}$ nên tam giác ACD vuông tại C , suy ra $AC \perp CD$.

Ta có $\left\{ \begin{array}{l} CD \perp AC \\ CD \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \end{array} \right. \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SCD).$

④ Gọi N là trung điểm của SD . Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN \parallel AD$ và $MN = \frac{AD}{2} = a$. Suy ra $MN \parallel BC$ và $MN = BC$ nên $MNCB$ là hình bình hành. Suy ra $MB \parallel NC$.

Do đó, $MB \parallel (SCD)$. Vậy ta có $d(MB, SD) = d(MB, (SCD)) = d(M, (SCD))$.

Do AM cắt (SCD) tại S nên $\frac{d(M, (SCD))}{d(A, (SCD))} = \frac{MS}{AS} = \frac{1}{2}$.

Do $(SAC) \perp (SCD)$ và $(SAC) \cap (SCD) = SC$ nên kẻ $AH \perp SC$ tại H ta sẽ có $AH \perp (SCD)$ tại H , suy ra $d(A, (SCD)) = AH$.

Tam giác SAC vuông tại A và có đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{6a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{30}a}{5}.$$

Từ đó suy ra $d(M, (SCD)) = \frac{1}{2}d(A, (SCD)) = \frac{\sqrt{30}a}{10}$.

Vậy $d(MB, SD) = \frac{\sqrt{30}a}{10}$.

□

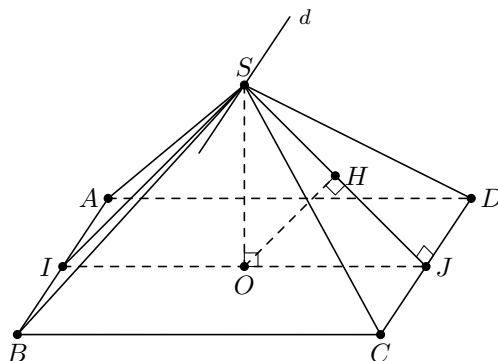
BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $BC = 2a$ và $SA = SB = SC = SD = \frac{3a}{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

① Chứng minh $(SOJ) \perp (SCD)$.

② Tính theo a khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) .

③ Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.



- ① Do $SA = SB = SC = SD$ nên hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp của $ABCD$. Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên tâm đường tròn ngoại tiếp là O , suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} SO \perp CD \text{ (do } SO \perp (ABCD)) \\ SJ \perp CD \text{ (}\triangle SCD \text{ cân tại } S \text{ và } J \text{ là trung điểm } CD) \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SOJ) \Rightarrow (SOJ) \perp (SCD).$

- ② Kẻ $OH \perp SJ$ tại H , ta có $\left. \begin{array}{l} (SOJ) \perp (SCD) \\ (SOJ) \cap (SCD) = SJ \\ OH \subset (SOJ); OH \perp SJ \end{array} \right\} \Rightarrow OH \perp (SCD) \text{ tại } H. \text{ Suy ra } d(O, (SCD)) = OH.$

• OJ là đường trung bình của tam giác BCD nên $OJ = \frac{BC}{2} = a$;

• $OD = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$;

• $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = a$;

• Tam giác SOH vuông tại O và có đường cao OH , suy ra

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(O, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

- ③ Ta có $\left. \begin{array}{l} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow$ giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD .

Ta lại có $\left. \begin{array}{l} SJ \perp CD \\ d \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow SJ \perp d$. Chứng minh tương tự ta có $SI \perp d$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng SI và SJ .

Tam giác SIJ có O là trung điểm IJ và $SO \perp IJ$ nên tam giác SIJ cân tại S .

Mặt khác ta lại có tam giác SOJ vuông cân tại O nên suy ra tam giác SIJ vuông cân tại S suy ra $\widehat{ISJ} = 90^\circ$.

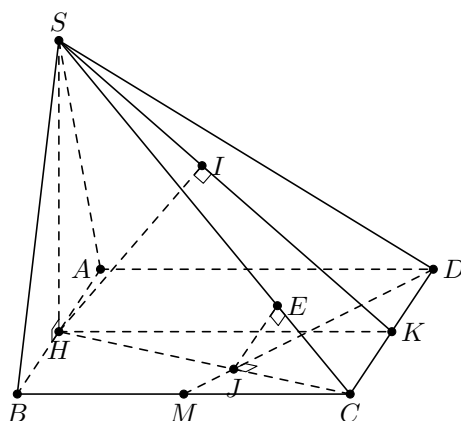
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 90° .

□

BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm AB .

- ① Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.
- ② Tính số đo góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$.
- ③ Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .
- ④ Tính khoảng cách giữa đường thẳng SC và DM với M là trung điểm của BC .

Lời giải.



- ① Ta có tam giác SAB đều và H là trung điểm AB nên $SH \perp AB$.

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB); SH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

- ② HD là hình chiếu vuông góc của SD lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó, góc giữa SD và $(ABCD)$ chính là góc SDH .

• SH là đường cao trong tam giác đều cạnh bằng a nên $SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$;

• $HD = \sqrt{AH^2 + SD^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$

• $\tan \widehat{SDH} = \frac{SH}{HD} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow \widehat{SDH} = 37^\circ 46'$.

Vậy góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng $37^\circ 46'$.

- ③ Do $AH \parallel CD$ và $AH \not\subset (SCD)$ nên $AH \parallel (SCD)$. Suy ra $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$.

Gọi K là trung điểm của CD , ta có $\left. \begin{array}{l} HK \perp CD \\ SH \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow (SCD) \perp (SHK)$.

Kẻ $HI \perp SK$ tại I , ta có $\left. \begin{array}{l} (SCD) \perp (SHK) \\ (SCD) \cap (SHK) = SK \\ HI \subset (SHK); HK \perp SK \end{array} \right\} \Rightarrow HK \perp (SCD) \text{ tại } I \text{ nên } d(H, (SCD)) = HI$.

• $HK = AD = a$;

• $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Vậy $d(A, (SCD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

- ④ Hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm BC và H là trung điểm AB , suy ra $CH \perp DM$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} DM \perp CH \\ DM \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow DM \perp (SHC)$. Gọi J là giao điểm của DM và CH , kẻ $JE \perp SC$ tại E , khi đó

JE chính là đường vuông góc chung của DM và SC nên $d(SC, DM) = JE$.

• $\triangle SHC \sim \triangle JEC \Rightarrow \frac{SH}{JE} = \frac{SC}{JC} \Rightarrow JE = \frac{SH \cdot JC}{SC}$;

• $DM = CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$;

• $SC^2 = SH^2 + HC^2 = 2a^2 \Rightarrow SC = \sqrt{2}a$;

• $JC = \frac{CM \cdot CD}{DM} = \frac{\sqrt{5}a}{5}$;

• $JE = \frac{SH \cdot JC}{SC} = \frac{\sqrt{30}a}{20}$.

Vậy $d(SC, DM) = \frac{\sqrt{30}a}{20}$.

□

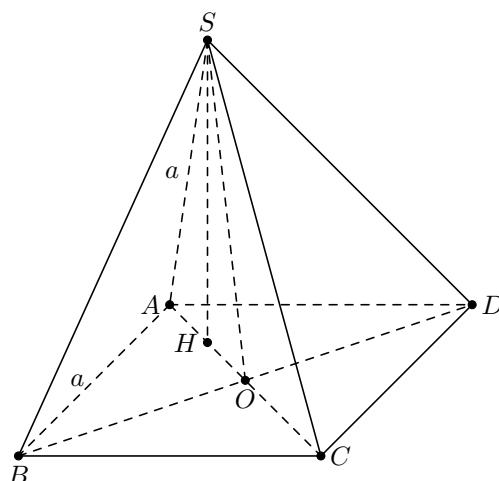
BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông tâm O và SH vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ tại trung điểm H của đoạn AO . Cho $SA = AB = a$.

- ① Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) .

- ② Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

- ③ Chứng minh $\widehat{SOA}$ là góc của hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Tính góc này.

Lời giải.



① Ta có
$$\begin{cases} BD \perp AC \subset (SAC) \\ BD \perp SH \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp (SAC). \\ H = SH \cap AC \end{cases}$$

Mặt khác $BD \subset (SBD)$ suy ra $(SBD) \perp (SAC)$.

② Vì $SH \perp (ABCD)$ nên khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $d_{ABCD} = SH$.

Ta có $AH = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Xét tam giác vuông SHA tại H có

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}a.$$

③ Ta có
$$\begin{cases} BD = (SBD) \cap (ABCD) \\ SO \perp BD \\ AC \perp BD \\ SO \subset (SBD) \\ AC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = \widehat{SOA}.$$

Xét tam giác SAO có SH vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao, suy ra $\triangle SAO$ cân tại S .

Do đó $SO = SA = a$, $\cos \widehat{SOA} = \frac{OH}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{SOA} \approx 70^\circ$

□

BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết rằng $AD = DC = a$, $AB = 2a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$, I là trung điểm của AB .

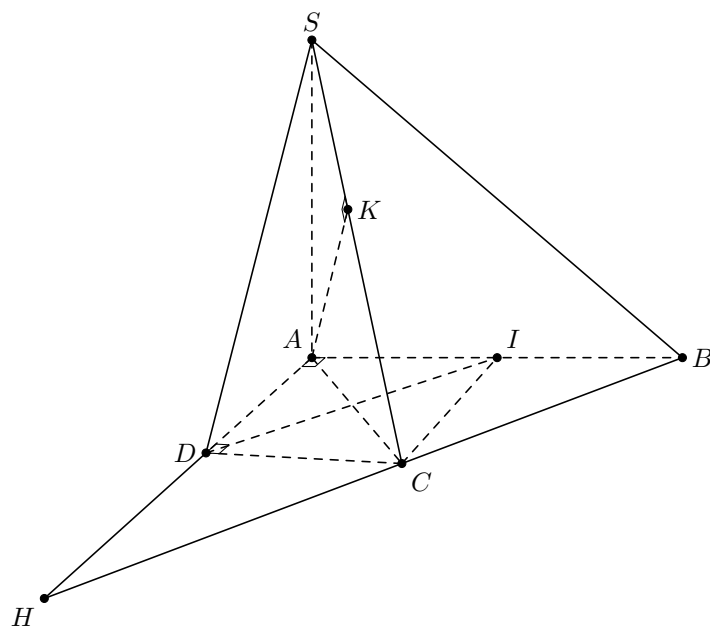
① Chứng minh $BC \perp (SAC)$ và $CI \perp SB$.

② Xác định và tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) .

③ Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

④ Xác định và tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.



- ① Ta có $\begin{cases} AI \parallel CD \\ AI = CD = a \end{cases} \Rightarrow AICD$ là hình bình hành.

Mà $\widehat{IAD} = 90^\circ$ nên $AICD$ là hình chữ nhật.

Lại có $AI = AD = a$. Do đó $AICD$ là hình vuông. $\Rightarrow AC \perp ID$.

Ta có $\begin{cases} IB \parallel CD \\ IB = CD \end{cases} \Rightarrow IBCD$ là hình bình hành $\Rightarrow BC \parallel DI$ nên $BC \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB) \Rightarrow CI \perp SB$.

- ② $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Ta có SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD)

$\Rightarrow (\widehat{SC, (SAD)}) = (\widehat{SC, SD}) = \widehat{CSD}$.

$\triangle SAD$ vuông tại $A \Rightarrow SD = \sqrt{AD^2 + SA^2} = a\sqrt{3}$.

$\triangle SCD$ vuông tại $D \Rightarrow \tan \widehat{CSD} = \frac{CD}{SD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSD} = 30^\circ$.

Vậy $(\widehat{SD, (SAD)}) = 30^\circ$.

- ③ Ta có $AC \perp BC \Rightarrow SC \perp BC$ (định lí 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (\widehat{AC, SC}) = \widehat{SCA}$.

$ADCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2} = SA \Rightarrow \triangle SAC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy $((SBC), (ABCD)) = 45^\circ$.

- ④ Gọi H là giao điểm của AD và BC .

Khi đó $\frac{d(D, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{DH}{AH} \Rightarrow d(D, (SBC)) = \frac{DH}{AH} d(A, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC))$.

Kẻ $AK \perp SC$ tại K , ta có $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK \perp SC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK$.

$\triangle SAC$ vuông tại A có đường cao $AK \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a$.

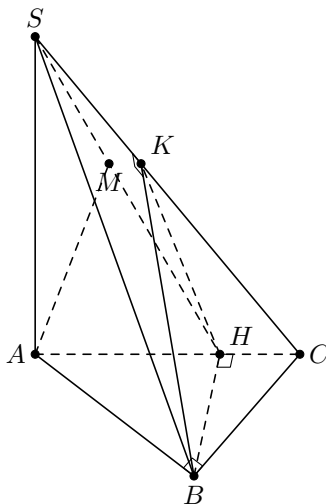
Vậy $d(D, (SBC)) = \frac{1}{2} a$.

□

BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a$, $BC = 2a$. Gọi H , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên AC và SC .

- ① Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$ và $SC \perp (BHK)$.
- ② Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .
- ③ Xác định và tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBH) .

Lời giải.



- ①
$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB).$$
$$\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC).$$
$$\begin{cases} SC \perp BH \\ SC \perp BK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK).$$
- ② Ta có $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$ (định lí 3 đường vuông góc).
Do đó $((SBC), (ABC)) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{ABS}$.
 $\triangle SAB$ vuông tại $A \Rightarrow \tan \widehat{ABS} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ABS} = 60^\circ$.
Vậy $((SBC), (ABC)) = 60^\circ$.
- ③ Vẽ $AM \perp SH$ tại M , ta có
$$\begin{cases} AM \perp BH \\ AM \perp SH \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBH) \Rightarrow d(A, (SBH)) = AM.$$

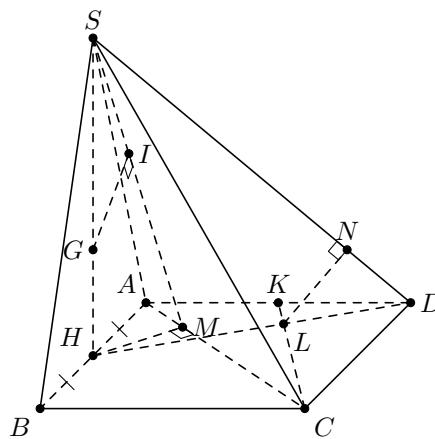
 $\triangle ABC$ vuông tại B có đường cao $BH \Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.
 $\triangle SAH$ vuông tại A có đường cao $AM \Rightarrow AM = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vậy $d(A, (SBH)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

□

BÀI 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD .

- ① Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$. Tính góc tạo bởi SD và mặt phẳng $(ABCD)$.
- ② Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$.
- ③ Xác định và tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SAC) , với G là trọng tâm của $\triangle SAB$.
- ④ Xác định và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và SD .

Lời giải.



$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} \begin{cases} AD \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB). \\
 & \begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \perp AD \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow HD \text{ là hình chiếu vuông góc của } SD \text{ lên } (ABCD) \\
 & \Rightarrow \widehat{(SD, (ABCD))} = \widehat{(SD, HD)} = \widehat{SDH}. \\
 & \triangle SAB \text{ đều} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \\
 & \triangle AHD \text{ vuông tại } A \Rightarrow HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \\
 & \triangle SHD \text{ vuông tại } H \Rightarrow \tan \widehat{SDH} = \frac{SH}{HD} = \frac{\sqrt{15}}{5}. \\
 & \text{Vậy } \widehat{(SD, (ABCD))} = \alpha, \text{ với } \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{2} \text{ Dựng } HM \perp AC \text{ tại } M \Rightarrow SM \perp AC \text{ (định lí 3 đường vuông góc)} \\
 & \Rightarrow \widehat{((SAC), (ABCD))} = \widehat{(SM, SH)} = \widehat{SMH}. \\
 & \triangle AHM \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{HM}{BC} \Rightarrow HM = \frac{AH \cdot BC}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \\
 & \triangle SHM \text{ vuông tại } H \Rightarrow \tan \widehat{SMH} = \frac{SH}{HM} = \sqrt{6}. \\
 & \text{Vậy } \widehat{((SAC), (ABCD))} = \beta, \text{ với } \tan \beta = \sqrt{6}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{3} \text{ Kẻ } GI \perp SM \text{ tại } I. \\
 & \begin{cases} AC \perp MH \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHM) \Rightarrow AC \perp GI \Rightarrow GI \perp (SAC) \Rightarrow d(G, (SAC)) = GI. \\
 & \text{Ta có } SG = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \\
 & \triangle SHM \text{ vuông tại } H \Rightarrow SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}. \\
 & \triangle SIG \sim \triangle SHM \Rightarrow GI = \frac{SG \cdot MH}{SM} = \frac{\sqrt{21}}{21} \Rightarrow d(G, (SAC)) = \frac{\sqrt{21}}{21}.
 \end{aligned}$$

- ④ Gọi L là giao điểm của CK và HD . Do $ABCD$ là hình vuông nên $CK \perp HD$ tại L .

$$\begin{cases} CK \perp HD \\ CK \perp SH \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SHD).$$

Kẻ $LN \perp SD$ tại N , ta có

$$\begin{cases} LN \perp CK \\ LN \perp SD \end{cases} \Rightarrow d(CK, SD) = LN.$$

$$\triangle DKL \sim \triangle DAH \Rightarrow LD = \frac{AD \cdot KD}{HD} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\triangle DNL \sim \triangle DHS \Rightarrow LN = \frac{SH \cdot LD}{SD} = \frac{\sqrt{30}}{20}.$$

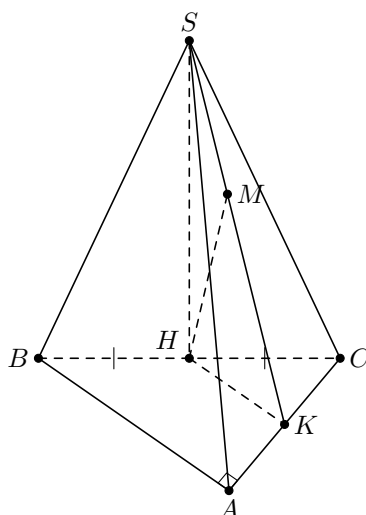
$$\text{Vậy } d(CK, SD) = \frac{\sqrt{30}}{20}.$$

□

BÀI 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$. Gọi H là trung điểm của BC , $SH \perp (ABC)$, $SH = a\sqrt{3}$.

- ① Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) .
- ② Xác định và tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.



- ① Kẻ $HK \perp AC$ tại $K \Rightarrow SK \perp AC$ (định lý 3 đường vuông góc) và $KA = KC$.

Do đó $((SAC), (ABC)) = (\widehat{HK, SK}) = \widehat{SKH}$.

HK là đường trung bình trong $\triangle ABC \Rightarrow HK = \frac{1}{2}AB = a$.

$\triangle SHK$ vuông tại $H \Rightarrow \tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^\circ$.

Vậy $((SAC), (ABC)) = 60^\circ$.

- ② $BH \cap (SAC) = C \Rightarrow \frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{BC}{HC} = 2 \Rightarrow d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC))$.

$$\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK).$$

Kẻ $HM \perp SK$ tại M , ta có

$$\begin{cases} HM \perp AC \\ HM \perp SK \end{cases} \Rightarrow HM \perp (SAC) \Rightarrow d(H, (SAC)) = HM.$$

$\triangle SHK$ vuông tại H có đường cao $HM \Rightarrow HM = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

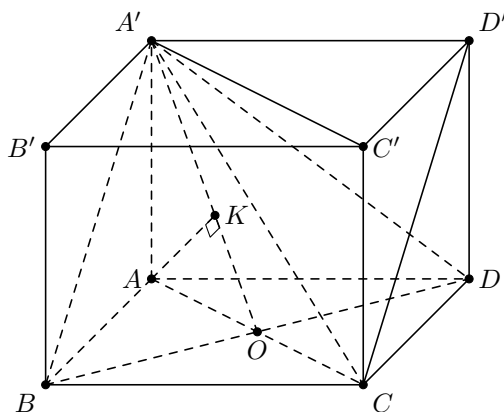
Vậy $d(B, (SAC)) = 2HM = a\sqrt{3}$.

9

BÀI 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$.

- ① Chứng minh $(A'BD) \perp (AA'C'C)$.
- ② Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với các mặt phẳng $(ABCD)$ và $(AA'B'B)$.
- ③ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD' .

Lời giải.



- $$\textcircled{1} \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C'A) \Rightarrow (A'BD) \perp (AA'C'C).$$

- ② AC là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(ABCD)$

$$\Rightarrow \widehat{(A'C, (ABCD))} = \widehat{(A'C, AC)} = \widehat{ACA'}.$$

AC là đường chéo hình vuông cạnh $a\sqrt{2} \Rightarrow AC = 2a$.

$$\triangle AA'C \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \widehat{ACA'} = \frac{AA'}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{ACA'} = 45^\circ.$$

Mặt khác, $A'B$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(AA'B'B)$

$$\Rightarrow \widehat{(A'C, (AA'B'B))} = \widehat{(A'C, A'B)} = \widehat{CA'B}.$$

$$\triangle AA'B \text{ vuông tại } A \Rightarrow A'B = \sqrt{A'A^2 + AB^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\triangle CBA' \text{ vuông tại } B \Rightarrow \tan \widehat{CA'B} = \frac{CB}{A'B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CA'B} = 30^\circ.$$

Vậy góc giữa đường thẳng $A'C$ với các mặt phẳng $(ABCD)$ và $(AA'B'B)$ lần lượt là 45° và 30° .

- ③ Xét mặt phẳng $(A'BD)$ chứa BD và song song với CD' .

Khi đó $d(BD, CD') = d(CD', (A'BD)) = d(C, (A'BD))$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $\frac{d(A, (A'BD))}{d(C, (A'BD))} = \frac{AO}{CO} = 1 \Rightarrow d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD)).$

Kẻ $AK \perp A'O$, ta có

$$\begin{cases} AK \perp BD \\ AK \perp A'O \end{cases} \Rightarrow AK \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AK.$$

$$\triangle AA'O \text{ vuông tại } A \text{ có đường cao } AK \Rightarrow AK = \frac{AO \cdot AA'}{\sqrt{AO^2 + A'A^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

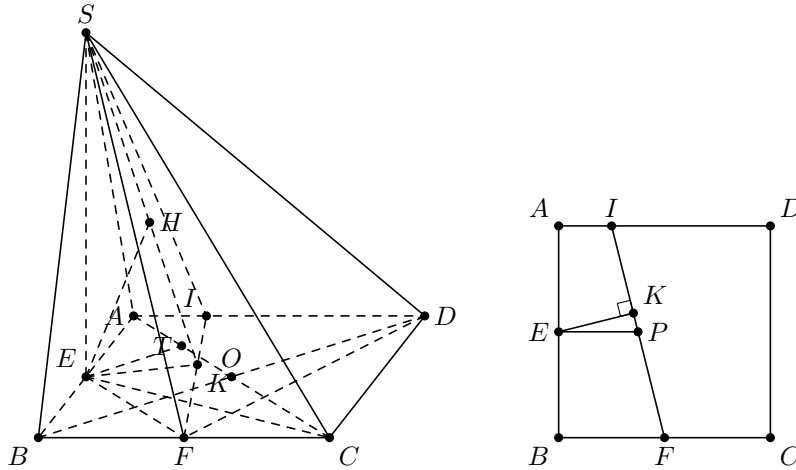
$$\text{Vậy } d(BD, CD') = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

☐

BÀI 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $\triangle SAB$ là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- ① Chứng minh $\triangle SAD$ là tam giác vuông.
- ② Chứng minh hai mặt phẳng (SDF) và (SEC) vuông góc với nhau.
- ③ Gọi I là điểm nằm trên cạnh AD sao cho $ID = 3IA$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SFI) .
- ④ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và EF .

Lời giải.



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ SE \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow SE \perp (ABCD). \\ & \begin{cases} SE \perp AB = (SAB) \cap (ABCD) \\ AD \perp AB \\ AD \perp SE \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SA \Rightarrow \triangle SAD \text{ vuông tại } A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow EF \perp DF. \\ \text{Ta có} \quad & \begin{cases} DF \perp EC \\ DF \perp SE \end{cases} \Rightarrow DF \perp (SEC) \Rightarrow (SDF) \perp (SEC). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \text{Gọi } P \text{ là trung điểm của } IF, \text{ kẻ } EK \perp IF \text{ tại } K. \text{ Ta có} \\ & \begin{cases} EP \perp AB \\ EP \perp SE \end{cases} \Rightarrow EP \perp (SAB). \\ & \begin{cases} IF \perp EK \\ IF \perp SE \end{cases} \Rightarrow IF \perp (SEK). \\ & \text{Kẻ } EH \perp SK \text{ tại } H, \text{ ta có} \\ & \begin{cases} EH \perp IF \\ EH \perp SK \end{cases} \Rightarrow EH \perp (SFI) \Rightarrow ((SAB), (SFI)) = (\widehat{EP, EH}) = \alpha. \\ \text{Ta có} \quad & \begin{cases} EP \perp (SAB) \\ IA \parallel FB \parallel ED \end{cases} \Rightarrow IA \perp (SAB) \text{ và } BF \perp (SAB) \\ & \Rightarrow \triangle SAB \text{ là hình chiếu của } \triangle SIF \text{ lên } (SAB) \Rightarrow S_{\triangle SAB} = \cos \alpha \cdot S_{\triangle SIF} \\ & \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot SK \cdot IF = \cos \alpha \cdot \frac{a^2\sqrt{15}}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad & EF \parallel AC \Rightarrow d(SA, EF) = d(EF, (SAC)) = d(E, (SAC)). \\ & \text{Kẻ } ET \perp AC \text{ tại } T, \text{ gọi } O \text{ là tâm hình vuông } ABCD. \\ & \text{Khi đó ta có } ET = \frac{1}{2}BO = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \\ & \begin{cases} AC \perp ET \\ AC \perp SE \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SET). \\ & \text{Kẻ } EJ \perp ST \text{ tại } J \Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow d(E, (SAC)) = EF = \frac{ET \cdot SE}{\sqrt{ET^2 + SE^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}. \end{aligned}$$

□