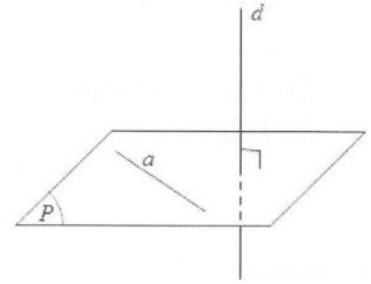


CHỦ ĐỀ 4: QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Vấn đề 1: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. Định nghĩa:

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) .



Định lý: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .

II. Các tính chất

■ **Tính chất 1:** Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.

■ **Tính chất 2:** Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước.

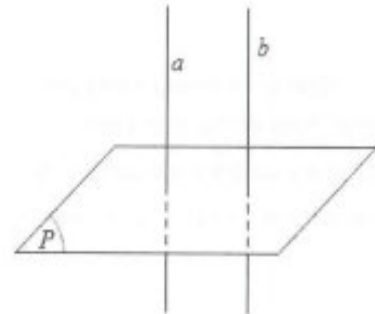
■ Tính chất 3:

a) Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 3 được viết gọn là:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} a // b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b \\ & \bullet \begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a // b \\ & \bullet a \neq b \end{aligned}$$



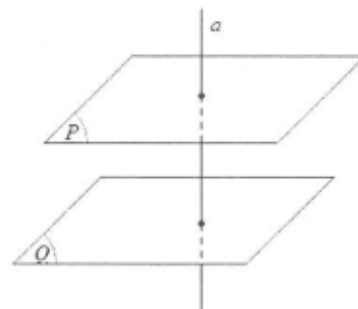
■ Tính chất 4:

a) Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tính chất 4 được viết gọn là:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} (P) // (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q) \\ & \bullet \begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q) \\ & \bullet (P) \neq (Q) \end{aligned}$$



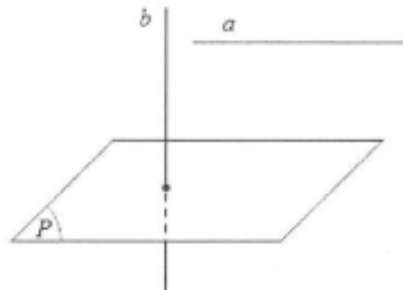
■ Tính chất 5:

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng song song với a .

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

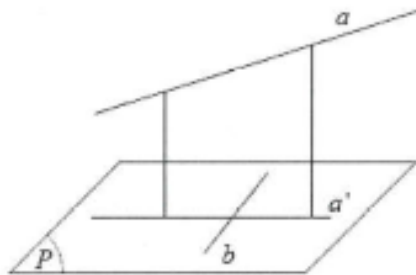
Tính chất 5 được viết gọn là:

$$\bullet \begin{cases} a // (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$
$$\bullet \begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b \\ (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a // (P)$$

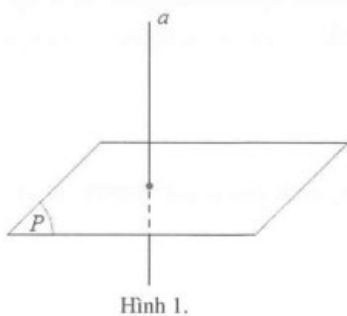


III. Định lý ba đường vuông góc

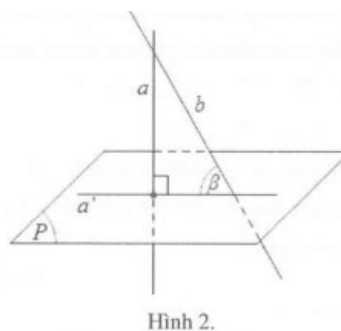
Định lý ba đường vuông góc: Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) . Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P) .



IV. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



Hình 1.



Hình 2.

Định nghĩa: Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° (hình 1).

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) (hình 2).

Chú ý: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá 90° .

✎ **Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.**

Phương pháp giải:

Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta chứng minh:

- a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) .
- a song song với đường thẳng b mà b vuông góc với (P) .

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt và ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC .

Điểm I là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$

b) Gọi AH là đường cao trong tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$

Lời giải

a) Do các tam giác ABC và BCD là hai tam giác cân nên tại A và D

ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời

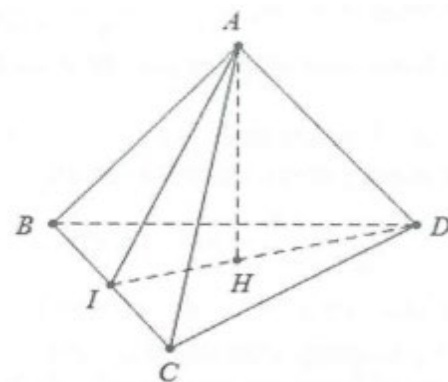
là đường cao)

Do đó $BC \perp (ADI)$.

b) Do AH là đường cao trong tam giác ADI nên $AH \perp DI$

Mặt khác $BC \perp (ADI) \Rightarrow BC \perp AH$

Do đó $AH \perp (BCD)$



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD .

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp (SBC)$; $AN \perp (SCD)$.

c) Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN \parallel BD$

d) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

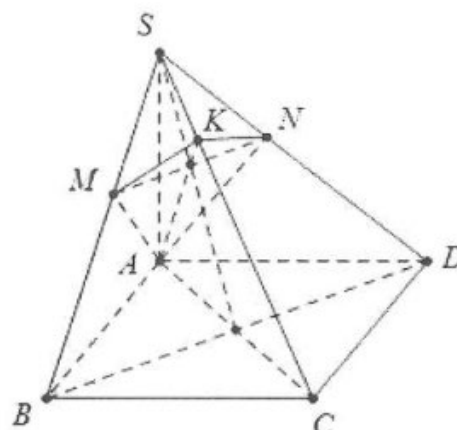
Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$



Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$

$$c) \text{ Do } \begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$$

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $CM = DN$.

Mặt khác tam giác SBD cân tại đỉnh S nên $MN \parallel BD$.

d) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Do $MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác BCD .

$$b) \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$$

c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Lời giải

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) thì $AH \perp (BCD)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$$

Mặt khác $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH \perp CD$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD .

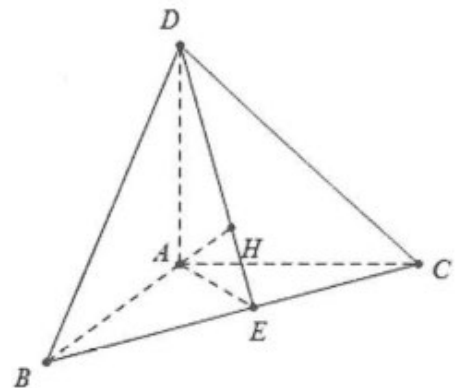
b) Gọi $E = DH \cap BC$, do $BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AE$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } A \text{ có đường cao } AE \text{ ta có: } \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} \text{ (đpcm).}$$

$$c) \text{ Đặt } AB = x; AC = y; AD = z. \text{ Ta có: } \begin{cases} BC = \sqrt{x^2 + y^2} \\ BD = \sqrt{x^2 + z^2} \\ CD = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \cos B = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot BD} = \frac{x^2}{BC \cdot BD} > 0 \Rightarrow \widehat{CBD} < 90^\circ$$



Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\begin{cases} \widehat{BDC} < 90^\circ \\ \widehat{BCD} < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow$ tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

- AH, SK, BC đồng quy.
- $SC \perp (BHK)$.
- $HK \perp (SBC)$.

Lời giải

- Giả sử $AH \perp BC$ tại M .

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Mặt khác $SK \perp BC \Rightarrow S, K, M$ thẳng hàng do đó AH, SK, BC đồng quy tại điểm M .

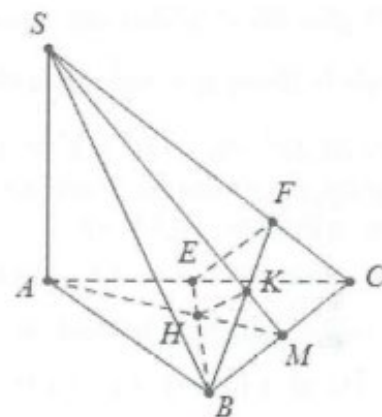
- Do H là trực tâm của tam giác ABC nên $BH \perp AC$

Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$

Lại có: $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$

- Do $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$, mặt khác $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$

Do đó $HK \perp (SBC)$



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$.

- Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$
- Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$

Lời giải

- Do $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S có trung tuyến SO đồng thời là đường cao suy ra $SO \perp AC$

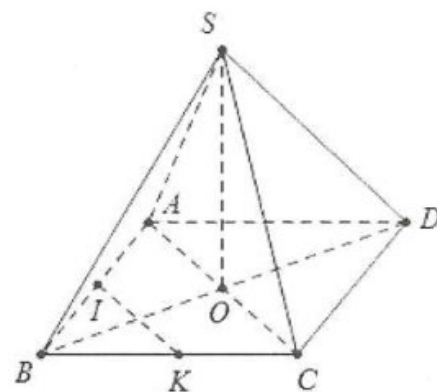
Tương tự ta có: $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

- Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$

Do vậy $AC \perp (SBD)$

IK là đường trung bình trong tam giác BAC nên $IK \parallel AC$ mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp (SBD)$



Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

- a) Tính các cạnh của tam giác SIJ , suy ra tam giác SIJ vuông.
 b) Chứng minh rằng $SI \perp (SCD); SJ \perp (SAB)$.
 c) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ , chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

Lời giải

a) Ta có: ΔSAB đều cạnh a nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tứ giác $IB CJ$ là hình chữ nhật nên $IJ = BC = a$

ΔSCD là tam giác vuông cân đỉnh $S \Rightarrow SJ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$

Do đó $SJ^2 + SI^2 = IJ^2 = a^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại S .

b) Do ΔSCD cân tại S nên $SJ \perp CD$

Do $AB \parallel CD \Rightarrow SJ \perp AB$

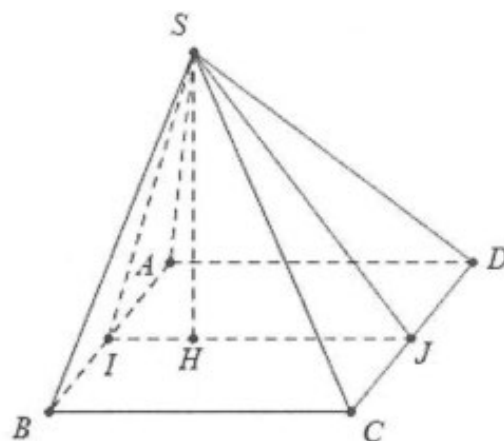
Mặt khác $SJ \perp SI \Rightarrow SJ \perp (SAB)$

Chứng minh tương tự ta có: $SI \perp (SCD)$.

c) Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp CD$

Mặt khác $CD \perp IJ \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$

Do $SH \perp IJ \Rightarrow SH \perp (ABCD)$



Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , điểm I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC . Trên đoạn CI và SA lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$, chứng minh $MN \perp (ABC)$

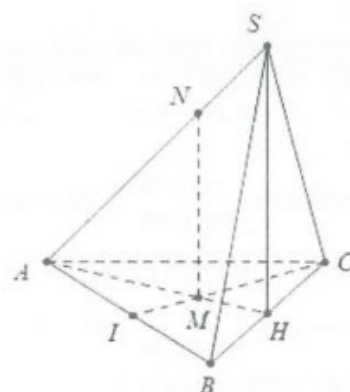
Lời giải

Do điểm M thuộc đường trung tuyến CI và $MC = 2MI$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow M = AH \cap CI$

Ta có: $\frac{NA}{NS} = \frac{MA}{MH} = 2 \Rightarrow MN \parallel SH$

Mặt khác $SH \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$



Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

Phương pháp giải:

- Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b , ta đi tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.
- Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

Lời giải

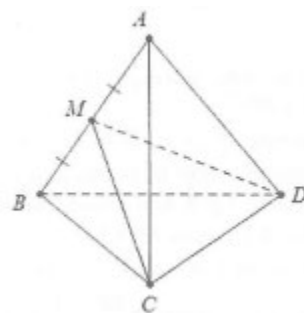
Gọi M là trung điểm của AB

Tứ diện $ABCD$ đều nên $\triangle ABD$ và $\triangle ABC$ là các tam giác đều suy ra

$$\begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD)$$

Do đó $AB \perp CD$

Chứng minh tương tự ta cũng có $BC \perp AD, AC \perp BD$



Ví dụ 2: Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD = CD = \frac{AB}{2}$

- Gọi I là trung điểm của đoạn AB , chứng minh $CI \perp AB$ và $DI \perp SC$
- Chứng minh các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải

a) Đặt $AB = 2a \Rightarrow AD = CD = a$

Do $AB = 2CD \Rightarrow AI = AD = CD = CI = a$

Khi đó $AICD$ là hình vuông cạnh a .

Do đó $CI \perp AB$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AC \perp DI \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC$$

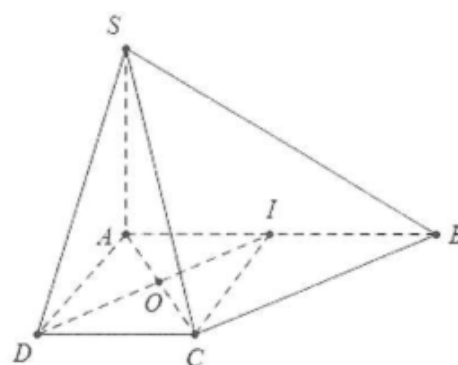
b) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \triangle SAD, \triangle SAB$ vuông tại S .

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$$

nên $\triangle SDC$ vuông tại D .

Xét $\triangle ACD$ có trung tuyến $CI = \frac{AB}{2} \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AC$

Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \triangle SCB$ vuông tại C .



Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$

b) Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $BC' \perp AM$

c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh rằng:
 $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$

Lời giải

a) Do $\triangle ABC$ là tam giác đều và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$

Mặt khác $AI \perp CC' \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$

b) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC'$

Mặt khác MI là đường trung bình trong tam giác $B'BC$ nên $MI \parallel B'C$
suy ra $MI \perp BC'$

Lại có: $AI \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (AIM) \Rightarrow BC' \perp AM$

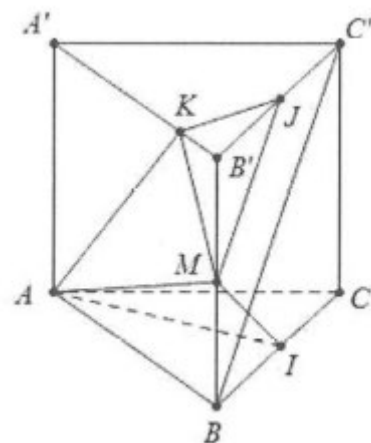
c) Ta có: $\tan \widehat{KMB'} = \frac{KB'}{MB'} = \frac{1}{2}; \tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{BM} = 2$

Suy ra $\tan \widehat{KMB'} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{KMB'} + \widehat{AMB} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{AMK} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp MK$

Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC' \\ MJ \parallel BC' \end{cases} \Rightarrow AM \perp MJ$

Suy ra $AM \perp (MKJ) \Rightarrow AM \perp KJ$



Ví dụ 4: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông, gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC . Chứng minh rằng $MN \perp BD$

Lời giải

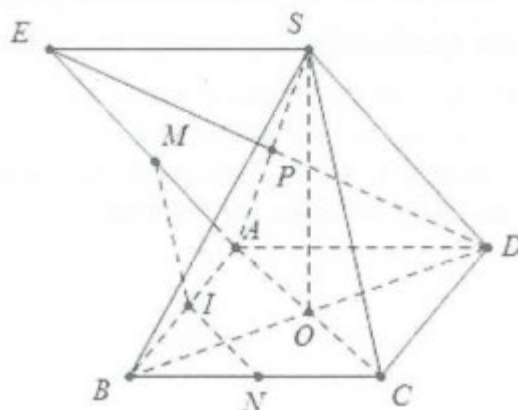
Gọi I, P lần lượt là trung điểm của AB và SA , O là giao điểm của AC và BD .

Ta có: $\begin{cases} IN \parallel AC \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp IN \quad (1)$

Mặt khác $\begin{cases} IM \parallel BE \\ BE \perp PO \end{cases} \Rightarrow IM \perp PO \quad (*)$

Mà $PO \perp BD \quad (**)$ (Do $\triangle BPD$ là tam giác cân tại P có đường trung tuyến PO).

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có: $BD \perp IM \quad (2)$

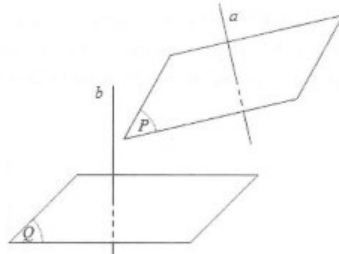


Từ (1) và (2) ta có: $BD \perp (IMN) \Rightarrow BD \perp MN$

Vấn đề 2: HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

I. Góc giữa hai mặt phẳng

■ **Định nghĩa:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



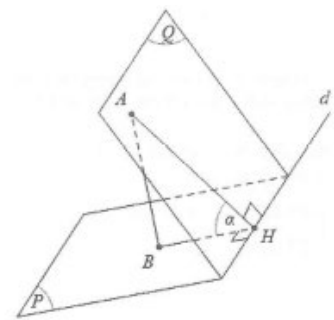
■ **Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng:**

Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) ; (Q) .

Lấy $A \in mp(Q)$, dựng $AB \perp mp(P)$ ($B \in (P)$).

Vẽ BH vuông góc với d thì AH vuông góc với d .

Vậy $\widehat{AHB} = \alpha$ ($0 < \alpha \leq 90^\circ$) là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

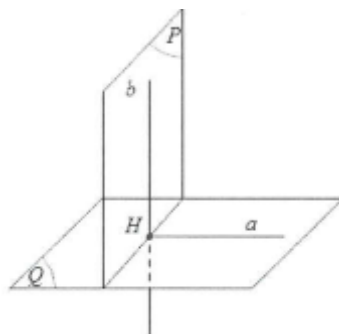


■ **Định lý :** Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì $S' = S \cos \varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') .

II. Hai mặt phẳng vuông góc

■ **Định nghĩa:** Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

■ **Định lý 1:** Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

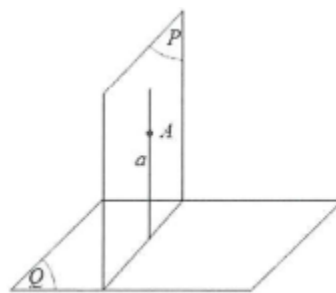


■ **Định lý 2:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P) , vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q) .

- **Hệ quả 1:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P) .

Hệ quả 1 được viết gọn là:

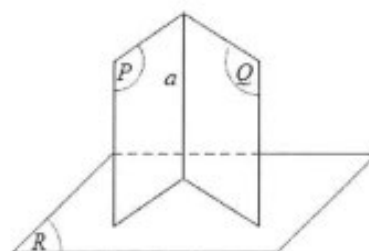
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \perp (Q) \\ A \in a \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$$



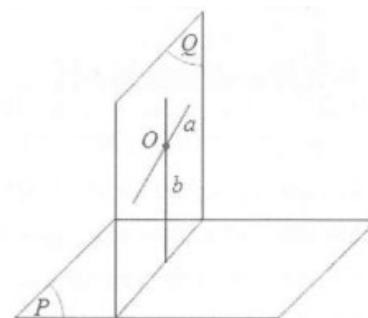
- **Hệ quả 2:** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và vuông góc với mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Hệ quả 2 được viết gọn là:

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$



- **Hệ quả 3:** Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .



☑ **Hình lăng trụ đứng:** Là hình lăng trụ có tất cả các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

☑ **Hình lăng trụ đều:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

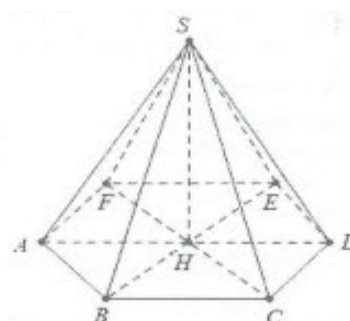
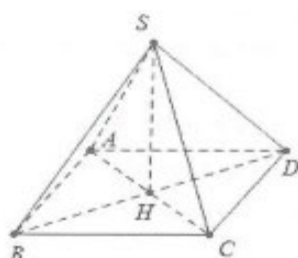
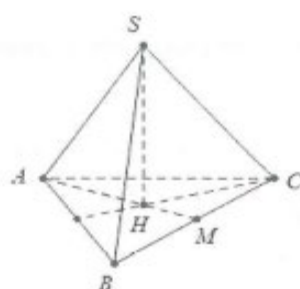
☑ **Hình hộp đứng:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

☑ **Hình hộp chữ nhật:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.

☑ **Hình lập phương:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông.

☑ **Hình chóp đều:** Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Dưới đây là hình vẽ của hình chóp tam giác đều, tứ giác đều và hình chóp lục giác đều.



Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp giải:

Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta sẽ chứng minh

■ Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) hoặc ngược lại, một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng (Q) và vuông góc với mặt phẳng (P) .

■ Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90° .

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$

b) Gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC . Chứng minh $(SBC) \perp (AKH)$.

c) Gọi D là giao điểm của HK và BC . Chứng minh $(SAD) \perp (SAC)$

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp BC$

Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

b) Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

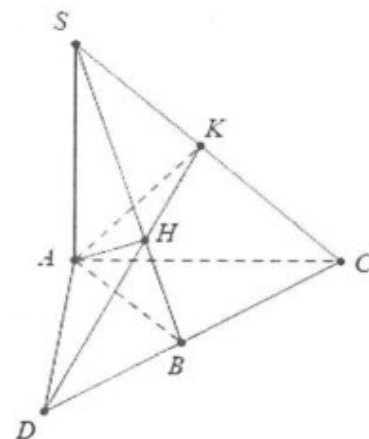
Mặt khác $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow (AHK) \perp (SBC)$

c) Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Mặt khác $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AKD)$

Suy ra $AD \perp SC$ mà $SA \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAC)$

Do vậy $(SAD) \perp (SAC)$



Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O . Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K . Gọi H là trực tâm của tam giác ACD .

a) Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK)

b) Chứng minh OH vuông góc với mặt phẳng (ACD)

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} BE \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE)$

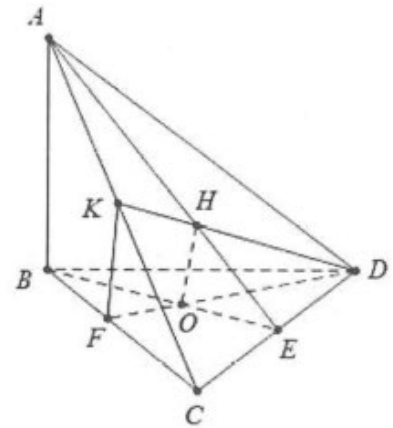
mà $CD \subset (ADC) \Rightarrow (ADC) \perp (ABE)$

Lại có: $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC$

Mặt khác $DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DKF) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$

b) Do $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AE$

Ta có: $\begin{cases} (ACD) \perp (ABE) \\ (ACD) \perp (DFK) \\ OH = (ABE) \cap (DFK) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD)$



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a và $BD = a$. Biết cạnh $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD)$

b) $(SCD) \perp (SBC)$

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$

b) Dựng $OH \perp SC$

Do $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Suy ra $SC \perp (DHB)$

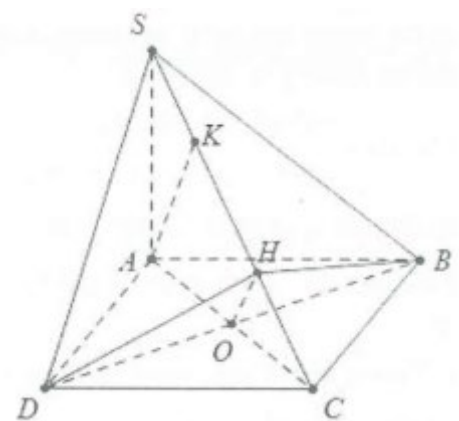
Như vậy $\widehat{DHB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC)

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot OC}{\sqrt{SA^2 + OC^2}} = a \Rightarrow OH = \frac{AK}{2} = \frac{a}{2}$

Tam giác DHB có đường trung tuyến $HO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta DHB$ vuông tại H hay $\widehat{DHB} = 90^\circ$

Do đó $(SCD) \perp (SBC)$



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD , I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$

Lời giải

Ta có: $\tan \widehat{CAD} = \frac{CD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

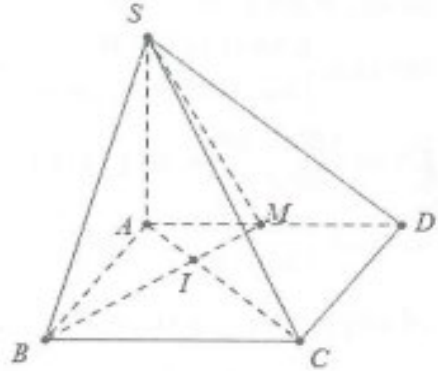
Mặt khác $\tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{AM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

Do $\tan \widehat{CAD} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{AMB} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{AIM} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BM$ tại I

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM$

Do đó $BM \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB . Biết $SA = SB = a\sqrt{2}$

- Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$
- Chứng minh tam giác SBC vuông.
- Chứng minh $(SAD) \perp (SAB); (SAD) \perp (SBC)$.

Lời giải

a) Do $\triangle SAB$ cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AB$

Mặt khác $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

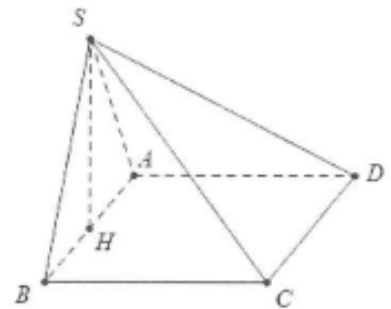
b) Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC$

Mặt khác $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B .

c) Tương tự câu b ta chứng minh được $AD \perp (SAB)$ suy ra $(SAD) \perp (SAB)$

Mặt khác $SA^2 + SB^2 = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại $S \Rightarrow SA \perp SB$

Lại có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB \Rightarrow SB \perp (SAD) \Rightarrow (SBC) \perp (SAD)$



Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC và CD .

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$

b) Chứng minh $AM \perp BP$ và $(SBP) \perp (AMN)$

Lời giải

a) Gọi H là trung điểm của AD

Do ΔSAD cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao
suy ra $SH \perp AD$

Mặt khác $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ AD \in (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

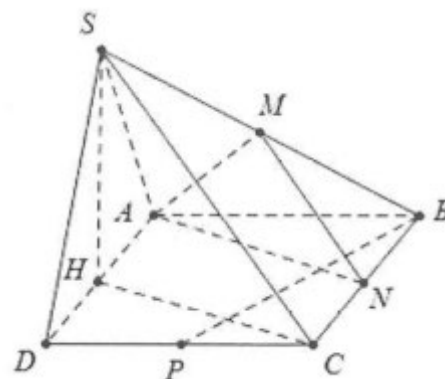
Khi đó $\begin{cases} SH \perp AB \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$

b) Ta có: $\begin{cases} MN // SC \\ AN // HC \end{cases} \Rightarrow (AMN) // (SHC)$

Để thấy $\tan \widehat{BPC} = 2; \tan \widehat{HCD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BPC} + \widehat{HCD} = 90^\circ \Rightarrow HC \perp BP$

Mặt khác $SH \perp BP \Rightarrow BP \perp (SHC)$

Mà $(AMN) // (SHC) \Rightarrow BP \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} (SBP) \perp (AMN) \\ BP \perp AM \end{cases}$



Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$

b) Chứng minh $(SAD) \perp (SCD)$

c) Gọi BE và DF là đường cao trong tam giác SBD . Chứng minh rằng $(ACF) \perp (SBC); (AEF) \perp (SAC)$

Lời giải

a) Ta có: $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

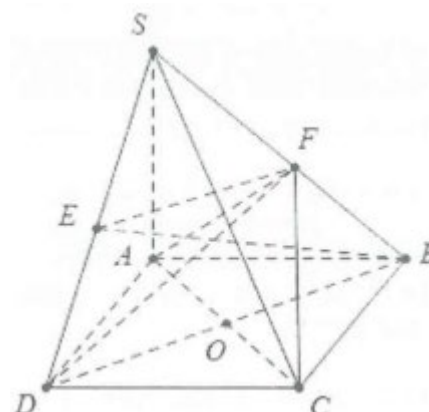
Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$

b) Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Do đó $(SAD) \perp (SAB)$

c) Ta có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$

Mặt khác $DF \perp SB \Rightarrow (ADF) \perp SB \Rightarrow AF \perp SB$



$$\text{Lại có : } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AF$$

Do đó $AF \perp (SBC) \Rightarrow (ACF) \perp (SBC)$

Dễ thấy tam giác SBD cân tại S có 2 đường cao BE và DF nên $EF \parallel BD$

Mặt khác $BD \perp (SAC)$ (Chứng minh ở câu a) suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (AEF) \perp (SAC)$

Cách khác: Ta có $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp SC$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $AE \perp SC$ suy ra $SC \perp (AEF) \Rightarrow (SAC) \perp (AEF)$

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC) .

a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$

b) Gọi AH , AK là các đường cao của $\triangle ABC$ và $\triangle AB'C'$. Chứng minh $(BCC'B') \perp (AB'C')$ cùng vuông góc với (AHK) .

Lời giải

a) Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AB$

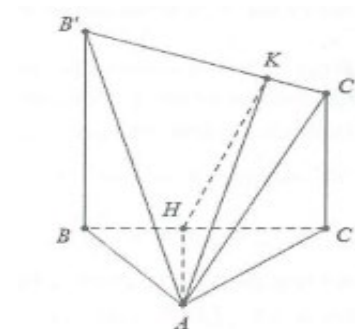
Mặt khác $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (ACC') \Rightarrow (ABB') \perp (ACC')$

b) Do $AH \perp BC, BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AH$

Suy ra $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow (AHK) \perp (BCC'B')$

Mặt khác $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH \perp B'C'$

Lại có: $AK \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (AHK) \Rightarrow (AHK) \perp (AB'C')$



Ví dụ 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$; $BC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $CC' = 2a$. Điểm M là trung điểm của cạnh AA' .

a) Chứng minh $(ABB'A') \perp (BCC'B')$ và $BM \perp C'M$

b) Tính cosin góc giữa mặt phẳng (BMC') và mặt đáy (ABC)

Lời giải

a) Ta có: $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BB' \perp AB$

Mặt khác $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B nên $AB \perp BC$

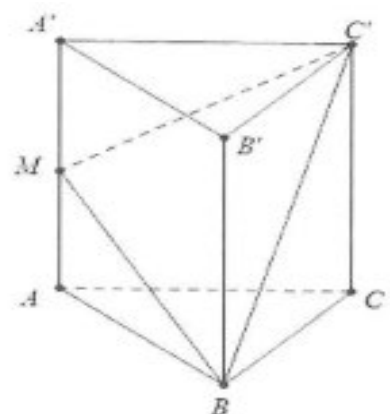
Do đó $AB \perp (BCC'B') \Rightarrow (ABB'A') \perp (BCC'B')$

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = a\sqrt{2}; BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = a\sqrt{7};$$

$$C'M = \sqrt{A'C'^2 + A'M^2} = a\sqrt{5}$$

Do $C'M^2 + MB^2 = BC'^2 \Rightarrow \triangle BMC'$ vuông tại M hay $BM \perp C'M$

b) Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Diện tích tam giác MBC' : $S_{MBC'} = \frac{1}{2}MB.MC' = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (BMC') và mặt đáy (ABC)

Do $\triangle ABC$ là hình chiếu vuông góc của tam giác $MB'C'$ trên mặt phẳng (ABC) nên:

$$S_{ABC} = S_{MBC'} \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{MBC'}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

✎ Dạng 2: Bài toán dựng thiết diện có yếu tố vuông góc

Ví dụ 1: Cho tứ diện $SABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) và tính diện tích thiết diện trong các trường hợp sau:

- (α) qua S và vuông góc với BC
- (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của $\triangle SBC$

Lời giải

a) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$

Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAI)$

Thiết diện của khối chóp qua S và vuông góc với BC là tam giác SAI vuông tại A có $SA = a$; $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $S_{SAI} = \frac{1}{2}SA.AI = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) Dựng $AK \perp SI$, lại có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK$

Suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SI$

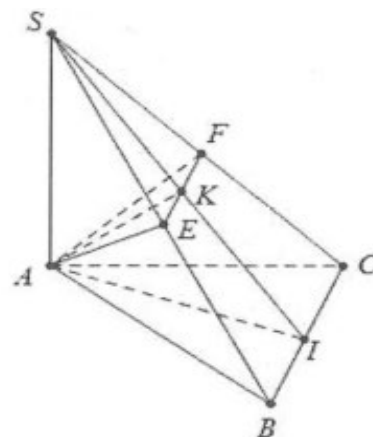
Qua K dựng đường thẳng vuông góc với SI cắt SB , SC lần lượt tại E và $F \Rightarrow$ thiết diện là tam giác AEF .

Ta có: $AK = \frac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. Tam giác SAI vuông tại A có

đường cao AH nên:

$$SA^2 = SK.SI \Rightarrow \frac{SA^2}{SI^2} = \frac{SK}{SI} = \frac{EF}{BC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{4}{7}$$

Do đó $EF = \frac{4}{7}a \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}AK.EF = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua A , song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC) , xác định thiết diện của mặt

phẳng (α) với hình chóp và tính diện tích thiết diện.

Lời giải

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC thì $SO \perp (ABC)$ (Do $S.ABC$ là khối chóp đều).

Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ mà $BC \perp SO$ suy ra $BC \perp (SAI)$

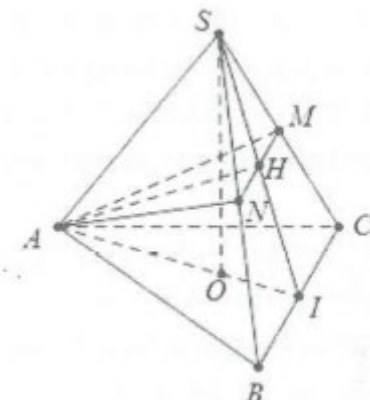
Dựng $AH \perp SI$, lại có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Suy ra $AH \perp (SBC)$. Qua K dựng đường thẳng song song với BC cắt SB , SC lần lượt tại N và $M \Rightarrow$ thiết diện là tam giác AMN .

Ta có: $SA = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H$ là trung điểm của SI

Suy ra $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$. Lại có: $SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Khi đó $AH = \sqrt{AI^2 - HI^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AH.MN = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB .

Đặt $x = AM$ ($0 < x < a$)

a) Tìm thiết diện của hình chóp với (α) . Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x .

Lời giải

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại Q .

Trong mặt phẳng (SAB) , qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại N .

Do $MQ \perp AB \Rightarrow MQ \parallel BC$

Do đó (α) cắt (SBC) theo giao tuyến là NP ($P \in SC$) thì $NP \parallel BC$.

Do $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp MQ$

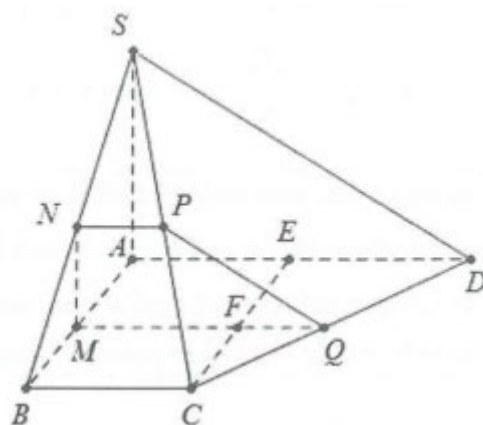
Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại M và N

Trong mp $(ABCD)$, dựng $CE \perp AD$ và cắt MQ tại F

b) Ta có:

$$MF = AE = BC = a \Rightarrow DE = a; \frac{FQ}{ED} = \frac{CF}{CE} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow FQ = a-x$$

$$\text{Suy ra } MQ = 2a - x, \text{ mặt khác } \frac{AM}{AB} = \frac{SN}{SB} = \frac{NP}{BC} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{NP}{a} \Rightarrow NP = x$$



Lại có: $\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Leftrightarrow MN = 2a - 2x$

Diện tích thiết diện là: $S_{MNPQ} = \frac{MQ + NP}{2} \cdot MN = 2a(a-x)$

Ví dụ 4: Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Điểm M là một điểm tùy ý trên cạnh AB , đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB .

a) Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) .

b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x . Tìm x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt AC tại Q .

Trong mặt phẳng (SAB) , qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại N .

Do $MQ \perp AB \Rightarrow MQ \parallel BC$

Do đó (α) cắt (SBC) theo giao tuyến là NP ($P \in SC$) thì $NP \parallel BC$. Lại có: $MN \parallel SA \Rightarrow (\alpha)$ cắt (SAC) theo giao tuyến là $PQ \Rightarrow PQ \parallel SA \parallel MN \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Do $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp AB$

Vậy thiết diện của chóp với (α) là hình chữ nhật $MNPQ$.

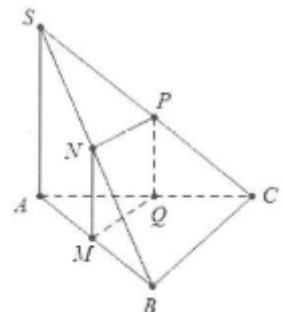
Ta có: $AB = BC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

Mặt khác $\frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BC} = \frac{x}{a} \Rightarrow MQ = x$, $\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = \sqrt{3}(a-x)$

Diện tích thiết diện là $S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \sqrt{3}x(a-x)$

Áp dụng bất đẳng thức: $a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ta có: $S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \sqrt{3}x(a-x) \leq \sqrt{3} \left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2$

Suy ra $S_{MNPQ} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ đạt được khi $x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

a) (α) cắt khối chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

b) Biết $SA = a$. Tính thiết diện tìm được ở câu a.

Lời giải

a) Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AH \perp SD$ tại H . Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$$

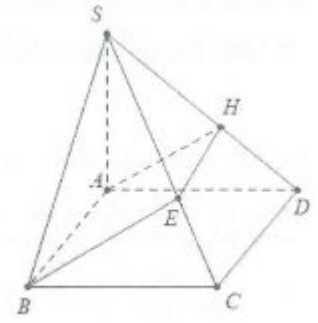
$$\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$$

(α) là mặt phẳng chứa AB đồng thời chứa AH vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Vậy $(\alpha) \perp (SCD)$ và $(\alpha) \equiv (AB, AH)$

Ta có: $AB \parallel CD$ nên $CD \parallel (\alpha)$ và H là điểm chung của (α) và (SCD) nên giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua H và song song với CD cắt SC tại E . Ta có thiết diện của (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang vuông $AHEB$ vuông tại A và H vì $AB \perp (SAD)$

b) Do $SA = AD = a \Rightarrow H$ là trung điểm của $AD \Rightarrow AH = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; EH = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$

Diện tích hình thang vuông $AHEB$ là: $S_{AHEB} = \frac{AB + EH}{2} \cdot AH = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{8}$



Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có $SA \perp (ABCD)$. Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC , (α) cắt SC tại I .

a) Xác định giao điểm K của SO với mặt phẳng (α)

b) Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC) và $BD \parallel (\alpha)$

c) Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (α) . Tìm thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (α) .

d) Biết rằng $AB = a$; $SA = a\sqrt{2}$. Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu c.

Lời giải

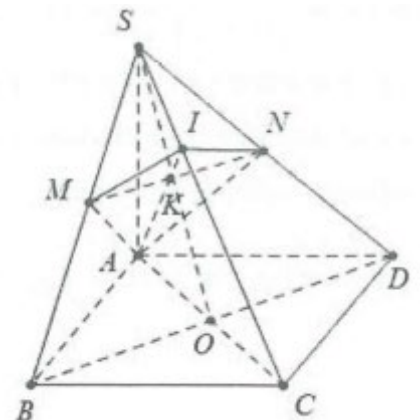
a) Gọi $I = (\alpha) \cap SC$. Ta có: $(\alpha) \perp SC, AI \subset (\alpha) \Rightarrow SC \perp AI$

Vậy AI là đường cao của tam giác vuông SAC . Trong mặt phẳng (SAC) , đường cao AI cắt SO tại K và $AI \subset (\alpha)$ nên K là giao điểm của SO với (α) .

b) Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Mặt khác $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$

Do $BD \perp SC$ và $(\alpha) \perp SC$ nhưng BD không chứa trong (α) nên $BD \parallel (\alpha)$.



c) Ta có: $K = SO \cap (\alpha)$ và SO thuộc mặt phẳng (SBD) nên K là một điểm chung của (α) và (SBD) . Mặt phẳng (SBD) chứa $BD // (\alpha)$ nên cắt (α) theo giao tuyến $d // BD$. Giao tuyến này đi qua K là điểm chung của (α) và (SBD) . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của d với SB và SD . Thiết diện là tứ giác $AMIN$ có

$$\begin{cases} AI \perp SC \\ MN // BD \end{cases}$$

d) Ta có: $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AI$ mà $BD // MN \Rightarrow AI \perp MN$

Tứ giác $AMIN$ có hai đường chéo vuông góc với nhau nên $S_{AMIN} = \frac{1}{2} AI \cdot MN$

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC cân tại A suy ra AI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến. Khi đó $K = AI \cap SO$ là trọng tâm tam giác SAC .

Lại có: $\frac{SK}{SO} = \frac{MN}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3} BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Mặt khác $AI = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $S_{AMIN} = \frac{1}{2} AI \cdot MN = \frac{a^2}{3}$

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, và có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SCD)$, $(SAC) \perp (SBC)$

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện.

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

Suy ra $(SCD) \perp (SAD)$

Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Ta có: $AICD$ là hình vuông và $IBCD$ là hình bình hành. Do $DI // BC$ và $DI \perp AC \Rightarrow AC \perp CB$

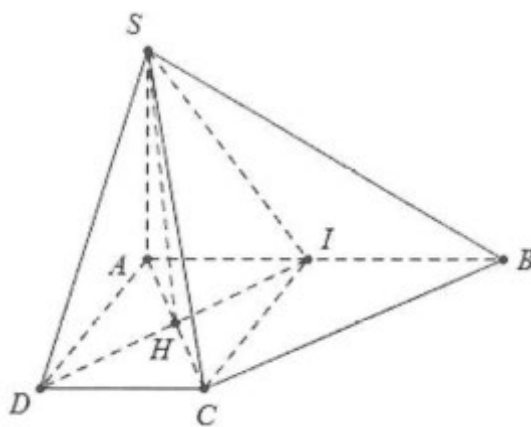
Do đó $CB \perp (SAC)$

Vậy $(SBC) \perp (SAC)$

c) Ta có: $\begin{cases} DI \perp AC \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC)$

Vậy mặt phẳng (α) chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) chính là mặt phẳng (SDI) .

Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) là tam giác đều SDI có $SD = DI = AI = a\sqrt{2}$



Diện tích tam giác SDI là: $S_{SDI} = \frac{SD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2})^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

☑ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $AC \perp (SAB)$ B. $BC \perp (SAB)$ C. $AB \perp (SBC)$ D. $AC \perp (SBC)$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có hai tam giác ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $CM \perp (ABD)$ B. $AB \perp (MCD)$ C. $AB \perp (BCD)$ D. $MD \perp (ABC)$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $BC \perp (SAB)$ B. $CD \perp (SAD)$ C. $AC \perp (SBD)$ D. $BD \perp (SAC)$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm BC . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $AB \perp (SBC)$ B. $BC \perp (SAM)$ C. $BC \perp (SAB)$ D. $AC \perp (SBC)$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $SA \perp (ABCD)$ B. $AC \perp (SBC)$ C. $AC \perp (SBD)$ D. $AC \perp (SCD)$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $BC \perp SB$ B. $CD \perp SD$ C. $BD \perp SC$ D. $SA \perp AB$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = SD$ và đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $BC \perp (SAB)$ B. $SO \perp (ABCD)$ C. $CD \perp (SAD)$ D. $SA \perp (ABCD)$

Câu 8: Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.
D. Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song với nhau thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

Câu 9: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- D. Hai đường không cắt nhau và không song song với nhau thì chéo nhau.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (α) .
- B. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (α) thì a song song hoặc thuộc mặt phẳng (α) .
- C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (α) thì a vuông góc với b .
- D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

Câu 11: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
- D. Mặt phẳng (α) và đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng d thì (α) song song với a .

Câu 12: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 13: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 14: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

C. Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng b và b vuông góc với đường thẳng a thì a song song với (α) .

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

Câu 15: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

D. Cho hai đường thẳng song song với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 16: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) , trong đó $a \perp (\alpha)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $b \perp (\alpha)$ thì $a // b$.

B. Nếu $b // (\alpha)$ thì $b \perp a$

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (\alpha)$

D. Nếu $a \perp b$ thì $b // (\alpha)$

Câu 17: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $a // (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b // (\alpha)$

B. Nếu $a // (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $a \perp b$

C. Nếu $a // (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$

D. Nếu $a // (\alpha)$ và $b // a$ thì $b // (\alpha)$

Câu 18: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b // (\alpha)$

B. Nếu $a // (\alpha)$ và $a // b$ thì $b // (\alpha)$

C. Nếu $a // (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$

D. Nếu $a // (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \perp a$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi trong các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (SAB)

B. (SAD)

C. (SAC)

D. (SCD)

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (SAB)

B. (SAC)

C. (SAD)

D. (SCD)

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Hỏi đường thẳng SC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (AHK)

B. (AHD)

C. (AKB)

D. (SBD)

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC bằng nhau. Hỏi trong các mặt phẳng trung trực của các đoạn thẳng AB, BC, CA có bao nhiêu mặt phẳng chứa điểm S ?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Khi đó hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là

- A. Giao điểm của các đường trung tuyến của tam giác ABC .
B. Giao điểm của các đường phân giác của tam giác ABC .
C. Giao điểm của các đường trung trực của tam giác ABC .
D. Giao điểm của các đường cao của tam giác ABC .

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Từ A , kẻ $AM \perp SB$ với $M \in SB$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $SB \perp (MAC)$ B. $AM \perp (SAD)$ C. $AM \perp (SBD)$ D. $AM \perp (SBC)$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B . Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AH \perp SB$. B. $AH \perp BC$. C. $AH \perp AC$. D. $AH \perp SC$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân tại C . Gọi H và K lần lượt là trung điểm AB và SB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $CH \perp AK$. B. $CH \perp SB$. C. $CH \perp SA$. D. $AK \perp SB$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. O là giao điểm của 2 đường chéo và $SA = SC$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $BD \perp (SAC)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $AB \perp (SAC)$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $SA \perp BD$. B. $SC \perp BD$. C. $SO \perp BD$. D. $AD \perp SC$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , tam giác SAB vuông tại A và tam giác SCD vuông tại D . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $AC = BD$. B. $SO \perp (ABCD)$. C. $AB \perp (SAD)$. D. $BC \perp AB$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AD = CD = a$, $AB = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi E là trung điểm AB . Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

- A. $CE \perp (SAB)$. B. $CB \perp (SAB)$. C. $\triangle SDC$ vuông tại C . D. $CE \perp (SDC)$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA = SB = SC$. Xác định hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $H \equiv B$.

B. $H \equiv A$.

C. H là trung điểm của AC .

D. H là trọng tâm của tam giác ABC .

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. A là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

B. B là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAB) .

C. D là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAD) .

D. A là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (SAB) .

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

B. A là hình chiếu vuông góc của C lên mặt (SAB) .

C. Trung điểm của AD là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAD) .

D. O là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAC) .

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. SC

B. AC

C. SB

D. SD

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. SD .

B. SC .

C. SB .

D. CD .

Câu 37: Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi FH là đường cao của tam giác AFD . Đường thẳng FH vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. BF .

B. BE .

C. EH .

D. BH .

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trên cạnh AC . Gọi I là trọng tâm của tam giác HBC . Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.

A. $AB \perp CI$.

B. $SB \perp CI$.

C. $SC \perp CI$.

D. $CI \perp (SAB)$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AD, AB, SD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $DN \perp (SAB)$.

B. $DN \perp KB$.

C. $DN \perp (SAC)$.

D. $DN \perp KC$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AD = DC = a$, $AB = 2a$. Hình chiếu của S lên $(ABCD)$ trùng với điểm A . Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.

- A. $AC \perp (SBC)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $BC \perp SC$. D. $AC \perp SC$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $HK \perp AC$. B. $HK \perp BC$. C. $AK \perp CH$. D. $AK \perp SB$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $IO \perp (ABCD)$. B. $BC \perp (SBA)$.
C. $AC \perp (BID)$. D. Tam giác SCD vuông cân ở D .

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, F lần lượt là trung điểm SC, SD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $IO \perp (ABCD)$. B. $IF \parallel AB$. C. $IF \perp (SAD)$. D. $FO \perp (ABCD)$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, F lần lượt là trung điểm SC, SD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $IF \parallel AB$. B. $(FIO) \parallel (SAB)$.
C. $SD \perp (FAB)$. D. Tam giác IFO vuông tại I .

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi I, F lần lượt là trung điểm SC, BC . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $IF \parallel (SAD)$ B. $SA \parallel IF$ C. $AB \perp (SCD)$ D. $IO \perp (ABCD)$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi I, E, F lần lượt là trung điểm SC, SB, SD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Tam giác IFE đều B. $IO \perp (ABCD)$
C. $FE \perp (SAC)$ D. $SA \perp (IFE)$

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và SO vuông góc với đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $SO \perp MN$ B. $MP \perp QN$ C. $SO \perp (MNPQ)$ D. $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB là tam giác đều và hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm AB . Gọi I, F lần lượt là trung điểm AB và AD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BD \parallel (SIF)$. B. $CF \perp (SIF)$. C. $CF \perp (SID)$. D. $AC \perp SF$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB là tam giác đều và hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm AB . Gọi I, F, J lần lượt là trung điểm của AB, AD và SA . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $SI \perp CD$. B. $CF \perp (SID)$.
C. $AC \perp (IFJ)$. D. Tam giác SIF vuông tại I .

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $AB = a$, $AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$. Biết rằng

$SO \perp (ABCD)$ và $SB = a$, khẳng định nào sau đây về tam giác SAC là **đúng**?

- A. Tam giác SAC vuông, không đều. B. Tam giác SAC cân, không vuông.
C. Tam giác SAC vuông cân. D. Tam giác SAC đều.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi d_1 là đường thẳng qua S và vuông với $(ABCD)$, d_2 là giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD) , d_3 là giao tuyến của các mặt (SAD) và (SBC) . Xét 3 mệnh đề sau

- (I) $d_1 \perp mp(d_2, d_3)$
(II) $d_2 \perp mp(d_3, d_1)$
(III) $d_3 \perp mp(d_1, d_2)$

Hỏi trong các mệnh đề (I), (II), (III), có tất cả bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 52: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC, DB = DC$. Gọi I là trung điểm của BC , H là hình chiếu của A lên DI . Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. (ABC) . B. (BCD) . C. (CDA) . D. (DAB) .

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Gọi I là trung điểm của SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BD \perp SC$.
B. $IO \perp (ABCD)$
C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD .
D. $AC \perp (SBD)$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A. Hình thang vuông. B. Hình thang cân. C. Hình bình hành. D. Hình chữ nhật.

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $BC \perp (SAH)$. B. $HK \perp (SBC)$.
C. $BC \perp (SAB)$. D. SH, AK và BC đồng quy.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $SC \perp (AFB)$. B. $SC \perp (AEC)$. C. $SC \perp (AED)$. D. $SC \perp (AEF)$.

Câu 57: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AB \perp (BCD)$. B. $BC \perp AD$. C. $CD \perp (ABD)$. D. $AC \perp BD$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại H, M, K . Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

- A. $AH \perp SB$. B. $HK \perp AM$. C. $AK \perp SD$. D. $AK \perp HK$.

Câu 59: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với đáy là $AB = 2a, CD = a$, các cạnh $AD = BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi trong tam giác $SAB, SAC, SAD, SBC, SBD, SCD$, có tất cả bao nhiêu tam giác vuông?

- A. 6 B. 3 C. 5 D. 4

Câu 60: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cắt hình chóp bởi mặt phẳng qua A và vuông góc với SC , ta được thiết diện là

- A. một hình chữ nhật.
B. một hình vuông.
C. một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau.
D. một hình thoi.

☑ HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

Câu 61: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.
B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Câu 62: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không nằm trong (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a .

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 63: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm duy nhất có một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 64: Cho (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và a, b, c, d là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau đúng, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$. **B.** $d \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$.

C. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$. **D.** Nếu $c \parallel m$ thì $c \parallel (\alpha)$ và $c \parallel (\beta)$.

Câu 65: Cho (P) và (Q) cắt nhau và điểm M . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Có duy nhất một mặt phẳng qua M và vuông góc với (P) .

B. Có vô số mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q) .

C. Có duy nhất một mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q) .

D. Không có mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q) .

Câu 66: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây.

A. Qua một điểm duy nhất có một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Khi đó luôn có một mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Câu 67: Trong các mệnh đề sau đúng, mệnh đề nào **đúng**?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

- B. Có duy nhất một mặt phẳng qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- C. Có duy nhất một mặt phẳng qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- D. Có duy nhất một mặt phẳng qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 68: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây.

- A. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.
- B. Cho đường thẳng $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.
- C. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b , luôn luôn có mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.
- D. Cho hai đường a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Câu 69: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.
- D. Một mặt phẳng (P) và một đường thẳng a không nằm trong (P) và cùng vuông góc với đường thẳng b thì $a \parallel (P)$.

Câu 70: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây.

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Đường thẳng a và mặt phẳng (α) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì a song song với b .

Câu 71: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P) . Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q) .
- B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a , mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q) .
- C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q) .
- D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 72: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây.

- A. Nếu $a \subset (P), b \subset (Q)$ và $a \perp b$ thì $(P) \perp (Q)$
- B. Nếu $a \subset (P), b \subset (Q)$ và $(P) \perp (Q)$ thì $a \perp b$
- C. Nếu $(P) \perp (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a \perp (Q)$

D. Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp (Q)$ thì $(P) \perp (Q)$

Câu 73: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Trong các mặt phẳng chứa các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 74: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Trong số các mặt phẳng chứa mặt bên hoặc mặt đáy của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (SAB) ?

- A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

Câu 75: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SAC) .
B. Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SBD) .
C. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBD) .
D. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (SDC) .

Câu 76: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Gọi AH và AK lần lượt là các đường cao của các tam giác SAB và SAC . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây.

- A. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (SAB) .
B. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (AHK) .
C. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (AHC) .
D. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (AKB) .

Câu 77: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của AD . Trong các điểm sau, điểm nào là chân đường cao của hình chóp?

- A. A B. B C. I D. O

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Hãy xác định đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ trong những đường sau đây?

- A. SA B. SB C. SO D. SC

Câu 79: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD . Các mặt phẳng (SCI) và (SDI) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. AD vuông góc với (SAB) . B. BC vuông góc với (SAB) .
C. CD vuông góc với (SAB) . D. IJ vuông góc với (SAB) .

Câu 80: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Biết góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính SO .

- A. $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $SO = a\sqrt{2}$ D. $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Câu 81: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC , H là hình chiếu của I lên SC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(SBC) \perp (SAB)$ B. $(BIH) \perp (SBC)$ C. $(SAC) \perp (SAB)$ D. $(SAC) \perp (SBC)$

Câu 82: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC , H là hình chiếu của I lên SC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(SAC) \perp (SAB)$ B. $(BIH) \perp (SBC)$ C. $(SAC) \perp (SBC)$ D. $(SBC) \perp (SAB)$

Câu 83: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , M là trung điểm AB , N là trung điểm AC , $(SMC) \perp (ABC)$, $(SBN) \perp (ABC)$, G là trọng tâm tam giác ABC , I là trung điểm BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $AB \perp (SMC)$ B. $IA \perp (SBC)$ C. $BC \perp (SAI)$ D. $AC \perp (SBN)$

Câu 84: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , M là trung điểm AB , N là trung điểm AC , $(SMC) \perp (ABC)$, $(SBN) \perp (ABC)$, G là trọng tâm tam giác ABC , I là trung điểm BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(SIN) \perp (SMC)$ B. $(SAC) \perp (SBN)$ C. $(SIM) \perp (SBN)$ D. $(SMN) \perp (SAI)$

Câu 85: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(SCD) \perp (SAD)$ B. $(SBC) \perp (SIA)$ C. $(SDC) \perp (SAI)$ D. $(SBD) \perp (SAC)$

Câu 86: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ có đáy ABC là tam giác cân ở A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $H \in SC$ B. $H \in SB$
C. H trùng với trọng tâm ΔSBC D. $H \in SI$ (với I là trung điểm của BC)

Câu 87: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt bên ACD và BCD là hai tam giác cân có đáy CD . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (ACD) . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $H \in AM$ (M là trung điểm của CD).
B. $(ABH) \perp (ACD)$.
C. AB nằm trên mặt phẳng trung trực của CD
D. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là $\widehat{ADB}$.

Câu 88: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh bên SA vuông góc với đáy, H , K lần lượt là hình chiếu của A lên SC , SD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(SIC) \perp (SCD)$ B. $(SCD) \perp (AKC)$ C. $(SAC) \perp (SBD)$ D. $(AHB) \perp (SCD)$

Câu 89: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(SBC) \perp (SIA)$ B. $(SBD) \perp (SAC)$ C. $(SDC) \perp (SAI)$ D. $(SCD) \perp (SAD)$

Câu 90: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Trong số các mặt phẳng chứa mặt đáy và các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (SAB) .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 91: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với $(ABCD)$. Trong các mệnh đề sau, hãy cho biết mệnh đề nào **đúng**.

- A. (SAC) vuông góc với (SBD) . B. (SBD) vuông góc với $(ABCD)$.
C. (BCD) vuông góc với (ACD) . D. (SAB) vuông góc với (SAD)

Câu 92: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và tam giác BCD vuông tại B . Trong các mặt phẳng sau, cặp nào vuông góc với nhau?

- A. (ABC) và (ABD) . B. (ABD) và (BCD) .
C. (BCD) và (ACD) . D. (ACD) và (ABC) .

Câu 93: Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác vuông tại B . Mặt phẳng (ABC) vuông góc với (BCD) . Trong các cạnh của tứ diện đã cho, cạnh nào là đường cao?

- A. AB B. BC C. CD D. BD

Câu 94: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 3a$, $BC = 4a$. Biết $SA \perp (ABC)$ và góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° , tính diện tích của tam giác SBC .

- A. $12a^2$ B. $18a^2$ C. $3a^2\sqrt{3}$ D. $6a^2$

Câu 95: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, mặt phẳng SBC tạo với đáy (ABC) góc 30° . Tính diện tích của tam giác SBC .

- A. a^2 B. $\frac{a^2}{2}$ C. $a^2\sqrt{3}$ D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Câu 96: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Biết diện tích tam giác SBD bằng a^2 . Tính SA .

- A. $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ D. $SA = \frac{a}{2}$

Câu 97: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC , J là hình chiếu của A lên BC . Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

- A. góc $\widehat{SBA}$ B. góc $\widehat{SJA}$ C. góc $\widehat{SMA}$ D. góc $\widehat{SCA}$

Câu 98: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , biết rằng $(SAB) \perp (ABC)$, $SA = SB = AC$, I là trung điểm AB . Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) . Tính α .

- A. $\alpha = 30^\circ$ B. $\alpha = 60^\circ$ C. $\alpha = 90^\circ$ D. $\alpha = 45^\circ$

Câu 99: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC , J là trung điểm BM . Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. góc $\widehat{SBA}$

B. góc $\widehat{SJA}$

C. góc $\widehat{SCA}$

D. góc $\widehat{SMA}$

Câu 100: Cho tứ diện $S.ABC$ có $(SBC) \perp (ABC)$. SBC là tam giác đều cạnh a . ABC là tam giác vuông tại A và $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) . Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. $\tan \varphi = 3\sqrt{3}$

B. $\varphi = 45^\circ$

C. $\varphi = 30^\circ$

D. $\tan \varphi = 2$

Câu 101: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = AD = 2DC = 2a$. Gọi I là trung điểm AD . Các mặt phẳng (SIC) và (SIB) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Biết góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính diện tích tam giác SBC .

A. $3a^2$

B. $\frac{3a^2}{2}$

C. $\frac{3a^2}{4}$

D. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Câu 102: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = 3a$ và $DC = a$. Gọi I là điểm thuộc đoạn AD sao cho $IA = 2ID$. Biết $SI \perp (ABCD)$ và góc giữa (SBC) và $(SBCD)$ bằng 60° , tính chiều cao của tam giác SBC .

A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$

B. $\frac{4a\sqrt{10}}{5}$

C. $a\sqrt{10}$

D. $\frac{4a\sqrt{30}}{15}$

Câu 103: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và các cạnh $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc?

A. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

B. $x = \frac{a}{2}$

C. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $x = \frac{a}{3}$

Câu 104: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính độ dài đường cao SH của hình chóp.

A. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

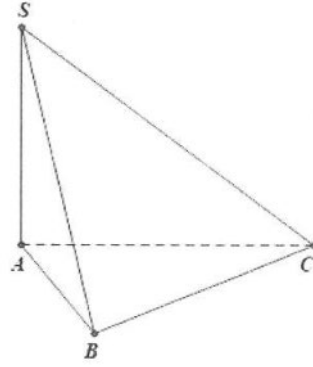
B. $SH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

C. $SH = \frac{a}{2}$

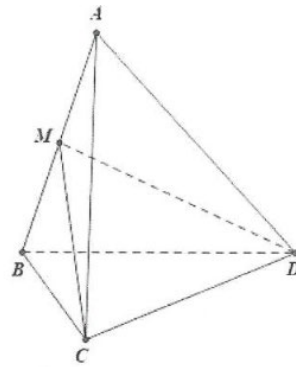
D. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. **Chọn B.**



Câu 2: Ta có $\begin{cases} AB \perp MC \\ AB \perp MD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD)$. **Chọn B.**

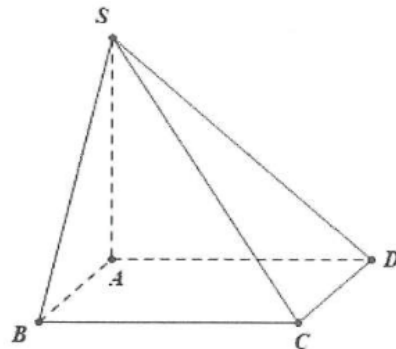


Câu 3: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ nên A đúng

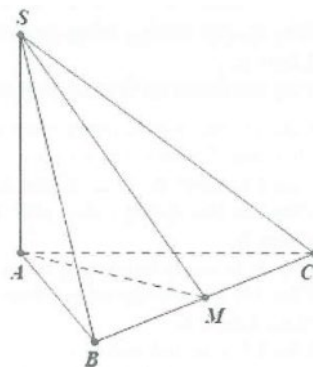
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$ nên B đúng

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ nên D đúng.

Do đó C sai. **Chọn C.**



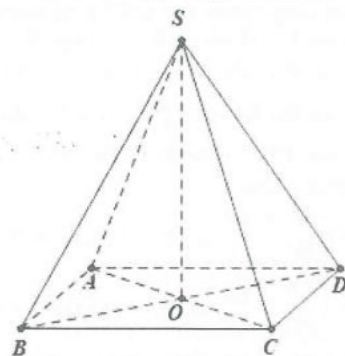
Câu 4: Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$. **Chọn B.**



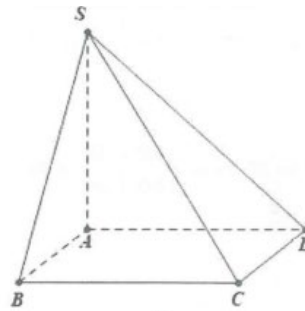
Câu 5: Gọi O là giao điểm của AC và BD

Ta có $\begin{cases} SA = SB = SC = SD \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

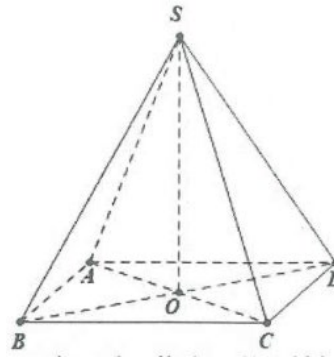
Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$. **Chọn C.**



Câu 6: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. **Chọn A.**



Câu 7: $\begin{cases} SA = SB = SC = SD \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. **Chọn B.**



Câu 8: Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì ta không thể kết luận mặt phẳng đó vuông góc với đường thẳng còn lại nên mệnh đề A sai. **Chọn A.**

Câu 9: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau. **Chọn A.**

Câu 10: Mệnh đề A ta chưa đủ điều kiện để kết luận $b \perp (\alpha)$ nên A sai. **Chọn A.**

Câu 11: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng không thể vuông góc với nhau nên đáp án C sai. **Chọn C.**

Câu 12: Mệnh đề A sai. **Chọn A.**

Câu 13: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau. **Chọn A.**

Đáp án C sai do hai đường thẳng đó không phân biệt nên có thể trùng nhau.

Câu 14: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau. **Chọn A.**

Câu 15: Cho hai đường thẳng song song với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia. **Chọn D.**

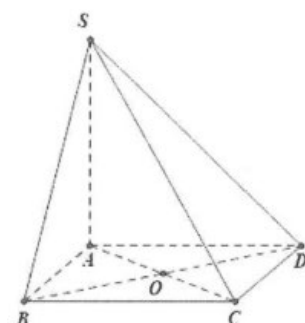
Câu 16: Mệnh đề B sai. **Chọn B.**

Câu 17: Nếu $a // (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $a \perp b$. **Chọn B.**

Câu 18: Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b // (\alpha)$. **Chọn A.**

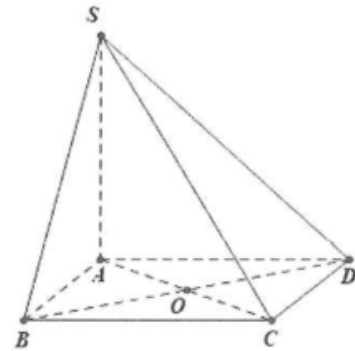
Câu 19: Ta có $SA \perp AB, SA \perp AD \Rightarrow \triangle SAB, \triangle SAD$ là các tam giác vuông.

- $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B
- $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \triangle SCD$ vuông tại D



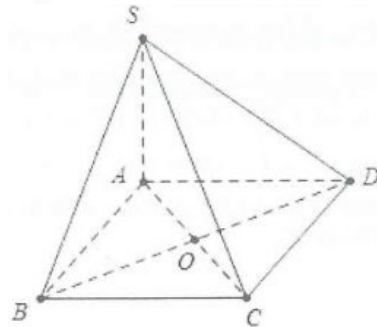
Có 4 mặt bên là tam giác vuông. **Chọn D.**

Câu 20: Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$. **Chọn C.**



Câu 21: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

Mặt khác $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$. **Chọn A.**



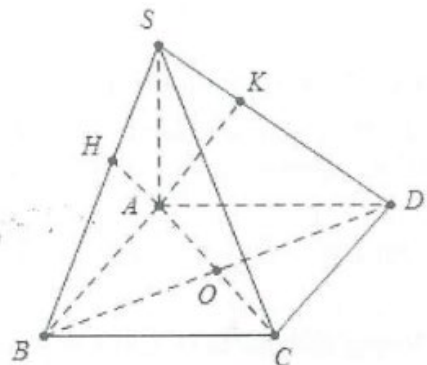
Câu 22: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

Khi đó $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Lại có $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (1)

Tương tự chứng minh trên ta có: $AK \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHK)$. **Chọn A.**



Câu 23: Do $\begin{cases} SA = SB \\ SB = SC \\ SC = SA \end{cases} \Rightarrow S \text{ thuộc mặt phẳng trung trực của } AB, BC \text{ và } AC$. **Chọn D.**

Chọn D.

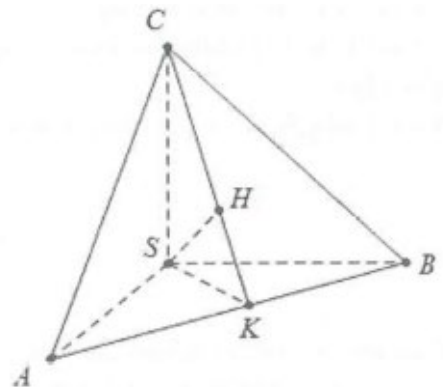
Câu 24: Do $\begin{cases} SC \perp SB \\ SC \perp SA \end{cases} \Rightarrow SC \perp (SAB) \Rightarrow SC \perp AB$

Dựng $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$

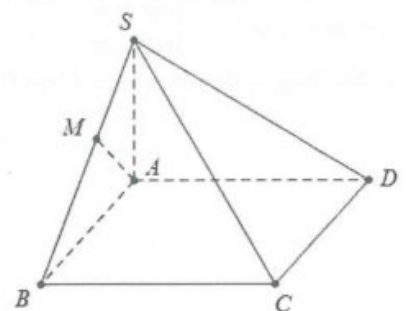
Do đó $AB \perp (SHC) \Rightarrow AB \perp CH$ (1)

Tương tự chứng minh trên ta có: $AH \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow H$ là trực tâm tam giác ABC. **Chọn D.**



Câu 25: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$



Khi đó $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

Lại có $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$. **Chọn D.**

Câu 26: Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

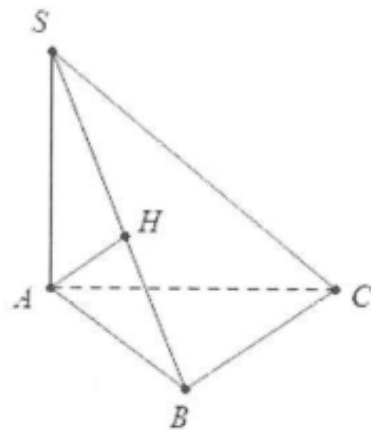
Mặt khác ΔABC vuông ở $B \Rightarrow AB \perp BC$

Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Lại có $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Suy ra các khẳng định đúng là **A, B, D**. Khẳng định **sai** là **C**.

Chọn C.

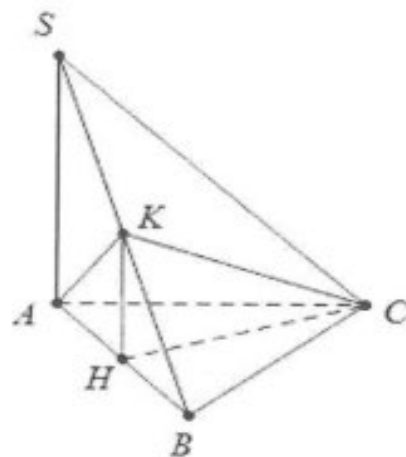


Câu 27: Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$

ΔABC là tam giác cân ở $C \Rightarrow CH \perp AB$ (tam giác cân có đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

Mặt khác $CH \perp SA \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} CH \perp AK \\ CH \perp SA \\ CH \perp SB \end{cases}$

Khẳng định **sai** là **D**. **Chọn D.**

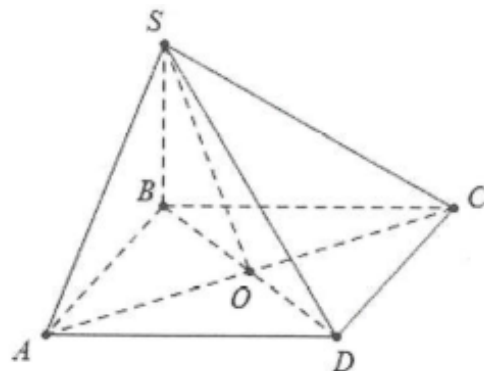


Câu 28: Do ABCD là hình thoi nên $AC \perp BD$ (1)

Lại có: $SA = SC$ và O là trung điểm của AC

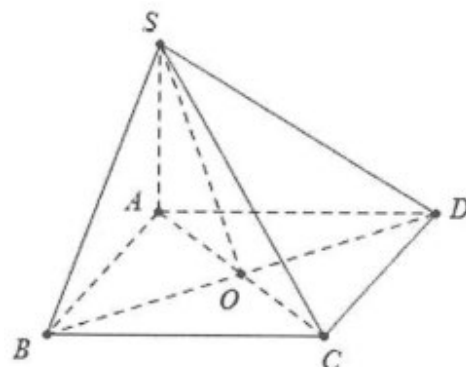
$\Rightarrow SO \perp AC$ (2) (tính chất đường trung tuyến trong tam giác cân).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC \perp (SBD)$. **Chọn C.**



Câu 29: Do ABCD là hình thoi nên $AC \perp BD$

Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$



Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow \begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC \end{cases} \Rightarrow$ các khẳng định **A, B, C** đều đúng. Khẳng định **D** sai. **Chọn D.**

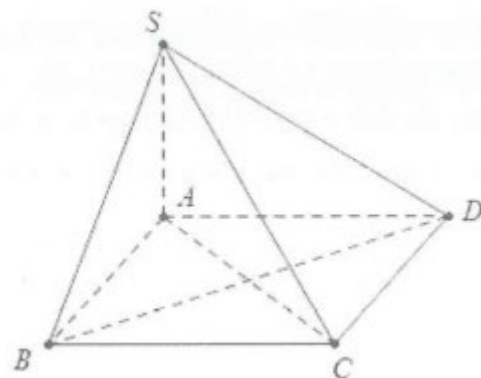
Câu 30: Tam giác SAB vuông tại A và tam giác SCD vuông tại

$$D \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SD \perp CD \end{cases}$$

Mặt khác $AB \parallel CD \Rightarrow SD \perp AB$

Do đó $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật. Các khẳng định đúng là **A, C, D**.

Khẳng định sai là **B**. **Chọn B.**

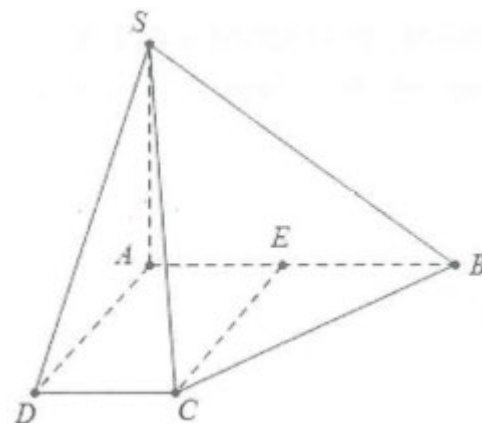


Câu 31: AECD là hình chữ nhật do $AE = CD = a$ và

$$AD \perp AE \Rightarrow CE \perp AE$$

Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CE$

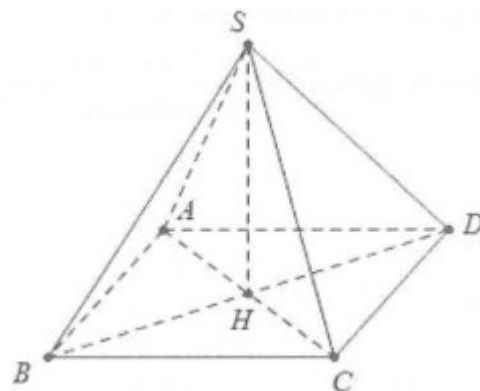
Do đó $CE \perp (SAB)$. **Chọn A.**



Câu 32: Dựng $SH \perp (ABCD)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} HA^2 = SA^2 - SH^2 \\ HB^2 = SB^2 - SH^2 \\ HC^2 = SC^2 - SH^2 \end{cases} \text{ Mặt khác } SA = SB = SC$$

Do đó $HA = HB = HC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC vuông tại B $\Rightarrow H$ là trung điểm của AC. **Chọn C.**



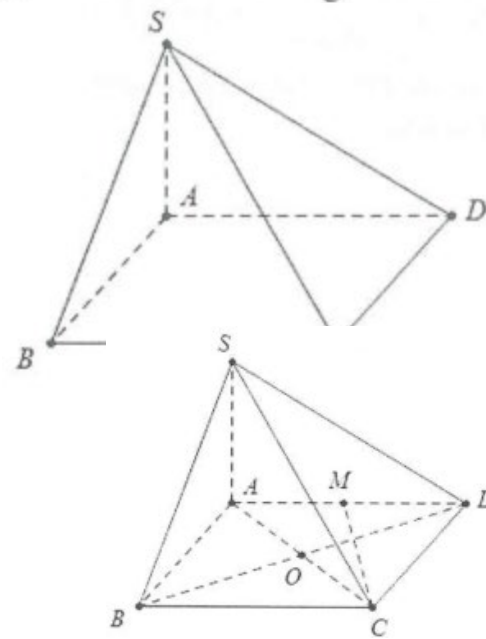
Câu 33: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

Mặt khác $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAB).

Tương tự ta có: $CD \perp (SAB) \Rightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAD)

Các khẳng định đúng là **A, B, C**. Khẳng định **sai** là **D**.

Chọn D.



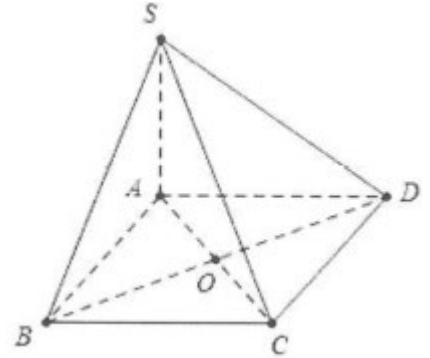
Câu 34: $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp SA$

Do đó $BD \perp (SAC)$ tại O hay O là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAC) . **Chọn D.**

Câu 35: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

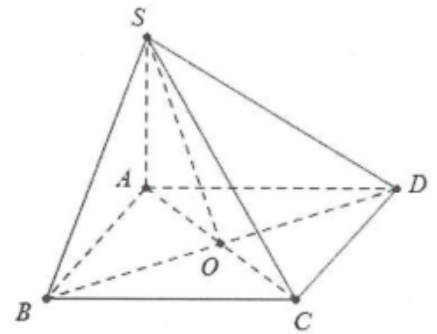
Mặt khác $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. **Chọn C.**



Câu 36: $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$

Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow \begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC \end{cases}$. **Chọn B.**

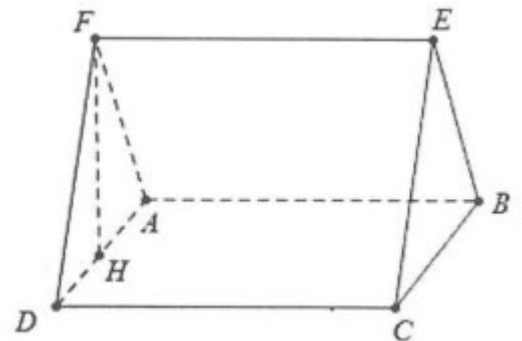


Câu 37: $ABCD$ và $ABEF$ là hình chữ nhật

Khi đó $\begin{cases} AB \perp FA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (FAD) \Rightarrow AB \perp FH$

Lại có: $FH \perp AD \Rightarrow FH \perp (ABCD) \Rightarrow FH \perp BH$

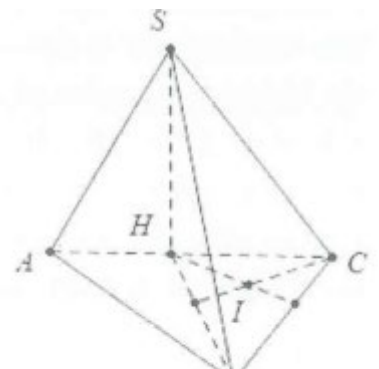
Chọn D.



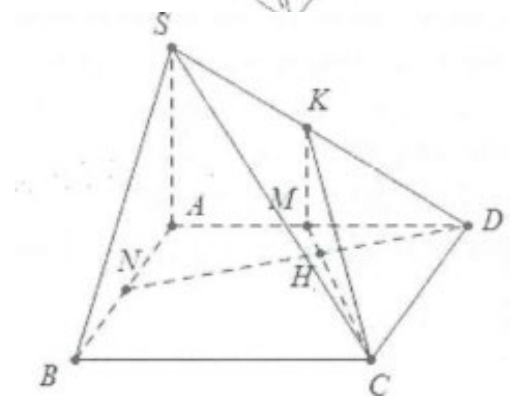
Câu 38: Do I là trực tâm của tam giác $HBC \Rightarrow CI \perp HB$

Do $HC \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CI$

Do đó $CI \perp (SHB) \Rightarrow CI \perp SB$. **Chọn B.**



Câu 39: Gọi $H = CM \cap DN$ ta có: $\widehat{MCD} = \widehat{NAD}$



$$(\text{Do } \widehat{\text{MCD}} = \widehat{\text{NAD}} = \frac{1}{2})$$

$$\text{Lại có: } \widehat{\text{ADN}} + \widehat{\text{NDC}} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{\text{MCD}} + \widehat{\text{HDC}} = 90^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{\text{CHD}} = 90^\circ \Rightarrow \text{CH} \perp \text{HD} \Rightarrow \text{CM} \perp \text{DN} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \text{KM} \text{ là đường trung bình trong tam giác } \text{SAD} \Rightarrow \text{KM} // \text{SA} \Rightarrow \text{KM} \perp (\text{ABCD}) \Rightarrow \text{KM} \perp \text{DN} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \text{DN} \perp (\text{KMC}) \Rightarrow \text{DN} \perp \text{KC}$$

Chọn D.

Câu 40: Gọi M là trung điểm của AB

$$\text{Ta có } \text{AM} // \text{CD} \text{ và } \text{AD} = \text{AM} = \text{CD} = \frac{1}{2} \text{AB}$$

$$\Rightarrow \text{AMCD} \text{ là hình vuông}$$

$$\Rightarrow \text{AC} = \text{BC} = a\sqrt{2} \Rightarrow \text{AC} \perp \text{BC}$$

$$\text{Lại có } \text{SA} \perp \text{BC} \rightarrow \text{BC} \perp (\text{SAC}) \Rightarrow \text{BC} \perp \text{SC}$$

Chọn B.

Câu 41: Xét $\triangle \text{SAB}$ có HK là đường trung bình $\Rightarrow \text{HK} // \text{SA}$

$$\text{Mà } \text{SA} \perp (\text{ABC}) \Rightarrow \text{HK} \perp (\text{ABC}) \Rightarrow \begin{cases} \text{HK} \perp \text{AC} \\ \text{HK} \perp \text{BC} \end{cases}$$

Tam giác ABC cân tại C, có H là trung điểm AB

$$\rightarrow \text{CH} \perp \text{AB} \text{ mà } \text{CH} \perp \text{SA} \Rightarrow \text{CH} \perp (\text{SAB}) \Rightarrow \text{CH} \perp \text{AK}$$

Chọn D.

Câu 42: Xét $\triangle \text{SAC}$ có IO là đường trung bình $\Rightarrow \text{IO} // \text{SA}$

$$\text{Mà } \text{SA} \perp (\text{ABCD}) \Rightarrow \text{IO} \perp (\text{ABCD})$$

- Ta có $\text{SA} \perp \text{BC}; \text{AB} \perp \text{BC} \rightarrow \text{BC} \perp (\text{SAB})$
- Vì $\text{IO} \perp (\text{ABCD}) \Rightarrow \text{IO} \perp \text{AC}$ mà $\text{AC} \perp \text{BD} \Rightarrow \text{AC} \perp (\text{BID})$
- Lại có $\text{AD} \perp \text{CD}; \text{SA} \perp \text{CD} \rightarrow \text{CD} \perp (\text{SAD})$

$$\text{Suy ra } \text{SD} \perp \text{CD} \Rightarrow \triangle \text{SCD} \text{ vuông tại D. Chọn D.}$$

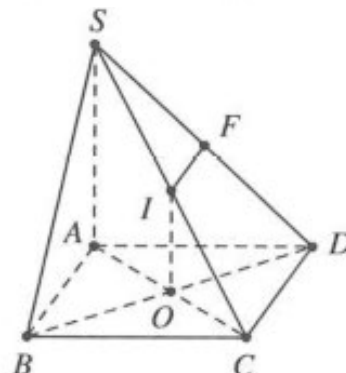
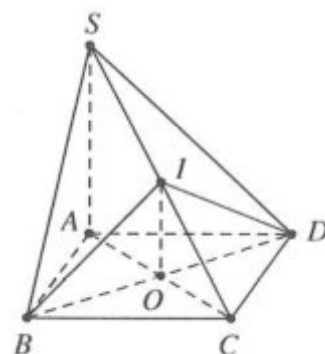
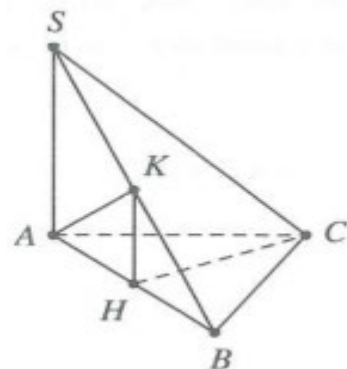
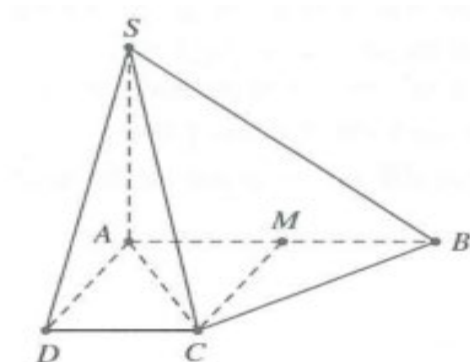
Câu 43: Xét $\triangle \text{SAC}$ có IO là đường trung bình $\Rightarrow \text{IO} // \text{SA}$

$$\text{Mà } \text{SA} \perp (\text{ABCD}) \Rightarrow \text{IO} \perp (\text{ABCD})$$

- Xét $\triangle \text{SCD}$ có IF là đường trung bình $\Rightarrow \text{IF} // \text{CD}$

$$\text{Mà } \text{AB} // \text{CD} \rightarrow \text{IF} // \text{AB}$$

- Ta có $\text{AD} \perp \text{CD}; \text{SA} \perp \text{CD} \rightarrow \text{CD} \perp (\text{SAD})$



Mà $IF // CD \rightarrow IF \perp (SAD)$. **Chọn D.**

Câu 44: Xét $\triangle SCD$ có IF là đường trung bình $\Rightarrow IF // CD$

Mà $AB // CD \rightarrow IF // AB$

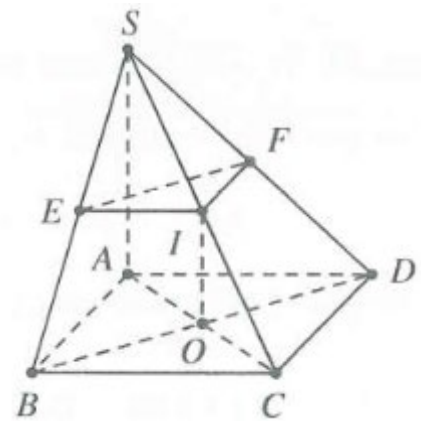
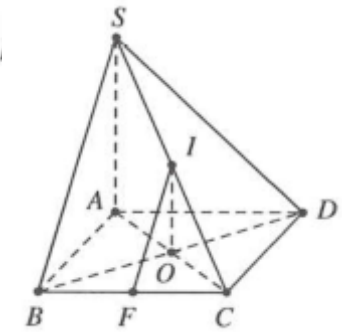
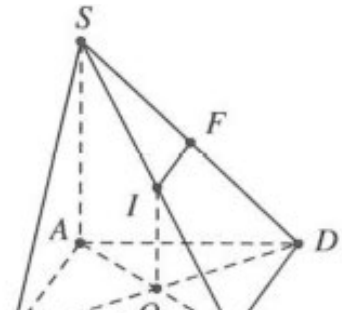
Xét $\triangle SAC$ có IO là đường trung bình $\Rightarrow IO // SA$

Suy ra $mp(FIO) // mp(SAB)$

Vì $IO \perp AB$ mà $IF // AB \Rightarrow IO \perp IF$. **Chọn C.**

Câu 45: Xét $\triangle SAC$ có IO là đường trung bình $\Rightarrow IO // SA$

Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp (ABCD)$. **Chọn D.**



Câu 46: Xét $\triangle SCD$ có IF là đường trung bình $\Rightarrow \begin{cases} IF // CD \\ IF = \frac{1}{2}CD \end{cases}$

Xét $\triangle SBC$ có IE là đường trung bình $\Rightarrow \begin{cases} IE // BC \\ IE = \frac{1}{2}BC \end{cases}$

Xét $\triangle SBD$ có EF là đường trung bình $\Rightarrow \begin{cases} EF // BD \\ EF = \frac{1}{2}BD \end{cases}$

Suy ra $IE = IF \neq EF$ vì $BD = BC\sqrt{2}$

• Xét $\triangle SAC$ có IO là đường trung bình $\Rightarrow IO // SA$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.

• Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ mà $EF // BD \rightarrow EF \perp (SAC)$. **Chọn D.**

Câu 47: Xét $\triangle SAB$ có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN // AB$

$\Rightarrow MN // (ABCD)$ mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp MN$

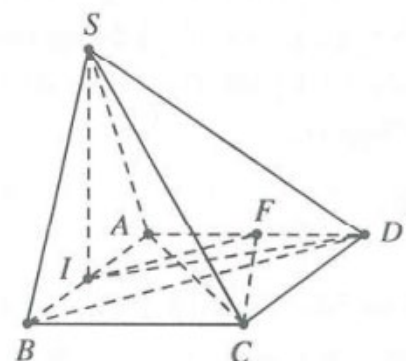
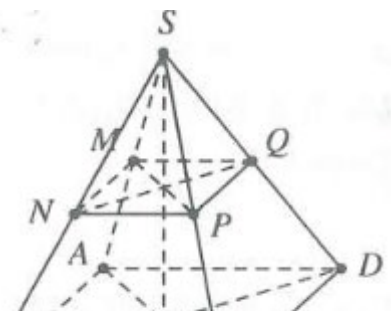
• Vì $MP // AC$; $NQ // BD$ mà $AC \perp BD \Rightarrow MP \perp NQ$

• Vì $NP // BC \Rightarrow NP // (ABCD) \Rightarrow (MNPQ) // (ABCD)$

Mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp (MNPQ)$

• Ta có $MN = NP = PQ = QM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Chọn D.



Câu 48: Xét $\triangle ABD$ có IF là đường trung bình $\Rightarrow IF // BD$

$\Rightarrow BD \parallel (SIF)$. Mà $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp (SIF) \Rightarrow AC \perp SF$

• Ta có $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp CF$

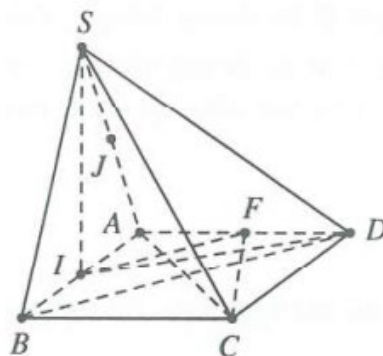
Mà CF không vuông góc với IF

Suy ra CF không vuông góc với $mp (SIF)$. **Chọn B.**

Câu 49: Ta có $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp CD$

• Lại có $SI \perp CF; CF \perp ID \rightarrow CF \perp (SID)$

• Vì $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp IF \Rightarrow \triangle SIF$ vuông tại I . **Chọn D.**



Câu 50: Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC = BD = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$

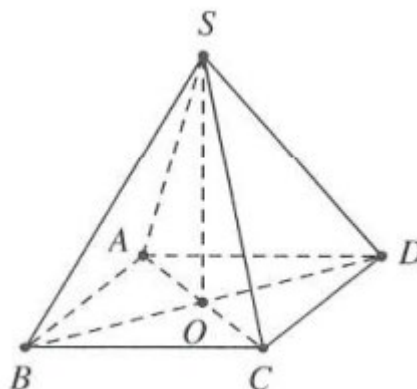
Tam giác SBO vuông tại O , có

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{SB^2 - \frac{BD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Tam giác SAO vuông tại O , có

$$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = a$$

Suy ra $SA = SC \neq AC \rightarrow \triangle SAC$ cân tại S . **Chọn B.**



Câu 51: Ta có $S = (SAB) \cap (SCD)$ mà $AB \parallel CD$

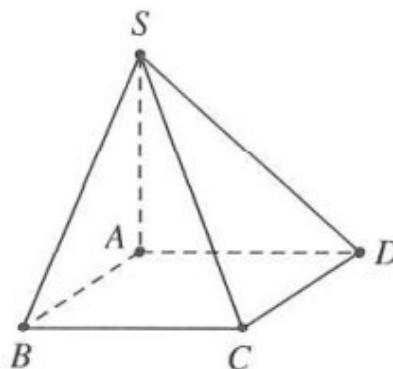
$\rightarrow d_2$ là đường thẳng đi qua S , song song AB (hoặc CD)

Lại có $S = (SAB) \cap (SCD)$ mà $AD \parallel BC$

$\rightarrow d_3$ là đường thẳng đi qua S , song song AD (hoặc BC)

Do đó $d_1 \perp mp(d_2; d_3)$, $d_2 \perp mp(d_3; d_1)$, $d_3 \perp mp(d_1; d_2)$

Chọn D.

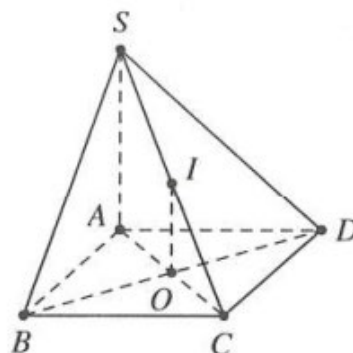


Câu 52: Ta có $AH \perp DI$ mà $DI \subset (ABC) \rightarrow AH \perp (ABC)$. **Chọn**

A.

Câu 53: Ta có $SA \perp BD; AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Mà $BD \cap (SAC) = O$ là trung điểm của BD



$\Rightarrow (SAC)$ là mặt phẳng trung trực của BD .

Xét ΔSAC có IO là đường trung bình $\Rightarrow IO // SA$

Mà $SA \perp (ABCD) \rightarrow IO \perp (ABCD)$.

Chọn D.

Câu 54: Ta có $AB \perp BC; SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

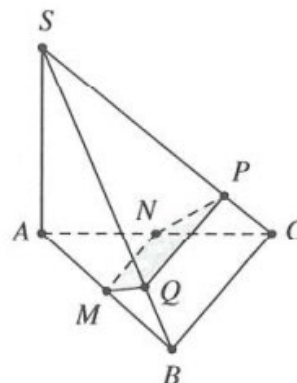
Mà $SB \perp mp(\alpha) \rightarrow BC // mp(\alpha)$

Qua M kẻ đường thẳng $d_1 \perp SB$, cắt SB tại Q

Qua Q kẻ đường thẳng $d_2 // BC$, cắt SC tại P

Qua M kẻ đường thẳng $d_3 // BC$, cắt AC tại N

Suy ra thiết diện cần tìm là hình chữ nhật $MNPQ$. **Chọn D.**



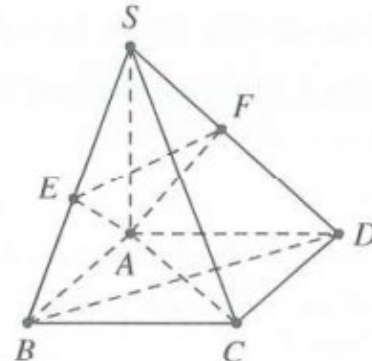
Câu 55: Tam giác ABC không vuông $\Rightarrow BC$ không vuông góc với $mp(SAB)$. **Chọn C.**

Câu 56: Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$

Lại có $\begin{cases} AD \perp DC \\ SA \perp DC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AF$

Mà $\begin{cases} AE \perp SB \\ AF \perp SD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE \perp (SBC) \\ AF \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE \perp SC \\ AF \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AEF)$

Chọn D.

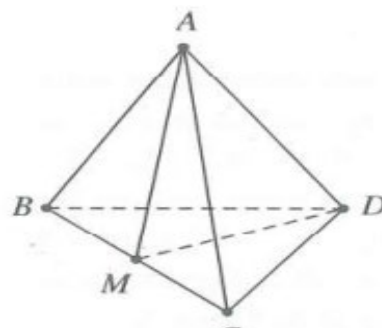


Câu 57: Gọi M là trung điểm của BC

Tam giác ABC cân tại $A \rightarrow AM \perp BC$

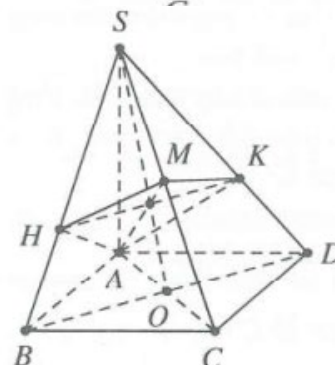
Tam giác DBC cân tại $D \rightarrow DM \perp BC$

Suy ra $BC \perp (ADM) \rightarrow BC \perp AD$. **Chọn B.**



Câu 58: Nối $AM \cap SO = I$. Vì $BD \perp SC \Rightarrow BD // mp(AHMK)$

Qua I kẻ đường thẳng $d // BD$, cắt SB , SD tại H , K .



Ta có $SC \perp (AHMK) \rightarrow AH \perp SC$

Mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB$

Tương tự, ta chứng minh được $AK \perp SD$

Lại có $AM \perp BD$ mà $HK // BD \rightarrow HK \perp AM$

Chọn D.

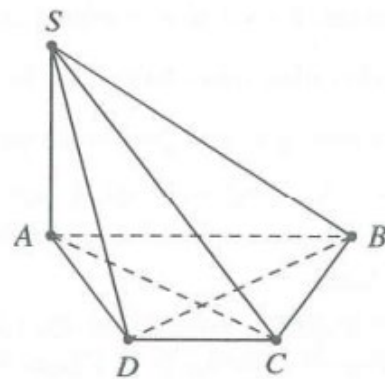
Câu 59: Gọi H là hình chiếu của D trên AB $\Rightarrow AH = \frac{a}{2}$

Tam giác ADH vuông tại H, có $\cos A = \frac{AH}{AD} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\cos A = \frac{AD}{AB} \rightarrow \Delta ABD$ vuông tại D $\Rightarrow AD \perp BD$

Tương tự, ta có $AC \perp BC \Rightarrow \begin{cases} BC \perp (SAC) \\ BD \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SC \\ BD \perp SD \end{cases}$

Do đó $\Delta SAB, \Delta SAD, \Delta SBC, \Delta SBD$ vuông. **Chọn D.**



Câu 60: Nối $AM \cap SO = I$. Vì $BD \perp SC \Rightarrow BD // mp(AHMK)$

Qua I kẻ đường thẳng $d // BD$, cắt SB, SD tại H, K.

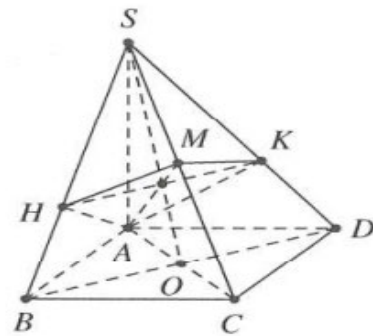
Ta có $SC \perp (AHMK) \rightarrow AH \perp SC$

Mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB$

Tương tự, ta chứng minh được $AK \perp SD$

Lại có $AM \perp BD$ mà $HK // BD \rightarrow HK \perp AM$

Chọn C.



Câu 61: Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến (nếu có) của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó $\Rightarrow$ Mệnh đề **A sai**.

Mệnh đề **B** và **C** đều **sai**. **Chọn D.**

Câu 62: Dễ thấy mệnh đề **B** và **D sai**.

Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến (nếu có) của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó $\Rightarrow$ Mệnh đề **C sai**.

Mệnh đề đúng là **A**. **Chọn A.**

Câu 63: Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến (nếu có) của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó $\Rightarrow$ Mệnh đề **A sai**.

Nếu hai đường thẳng đó song song thì không tồn tại mặt phẳng vuông góc với đường thẳng cho trước $\Rightarrow$ **B sai**.

Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Qua một điểm duy nhất có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước $\Rightarrow$ **D sai**.

Chọn C.

Câu 64: Mệnh đề **A** và **B sai**, mệnh đề **C** đúng: Do $(\alpha) \perp (\beta)$ nên nếu đường thẳng a nằm trên (α) và vuông góc với giao tuyến m thì $a \perp (\beta)$

Mệnh đề **C sai** vì $c // m$ thì c song song hoặc nằm trên (α) và c song song hoặc nằm trên (β) .

Chọn C.

Câu 65: Có vô số mặt phẳng qua M và vuông góc với $(P) \Rightarrow$ **A sai**.

Có duy nhất mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q) (mặt phẳng này qua M và vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q)) $\Rightarrow$ **B sai**.

Suy ra **C đúng** và **D sai**. **Chọn C.**

Câu 66: Qua một điểm duy nhất có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước $\Rightarrow$ **A sai**.

Khẳng định **C sai**, khẳng định **D** chỉ đúng nếu hai đường thẳng đã cho không song song.

Khẳng định **đúng** là **B**. **Chọn B.**

Câu 67: Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước $\Rightarrow$ Mệnh đề **A sai**.

Mệnh đề **B** chỉ đúng nếu đường thẳng cho trước không vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước $\Rightarrow$ Mệnh đề **C sai**. **Chọn D.**

Câu 68: Mệnh đề **A sai** vì mặt phẳng vuông góc với đường này thì song song hoặc chứa với đường kia.

Mệnh đề **C sai** vì trong trường hợp a không vuông góc với b thì không tồn tại mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.

Mệnh đề **D sai**. **Chọn B.**

Câu 69: Các mệnh đề **A, B, C** đều **sai**. **Chọn D.**

Câu 70: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song hoặc chéo nhau $\Rightarrow$ **A sai**.

Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến nếu có của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba $\Rightarrow$ **C sai**.

Mệnh đề **D sai**. **Chọn B.**

Câu 71: Khẳng định **B sai** vì chưa thể khẳng định (P) vuông góc với (Q) . **Chọn B.**

Câu 72: Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp (Q)$ thì $(P) \perp (Q)$. **Chọn D.**

Câu 73: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow$ có 2 mặt bên vuông góc với mặt đáy. **Chọn C.**

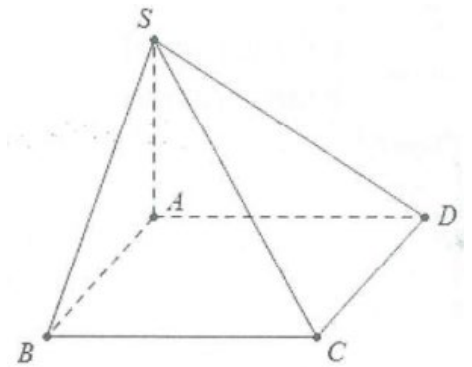
Câu 74: Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

Do ABCD là hình chữ nhật nên $BC \perp AB$

Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} (ABCD) \perp (SAB) \\ (SBC) \perp (SAB) \end{cases}$

Tương tự ta có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$

Vậy có 3 mặt phẳng chứa mặt bên hoặc mặt đáy của hình chóp vuông góc với mặt phẳng (SAB). **Chọn B.**

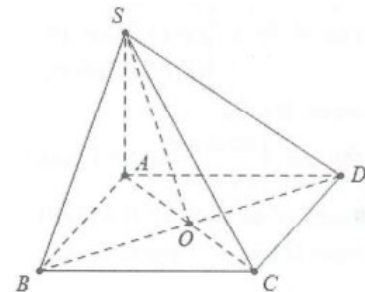


Câu 75: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD; (SAC) \perp (ABCD)$

Do ABCD là hình thoi nên $AC \perp BD$

Suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$

Khẳng định đúng là **A. Chọn A.**



Câu 76: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

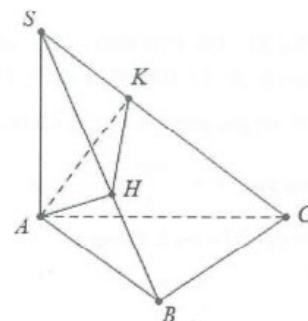
Do ABC là tam giác vuông tại B $\Rightarrow AB \perp BC$

Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$

Lại có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ nên $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow (AHK) \perp (SBC); (AHC) \perp (SBC)$

Khẳng định sai là **D. Chọn D.**

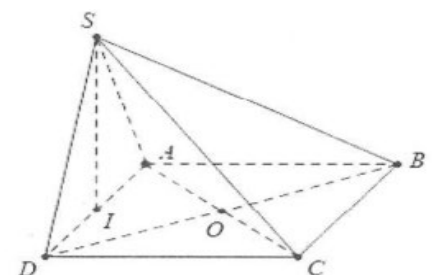


Câu 77: Ta có: $(SAD) \perp (ABCD)$

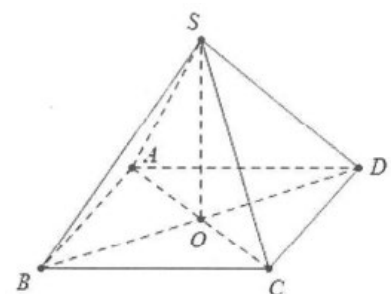
Do $\triangle SAD$ đều nên đường trung tuyến SI đồng thời là đường cao suy ra $SI \perp AD$

Ta có: $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ AD = (SAD) \cap (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD) \\ SI \perp AD \end{cases}$

Chọn C.



Câu 78: Ta có: $O = AC \cap BD \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$



Mặt khác $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Chọn C.

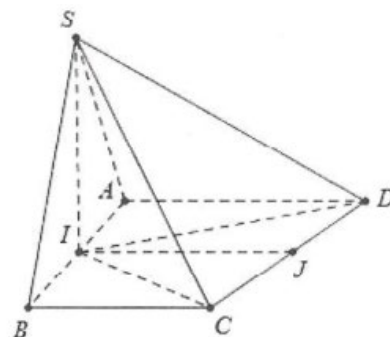
Câu 79: Ta có: $\begin{cases} SI = (SCI) \cap (SDI) \\ (SCI) \perp (ABCD) \\ (SDI) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

Do đó $SI \perp BC$

Mặt khác $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Tương tự $AD \perp (SAB); IJ \perp (SAB)$

Mệnh đề **sai** là **C. Chọn C.**



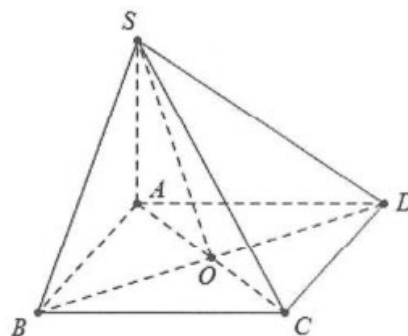
Câu 80: $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$ tại O .

Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SOA)$

Khi đó góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SOA} = 60^\circ$

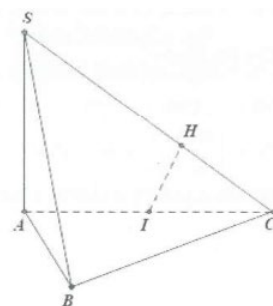
Mặt khác $OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SO \cos 60^\circ = OA$

Do đó $SO = a\sqrt{2}$. **Chọn C.**



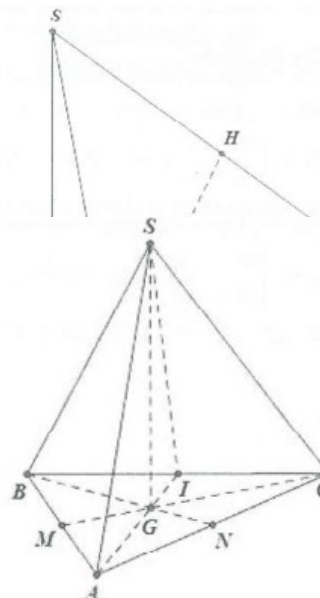
Câu 81: Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$

Mà $AB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$. **Chọn C**



Câu 82: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. **Chọn D.**



Câu 83: Ta có $\begin{cases} (SMC) \perp (ABC) \\ (SBN) \perp (ABC) \end{cases}$

Mà $SG = (SMC) \cap (SBN) \Rightarrow SG \perp (ABC)$

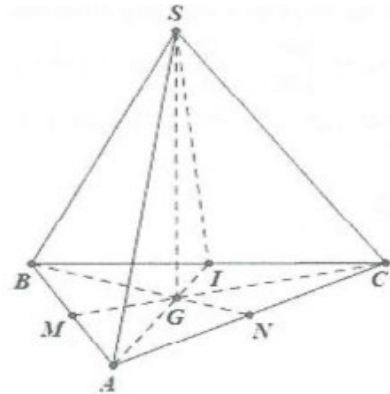
Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SG \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \text{ . Chọn C.}$

Câu 84: Ta có $\begin{cases} (SMC) \perp (ABC) \\ (SBN) \perp (ABC) \end{cases}$

Mà $SG = (SMC) \cap (SBN) \Rightarrow SG \perp (ABC)$

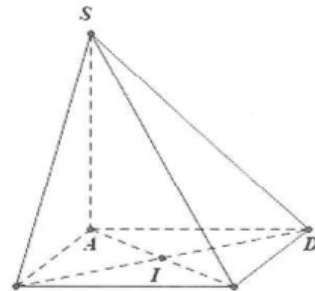
Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SG \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow MN \perp (SAI)$

Mà $MN \subset (SMN) \Rightarrow (SMN) \perp (SAI) \text{ . Chọn D.}$



Câu 85: Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

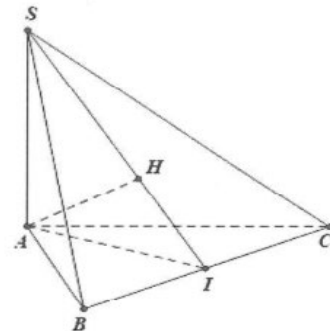
Mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD) \text{ . Chọn A.}$



Câu 86: Gọi I là trung điểm của BC, kẻ $AH \perp SI$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Mà $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC) \text{ . Chọn D.}$

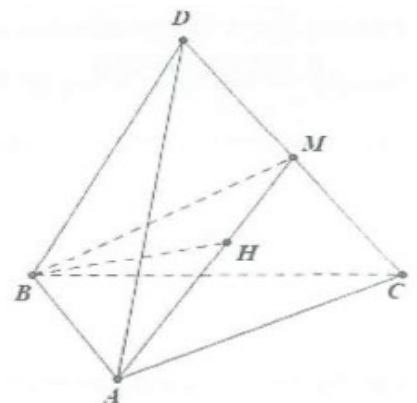


Câu 87: Gọi M là trung điểm của CD, kẻ $BH \perp AM$

Ta có $\begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp BM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp BH$

Mà $BH \perp AM \Rightarrow BH \perp (ACD)$

Mà $BH \subset (ABH) \Rightarrow (ABH) \perp (ACD)$ nên A, B đúng.

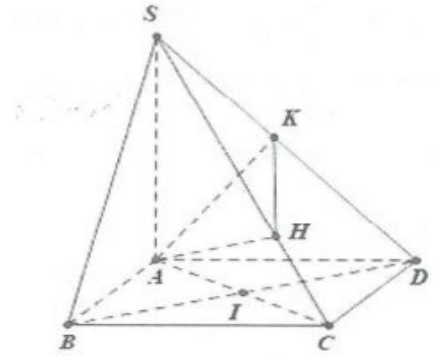


Do $CD \perp (MAB)$ và M là trung điểm của CD nên (MAB) là mặt phẳng trung trực của CD nên C đứng

Ta có $\left(\widehat{(ACD), (BCD)} \right) = \widehat{AMB}$ nên D sai. **Chọn D.**

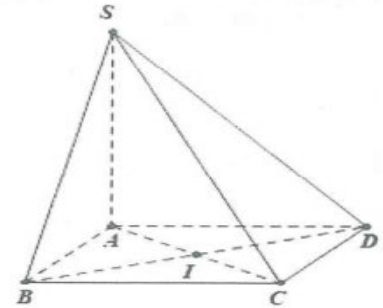
Câu 88: Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$. **Chọn C.**



Câu 89: Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$. **Chọn B.**

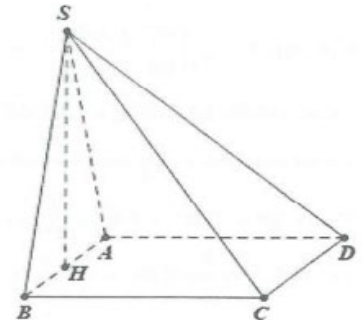


Câu 90: Gọi H là trung điểm của AB

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} (SBC) \perp (SAB) \\ (ABCD) \perp (SAB) \end{cases}$

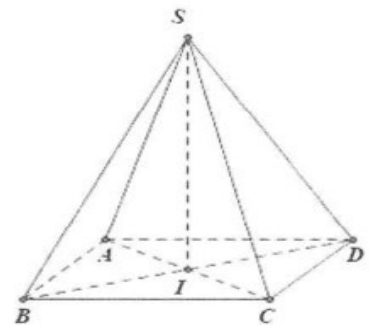
Mà $AD \parallel BC \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$. **Chọn C.**



Câu 91: Gọi I là giao điểm của AC và BD

Ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ SI \perp AC \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

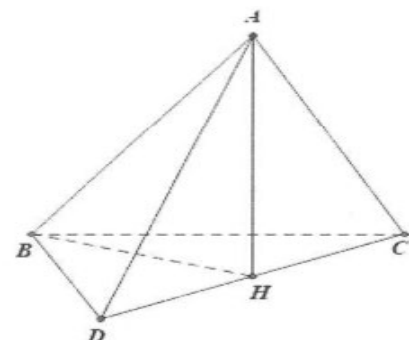
Mà $SI \subset (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD)$. **Chọn B.**



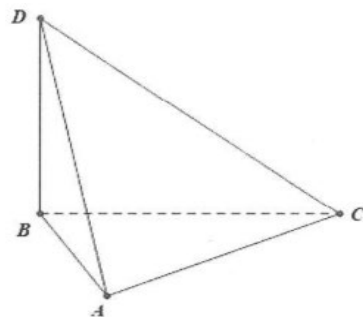
Câu 92: Gọi H là trung điểm của CD

Ta có $\begin{cases} HB = HC = HD \\ AB = AC = AD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD)$

Mà $AH \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (BCD)$. **Chọn C.**



Câu 93: $\begin{cases} (BCD) \perp (ABC) \\ BD \perp BC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABC). \text{ Chọn D.}$



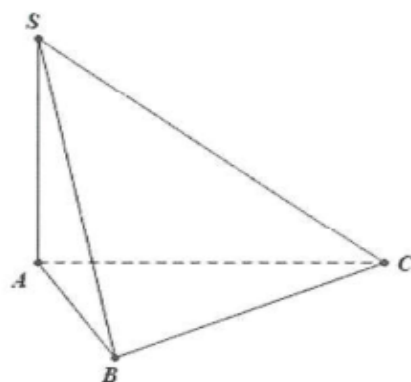
Câu 94: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

Ta có $\widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{(SB, AB)} = \widehat{SBA} = 60^\circ$

Ta có $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB \tan \widehat{SBA} = 3a\sqrt{3}$

Ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{(3a)^2 + (3a\sqrt{3})^2} = 6a$

Ta có $S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 4a = 12a^2. \text{ Chọn A.}$



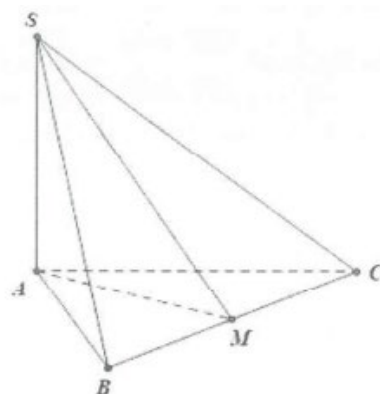
Câu 95: Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Ta có $\widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA} = 30^\circ$

Ta có $\cos \widehat{SMA} = \frac{AM}{SM} \Leftrightarrow SM = \frac{AM}{\cos \widehat{SMA}}$

Mà $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SM = \frac{AM}{\cos \widehat{SMA}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\cos 30^\circ} = a$

Ta có $S_{SBC} = \frac{1}{2} SM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}. \text{ Chọn B.}$

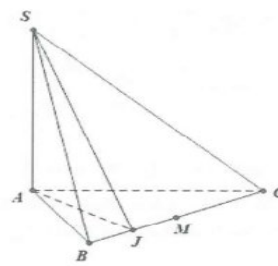
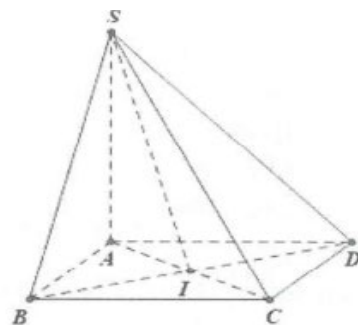


Câu 96: Gọi I là giao điểm của AC và BD

Ta có $BC = \sqrt{BC^2 + CD^2} = a\sqrt{2}$

Ta có $S_{SBD} = \frac{1}{2} SI \cdot BD \Rightarrow SI = \frac{2S_{SBD}}{BD} = \frac{2a^2}{a\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$

Ta có $AI = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SI^2 - AI^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \text{ Chọn C.}$



Câu 97: Ta có $\begin{cases} BC \perp AJ \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAJ)$

$\Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{(SJ, AJ)} = \widehat{SJA}$. **Chọn B.**

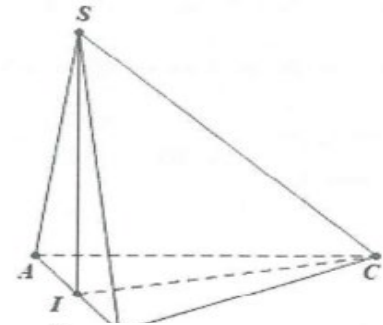
Câu 98: Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ SI \perp AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABC)$

Ta có $SC \cap (ABC) = \{C\}$ và $SI \perp (ABC)$

$\Rightarrow \widehat{(SC, (ABC))} = \widehat{(SC, IC)} = \widehat{SCI}$

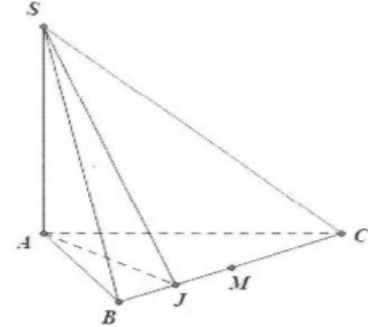
Ta có $SA = SB = AC = BC$ và có cạnh AB nên $\triangle SAB = \triangle CAB$

Do đó $SI = CI \Rightarrow \widehat{SCI} = 45^\circ$. **Chọn D.**



Câu 99: Ta có $\begin{cases} BC \perp AJ \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAJ)$

$\Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{(SJ, AJ)} = \widehat{SJA}$. **Chọn B.**



Câu 100: Gọi H, M lần lượt là trung điểm của BC, AC

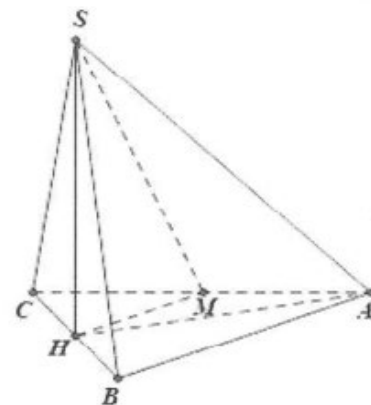
Ta có $\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Ta có $\begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHM)$

$\Rightarrow \widehat{((SAC), (ABC))} = \widehat{(SM, HM)} = \widehat{SMH}$

Ta có $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = \frac{a}{2} \Rightarrow HM = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có $\tan \widehat{SMH} = \frac{SH}{HM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = 2$. **Chọn D.**

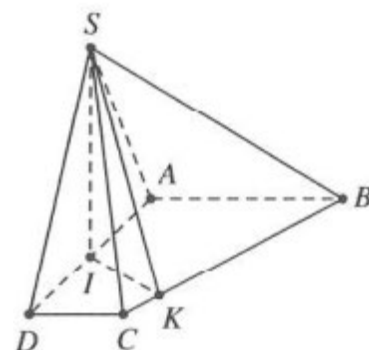


Câu 101: Ta có $\{(SIB), (SIC)\} \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

Kẻ $IK \perp BC (K \in BC) \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow \widehat{SKI} = 60^\circ$

Diện tích hình thang $ABCD$: $S_{ABCD} = 3a^2$

Tổng diện tích các $\triangle ABI$ và $\triangle CDI$ bằng $\frac{3a^2}{2} \Rightarrow S_{\triangle IBC} = \frac{3a^2}{2}$



Lại có $BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow IK = \frac{2S_{\triangle IBC}}{BC} = \frac{3\sqrt{5}a}{5}$

Suy ra $SK = \frac{IK}{\cos 60^\circ} = \frac{6\sqrt{5}a}{5} \rightarrow S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} \cdot SK \cdot BC = 3a^2$

Chọn A.

Câu 102: Ta có $\{(SIB), (SIC)\} \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

Kẻ $IK \perp BC (K \in BC) \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow \widehat{SKI} = 60^\circ$

Diện tích hình thang ABCD: $S_{ABCD} = \frac{9a^2}{2}$

Tổng diện tích các $\triangle ABI$ và $\triangle CDI$ bằng $\frac{5a^2}{2} \Rightarrow S_{\triangle IBC} = 2a^2$

Mà $BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{10} \Rightarrow IK = \frac{2S_{\triangle IBC}}{BC} = \frac{4a}{\sqrt{10}}$

Suy ra $SK = \frac{IK}{\cos 60^\circ} = \frac{4a}{\sqrt{10}} : \frac{1}{2} \rightarrow SK = \frac{8a}{\sqrt{10}}$. **Chọn B.**

Câu 103: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có $AN \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD)$

$\Rightarrow AN \perp (BCD) \Rightarrow AN \perp BN$

Tam giác ABC cân tại C, có M là trung điểm của AB

Suy ra $CM \perp AB$. Giả sử $(ABC) \perp (BCD)$ mà $CM \perp AB$

Suy ra $CM \perp (ABD) \Rightarrow CM \perp DM$

Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại M

$\Rightarrow MN = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow AB = CD = 2x$

Lại có $AN = BN = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$ mà $AB^2 = AN^2 + BN^2$

Suy ra $2(a^2 - x^2) = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn A.**

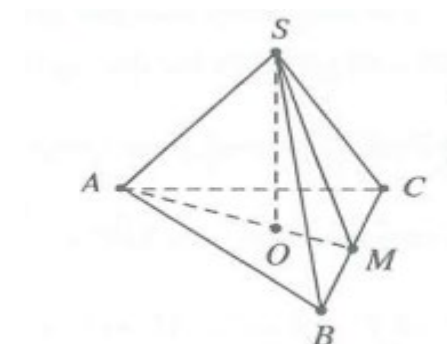
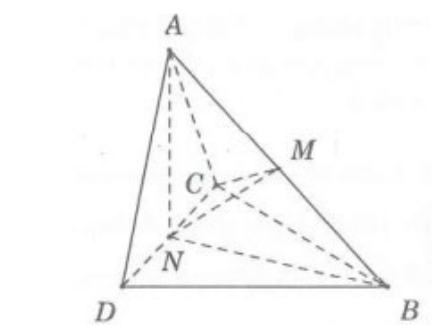
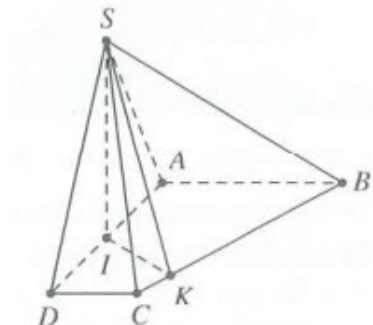
Câu 104: Gọi O là tâm tam giác ABC $\Rightarrow SO \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow BC \perp (SAM)$

Ta có $((SBC), (ABC)) = (\widehat{SM}, \widehat{AM}) = \widehat{SMA} = 60^\circ$

Lại có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow OM = \frac{1}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}; S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Tam giác SMO vuông tại O, có $\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{MO} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$



Vậy đường cao của hình chóp là $h = \frac{a}{2}$. **Chọn C.**