TÍCH PHÂN

I. Khái niệm tích phân

1. Diện tích hình thang cong .

- Giới thiệu cho học sinh về cách tính diện tích của một hình thang cong
- Từ đó suy ra công thức : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{S(x)-S(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$

2. Định nghĩa tích phân

- Cho hàm f liên túc trên một khoảng K và a, b là hai số bất kỳ thuộc K. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số : F(b)-F(a) được gọi là tích phân của f đi từ a đến b , ký hiệu là : $\int\limits_a^b f(x)dx$
- Có nghĩa là : $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- Gọi F(x) là một nguyên hàm của f(x) và $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ thì :

  $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
- Trong đó :
  - a : là cận trên , b là cận dưới
  - f(x) gọi là hàm số dưới dấu tích phân
  - dx : gọi là vi phân của đối số
  -f(x)dx : Gọi là biểu thức dưới dấu tích phân

II. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số f và g liên tục trên K , a,b,c là ba số bất kỳ thuộc K . Khi đó ta có :

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. (Gọi là tích chất đổi cận)
3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$
4. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$. (Tích phân củ một tổng hoặc hiệu hai tích phân bằng tổng hoặc hiệu hai tích phân) .
5. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k.\int\limits_a^b f(x)dx$. (Hằng số k trong dấu tích phân , có thể đưa ra ngoài dấu tích phân được)

Ngoài 5 tính chất trên , người ta còn chứng minh được một số tính chất khác như :

6 . Nếu f(x) $\geq 0 \forall x \in [a;b]$ thì : $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0 \forall x \in [a;b]$

7. Nếu : $\forall x \in [a;b] : f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$. (Bất đẳng thức trong tích phân)

8. Nếu : $\forall x \in [a;b]$ và với hai số M,N ta luôn có : $M \le f(x) \le N$. Thì :

$M(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le N(b-a)$. (Tính chất giá trị trung bình của tích phân)

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

A. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

1.Trong phương pháp này , chúng ta cần :

- Kỹ năng : Cần biết phân tích f(x) thành tổng , hiệu , tích , thương của nhiều hàm số khác , mà ta có thể sử dụng được trực tiếp bảng nguyên hàm cơ bản tìm nguyên hàm của chúng .
- Kiến thức : Như đã trình bày trong phần " Nguyên hàm " , cần phải nắm trắc các kiến thức về Vi phân , các công thức về phép toán lũy thừa , phép toán căn bậc n của một số và biểu diễn chúng dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ .

2. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau

a/ $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\left(2\sqrt{x^4-1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx$ b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx$

c/ $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}dx$ d/ $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^3+x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}dx$

Giải

a/ $$\int_1^2 \frac{x\left(2\sqrt{x^4-1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^2\left(\frac{2x\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx = \int_1^2\left(2x\sqrt{x^2-1}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sqrt{x^2-1}d\left(\sqrt{x^2-1}\right)+\int_1^2 d\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2\Bigg|_1^2+\sqrt{x^2+1}\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

b/

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx=\int_0^1\frac{(x+1-1)^2}{(x+1)^3}dx=\int_0^1\left[\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}-2\frac{x+1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx=\int_0^1\left[\frac{1}{x+1}-2\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\frac{d(x+1)}{x+1}-2\int_0^1\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}+\int_0^1\frac{d(x+1)}{(x+1)^3}=\ln|x+1|\Bigg|_0^1+2\frac{1}{x+1}\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\Bigg|_0^1=\ln 2+\frac{3}{8}$$

c/

$$\int_1^3\frac{2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}dx=\int_1^3\left[\frac{x-1}{\left(1+\sqrt{x}\right)}+\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]dx=\int_1^3\left[\left(\sqrt{x}-1\right)+\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)2\sqrt{x}}\right]dx$$

$$\Rightarrow I=\int_1^3\left(\sqrt{x}-1\right)dx+\int_1^3\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}d\left(1+\sqrt{x}\right)=\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3-x\right]\Bigg|_1^3+\ln^2\left(1+\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=2\sqrt{3}-4+\ln^2\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln^2 2$$

d/ $$\int_{\sqrt{2}}^2\frac{x^3+x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}dx=\int_{\sqrt{2}}^2\left[\frac{1}{4}\frac{4\left(x^3-x\right)dx}{x^4-2x^2+1}\right]+\int_{\sqrt{2}}^2\frac{1}{\left(x^2-1\right)}dx+\int_{\sqrt{2}}^2\frac{2dx}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{d\left(x^4-2x^2+1\right)}{\left(x^4-2x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx+2\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\left(x^2-1\right)^2\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

a/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\left(\sin^2 x-1\right)}{1+\cos x}dx$

b/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}dx$

c/ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{4-x^2}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)dx$

d/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x}dx$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

a/ $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln^3 x+1}{x\ln^3 x}dx$

b/ $\displaystyle\int_1^{2}\frac{x^2-1}{2x\left(x^2+1\right)}dx$

c/ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4+\sin^3 2x}{\sin^2 2x}dx$

d/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x.\cos x dx$

B. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

I. Phương pháp đổi biến số dạng 1.

Để tính tích phân dạng này , ta cần thực hiện theo các bước sau

1/ Quy tắc :

- Bước 1: Đặt x=v(t)
- Bước 2: Tính vi phân hai vế và đổi cận
- Bước 3: Phân tích f(x)dx=f(v(t))v'(t)dt
- Bước 4: Tính $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{v(a)}^{v(b)}g(t)dt=G(t)\Big|_{v(a)}^{v(b)}$
- Bước 5: Kết luận : I=$G(t)\Big|_{v(a)}^{v(b)}$

2/ Nhận dạng : (Xem lại phần nguyên hàm)

*** Chú ý :**

a. Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là :

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\sin t \leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \\ x=\lvert a\rvert\cos t\leftrightarrow 0\le t\le\pi \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t}\leftrightarrow t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x=\frac{\lvert a\rvert}{\cos t}\leftrightarrow t\in[0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right.$

$\sqrt{a^2+x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert \tan t \leftrightarrow t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x=\lvert a\rvert \cot t \leftrightarrow t\in(0;\pi) \end{array}\right.$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	x=a.cos2t
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	x=a+$(b-a)\sin^2 t$

b. Quan trọng nhất là các em phải nhận ra dạng :

- Ví dụ : Trong dạng phân thức hữu tỷ :

$$*\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\mathrm{a}x^2+bx+c}dx\,(\Delta<0)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\mathrm{a}\left[\left(\mathrm{x}+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]}dx=\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{u^2+k}du$$

Với : $\left(u=\mathrm{x}+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}},k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a},du=dx\right)$.

* áp dụng để giải bài toán tổng quát : $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^{2k+1}}}(k\in Z)$.

$*\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{2+2x-x^2}}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-(x-1)^2}}dx$. Từ đó suy ra cách đặt : $x-1=\sqrt{3}\sin t$

3/ Một số ví dụ áp dụng :

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau

a/ $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ b/ $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ c/ $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

Giải

a/ Đặt x=sint với : $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

- Suy ra : dx=costdt và : $\begin{cases} x=0\leftrightarrow \sin t=0\rightarrow t=0 \\ x=1\leftrightarrow \sin t=1\rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$
- Do đó : f(x)dx= $\sqrt{1-x^2}dx=\sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{costdt}=\cos^2 t dt=\frac{1}{2}(1+\cos 2\mathrm{t})dt$
- Vậy : $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 2\mathrm{t})dt}{2}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi-1}{4}$

b/ Đặt : x = $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

- Suy ra : dx = $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{costdt} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{x=0}\leftrightarrow \mathrm{sint=0}\rightarrow \mathrm{t=0} \\ \mathrm{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

- Do đó : $$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}} \frac{1}{\sqrt{2}}\text{costdt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

c/ Vì : $3+2x-x^2 = 4-(x-1)^2$. Cho nên :

- Đặt : $x-1 = 2\sin t \; t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \leftrightarrow \sin t = \frac{x-1}{2} (*)$
- Suy ra : dx= 2 costdt và : $\begin{cases} x=1 \leftrightarrow \sin t = \frac{1-1}{2} = 0 \to t = 0 \\ x=2 \leftrightarrow \sin t = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \to t = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow t \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \to \text{cost}>0$
- Do đó : f(x)dx=$\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}} 2\cos t dt = dt$
- Vậy : $\int_1^2 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau

a/ $\int_1^2 \sqrt{12x-4x^2-5}dx$ b/ $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$

c/ $\int_2^5 \frac{1}{x^2-4x+7}dx$ d/ $\int_0^b \frac{a-x^2}{\left(a+x^2\right)^2}dx$

***** Chú ý : Để tính tích phân dạng có chứa $\left(\sqrt{x^2+a}, \sqrt{a^2-x^2}\right)$, ta còn sử dụng phương pháp đổi biến số : u(x)=g(x,t)

Ví dụ 1 : Tính tích phân sau $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Giải :

- Đặt : $\sqrt{x^2+1} = x - t \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$
- Khi đó : $\begin{cases} x=0 \to t=-1; x=1 \to t = 1-\sqrt{2} \\ dx = \frac{t^2+1}{2t^2} \end{cases}$
- Do vậy : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{-2t}{t^2+1}.\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{-1}^{1-\sqrt{2}} = -\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

Ví dụ 2: Tính tích phân : $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

Giải

- Đặt : t=sinx , suy ra dt=cosxdx và khi x=0,t=0 ; Khi x=1 , t= $\frac{\pi}{2}$

- Do đó : f(x)dx=$x^2\sqrt{1-x^2}dx=\sin^2 t.\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$
- Vậy : I=$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$

II. Đổi biến số dạng 2

1. Quy tắc : (Ta tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số dạng 2 theo các bước sau :)

- Bước 1: Khéo léo chọn một hàm số u(x) và đặt nó bằng t : t=u(x) .
- Bước 2: Tính vi phân hai vế và đổi cận : dt=u'(x)dx
- Bước 3: Ta phân tích f(x)dx = g[u(x)]u'(x)dx = g(t)dt .
- Bước 4: Tính $\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt=G(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)}$
- Kết luận : I= $G(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)}$

2. Nhận dạng :

TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC HỮU TỶ

A. DẠNG : I=$\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{ax+b}dx \quad (a\neq 0)$

* Chú ý đến công thức : $\int_\alpha^\beta \frac{m}{ax+b}dx=\frac{m}{a}\ln|ax+b|\Big|_\alpha^\beta$. Và nếu bậc của P(x) cao hơn hoắc bằng 2 thì ta chia tử cho mẫu dẫn đến

$$\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{ax+b}dx=\int_\alpha^\beta Q(x)+\frac{m}{ax+b}dx=\int_\alpha^\beta Q(x)dx+m\int_\alpha^\beta\frac{1}{ax+b}dx$$

Ví dụ 1 : Tính tích phân : I= $\int_1^2 \frac{x^3}{2x+3}dx$

Giải

Ta có : $f(x)=\frac{x^3}{2x+3}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}-\frac{27}{8}\frac{1}{2x+3}$

Do đó :

$$\int_1^2\frac{x^3}{2x+3}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}-\frac{27}{8}\frac{1}{2x+3}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}x-\frac{27}{16}\ln|2x+3|\right)\Bigg|_1^2=-\frac{13}{6}-\frac{27}{16}\ln 35$$

Ví dụ 2: Tính tích phân : I= $\int_{\sqrt{5}}^3\frac{x^2-5}{x+1}dx$

Giải

Ta có : f(x)=$\frac{x^2-5}{x+1}=x-1-\frac{4}{x+1}$.

Do đó : $\int_{\sqrt{5}}^3\frac{x^2-5}{x+1}dx=\int_{\sqrt{5}}^3\left(x-1-\frac{4}{x+1}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-x-4\ln|x+1|\right)\Bigg|_{\sqrt{5}}^3=\sqrt{5}-1+4\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$

B. DẠNG : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$

1. Tam thức : $f(x)=ax^2+bx+c$ ***có hai nghiệm phân biệt***

Công thức cần lưu ý : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)|\Big|_{\alpha}^{\beta}$

Ta có hai cách

Cách 1: (Hệ số bất định)

Cách 2: (Nhẩy tầng lầu)

Ví dụ 3: Tính tích phân : I= $\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$.

Giải

Cách 1: (Hệ số bất định)

Ta có : f(x)=$\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

Thay x=-2 vào hai tử số : 3=A và thay x=-3 vào hai tử số : -1= -B suy ra B=1

Do đó : f(x)= $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

Vậy : $\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)dx = \left(3\ln|x+2| + \ln|x+3|\right)\Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2$

Cách 2: (Nhẩy tầng lầu)

Ta có : f(x)=$\frac{2(2x+5)+1}{x^2+5x+6} = 2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = 2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$

Do đó :

I=$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \left(2\ln|x^2+5x+6| + \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\right)\Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2$

2. Tam thức : $f(x)=ax^2+bx+c$ ***có hai nghiệm kép***

Công thức cần chú ý : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln(u(x))\Big|_{\alpha}^{\beta}$

Thông thường ta đặt (x+b/2a)=t .

Ví dụ 4 : Tính tích phân sau : I= $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$

Giải

Ta có : $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx = \int_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx$

Đặt : t=x+1 suy ra : dx=dt ; x=t-1 và : khi x=0 thì t=1 ; khi x=3 thì t=4 .

Do đó : $\int_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx = \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^2}dt = \int_1^4 \left(t-3+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt = \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + \ln|t| + \frac{1}{t}\right)\Big|_1^4 = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$

Ví dụ 5: Tính tích phân sau : I= $\int_0^1 \frac{4x}{4x^2-4x+1}dx$

Giải

Ta có : $\frac{4x}{4x^2-4x+1}=\frac{4x}{(2x-1)^2}$

Đặt : t= 2x-1 suy ra : $dt=2dx \to dx=\frac{1}{2}dt;\begin{cases} x=0 \leftrightarrow t=-1 \\ x=1 \leftrightarrow t=1 \end{cases}$

Do đó : $\int_0^1 \frac{4x}{4x^2-4x+1}dx=\int_0^1 \frac{4x}{(2x-1)^2}dx=\int_{-1}^1 \frac{4.\frac{1}{2}(t+1)}{t^2}\frac{1}{2}dt=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left(\ln|t|-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-2$

3. Tam thức : $f(x)=\mathrm{ax}^2+bx+c$ ***vô nghiệm :***

Ta viết : f(x)= $\frac{P(x)}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]}=\frac{P(x)}{a(u^2+k^2)};\begin{cases} u=x+\frac{b}{2a} \\ k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$

Khi đó : Đặt u= ktant

Ví dụ 6: Tính tích phân : I= $\int_0^2 \frac{x}{x^2+4x+5}dx$

Giải

- Ta có : $\int_0^2 \frac{x}{x^2+4x+5}dx=\int_0^2 \frac{x}{(x+2)^2+1}dx$
- Đặt : x+2=tant , suy ra : dx=$\frac{1}{\cos^2 t}dt;\Rightarrow\begin{cases} x=0 \leftrightarrow \tan t=2 \\ x=2 \leftrightarrow \tan t=4 \end{cases}$
- Do đó : $\int_0^2 \frac{x}{(x+2)^2+1}dx=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\tan t-2}{1+\tan^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\sin t}{\cos t}-2\right)dt=\left(-\ln|\cos t|-2t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}(1)$

Từ : $\left[\begin{array}{l} \tan t=2 \leftrightarrow 1+\tan^2 t=5 \leftrightarrow \cos^2 t=\frac{1}{5} \to \cos t_1=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \tan t=4 \leftrightarrow 1+\tan^2 t=17 \leftrightarrow \cos^2 t=\frac{1}{17} \to \cos t_2=\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

- Vậy : $\left(-\ln|\cos t|-2t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}=-\left[\left(\ln|\cos t_2|-2t_2\right)-\left(\ln|\cos t_1|-2t_1\right)\right]=-\ln\left|\frac{\cos t_2}{\cos t_1}\right|+2(t_2-t_1)$
- $\Leftrightarrow -\ln\left|\frac{\cos t_2}{\cos t_1}\right|+2(t_2-t_1)=2(\text{arctan4-arctan2})-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{5}\right|=2(\text{arctan4-arctan2})-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{17}$

Ví dụ 7: Tính tích phân sau : I= $\int_0^2 \frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx$

Giải

- Ta có : $\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}=x+2+\frac{1}{x^2+4}$
- Do đó : $\int_0^2 \frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx=\int_0^2\left(x+2+\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_0^2+\int_0^2\frac{dx}{x^2+4}=6+J\ (1)$

Tính tích phân J= $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$

- Đặt : x=2tant suy ra : dx $=\frac{2}{\cos^2 t}dt;\begin{cases} x=0\to t=0 \\ x=2\to t=\frac{\pi}{4}\end{cases}\leftrightarrow t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\to$ cost>0
- Khi đó : $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\frac{2}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$
- Thay vào (1) : $I=6+\frac{\pi}{8}$

C. DẠNG : $\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{\mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d}dx$

1. Đa thức : f(x)= $\mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ ***có một nghiệm bội ba***

Công thức cần chú ý : $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^m}dx=\frac{1}{1-m}.\frac{1}{x^{m-1}}\Big|_\alpha^\beta$

Ví dụ 8: Tính tích phân : I= $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx$

Giải

Cách 1:

- Đặt : x+1=t , suy ra x=t-1 và : khi x=0 thì t=1 ; khi x=1 thì t=2
- Do đó : $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx=\int_1^2 \frac{t-1}{t^3}dt=\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{8}$

Cách 2:

- Ta có : $\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}$
- Do đó : $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{8}$

Ví dụ 9 : Tính tích phân : I= $\int_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3}dx$.

Giải

- Đặt : x-1=t , suy ra : x=t+1 và : khi x=-1 thì t=-2 và khi x=0 thì t=-1 .
- Do đó : $\int_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{(t+1)^4}{t^3}dt=\int_{-2}^{-1}\frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t^3}dt=\int_{-2}^{-1}\left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt$
- $\Leftrightarrow \int_{-2}^{-1}\left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt=\left(\frac{1}{2}t^2+4t+6\ln|t|-\frac{4}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\Big|_{-2}^{-1}=\frac{33}{8}-6\ln 2$

2. Đa thức : f(x)= $\mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ ***có hai nghiệm :***

Có hai cách giải : Hệ số bất định và phương pháp nhẩy tầng lầu

Ví dụ 10 : Tính tích phân sau : I= $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}dx$

Giải

<u>Cách 1</u>. (Phương pháp hệ số bất định)

- Ta có : $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x+1)}+\dfrac{C}{(x+1)^2}=\dfrac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$
- Thay hai nghiệm mẫu số vào hai tử số : $\begin{cases}1=4A\\1=-2C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{4}\\C=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Khi đó (1)

$\Leftrightarrow\dfrac{(A+B)x^2+(2A+C)x+A-B-C}{(x-1)(x+1)^2}\Rightarrow A-B-C=1\Leftrightarrow B=A-C-1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{4}$

- Do đó : $\displaystyle\int_2^3\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

  $\Leftrightarrow I=\left[\dfrac{1}{4}\ln(x-1)(x+1)+\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{(x+1)}\right]\Bigg|_2^3=\dfrac{1}{4}\ln 8=\dfrac{3}{4}\ln 2$

<u>Cách 2:</u>

- Đặt : t=x+1, suy ra : x=t-1 và khi x=2 thì t=3 ; khi x=3 thì t=4 .
- Khi đó : I=$\displaystyle\int_2^3\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int_3^4\frac{dt}{t^2(t-2)}=\frac{1}{2}\int_3^4\frac{t-(t-2)}{t^2(t-2)}dt=\frac{1}{2}\left(\int_2^4\frac{1}{t(t-2)}dt-\int_3^4\frac{1}{t}dt\right)$

  $\displaystyle\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int_2^4\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}\right)dt-\int_3^4\frac{1}{t}dt\right)=\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t}\right|-\frac{1}{2}\ln|t|\right)\Bigg|_3^4=\frac{3}{4}\ln 2$

<u>Hoặc</u> : $\dfrac{1}{t^3-2t^2}=\dfrac{(3t^2-4t)}{t^3-2t^2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3t^2-4t-4}{t^3-2t^2}\right)=\left[\dfrac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{(3t+2)}{t^2}\right]=\dfrac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{t}+\dfrac{2}{t^2}\right)$

- Do đó : I=$\displaystyle\int_3^4\left(\frac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\right)dt=\left(\ln\left|t^3-2t^2\right|-\frac{1}{4}\left(3\ln|t|-\frac{2}{t}\right)\right)\Bigg|_3^4=\frac{3}{4}\ln 2$

Hoặc : $\dfrac{1}{t^2(t-2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{t^2-(t^2-4)}{t^2(t-2)}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{t+2}{t^2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t^2}\right)$

- Do đó :

  I=$\displaystyle\frac{1}{4}\int_3^4\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{t-2}{t}\right|+\frac{2}{t}\right)\Bigg|_3^4=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln 3-\ln 2-\frac{1}{6}\right)$

Ví dụ 11: Tính tích phân sau : I= $\displaystyle\int_2^3\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx$

Giải

Đặt : x-1=t , suy ra : x=t+1 , dx=dt và : khi x=2 thì t=1 ; x=3 thì t=2 .

Do đó : $\displaystyle\int_2^3\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx=\int_1^2\frac{(t+1)^2}{t^2(t+3)}dt=\int_1^2\frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt$

<u>Cách 1; (Hệ số bất định)</u>

Ta có : $\dfrac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}=\dfrac{At+B}{t^2}+\dfrac{C}{t+3}=\dfrac{(At+B)(t+3)+Ct^2}{t^2(t+3)}=\dfrac{(A+C)t^2+(3A+B)t+3B}{t^2(t+3)}$

Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases} A+C=1 \\ 3A+B=2 \\ 3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\dfrac{1}{3} \\ A=\dfrac{5}{9} \\ C=\dfrac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}=\dfrac{1}{9}\dfrac{t+3}{t^2}+\dfrac{4}{9}\dfrac{1}{t+3}$

Do đó :

$$\int_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt=\int_1^2\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{t+3}\right)\right)dt=\left(\frac{1}{9}\left(\ln|t|-\frac{3}{t}\right)+\frac{4}{9}\ln|t+3|\right)\Bigg|_1^2=\frac{17}{6}+\frac{4}{9}\ln 5-\frac{7}{9}\ln 2$$

Cách 2:

- Ta có :

$$\frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{3t^2+6t+3}{t^3+3t^2}\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}+\frac{3}{t^2(t+3)}\right]=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{t^2-(t^2-9)}{t^2(t+3)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{t+3}-\frac{1}{9}\frac{t-3}{t^2}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{t+3}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{t^2}\right)\right]$$

- Vậy :

$$\int_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt=\int_1^2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)\right)dt=\left[\frac{1}{3}\ln\left|t^3+3t^2\right|+\frac{1}{27}\left(\ln\left|\frac{t+3}{t}\right|-\frac{3}{t}\right)\right]\Bigg|_1^2$$

- Do đó I= $\dfrac{17}{6}+\dfrac{4}{9}\ln 5-\dfrac{7}{9}\ln 2$

3. Đa thức : f(x)= $ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ ***có ba nghiệm :***

Ví dụ 12: Tính tích phân sau : I= $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$

Cách 1: (Hệ số bất định)

- Ta có :

f(x)=$\dfrac{1}{x(x^2-1)}=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}=\dfrac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

- Đồng nhất hệ số hai tử số bằng cách thay các nghiệm : x=0;x=1 và x=-1 vào

hai tử ta có : $\begin{cases} x=0\rightarrow 1=-A \\ x=-1\rightarrow 1=2C \\ x=1\rightarrow 1=2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\dfrac{1}{2} \\ C=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

- Vậy :

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x-1)(x+1)\right)-\ln|x|\right]\Bigg|_2^3=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$$

Cách 2: (Phương pháp nhẩy lầu)

Ta có : $\dfrac{1}{x(x^2-1)}=\dfrac{x^2-(x^2-1)}{x(x^2-1)}=\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x}$

Do đó : $\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2xdx}{x^2-1} - \int_2^3 \frac{1}{x}dx = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \ln x\right)\Big|_2^3 = \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$

Ví dụ 13: Tính tích phân sau : I= $\int_3^4 \frac{x+1}{x(x^2-4)}dx$

Cách 1:

Ta có : $\frac{x+1}{x(x^2-4)} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x^2-4)}$

Thay các nghiệm của mẫu số vào hai tử số :

Khi x=0 : 1= -4A suy ra : A=-1/4

Khi x=-2 : -1= 8C suy ra C=-1/8

Khi x=2 : 3= 8B suy ra : B=3/8 .

Do đó : f(x) = $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{x+2}\right)$

Vậy :

$$\int_3^4 \frac{x+1}{x(x^2-4)}dx = -\frac{1}{4}\int_2^3 \frac{1}{x}dx - \frac{1}{8}\int_2^3 \frac{1}{x-2}dx + \frac{3}{8}\int_2^3 \frac{1}{x+2}dx = \left(-\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln|x-2| + \frac{3}{8}\ln|x+2|\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= \frac{5}{8}\ln 3 - \frac{3}{8}\ln 5 - \frac{1}{4}\ln 2$$

Cách 2:

Ta có :

$$\frac{x+1}{x(x^2-4)} = \frac{1}{(x^2-4)} + \frac{1}{x(x^2-4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x^2-(x^2-4)}{x(x^2-4)}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x}\right)$$

Do đó : $\int_3^4 \frac{x+1}{x(x^2-4)}dx = \frac{1}{4}\int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \frac{1}{2}\ln(x^2-4) - \ln|x|\right]\Bigg|_3^4$

Ví dụ 14: Tính tích phân sau : $\int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}dx$

Giải

Cách 1: (Hệ số bất định)

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x^2-1)}{(x^2-1)(x+2)}$$

Thay lần lượt các nghiệm mẫu số vào hai tử số :

Thay : x=1 Ta cớ : 1=2A , suy ra : A=1/2

Thay : x=-1 ,Ta có :1=-2B, suy ra : B=-1/2

Thay x=-2 ,Ta có : 4= -5C, suy ra : C=-5/4

Do đó :

I= $\int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{5}{4}\frac{1}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{5}{4}\ln|x+2|\right]\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

Cách 2.(Nhẩy tầng lầu)

Ta có :

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{x^2-1+1}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{x(x+1)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{x+1}\right]=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$$

Từ đó suy ra kết quả .

D. DẠNG $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{R(x)}{ax^4+bx^2+c}dx$

Những dạng này , gần đây trong các đề thi đại học ít cho (Nhưng không hẳn là không cho) , nhưng tôi vẫn đưa ra đây một số đề thi đã thi trong những năm các trường ra đề thi riêng , mong các em học sinh khá ,giỏi tham khảo để rút kinh nghiệm cho bản thân .

Sau đây tôi lấy một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau :

a. $\int\limits_0^1\frac{1}{(x^2+3x+2)^2}dx$ b. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{1+x^2}{1+x^3}dx$

Giải

a. $\int\limits_0^1\frac{1}{(x^2+3x+2)^2}dx$

Ta có :

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x^2+3x+2)^2}=\frac{1}{[(x+1)(x+2)]^2}=\left[\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+2)}\right]^2$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{2}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}-2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right).$$ Vậy :

$$\int\limits_0^1\frac{1}{(x^2+3x+2)^2}dx=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}-2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\right]dx=\left(-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-2\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+2\ln 3$$

b. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{1+x^2}{1+x^3}dx$

Ta có : $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^3}=\frac{1-x+x^2+x}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{1-x+x^2}{(1+x)(1-x+x^2)}+\frac{x}{(1+x)(1-x+x^2)}$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^3}\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^3}\right)dx$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

a. $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$ b. $\int\limits_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

Giải

a. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$. Chia tử và mẫu cho $x^2 \neq 0$, ta có :

$$f(x)=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1} \Rightarrow \int_{1}^{\sqrt{3}} f(x)dx=\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-1} \quad (1)$$

Đặt : $t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2, dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \rightarrow t=2 \\ x=\sqrt{3} \rightarrow t=\frac{4}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

Vậy : $\int_{1}^{\sqrt{3}} f(x)dx=\int_{2}^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t^2-3}=\int_{2}^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\left(t-\sqrt{3}\right)\left(t+\sqrt{3}\right)}dt=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{2}^{\frac{4}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}}-\frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)dt$

$$I=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\Bigg|_{2}^{\frac{4}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\ln\frac{1}{7}-\ln\frac{7-4\sqrt{3}}{7}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(7+4\sqrt{3}\right))$$

b. $\int_{0}^{1} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$. Vì : $\left[\begin{array}{l} x^6-1=\left(x^2\right)^3-1=\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right) \\ x^6-1=\left(x^3\right)^2-1=t^2-1\left(t=x^3\right) \end{array}\right.$

Cho nên :

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^6+1}=\frac{x^4-x^2+1}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}-\frac{x^2}{\left(x^3\right)^2+1} \Rightarrow \int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{3}\frac{3x^2}{\left(x^3\right)^2+1}\right]dx$$

Vậy : $I=\arctan x\Big|_{0}^{1}-\frac{1}{3}\arctan\left(3\text{x}^2\right)\Big|_{0}^{1}=\text{arctan1-}\frac{1}{3}\text{arctan3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\text{arctan3}$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

a. $\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx \quad \vee \int_{0}^{1} \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ b. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^4+1}dx$

Giải

a. $\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx \quad \vee \int_{0}^{1} \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$. Ta có :

$f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}, \quad g(x)=\frac{x^2-1}{x^4+1}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}$. Cho nên

Đặt : $\left[\begin{array}{l} t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx, x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2, x=1 \rightarrow t=2, x=2 \rightarrow t=\frac{5}{2} \\ t=x-\frac{1}{x} \Rightarrow dt=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx, x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2, x=1 \rightarrow t=0, x=2 \rightarrow t=\frac{3}{2} \end{array}\right.$. Vậy :

$$\Leftrightarrow \int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{2}^{\frac{5}{2}}\left(\frac{dt}{t^2-2}\right)=\int_{2}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right)}dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{2}^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{2}^{\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2+2}dt \quad (1)$$.

Đặt : $t=\sqrt{2}\tan u \to dt=\sqrt{2}\frac{1}{\cos^2 u}du \leftrightarrow t=0 \to u=0, t=\frac{3}{2} \to u=\arctan\frac{3\sqrt{2}}{4}=u_1$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \int_0^{u_1} \frac{\sqrt{2}du}{\cos^2 u\left(2+2\tan^2 u\right)} = \int_0^{u_1}\frac{\sqrt{2}}{2}du = \frac{\sqrt{2}}{2}u\Big|_0^{u_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1$

b. $\int_1^2 \frac{1}{x^4+1}dx$. Ta có : $F(x)=\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2+1-x^2}{x^4+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}-\frac{x^2-1}{x^4+1}\right)=\frac{1}{2}\left(f(x)-g(x)\right)$

Đã tính ở trên (phần a)

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau

a. $\int_1^2 \frac{x^2-1}{\left(x^2-5x+1\right)\left(x^2-3x+1\right)}dx$

b. $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{x^4-4x^2+3}$

c. $\int_1^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$

d. $I=\int_2^3 \frac{x^7}{1+x^8-2x^4}dx$

Giải

a. $\int_1^2 \frac{x^2-1}{\left(x^2-5x+1\right)\left(x^2-3x+1\right)}dx$. Ta có :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{\left(x^2-5x+1\right)\left(x^2-3x+1\right)}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}-5\right)\left(x+\frac{1}{x-3}\right)} \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}-5\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)} \quad (1)$$

Đặt : $t=x+\frac{1}{x} \to dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$, $x=1 \to t=2, x=2 \to t=\frac{5}{2}$

Vậy (1) trở thành :

$$\int_2^{\frac{5}{2}}\frac{dt}{(t-5)(t-3)}=\frac{1}{2}\int_2^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{t-5}-\frac{1}{t-3}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|\Bigg|_2^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$$

b. $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{x^4-4x^2+3}$. Ta có : $f(x)=\frac{1}{x^4-4x^2+3}=\frac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-3\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-3}-\frac{1}{x^2-1}\right)$

Do đó : $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{x^2-3}-\frac{1}{x^2-1}\right)dx=I-J \quad (1)$ Với :

$$I=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{x^2-3}dx=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}}\right)dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{37-20\sqrt{3}}{65\left(7-4\sqrt{3}\right)}$$

$$J=\int_0^1 \frac{1}{x^2-1}dx=\int_0^1 \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{7}-\ln\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{15}{7}$$

c. $\int_1^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$.

Học sinh xem lại cách giải ví dụ 2-a . Chỉ khác là đặt : $t=x-\frac{1}{x}$, sẽ ra kết quả .

d. $I=\int_2^3 \frac{x^7}{1+x^8-2x^4}dx=\int_2^3 \frac{x^4}{\left(x^4-1\right)^2}x^3dx \quad (1)$

Đặt : $t=x^4-1 \Rightarrow \begin{cases} dt=3x^3dx, x=2\to t=15; x=3\to t=80 \\ f(x)dx=\frac{1}{3}\frac{x^4}{3\left(x^4-1\right)}3x^3dx=\frac{1}{3}\frac{(t+1)}{t^2}dt=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt \end{cases}$

Vậy : $I=\int_{15}^{80}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{3}\left(\ln|t|-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{15}^{80}=\frac{1}{3}\ln\frac{16}{3}+\frac{13}{720}$

E. TRƯỜNG HỢP : $\int_\alpha^\beta \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ **(Với Q(x) có bậc cao hơn 4)**

Ở đây tôi chỉ lưu ý : Đối với hàm phân thức hữu tỷ có bậc tử thấp hơn bậc mẫu tới hai bậc hoặc tinh ý nhận ra tính chất đặc biệt của hàm số dưới dấu tích phân mà có cách giải ngắn gọn hơn . Phương pháp chung là như vậy , nhưng chúng ta khéo léo hơn thì cách giải sẽ hay hơn .

Sau đay tôi minh họa bằng một số ví dụ

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau .

a. $\int_1^2 \frac{dx}{x\left(x^4+1\right)}$ b. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}dx$

Giải

a. $\int_1^2 \frac{dx}{x\left(x^4+1\right)}$. Nếu theo cách phân tích bằng đồng nhất hệ số hai tử số thì ta có :

$$f(x)=\frac{1}{x\left(x^4+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^4+1}=\frac{A\left(x^4+1\right)+x\left(Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)}{x\left(x^4+1\right)}=$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{(A+B)x^4+Cx^3+Dx^2+\mathrm{E}x+\mathrm{A}}{x\left(x^4+1\right)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\C=0,D=0\\E=0\\A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0,D=0,\\E=0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x^3}{x^4+1}$$

Nhưng nếu ta tinh ý thì cách làm sau sẽ hay hơn .

Vì x và x^3 cách nhau 3 bậc , mặt khác $x\in[1;2]\Rightarrow x\neq 0$. Cho nên ta nhân tử và mẫu với $x^3\neq 0$. Khi đó $f(x)=\frac{x^3}{x^4\left(x^4+1\right)}$. Mặt khác $d\left(x^4\right)=4x^3dx\Leftrightarrow dt=4x^3dx \quad \left(t=x^4\right)$, cho nên :

$f(x)dx=\frac{1}{3}\frac{3x^3dx}{x^4\left(x^4+1\right)}=\frac{1}{3}\frac{dt}{t\left(t+1\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)=f(t)$. Bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều . (Các em giải tiếp)

b. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{(x-1)^2(x+3)}dx$

Nhận xét :

* Nếu theo cách hướng dẫn chung ta làm như sau :

- $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3}$

- Sau đó quy đồng mẫu số , đồng nhất hệ số hai tử số , ta có : $A=\frac{1}{2},B=\frac{3}{8},C=-D=\frac{5}{32}$

Do vậy : $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{5}{32(x-1)}-\frac{5}{32(x+3)}\right)dx$

$$=\left[-\frac{1}{8(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln|x-1|-\frac{5}{32}\ln|x+3|\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{32}\ln\frac{1}{28}$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau :

a. $\int_2^3\frac{x^4-1}{x^6-1}dx$ b. $\int_1^2\frac{x^2+1}{x^6+1}dx$ c. $\int_1^2\frac{dx}{x\left(1+x^4\right)}$

d. $\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx$ e. $\int_0^1\frac{x^4+3x^2+1}{\left(1+x^2\right)^3}dx$ f. $\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{\left(x-x^3\right)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$

Giải

a.

$$\int_1^2\frac{x^4-1}{x^6-1}dx=\int_1^2\left(\frac{x^4+x^2+1}{\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right)}-\frac{x^2+2}{\left[\left(x^3\right)^2-1\right]}\right)dx=\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx+\int_2^3\left(\frac{x^2}{\left[\left(x^3\right)^2-1\right]}+\frac{1}{x^3-1}-\frac{1}{x^3+1}\right)dx$$

Tính J : J= $\text{artanx}\Big|_2^3=\text{artan3-artan2}$.

Tính K . Đặt $t=x^3\Rightarrow\begin{cases}dt=3x^2dx, x=2\to t=8; x=3\to t=27\\ g(x)dx=\frac{x^2}{x^3-1}dx=\frac{1}{3}\frac{dt}{\left(t^2-1\right)}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt\end{cases}$

Do đó : K=$\int_2^3 g(x)dx=\frac{1}{6}\int_8^{27}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{6}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)\Big|_8^{27}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_8^{27}=\frac{1}{6}\ln\frac{117}{98}$

Tính E=$\int_2^3\frac{1}{x^3-1}dx=\int_2^3\frac{1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}dx$

Ta có : $h(x)=\frac{1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{x^2-\left(x^2-1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x^2-1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$

$$=\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

Vậy : $I=\frac{1}{3}\int_2^3\frac{3x^2}{x^3-1}dx-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx-\int_2^3\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$

$$=\frac{1}{3}\ln\left(x^3-1\right)\Big|_2^3-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_2^3-F=\frac{1}{3}\ln\frac{28}{9}-\frac{1}{2}\ln\frac{13}{6}-F\quad(2)$$

Tính F : Đặt : $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2 t}dt\\ x=2\to\tan t=\frac{5}{\sqrt{3}}\to t=a;x=3\to\tan t=\frac{10}{\sqrt{3}}\to t=b\end{cases}$

Do đó F=$\int_a^b\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)}=\int_a^b dt=t\Big|_a^b=b-a\quad\left(\text{t ant}=\frac{5}{\sqrt{3}}\to t=a=\text{artan}\frac{5}{\sqrt{3}};b=\text{artan}\frac{10}{\sqrt{3}}\right)$

Thay vào (2) ta có kết quả .

b. $\int_1^2\frac{x^2+1}{x^6+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx=\int_1^2\frac{1}{(x^2-1)^2-x^2}dx=\int_1^2\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$

Ta có : $\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{\text{Ax+B}}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$

$$=\frac{(A+C)x^3+(B-A+C+D)x^2+(A-B+C+D)x+(B+D)}{x^4-x^2+1}$$

Đồng nhất hệ số hai tử số ta có hệ : $\begin{cases}A+C=0\\ B-A+C+D=0\\ A-B+C+D=0\\ B+D=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-C\\ 1-2C=0\\ -B+D=0\\ B+D=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\ C=\frac{1}{2}\\ D=\frac{1}{2}\\ B=\frac{1}{2}\end{cases}$

Vậy : $I=\frac{1}{2}\left(\int_1^2\frac{1-x}{x^2+x+1}dx+\int_1^2\frac{x+1}{x^2-x+1}dx\right)=\frac{1}{2}(J+K)(1)$

Tính J=

$$\int_1^2\frac{-x+1}{x^2+x+1}dx=-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int_1^2\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|\Big|_1^2+E\quad(2)$$

Tính E =$\frac{3}{2}\int_1^2\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$, học sinh tự tính bằng cách đặt : $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$

Tính K

$$K=\int_1^2 \frac{x+1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x-1+3}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|\Big|_1^2+F \quad (2)$$

Tính F= $\frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$, học sinh tự tính bằng cách đặt : $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$

c. $\int_1^2 \frac{dx}{x\left(1+x^4\right)}=\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3x^3}{x^4\left(1+x^4\right)}dx=\frac{1}{3}\int_1^2\left(\frac{d\left(x^4\right)}{x^4}-\frac{d\left(x^4\right)}{1+x^4}\right)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x^4}{1+x^4}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3}\ln\frac{32}{17}$

d. $\int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}2xdx \quad (1)$. Đặt : $t=1+x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2=t-1; dt=2xdx \\ x=0\to t=1, x=1\to t=2 \end{cases}$

Do đó $I=\int_1^2 \frac{t-1}{t^3}dt=\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{4t^2}\right)\Big|_1^2=\frac{13}{16}$

e. $\int_0^1 \frac{x^4+3x^2+1}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int_0^1\left(\frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^3}+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}\right)dx=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx=J+K(1)$

Tính J : Bằng cách đặt $x=\tan t \Rightarrow J=\frac{\pi}{4}$

Tính K= $\int_0^1\left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^3}\right)dx=E+F(2)$

Tính E : Bằng cách đặt $x=\tan t \leftrightarrow \begin{cases} dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt \\ x=0\to t=0; x=1\to t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Vậy : $E=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\tan^2 t}\right)^2\frac{1}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{1}{\cos^4 t}}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi+2}{16}$

Tính F. Tương tự như tính E ;

Bằng cách đặt $x=\tan t \leftrightarrow \begin{cases} dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt \\ x=0\to t=0; x=1\to t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Vậy : $F=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\tan^2 t}\right)^3\frac{1}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{1}{\cos^6 t}}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t dt$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2t\right)^2 dt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(3+4\cos 2t+\cos 4t\right)dt=\frac{1}{16}\left(3t+2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{16}\left(3\frac{\pi}{4}+2\right)=\frac{3\pi+8}{64}$$

f. $\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\left(x-x^3\right)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{x-x^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2}.\frac{dx}{x}$

Đặt : $t=\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\Rightarrow t+1=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}dt=-\frac{dx}{x}\\ x=\frac{1}{3}\to t=8;x=1\to t=0\end{cases}$

Khi đó $I=-\int_8^0 t^{\frac{1}{3}}\left(t+1\right)dt=\int_0^8\left(t^{\frac{4}{3}}+t^{\frac{1}{3}}\right)dt=\left(\frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^8=\frac{3}{7}.2^7+\frac{3}{4}.2^4=16\left(\frac{24}{7}+\frac{3}{4}\right)=\frac{468}{7}$

**** Chú ý : Còn có cách khác***

Vì : $x\in\left[\frac{1}{3};1\right]\to x\neq 0$. Đặt $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt; f(x)dx=\frac{\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{t}\right)^4}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\frac{t^2\left(t^3-t\right)^{\frac{1}{3}}}{t}dt$

$=-t\left(t^3-t\right)^{\frac{1}{3}}dt=dt=-t^2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{1}{3}}dt\ (2)$. Đặt : $u=1-\frac{1}{t^2}\Leftrightarrow\frac{1}{t^2}=1-u;du=\frac{1}{t}dt$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

a. $\int_1^{e^{\frac{1}{p+2}}}\frac{x^{\frac{p}{2}}}{x^{p+2}+1}dx$ b. $\int_0^a\frac{x^3dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

c. $\int_0^1 e^{x+e^x}dx$ d. $\int_0^{2a}x\sqrt{2ax-x^2}dx$

Giải

a.. $\int_1^{e^{\frac{1}{p+2}}}\frac{x^{\frac{p}{2}}}{x^{p+2}+1}dx$ (ĐHTNguyên-98) : Ta có : $f(x)dx=\frac{x^{\frac{p}{2}}dx}{\left(x^{\frac{p+2}{2}}\right)^2+1}$.

- Đặt : $t=x^{\frac{p+2}{2}}=x^{\frac{p}{2}+1}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dt=x^{\frac{p}{2}}dx\\ x=1\to t=1;x=e^{\frac{1}{p+2}}\to t=\sqrt{e}\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dt}{t^2+1}$

- Đặt : $t=\tan u\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dt=\frac{du}{\cos^2u}\\ t=1\to u=\frac{\pi}{4},t=e^{\frac{1}{2}}\to u=u_1\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{u_1}\frac{du}{\cos^2u\left(1+\tan^2u\right)}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{u_1}du=\frac{\pi}{4}-u_1$

- Từ : $\tan u = \sqrt{e} \Rightarrow u = u_1 = \text{artan}\sqrt{\text{e}} \Leftrightarrow I = \dfrac{\pi}{4} - \text{artan}\sqrt{\text{e}}$

b. $\displaystyle\int_0^a \frac{x^3dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Đặt : $x = \text{atant} \Rightarrow \begin{cases} \text{dx=a}\dfrac{\text{dt}}{\cos^2 t}; x=0 \to t=0, x=a \to t=\dfrac{\pi}{4} \\ f(x) = \dfrac{x^3dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{a^3\tan^3 t}{a^3\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} a\dfrac{\text{dt}}{\cos^2 t} = a\cos t.\tan^3 tdt \end{cases}$

Vậy : $I = \displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\cos t.\tan^3 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\cos t.\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a.\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt = a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1-\cos^2 t\right)\sin t}{\cos^2 t}dt =$

- Đặt : $\text{cost=u} \Rightarrow \begin{cases} du = -\text{sintdt;t=}\dfrac{\pi}{4} \to u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; t=0 \to u=1 \\ f(t)dt = \dfrac{\left(1-u^2\right)}{u^2}(-du) = \left(1-\dfrac{1}{u^2}\right)du \end{cases}$

Vậy : $I = \displaystyle\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1-\frac{1}{u^2}\right)du = \left(u+\frac{1}{u}\right)\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}$

c. $\displaystyle\int_0^1 e^{x+e^x}dx = \int_0^1 e^x e^{e^x}dx$. Đặt : $t = e^x \Rightarrow \begin{cases} dt = e^x dx; x=0 \to t=1; x=1 \to t=e \\ f(x)dx = e^x e^{e^x}dx = e^t dt \end{cases}$

Vậy : $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_1^e e^t dt = e^t\Big|_1^e = e^e - e$

d. $\displaystyle\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}dx = \int_0^{2a} x\sqrt{a^2-\left(x-a\right)^2}dx$

Đặt : $x - a = a.\sin t \Rightarrow \begin{cases} dx = a.\text{costdt,x=0} \to \text{t=-}\dfrac{\pi}{2}\text{;x=2a} \to \text{t=}\dfrac{\pi}{2} \\ f(x)dx = \left(a+a.\sin t\right)\sqrt{a^2\cos^2 t}.a.\text{costdt} \end{cases}$

Vậy :

$$I = a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\sin t\right)\cos^2 tdt = a^3\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin tdt\right] = a^3\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 td\left(\cos t\right)\right]$$

$$= a^3\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\cos^3 t\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = a^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right] = a^3\frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau

a. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^5-x^2}$ b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^7dx}{\left(1+x^4\right)^2}$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ d. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^4}dx$

Giải

a. $\int_2^3 \frac{dx}{x^5-x^2} = \int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}dx \quad (1)$

Xét : $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{E}{x-1}$

$= \frac{A(x^2+x+1)(x-1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + (Cx+D)x^2(x-1) + E(x^2+x+1)x^2}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$

$= \frac{(B+C+E)x^4 + (A+D-C+E)x^3 + (E-D)x^2 - Bx - A}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}.$

Đồng nhất hệ số hai tử số ta có hệ :

$$\begin{cases} B+C+E=0 \\ A+D-C+E=0 \\ E-D=0 \\ B=0 \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-E \\ E+E+E=1 \\ B=0 \\ E=D \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=\frac{1}{3} \\ C=-\frac{1}{3} \\ B=0 \\ E=\frac{1}{3} \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1}$$

Vậy : $I = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} \right) dx = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right) + \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)} \right) dx$

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{3}\ln|x-1| \right)\Bigg|_2^3 - \int_2^3 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\text{x}+1}{\sqrt{3}} \right)\Bigg|_2^3$$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{7}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{5}{\sqrt{3}} \right)$

b. $\int_0^1 \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^4)^2} 3x^3 dx \quad (1).$

Đặt : $t = 1+x^4 \Rightarrow \begin{cases} dt = 3x^3 dx, x=0 \to t=1; x=1 \to t=2 \\ f(x)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{t-1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt \end{cases}$

Vậy : $I = \int_0^2 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{3}\left(\ln|t| + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$

c. $\int_0^1 \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2-2)}{(x^2+1)^2} 2xdx \quad (1)$

Đặt : $t=1+x^2 \Leftrightarrow x^2-2=t-3 \Rightarrow \begin{cases} dt=2xdx; x=0\to t=1; x=1\to t=2 \\ f(x)dx=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t-3}{t^2}\right)dt=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{t^2}\right)dt \end{cases}$

Vậy : $I=\int_1^2 \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{t^2}\right)dt=\dfrac{1}{2}\left(\ln|t|+\dfrac{3}{t}\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}\left(\ln 2-\dfrac{3}{2}\right)$

d. $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{1+x^3}}{x^4}dx=\int_1^2 \dfrac{\sqrt{1+x^3}}{x^6}x^2dx \quad (1)$.

Đặt : $t=\sqrt{1+x^3} \leftrightarrow t^2=1+x^3 \leftrightarrow \begin{cases} 2tdt=3x^2dx; x=1\to t=\sqrt{2}, x=2\to t=3 \\ f(x)dx=\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{1+x^3}}{x^6}3x^2dx=\dfrac{1}{3}\dfrac{t}{\left(t^2-1\right)^2}2tdt=\dfrac{2}{3}\dfrac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt \end{cases}$

Vậy :

$$I=\frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^3\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)^2dt=\frac{2}{3}\left[\int_{\sqrt{2}}^3\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)^2\right]=\frac{1}{6}\int_{\sqrt{2}}^3\left(\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}-\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)dt$$

$$=\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^3=\frac{1}{6}\left(\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)}-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^3=\frac{8\sqrt{2}-3}{24}+\frac{1}{3}\ln\left(2\sqrt{2}-2\right)$$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau :

a. $\int_{\sqrt{7}}^4 \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ 　　 b. $\int_0^1 \dfrac{\left(x^2-x\right)dx}{\sqrt{x^2+1}}$

c. $\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x^5-2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 　　 d. $\int_0^1 \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}dx$

Giải

a. $\int_{\sqrt{7}}^4 \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}=\int_{\sqrt{7}}^4 \dfrac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+9}} \quad (1)$.

Đặt : $t=\sqrt{x^2+9} \Rightarrow \begin{cases} t^2=x^2+9 \leftrightarrow tdt=xdx, x^2=t^2-9 \\ x=\sqrt{7}\to t=4, x=4\to t=5 \end{cases}$. Do đó : $I=\int_4^5 \dfrac{dt}{t\left(t^2-9\right)}=\int_4^5 \dfrac{dt}{t(t-3)(t+3)}$

Ta có : $f(t)=\dfrac{1}{t(t-3)(t+3)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t-3}+\dfrac{C}{t+3}=\dfrac{A\left(t^2-9\right)+Bt(t+3)+C(t-3)t}{t\left(t^2-9\right)}$

Đồng nhất hệ số hai tử số bằng cách thay lần lượt các nghiệm vào hai tử số ta có :

- Với x=0 : -9A=1 $\to A=-\dfrac{1}{9}$
- Với x=-3 : 9C=1 $\to C=\dfrac{1}{9}$
- Với x=3 : 9B=1 $\to B=\dfrac{1}{9}$

Vậy : $I=\dfrac{1}{9}\left[\int_4^5\left(-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t-3}+\dfrac{1}{t+3}\right)dt\right]=\dfrac{1}{9}\left[\ln\left(t^2-9\right)-\ln t\right]\Big|_4^5=\dfrac{1}{9}\ln\dfrac{t^2-9}{t}\Big|_4^5=\dfrac{1}{9}\ln\dfrac{144}{35}$

* Chú ý : Nếu theo phương pháp chung thì đặt : $x=3\sin t\to dx=3\cos tdt$.

Khi : $\begin{cases} x=\sqrt{7}\to\sqrt{7}=3\sin t\leftrightarrow \sin t=\dfrac{\sqrt{7}}{3} \\ x=4\to 4=3\sin t\leftrightarrow \sin t=\dfrac{4}{3}>1 \end{cases}$. Như vậy ta không sử dụng được phương pháp này được .

b. $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2-x\right)dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx-\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=J-K \quad (1)$

* Để tính J :

Đặt : $x=\tan t\Rightarrow \begin{cases} dx=\dfrac{1}{\cos^2 t}dt, x=0\to t=0; x=1\to t=\dfrac{\pi}{4} \\ f(x)dx=\dfrac{\tan^2 t.\dfrac{1}{\cos^2 t}dt}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\dfrac{\tan^2 t}{\cos t}dt \end{cases}$. Tính tích phân này không đơn giản , vì vậy ta phải có cách khác .

- Từ : $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow \int\limits_0^1 g(x)dx=\int\limits_0^1\sqrt{x^2+1}dx-\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

- Hai tích phân này đều tính được .

+/ Tính : $E=\int\limits_0^1\sqrt{x^2+1}dx=x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-\left(\int\limits_0^1\sqrt{x^2+1}dx-\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx\right)$

$=\sqrt{2}-E+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big|_0^1\Rightarrow 2E=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow E=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

* Tính K=$\int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1=\sqrt{2}-1$; $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Do vậy : I=$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

c. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^5-2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}dx-2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=J-K\left(1\right)$

- Tính J: Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow \begin{cases} x^2=t^2-1; xdx=tdt; x=0\to t=1, x=\sqrt{3}\to t=2 \\ f(x)dx=\dfrac{x^4xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\left(t^2-1\right)^2tdt}{t}=\left(t^4-2t^2+1\right)dt \end{cases}$

Suy ra : J=$\int\limits_1^2\left(t^4-2t^2+1\right)dt=\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right)\Big|_1^2=\frac{38}{15}$

- Tính K: Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow \begin{cases} x^2=t^2-1; xdx=tdt; x=0\to t=1, x=\sqrt{3}\to t=2 \\ f(x)dx=\dfrac{x^2xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\left(t^2-1\right)tdt}{t}=\left(t^2-1\right)dt \end{cases}$

Suy ra : K= $\int\limits_1^2\left(t^2-1\right)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}$

Vậy : I=$\frac{28}{15}+\frac{4}{3}=\frac{48}{15}=\frac{16}{5}$

d. $\int_0^1 \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}dx$. Đặt : $x=\sin t \to \begin{cases} dx = c\text{ostdt. x=0} \to \text{t=0;x=1} \to \text{t=}\dfrac{\pi}{2} \\ f(x)dx = \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}dx = \sqrt{\cos^6 t}c\text{ostdt=cos}^4 tdt \end{cases}$

Do đó I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1-c\text{os2t}}{2}\right)^2 dt = \dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2t+\dfrac{1+c\text{os4t}}{2}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}c\text{os2t+}\dfrac{1}{8}c\text{os4t}\right)dt$

$$=\left(\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{8}$$

TÍCH PHÂN CHỨA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC

1. Thuộc các nguyên hàm :

a/ $\int_{\alpha}^{\beta}\sin(\text{ax+b})dx = -\frac{1}{a}\cos(\text{ax+b})\Big|_{\alpha}^{\beta}$

b/ $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin(\text{ax+b})}{\cos(\text{ax+b})}dx = -\ln\left|\cos(\text{ax+b})\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}$

c / $\int_{\alpha}^{\beta}\cos(\text{ax+b})dx = \frac{1}{a}\sin(\text{ax+b})\Big|_{\alpha}^{\beta}$

d/ $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\cos(\text{ax+b})}{\sin(\text{ax+b})}dx = \ln\left|\sin(\text{ax+b})\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}$

2. Đối với : $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

a/ Nếu f(x)=$R\left(\sin^m x;\cos^n x\right)$ thì ta chú ý :

- Nếu m lẻ , n chẵn : đặt cosx=t (Gọi tắt là lẻ sin)
- Nếu n lẻ , m chẵn : đặt sinx=t (Gọi tắt là lẻ cos)
- Nếu m,n đều lẻ thì : đặt cosx=t hoặc sinx =t đều được (gọi tắt lẻ sin hoặc lẻ cos)
- Nếu m,n đề chẵn : đặt tanx=t (gọi tắt là chẵn sinx , cosx)

b/ Phải thuộc các công thức lượng giác và các công thức biến đổi lượng giác , các hằng đẳng thức lượng giác , công thức hạ bậc , nhân đôi , nhân ba , tính theo tang góc chia đôi ....

3. Nói chung để tính được một tích phân chứa các hàm số lượng giác , học sinh đòi hỏi phải có một số yếu tố sau :

- Biến đổi lượng giác thuần thục
- Có kỹ năng khéo léo nhận dạng được cách biến đỏi đưa về dạng đã biết trong nguyên hàm .

II. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau :

a. **(ĐH, CĐ Khối A – 2005)** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

b.. ĐH, CĐ Khối B – 2005 . $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$ **KQ:** $2\ln 2 - 1$

Giải

a. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\cos x+1)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx \quad (1)$

Đặt : $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{t^2-1}{3}; \sin x dx = -\dfrac{2}{3}tdt \\ x = 0 \to t = 2; x = \dfrac{\pi}{2} \to t = 1 \end{cases}$

Khi đó : $I = \int_2^1 \frac{\left(2\dfrac{t^2-1}{3}+1\right)}{t}\left(-\frac{2}{3}tdt\right) = 2\int_1^2\frac{2t^2+1}{9}dt = \frac{2}{9}\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]\Big|_1^2 = \frac{34}{27}$

b. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos^2 x}{1+\cos x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x+1}\sin x dx \quad (1)$

Đặt : $t = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} dt=-\sin x dx,\ x=0 \to t=2; x=\dfrac{\pi}{2} \to t=1 \\ f(x)dx = \dfrac{(t-1)^2}{t}dt = \left(t-2+\dfrac{1}{t}\right)dt \end{cases}$

Do đó : $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = -2\int_2^1 \left(t-2+\dfrac{1}{t}\right)dt = 2\left(\dfrac{1}{2}t^2 - 2t + \ln|t|\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

a. **ĐH- CĐ Khối A – 2006 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}dx$ **KQ:** $\dfrac{2}{3}$

b. **CĐ Bến Tre – 2005 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{\sin x + 1}dx$ **KQ:** $2 - 3\ln 2$

Giải

a. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}dx$. Đặt : $t = \sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x} \Rightarrow t^2 = \cos^2 x + 4\sin^2 x$

Do đó : $\begin{cases} 2tdt = (-2\sin x\cos x + 8\sin x\cos x)dx = 3\sin 2xdx \to \sin 2xdx = \dfrac{2}{3}tdt \\ x = 0 \to t = 1; x = \dfrac{\pi}{2} \to t = 2 \end{cases}$

Vậy : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \dfrac{2}{3}\int_1^2 \dfrac{tdt}{t} = \dfrac{2}{3}\int_1^2 dt = \dfrac{2}{3}t\Big|_1^2 = \dfrac{2}{3}$

b. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{\sin x + 1}dx$.

Ta có : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = (4\cos^2 x - 3)\cos x = (4 - 4\sin^2 x - 3)\cos x = (1 - 4\sin^2 x)\cos x$

Cho nên : $f(x)dx = \dfrac{\cos 3x}{1+\sin x}dx = \dfrac{(1-4\sin^2 x)}{1+\sin x}\cos x dx \quad (1)$

Đặt : $t = 1 + \sin x \Rightarrow \begin{cases} dt = \cos x dx, x=0 \to t=1; x=\dfrac{\pi}{2} \to t = 2 \\ f(x)dx = \dfrac{\left[1-4(t-1)^2\right]}{t}dt = \left(8 - 4t - \dfrac{3}{t}\right)dt \end{cases}$

Vậy : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_1^2 \left(8 - 4t - \dfrac{3}{t}\right)dt = \left(8t - 2t^2 - 3\ln|t|\right)\Big|_1^2 = 2 - 3\ln 2$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

a. **CĐSP Sóc Trăng Khối A – 2005 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin xdx}{\sin^2 x + 2\cos x.\cos^2 \dfrac{x}{2}}$

b. CĐ Y Tế – 2006 . $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ **KQ:** $\ln\sqrt{2}$

Giải

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^2 x+2\cos x.\cos^2\frac{x}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^2 x+\cos x.(1+\cos x)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=-\ln|1+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2$

b. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{|\sin x+\cos x|}dx\quad(1)$

Vì : $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{4}\le 3\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$

Do đó : $|\sin x+\cos x|=\sin x+\cos x$

Mặt khác : $d(\sin x+\cos x)=(\cos x-\sin x)dx$

Cho nên : $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=-\ln|\sin x+\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\left[\ln 1-\ln\sqrt{2}\right]=\frac{1}{2}\ln 2$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau

a. **CĐ Sư Phạm Hải Dương – 2006 .** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{(\sin x-\cos x+3)^3}dx$ **KQ:** $\frac{1}{32}$

b. **CĐ KTKT Đông Du – 2006 .** $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx$ **KQ:** $\frac{1}{4}\ln 3$

Giải

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{(\sin x-\cos x+3)^3}dx$. Vì : $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$

Cho nên : $f(x)dx=\frac{\cos 2x}{(\sin x-\cos x+3)^3}dx=\frac{(\cos x-\sin x)}{(\sin x-\cos x+3)^3}(\cos x+\sin x)dx$

Đặt : $t=\sin x-\cos x+3\Rightarrow\begin{cases}dt=(\cos x+\sin x)dx;x=0\to t=2,x=\frac{\pi}{2}\to t=4\\ f(x)dx=\frac{t-3}{t^3}dt=\left(\frac{1}{t^2}-3\frac{1}{t^3}\right)dt\end{cases}$

Vậy : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_2^4\left(\frac{1}{t^2}-3\frac{1}{t^3}\right)dt=\left(-\frac{1}{t}+\frac{3}{4}\frac{1}{t^2}\right)\Big|_2^4=\frac{1}{32}$

b. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx$. Đặt : $t=1+2\sin 2x\Rightarrow\begin{cases}dt=4\cos 2xdx\to\cos 2xdx=\frac{1}{4}dt\\ x=0\to t=1;x=\frac{\pi}{4}\to t=3\end{cases}$

Vậy : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=\frac{1}{4}\int_1^3\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|\Big|_1^3=\frac{1}{4}\ln 3$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau :

a. **CĐ Sư Phạm Quảng Ngãi – 2006 .** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$ **KQ: 2**

b. **CĐ Bến Tre – 2006 .** $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x-\sin^3 3x}{1+\cos 3x}dx$

Giải

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{1+\cos x}\sin x dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\sin x dx=4.\frac{1}{2}(1-\cos x)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$

b. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x-\sin^3 3x}{1+\cos 3x}dx$.

Ta có : $\sin 3x-\sin^3 3x=\sin 3x\left(1-\sin^2 3x\right)=\sin 3x.\cos^2 3x$.

Đặt : $t=1+\cos 3x\Rightarrow\begin{cases}dt=-3\sin 3x dx\rightarrow \sin 3x dx=-\frac{1}{3}dt\\ x=0\rightarrow t=2;x=\frac{\pi}{6}\rightarrow t=1\end{cases}$

Vậy : $\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx=-\frac{1}{3}\int_2^1\frac{(t-1)^2}{t}dt=\frac{1}{3}\int_1^2\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2-2t+\ln|t|\right)\Big|_1^2=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\ln 2$

Ví dụ 6. Tính các tích phân sau

a. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin x}\cot g x\,dx$

b. $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(\frac{\pi}{4}+x)}dx$

c. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$

d. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$

Giải

a. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin x}\cot g x\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}}{\sin x}\cot x dx$

$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}\cot x dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt[3]{\cot^2 x}\cot x dx$

b. I = $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(\frac{\pi}{4}+x)}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x} = \ln|\cos x+\sin x| \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

c. I = $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx = \left(\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$$

d. I = $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$. Vì : $\sin^4 x+\cos^4 x = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

Cho nên :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\sin^3 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Ví dụ 7. Tính các tích phân sau

a. I = $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

b. I = $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x\sqrt{\cot gx}}dx$

c. I = $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{tg^2 x+\cot g^2 x-2}\,dx$

d. */I = $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[3]{\sin x})dx$

Giải

a. I = $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right]d(\cos x)$

$$= \left(-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}$$

b. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x\sqrt{\cot gx}}dx$.

Đặt : $t=\sqrt{\cot x}\Rightarrow t^2=\cot x\leftrightarrow\begin{cases}2tdt=-\frac{1}{\sin^2 x}dx\to\frac{1}{\sin^2 x}dx=-2tdt\\ x=\frac{\pi}{6}\to t=\sqrt{3};x=\frac{\pi}{4}\to t=1\end{cases}$

Vậy : $I=-\int\limits_{\sqrt{3}}^{1}\frac{2tdt}{t}=2\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}dt=2t\Big|_{1}^{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}-1\right)$

c. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{tg^2x+\cot g^2x-2}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\left(\tan x-\cot x\right)^2}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left|\tan x-\cot x\right|dx$

Vì : $\tan x-\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=-2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=-2\cot 2x$

Cho nên : $x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)\leftrightarrow 2x\in\left(\frac{\pi}{3};2\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\cot 2x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x-\cot x<0;x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]\\ \tan x-\cot x>0;x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]\end{array}\right.$

Vậy : $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-\left(\tan x-\cot x\right)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan x-\cot x\right)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx=\frac{1}{2}$

$\left(\ln\left|\sin 2x\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\left(\ln\left|\sin 2x\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln 2$

d. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[3]{\sin x})dx$ (1)

Đặt : $x=\frac{\pi}{2}-t\to dx=-dt,x=0\to t=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}\to t=0$

Do đó :

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}-\sqrt[3]{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\right)\left(-dt\right)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[3]{\sin t}-\sqrt[3]{\cos t}\right)dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\cos x}\right)dx\quad(2)$

Lấy (1) +(2) vế với vế : $2I=0\Rightarrow I=0$

Ví dụ 8 . Tính các tích phân sau

a. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^4 xdx$ (Y-HN-2000) b. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)}dx$ (NT-2000) c. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x}dx$ (NNI-2001)

d. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ (GTVT-2000)	e. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}dx$	f. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$ (KB-03)

Giải

a. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 x dx$. Ta có : $f(x) = \tan^4 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^4 x} - 2\frac{1}{\cos^2 x} + 1$

Do đó : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^4 x} - 2\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1+\tan^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x} - \left[2\tan x + x\right]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$= \left(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left(2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{12}\right) = \left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$$

* Chú ý : Ta còn có cách phân tích khác :

$$f(x) = \tan^4 x = \tan^2 x\left(\tan^2 x + 1 - 1\right) = \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) - \tan^2 x = \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) - \left(\tan^2 x + 1\right) + 1$$

Vậy : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) - \left(\tan^2 x + 1\right) + 1\right]dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x.\frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dx$

$$I = \left(\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{3}3\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$$

b. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)}dx$.

Ta có : $f(x) = \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+9)^3} = \frac{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{(\sin x+\cos x+9)^3} = \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x+\cos x+9)^3}$

Do đó : $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{(\cos x+\sin x)}{(\sin x+\cos x+2)^3}\right)(\cos x-\sin x)dx \quad (1)$

Đặt : $t = \sin x+\cos x+2 \Rightarrow \begin{cases} \cos x+\sin x = t-2. x=0 \to t=3; x=\frac{\pi}{4} \to t = \sqrt{2}+2, \\ dt = (\cos x-\sin x)dx \Rightarrow f(x)dx = \frac{t-2}{t^3}dt = \left(\frac{1}{t^2} - 2\frac{1}{t^3}\right)dt \end{cases}$

Vậy :

$$I = \int_{3}^{\sqrt{2}+2} \left(\frac{1}{t^2} - 2\frac{1}{t^3}\right)dt = \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\Big|_{3}^{\sqrt{2}+2} = \left(-\frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1+\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{(\sin t + \cos t)}{(\sin t + \cos t + 9)}(\sin t - \cos t)(-dt) = \frac{(\sin t + \cos t)}{(\sin t + \cos t + 9)}(\cos t - \sin t)dt = f(x)$$

c. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x}dx =$

Ta có : $f(x) = \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} = \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^3}{\sin^4 x} = \frac{1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x}{\sin^4 x} = \frac{1}{\sin^4 x} - 3\frac{1}{\sin^2 x} + 3 - \sin^2 x$

Vậy : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cot^2 x\right)\frac{dx}{\sin^2 x} - 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

$= \left(-\frac{1}{3}\cot^3 x + 3\cot x + 3x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{8} + \frac{23}{12}$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^6 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^6 x} - \frac{1}{\cos^4 x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)^2 \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+2\tan^2 x+\tan^4 x\right)d\left(\tan x\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)d\left(\tan x\right)$

$= \left(\tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x - \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{15}$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4-\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin 2x}{7-\cos 2x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(7-\cos 2x\right)}{7-\cos 2x} = -\ln\left|7-\cos 2x\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\frac{3}{4}$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(1+\sin 2x\right)}{1+\sin 2x} = \frac{1}{2}\ln\left|1+\sin 2x\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2$

Ví dụ 9. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^4 x dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{1+2\cos 3x}dx$

c. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx \quad \vee J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx \quad \Rightarrow K = \int_{3\frac{\pi}{2}}^{5\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos x-\sqrt{3}\sin x}dx$

Giải

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x.\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^6 x - \cos^4 x\right)d\left(\cos x\right)$

$= \left(\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{35}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{1+2\cos 3x}dx = -\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{1+2\cos 3x}dx = -\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(1+2\cos 3x\right)}{1+2\cos 3x} = -\frac{1}{6}\left(\ln\left|1+2\cos 3x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\ln 3$

c. Ta có : $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx$

Do : $\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}.\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{d\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$

Vậy : $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\ln\sqrt{3} = \frac{1}{4}\ln 3$ (1)

- Mặt khác : $I-3J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$

Do đó : $I-3J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)dx = \left(-\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 1-\sqrt{3}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ : $\begin{cases} I+J = \frac{1}{4}\ln 3 \\ I-3J = 1-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{3}{16}\ln 3 - \frac{\sqrt{3}-1}{4} \\ J = \frac{1}{16}\ln 3 + \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$ (3)

Để tính K ta đặt $t = x-3\frac{\pi}{2} \to dt = dx \Leftrightarrow x = 3\frac{\pi}{2}; t = 0.x = 5\frac{\pi}{3} \to t = \frac{\pi}{6}$

Vậy : $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(2t+3\pi\right)}{\cos\left(t+3\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}\sin\left(t+3\frac{\pi}{2}\right)}dt = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2t}{\sin t+\sqrt{3}\cos t}dt = I-J = \frac{1}{8}\ln 3 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Ví dụ 10. Tính các tích phân sau .

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin 2x}dx$ (CĐ-99) b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$ (ĐH-LN-2000)

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{10} x+\cos^{10} x-\sin^4 x\cos^4 x\right)dx$ (SPII-2000) d. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$ (MĐC-2000)

Giải

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx = \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

Đặt : $t=\tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow dt=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx; \Leftrightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}; x=0\to t=0, x=\frac{\pi}{2}\to t=1$

Vậy : $I=\int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2}{\left(1+t^2\right)}dt=\int_0^1\frac{2dt}{t^2+2t+3}=\int_0^1\frac{2dt}{(t+1)^2+2}= \quad (2)$

Đặt : $t+1=\sqrt{2}\tan u \Rightarrow \begin{cases} dt=\sqrt{2}\frac{1}{\cos^2 u}du; t=0\to \tan u=\frac{\sqrt{2}}{2}; t=1\to \tan u=\sqrt{2} \\ f(t)dt=\frac{2dt}{(t+1)^2+2}=\frac{2}{2\left(1+\tan^2 u\right)}\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 u}du=\sqrt{2}du \end{cases}$

Vậy : $I=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{2}du=\sqrt{2}u\Big|_{u_1}^{u_2}=\sqrt{2}\left(u_2-u_1\right)=\sqrt{2}\left(\text{arxtan}\frac{\sqrt{2}}{2}-\text{arctan}\sqrt{2}\right)$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{10}x+\cos^{10}x-\sin^4 x\cos^4 x\right)dx$

Ta có : $\sin^{10}x+\cos^{10}x-\sin^4 x\cos^4 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)\left(\cos^6 x-\sin^6 x\right)$

$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x+\cos^2 x\sin^2 x\right)$

$=\cos^2 2x\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)=\cos^2 2x-\frac{1}{16}\sin^2 4x=\frac{1+\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{32}=\frac{15}{32}+\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 8x$

Vậy : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{15}{32}+\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 8x\right)dx=\frac{15}{32}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{32.8}\sin 8x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{15\pi}{64}$

d. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$.

Ta có : $\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-x\right]=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x-\sin x\,\text{co}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}(*)$

Do đó : $f(x)=\frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=2\frac{\frac{1}{2}}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=2\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x-\sin x\,\text{co}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right)dx=2\left(\ln\left|\sin x\right|-\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$I=2\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|-\ln\left|\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\right|=2\ln\frac{3}{2}$

* **Chú ý** : Ta còn có cách khác

$$f(x)=\frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)}=\frac{2}{\sin^2 x\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}$$

Vậy : $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sqrt{3}+\cot x}\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2d\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}{\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\ln\frac{3}{2}$

Ví dụ 11. Tính các tích phân sau

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ (HVBCVT-99)

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos^2 2x dx$ (HVNHTPHCM-98)

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\cos^6 x+\sin^6 x}dx$ (ĐHNT-01)

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}$ (ĐHTM-95)

Giải

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}(\sin 2x)dx \quad (1)$

Đặt : $t=1+\cos^2 x\Rightarrow\begin{cases}dt=-2\sin x\cos x dx=-\sin 2x dx\\ \cos^2 x=t-1; x=0\to t=2; x=\frac{\pi}{2}\to t=1\end{cases}$

Vậy : $I=\frac{1}{2}\int_2^1\frac{(t-1)}{t}(-dt)=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{t}-1\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t|-t\right)\Big|_1^2=\frac{\ln 2-1}{2}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos^2 2x dx$.

Ta có : $f(x)=\cos^2 x\cos^2 2x=\frac{1+\cos 2x}{2}.\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{4}\left(1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 4x.\cos 2x\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1+\cos 2x+\cos 4x+\frac{1}{2}\left(\cos 6x+\cos 2x\right)\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos 6x$

Vậy : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos 6x\right)dx=\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin 6x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\cos^6 x+\sin^6 x}dx$.

Vì : $d\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)=\left(6\sin^5 x\cos x-6\cos^5 x\sin x\right)dx=6\sin x\cos x\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)$

$\Leftrightarrow d\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)=3\sin 2x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx=-3\sin 2x\cos 2x dx$

$=-\frac{3}{2}\sin 4x dx\Rightarrow\sin 4x dx=-\frac{2}{3}d\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$

Vậy : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\cos^6 x+\sin^6 x}dx=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)}{\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)}=-\frac{2}{3}\ln\left|\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}\ln 2$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right) d\left(\tan x\right) = \left(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}$

Ví dụ 12. Tính các tích phân sau .

a. $\int_0^{\pi} \sin^{11} x dx$ (HVQHQT-96) b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$ (NNI-96)

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos 4x dx$ (NNI-98) d. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$ (ĐHTL-97)

Giải

a. $\int_0^{\pi} \sin^{11} x dx$

Ta có :

$\sin^{11} x = \sin^{10} x.\sin x = \left(1-\cos^2 x\right)^5 \sin x = \left(1-5\cos^2 x + 10\cos^3 x - 10\cos^4 x + 5\cos^5 x - \cos^6 x\right)\sin x$

Cho nên : $I = \int_0^{\pi} \left(1-5\cos^2 x + 10\cos^3 x - 10\cos^4 x + 5\cos^5 x - \cos^6 x\right)\sin x dx$

$= \left(\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{5}{6}\cos^6 x + 2\cos^5 x - \frac{5}{2}\cos^4 x + \frac{5}{3}\cos^3 x - \cos x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{-118}{21}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$

Hạ bậc :

$\sin^2 x \cos^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(1-\cos 2x\right)\left(1+2\cos 2x + \cos^2 2x\right)$

$= \frac{1}{8}\left(1+2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x\right)$

$= \frac{1}{8}\left(1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x\right) = \frac{1}{8}\left(1+\cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2} - \cos 2x\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right)$

$= \frac{1}{16}\left(1+\cos 2x - \cos 4x + \cos 4x.\cos 2x\right) = \frac{1}{16}\left(1+\cos 2x - \cos 4x + \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2}\right)$

$\frac{1}{32}\left(2+3\cos 2x + \cos 6x - \cos 4x\right)$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{32}\left(2+3\cos 2x + \cos 6x - \cos 4x\right)dx = \left(\frac{1}{32}x + \frac{3}{64}\sin 2x + \frac{1}{32.6}\sin 6x - \frac{1}{32.4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$

d. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \left|\cos x\right| dx = \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \sqrt{2}\left(1+1\right) = 2\sqrt{2}$

III. MỘT SỐ CHÚ Ý QUAN TRỌNG

1. Trong phương pháp đổi biến số dạng 2.

**** Sử dụng công thức :*** $\int_0^b f(x)dx = \int_0^b f(b-x)dx$

<u>*Chứng minh :*</u>

- Đặt : b-x=t , suy ra x=b-t và dx=-dt , $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \to t=b \\ x=b \to t=0 \end{cases}$
- Do đó : $\int_0^b f(x)dx = \int_b^0 f(b-t)(-dt) = \int_0^b f(b-t)dt = \int_0^b f(b-x)dx$. Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số

Ví dụ : Tính các tích phân sau

a/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$ b/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\cos x-4\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$

c/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_2(1+\tan x)dx$ d/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx$

e/ $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ f/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

Giải

a/ $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$.(1) . Đặt :

$$t=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-t \leftrightarrow \begin{cases} dt=-dx, x=0 \to t=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2} \to t=0 \\ f(x)dx = \dfrac{4\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]^3}(dt) = -\dfrac{4\cos t}{(\cos t+\sin t)^3}dt = f(t)dt \end{cases}$$

Nhưng tích phân không phụ thuộc vào biến số , cho nên :

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx \quad (2)$$

Lấy (1) +(2) vế với vế ta có : $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^3}dx \Rightarrow I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx$

$$\Leftrightarrow I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx = \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

b/ $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\cos x-4\sin x}{\left(\mathrm{sinx+cosx}\right)^3}dx$. Tương tự như ví dụ a/ ta có kết quả sau :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\cos x-4\sin x}{\left(\mathrm{sinx+cosx}\right)^3}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{5\sin t-4\cos t}{\left(\mathrm{cost+sint}\right)^3}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin x-4cosx}{\left(\mathrm{sinx+cosx}\right)^3}dx\quad(2)$$

Vậy : $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\mathrm{sinx+cosx}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1\Rightarrow I=\frac{1}{2}$

c/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log_2\left(1+\mathrm{tanx}\right)dx$. Đặt :

$$t=\frac{\pi}{4}-x\to x=\frac{\pi}{4}-t\Leftrightarrow\begin{cases}dx=-dt,x=0\to t=\frac{\pi}{4};x=\frac{\pi}{4}\to t=0\\ f(x)dx=\log_2\left(1+\mathrm{tanx}\right)dx=\log_2\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)(-dt)\end{cases}$$

Hay: $f(t)=\log_2\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)(-dt)=\log_2\frac{2}{1+\tan t}(-dt)=\log_2 2-\log_2 t$

Vậy : $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log_2 tdt\Rightarrow 2I=t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{8}$

d/ $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6x}{\sin^6x+cos^6x}dx$ (1)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+cos^6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}d\left(-t\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^6x}{cos^6x+\sin^6x}dx=I\ \ (2)$$

Cộng (1) và (2) ta có : $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^6x+\sin^6x}{cos^6x+\sin^6x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$

e/ $\int_0^1 x^m\left(1-x\right)^n dx$. Đặt : t=1-x suy ra x=1-t . Khi x=0,t=1;x=1,t=0; dt=-dx

Do đó : $I=\int_1^0\left(1-t\right)^m t^n(-dt)=\int_0^1 t^n(1-t)^m dt=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^2x}{1+cosx}dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{cosx+2sinx}}{4\cos x+3\sin x}dx$ (XD-98)

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x+\sin x}{\cos^2 x}dx$ (HVNHTPHCM-2000)

5. $\int_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^6 dx$ (ĐHKT-97)

6. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{2+\cos^2 x}dx$ (AN-97)

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+2\cos x}{3\sin x+\cos x}dx$ (CĐSPHN-2000)

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ (CĐSPKT-2000)

9. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{9+4\cos^2 x}dx$ (ĐHYDTPHCM-2000)

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

**** Dạng :*** $I=\int_\alpha^\beta \frac{a\sin x+b\cos x+c}{a'\sin x+b'\cos x+c'}dx$

Cách giải :

Ta phân tích : $\int_\alpha^\beta \frac{a\sin x+b\cos x+c}{a'\sin x+b'\cos x+c'}dx = A+\frac{B\left(a'\cos x-b'\sin x\right)}{a'\sin x+b'\cos x+c'}+\frac{C}{a'\sin x+b'\cos x+c'}$

- Sau đó : Quy đồng mẫu số
- Đồng nhất hai tử số , để tìm A,B,C .
- Tính I :

$$I=\int_\alpha^\beta\left(A+\frac{B\left(a'\cos x-b'\sin x\right)}{a'\sin x+b'\cos x+c'}+\frac{C}{a'\sin x+b'\cos x+c'}\right)dx=\left(Ax+B\ln\left|a'\sin x+b'\cos x+c'\right|\right)\Big|_\alpha^\beta+C\int_\alpha^\beta\frac{dx}{a'\sin x+b'\cos x+c'}$$

VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ . Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}dx$ (Bộ đề)

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+2\sin x}{4\cos x+3\sin x}dx$ (XD-98)

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+3\cos x+5}dx$

d. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x-3\sin x+1}{4\sin x+3\cos x+5}dx$

Giải

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}dx$. Ta có : $f(x)=\frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}=A+\frac{B\left(\cos x-2\sin x\right)}{\sin x+2\cos x+3}+\frac{C}{\sin x+2\cos x+3}$ (1)

Quy đồng mẫu số và đồng nhất hệ số hai tử số :

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{\left(A-2B\right)\sin x+\left(2A+B\right)\cos x+3A+C}{\sin x+2\cos x+3}\Rightarrow\begin{cases}A-2B=1\\2A+B=-1\\3A+C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{5}\\B=-\frac{3}{5}\\C=\frac{4}{5}\end{cases}$$. Thay vào (1)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{5}\right)dx-\frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sin x+2\cos x+3\right)}{\sin x+2\cos x+3}+\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+2\cos x+3}dx=-\frac{\pi}{10}-\frac{3}{5}\ln\left|\sin x+2\cos x+3\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{5}J$$

$$I=-\frac{\pi}{10}-\frac{3}{5}\ln\frac{4}{5}-\frac{4}{5}J\quad(2)$$

- Tính tích phân J :

Đặt : $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dt=\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}};x=0\to t=0,x=\frac{\pi}{2}\to t=1\\ f(x)dx=\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}\frac{2dt}{1+t^2}=\frac{2dt}{t^2+2t+3}\end{cases}\Leftrightarrow J=\int_0^1\frac{2dt}{\left(t+1\right)^2+2}$. (3)

Tính (3) : Đặt :

$$t+1=\sqrt{2}\tan u\Rightarrow\begin{cases}dt=\sqrt{2}\frac{du}{\cos^2u}.t=0\to\tan u=\frac{\sqrt{2}}{2}=u_1;t=1\to\tan u=\sqrt{2}=u_2\\ f(t)dt=\frac{1}{\frac{2}{\cos^2u}}\frac{\sqrt{2}du}{\cos^2u}=\frac{\sqrt{2}}{2}du\end{cases}$$

Vậy : j=$\int_{u}^{u_2}\frac{\sqrt{2}}{2}du=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(u_2-u_1\right)\Rightarrow I=I=-\frac{\pi}{10}-\frac{3}{5}\ln\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(u_2-u_1\right)\quad\begin{cases}\tan u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \tan u_2=\sqrt{2}\end{cases}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+2\sin x}{4\cos x+3\sin x}dx;\quad f(x)=\frac{\cos x+2\sin x}{4\cos x+3\sin x}=A+\frac{B\left(3\cos x-4\sin x\right)}{4\cos x+3\sin x}+\frac{C}{4\cos x+3\sin x}\to(1)$

Giống như phàn a. Ta có : $A=\frac{2}{5};B=-\frac{1}{5}$;C=0

Vậy : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\frac{\left(3\cos x-4\sin x\right)}{4\cos x+3\sin x}\right)dx=\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln\left|4\cos x+3\sin x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{10}+\frac{1}{5}\ln\frac{4\sqrt{2}}{7}$