

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC
TRƯỜNG THPT TRẦN PHÚ
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề này có 1 trang)

ĐỀ THI KSCL ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2021-2022
Môn: TOÁN - Lớp 11 - Chương trình chuẩn
Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Giải phương trình: $\sin x + 2 \sin 3x = -\sin 5x$

Câu 2. Trong dãy số : $C_{23}^0; C_{23}^1; \dots; C_{23}^{13}$ tồn tại 3 số hạng liên tiếp tạo thành cấp số cộng, tìm tổng ba số hạng đó.

Câu 3. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + 2x - 3}{5x^2 - 6x + 1}$

Câu 4. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 lập các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số chia hết cho 5.

Câu 5. Cho bất phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} \leq \sqrt{4x-x^2+m+3}$. Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 4]$.

Câu 6. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{(2x_n + 1)^{2022}}{2022} + x_n$. Với n là số nguyên dương.

Đặt $u_n = \frac{(2x_1 + 1)^{2021}}{2x_2 + 1} + \frac{(2x_2 + 1)^{2021}}{2x_3 + 1} + \frac{(2x_3 + 1)^{2021}}{2x_4 + 1} + \dots + \frac{(2x_n + 1)^{2021}}{2x_{n+1} + 1}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Câu 7. Giả sử $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110}$, với $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{110}$ là các hệ số. Tính giá trị của tổng $T = C_{11}^0a_{11} - C_{11}^1a_{10} + C_{11}^2a_9 - C_{11}^3a_8 + \dots + C_{11}^{10}a_1 - C_{11}^{11}a_0$

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$.

a. Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (ABG) . Thiết diện là hình gì?

b. Hai điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng $AD, A'C$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(BC'D)$, biết $AM = \frac{1}{4}AD$. Tính tỉ số $\frac{CN}{CA'}$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1; 2), B(3; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$. Tìm tọa độ điểm C thuộc Δ để tam giác ACB cân tại C .

Câu 10. Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ac = 4b + c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{3c^2}{4} \right) c + 3b^2 + \frac{15^2}{(b+c)(c+3b)}.$$

-----**Hết**-----

(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:.....

Chữ ký của giám thị:.....

Số báo danh:.....

Phòng thi số:.....

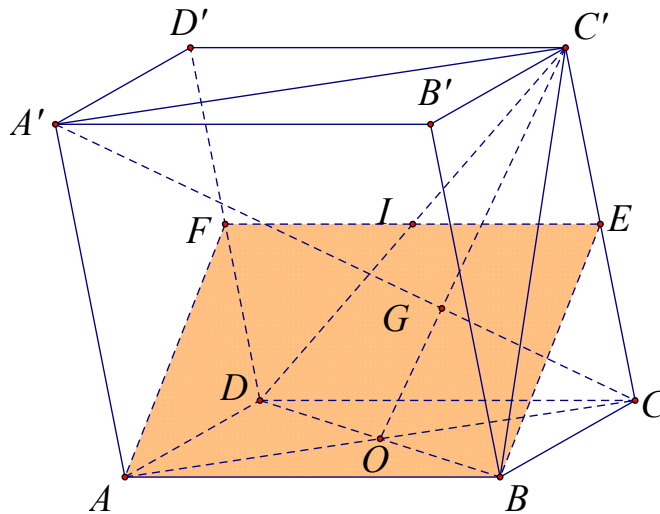
ĐÁP ÁN

Câu	Nội dung	Điểm
1	pt $\Leftrightarrow \sin x + \sin 5x + 2\sin 3x = 0$ $\Leftrightarrow 2\sin \frac{x+5x}{2} \cos \frac{x-5x}{2} + 2\sin 3x = 0$ $\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos 2x + 2\sin 3x = 0$	1,0
	$\Leftrightarrow 2\sin 3x (\cos 2x + 1) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = k\pi \\ 2x = \pi + k2\pi \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$	0,25
2	Giả sử 3 số $C_{23}^n; C_{23}^{n+1}; C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $2C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+2}, \forall n \leq 11, n \in \mathbb{N}$.	1,0
	$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = (C_{23}^n + C_{23}^{n+1}) + (C_{23}^{n+1} + C_{23}^{n+2})$ $\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{24}^{n+1} + C_{24}^{n+2} = C_{25}^{n+2}$ $\Rightarrow (n+2)(23-n) = 150 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \text{ (tm)} \\ n = 13 \text{ (l)} \end{cases}$	0,5
	Vậy $C_{23}^8 + C_{23}^9 + C_{23}^{10} = 2451570$.	0,5
3	Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + 2x - 3}{5x^2 - 6x + 1}$	1,0
	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{2x^2 - 1} + x} + 3(x-1)}{(x-1)(5x-1)}$	0,5
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1}{\sqrt{2x^2 - 1} + x} + 3}{5x-1} = 1$	0,5
	Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 lập các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được số chia hết cho 5.	1,0

4	. Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó các $a_i, i = \overline{1,4}$ đôi một khác nhau. Số có 4 chữ số đôi một khác nhau là: $A_9^4 = 3024$ (số).	0,25								
	Do số cần lập chia hết cho 5 nên $a_4 = 5$ có 1 cách chọn. a_1 có 8 cách chọn a_2 có 7 cách chọn a_3 có 6 cách chọn Vậy số có 4 chữ số chia hết cho 5 là: $8.7.6=336$ (số)	0,5								
	Vậy xác suất để lấy được số chia hết cho 5 là: $P = \frac{336}{3024} = \frac{1}{9}$	0,25								
5	Cho bất phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} \leq \sqrt{4x-x^2+m+3}$ Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0;4]$.	1,0								
	Lời giải Điều kiện $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 4x-x^2+m+3 \geq 0(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ m \geq x^2-4x-3(2) \end{cases}$ Điều kiện cần để bpt (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [0;4]$ thì (2) nghiệm đúng $\forall x \in [0;4]$ Xét $f(x)=x^2-4x-3$ Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>-3</td><td>-7</td><td>-3</td></tr></table> Từ bảng biến thiên (2) đúng với $\forall x \in [0;4]$ $\Leftrightarrow m \geq \max_{[0;4]} f(x) \Leftrightarrow m \geq -3$	x	0	2	4	f(x)	-3	-7	-3	0,5
	x	0	2	4						
f(x)	-3	-7	-3							
PT $\Leftrightarrow 4+2\sqrt{4x-x^2} \leq 4x-x^2+m+3$ Đặt $t = \sqrt{4x-x^2}, t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 4x-x^2$ Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>t²</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td></tr></table>	x	0	2	4	t ²	0	4	0		
x	0	2	4							
t ²	0	4	0							

	Dựa vào bảng biến thiên suy ra $0 \leq t^2 \leq 4$ Bất phương trình trở thành $g(t)=-t^2+2t+1 \leq m$ (3) Để bất phương trình đầu nghiệm đúng với $\forall x \in [0;4]$ thì (3) có nghiệm đúng với $\forall t \in [0;2]. \Leftrightarrow m \geq \max_{[0;2]} g(t)$ t 012 g(t) 121 Từ BBT suy ra $m \geq 2$. Kết luận $m \geq 2$ thì bpt (1) nghiệm đúng $\forall x \in [0;4]$.	0,5
6	Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{(2x_n + 1)^{2022}}{2022} + x_n$. Với n là số nguyên dương. Đặt $u_n = \frac{(2x_1 + 1)^{2021}}{2x_2 + 1} + \frac{(2x_2 + 1)^{2021}}{2x_3 + 1} + \frac{(2x_3 + 1)^{2021}}{2x_4 + 1} + \dots + \frac{(2x_n + 1)^{2021}}{2x_{n+1} + 1}$ Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.	1,0
	Ta có $x_{n+1} - x_n = \frac{(2x_n + 1)^{2022}}{2022}, \forall n \geq 1$ Suy ra $\frac{1}{2x_n + 1} - \frac{1}{2x_{n+1} + 1} = \frac{2(x_{n+1} - x_n)}{(2x_n + 1)(2x_{n+1} + 1)} = \frac{(2x_n + 1)^{2021}}{1011(2x_{n+1} + 1)}$ $\Rightarrow$ $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{(2x_i + 1)^{2021}}{2x_{i+1} + 1} = 1011 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2x_i + 1} - \frac{1}{2x_{i+1} + 1} \right) = 1011 \left(\frac{1}{2x_1 + 1} - \frac{1}{2x_{n+1} + 1} \right)$	0,5
	Mặt khác: $x_{n+1} - x_n = \frac{(2x_n + 1)^{2022}}{2022} \geq 0$ nên dãy (x_n) là dãy số tăng $\forall n \geq 1$. Nếu (x_n) bị chặn thì $\lim x_n$ tồn tại.	

	Đặt $\lim x_n = a \Rightarrow a \geq 1$ và $a = \frac{(2a+1)^{2022}}{2022} + a$ (vô lý). Suy ra (x_n) không bị chặn trên hay $\lim x_n = +\infty$ suy ra $\lim \frac{1}{2x_{n+1} + 1} = 0$ Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1011}{3}$.	0,5
7	Giả sử $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110}$, với $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{110}$ là các hệ số. Tính giá trị của tổng $T = C_{11}^0 a_{11} - C_{11}^1 a_{10} + C_{11}^2 a_9 - C_{11}^3 a_8 + \dots + C_{11}^{10} a_1 - C_{11}^{11} a_0$	1,0
	Ta có $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^{11} = \left[\frac{1-(x^{11}-1)}{x-1} \right]^{11}$ $\Leftrightarrow (x^{11}-1)^{11} = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110})(x-1)^{11}$ $(x^{11}-1)^{11} = \sum_{k=0}^{11} (-1)^k \cdot C_{11}^k \cdot (x^{11})^{11-k} = \sum_{k=0}^{11} (-1)^k \cdot C_{11}^k \cdot x^{121-11k}.$ Số hạng chứa x^{11} trong khai triển trên ứng với $121-11k=11 \Leftrightarrow k=10$.	0,5
	Hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển $(x^{11}-1)^{11}$ là $(-1)^{10} \cdot C_{11}^{10} = 11$ (1). Mặt khác $(x-1)^{11} = \sum_{k=0}^{11} (-1)^k \cdot C_{11}^k \cdot x^{11-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110})(x-1)^{11}$ là $a_0 \cdot (-1)^0 \cdot C_{11}^0 + a_1 \cdot (-1)^1 \cdot C_{11}^1 + a_2 \cdot (-1)^2 \cdot C_{11}^2 + \dots + a_{11} \cdot (-1)^{11} \cdot C_{11}^{11}$ $= a_0 C_{11}^0 - a_1 C_{11}^1 + a_2 C_{11}^2 - \dots - a_{11} C_{11}^{11} = -T \quad (2).$ Từ (1) và (2) suy ra $-T = 11 \Leftrightarrow T = -11$.	0,5
8	Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BC'D$. a. Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (ABG). Thiết diện là hình gì? b. Hai điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng $AD, A'C$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(BC'D)$, biết $AM = \frac{1}{4}AD$. Tính tỉ số $\frac{CN}{CA'}$.	1,5
	Lời giải	



0,5

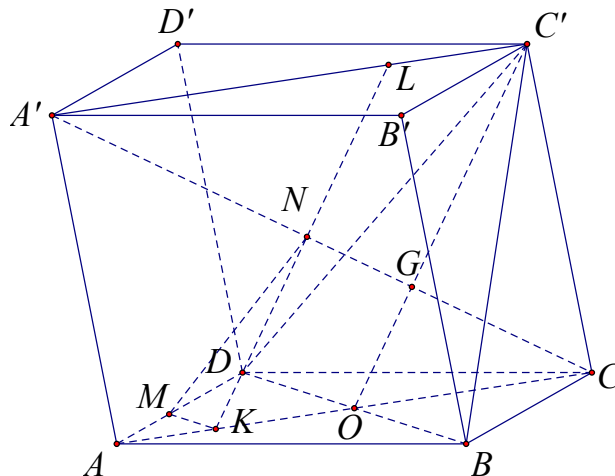
a. Trong $(BC'D)$ kéo dài BG cắt $C'D$ tại I .

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (ABG) \cap (CDD'C') = Ix \\ AB \subset (ABG), CD \subset (CDD'C') \Rightarrow Ix \parallel CD. \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

Từ đó, trong $(CDD'C')$, kẻ đường thẳng $Ix \parallel CD$ cắt CC' , DD' lần lượt tại E và F .

Vậy thiết diện cần tìm là hình bình hành $ABEF$ (vì $EF = CD = AB$ và $EF \parallel AB$)

b. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Dễ thấy $G \in A'C$.



1,0

Khi đó, qua M kẻ đường thẳng song song với BD và cắt AC tại K .

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, gọi $L = KN \cap A'C'$, ta có:

	$\begin{cases} MN \parallel (BC'D) \\ MK \parallel (BC'D) \end{cases} \Rightarrow (MNK) \parallel (BC'D)$ $\Rightarrow KN \parallel (BC'D) \Rightarrow KN \parallel OC'.$ Mặt khác, theo giả thiết, ta có: $\frac{AK}{AO} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{KO}{AO} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{KO}{AC} = \frac{3}{8}$ và $\frac{KC}{AC} = \frac{7}{8}.$ Vì $KO = LC', AC = A'C'$ nên $\frac{LC'}{A'C'} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{A'L}{A'C'} = \frac{5}{8}.$ Mà $\frac{A'L}{KC} = \frac{A'L}{A'C'} \cdot \frac{AC}{KC} = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{A'N}{NC} = \frac{5}{7}.$ Vậy $\frac{CN}{CA'} = \frac{7}{12}.$	
	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(3;1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$. Tìm tọa độ điểm C thuộc Δ để tam giác ACB cân tại C.	0,5
9	Phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \end{cases}$ Ta có $C \in \Delta \Rightarrow C(1+t, 2+t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-2-t; -t) \\ \overrightarrow{CB} = (2-t; -1-t) \end{cases}$ Ta có ΔACB cân tại C $\Leftrightarrow CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (-2-t)^2 + (-t)^2 = (2-t)^2 + (-1-t)^2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$ Suy ra $C\left(\frac{7}{6}; \frac{13}{6}\right)$	0,5
	Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ac = 4b + c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{3c^2}{4}\right)c + 3b^2 + \frac{15^2}{(b+c)(c+3b)}.$	1,0
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy 2 số: $\frac{a^2}{3} + \frac{3c^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{3} \cdot \frac{3c^2}{4}} = ac$ $P \geq ac^2 + 3b^2 + \frac{15^2}{(b+c)(c+3b)}$ Từ giả thiết: $ac = 4b + c \Leftrightarrow ac - 3b = b + c$ Ta lại có: $ac^2 + 3b^2 = (ac - 3b)c + 3b(b+c) = (b+c)c + 3b(b+c) = (b+c)(3b+c)$	0,5

	$P \geq (b+c)(3b+c) + \frac{15^2}{(b+c)(c+3b)}$	
10	Sử dụng Cauchy cho 2 số: $(b+c)(3b+c) + \frac{15^2}{(b+c)(c+3b)}$ $\geq 2\sqrt{(b+c)(3b+c) \cdot \frac{15^2}{(b+c)(c+3b)}} = 30$ Do vậy: $P \geq 30$.	0,25
	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a^2}{3} = \frac{3c^2}{4} \\ (b+c)(3b+c) = \frac{15^2}{(b+c)(c+3b)} \Leftrightarrow \\ ac = 4b+c \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$ Vậy $\min P = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{3c^2}{4}\right)c + 3b^2 + \frac{15^2}{(b+c)(c+3b)} = 30$, khi $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$	0,25