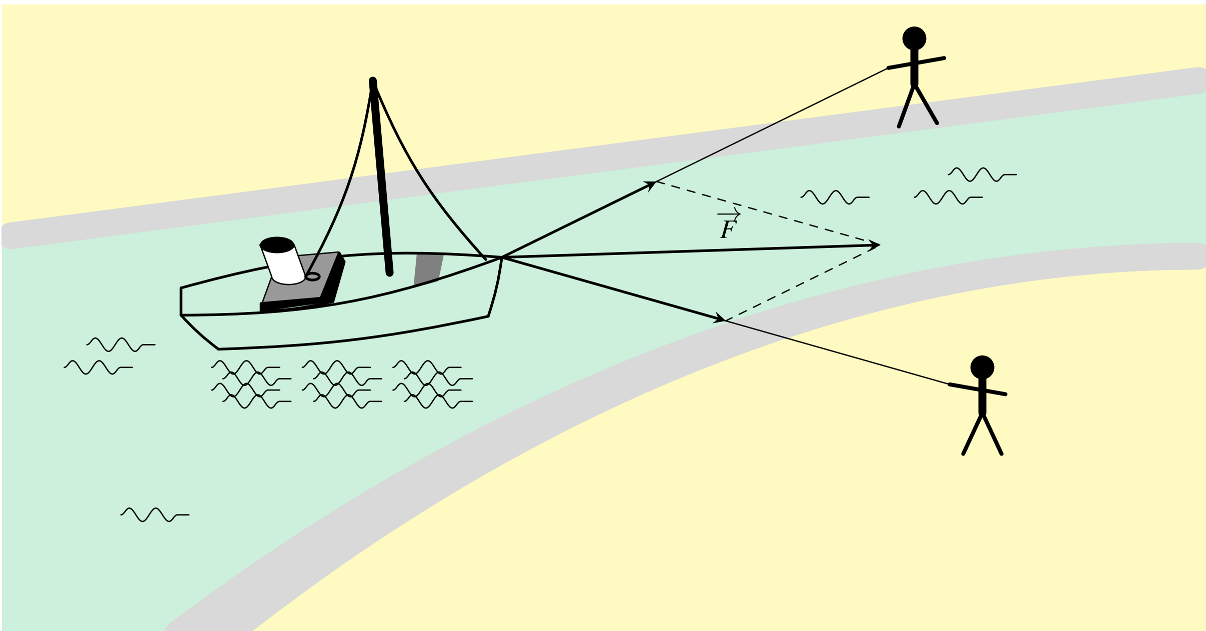
Chương 1

VECTƠ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA



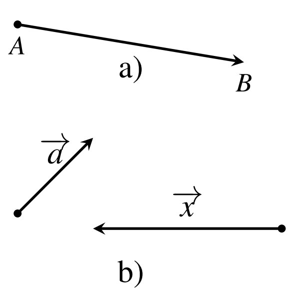
Hình 1.1

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Định nghĩa, sự xác định véc-tơ

Định nghĩa 1 (Véc-tơ). *Véc-tơ* là một đoạn thẳng có hướng.

Véc-tơ có điểm đầu (gốc) A, điểm cuối (ngọn) B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
Véc-tơ còn được kí hiệu là $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$,... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.
Một véc-tơ hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.



Hình 1.2

⚠ *Với hai điểm phân biệt A và B ta chỉ có một đoạn thẳng (AB hoặc BA), nhưng có hai véc-tơ khác nhau là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.*

Định nghĩa 2 (Độ dài véc-tơ). Độ dài của đoạn thẳng AB là độ dài (hay mô-đun) của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Tức là $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.
Đương nhiên $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$.

Định nghĩa 3 (Véc-tơ-không). Véc-tơ-không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Véc-tơ-không được kí hiệu là $\overrightarrow{0}$.

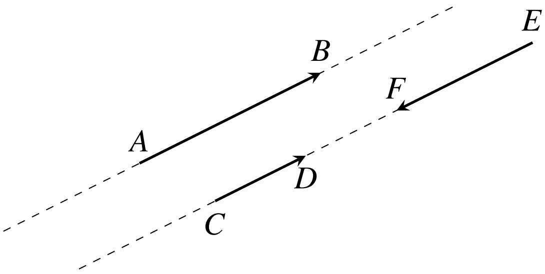
Ta có $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$

2. Hai véc-tơ cùng phương, cùng hướng

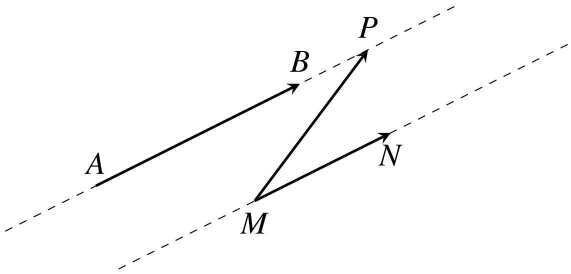
Định nghĩa 4 (Giá véc-tơ). Giá của một véc-tơ khác $\overrightarrow{0}$ là đường thẳng chứa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

Định nghĩa 5 (Phương, hướng véc-tơ). Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Trên hình 1.3a) ta có các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ cùng phương. Trên hình 1.3b) ta có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$ cùng phương, còn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MP}$ không cùng phương.
Hai véc-tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$ ngược hướng (hình 1.3a).



Hình 1.3a)



Hình 1.3b)

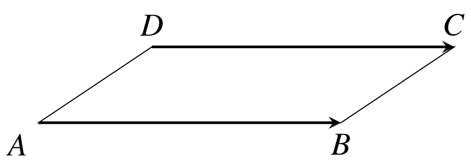
Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Khi nói hai véc-tơ cùng hướng hay ngược hướng thì chúng đã cùng phương. Véc-tơ $\overrightarrow{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi véc-tơ.

3. Hai véc-tơ bằng nhau

Định nghĩa 6 (Véc-tơ bằng nhau). Hai véc-tơ gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

Chẳng hạn, nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



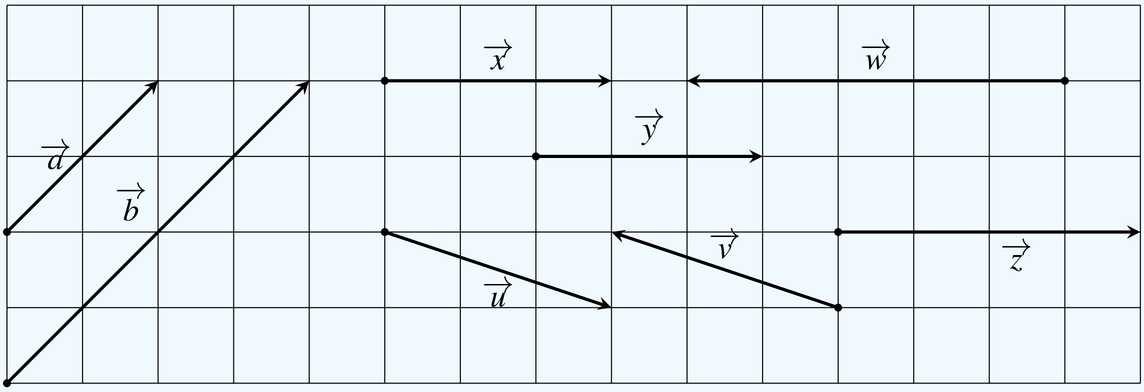
Khi cho trước véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$. Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định một véc-tơ, phương hướng của véc-tơ, độ dài của véc-tơ

- Xác định một véc-tơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai véc-tơ theo định nghĩa.
- Dựa vào các tình chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một véc-tơ.

Ví dụ 1. Trong hình 1.4, hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các véc-tơ bằng nhau.



Hình 1.4

Lời giải.

+ Các véc-tơ cùng phương: $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ và $\overrightarrow{w}$.
+ Các véc-tơ cùng hướng: $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ và $\overrightarrow{z}$.
+ Các véc-tơ ngược hướng: $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{w}$ và $\overrightarrow{x}$; $\overrightarrow{w}$ và $\overrightarrow{y}$; $\overrightarrow{w}$ và $\overrightarrow{z}$.
+ Các véc-tơ bằng nhau: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.

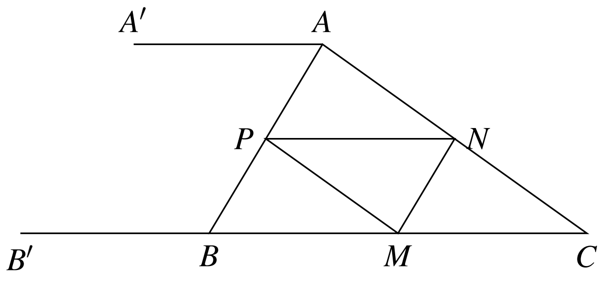
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

a) Liệt kê tất cả các véc-tơ khác véc-tơ $\overrightarrow{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

b) Liệt kê các véc-tơ khác véc-tơ $\overrightarrow{0}$, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu là A hoặc B.

Lời giải.



a) Các véc-tơ khác véc-tơ $\overrightarrow{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}$.

b) Các véc-tơ khác véc-tơ $\overrightarrow{0}$, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$.

c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là véc-tơ có điểm đầu là B và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$.

Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP. Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là véc-tơ có điểm đầu là A và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$.

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

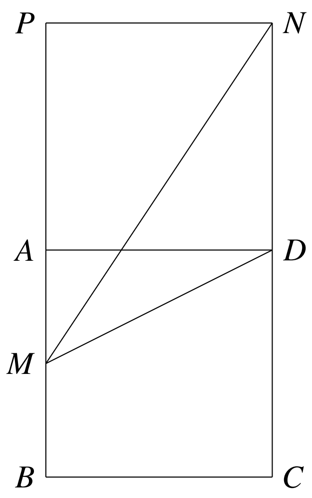
Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông MAD ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.
Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{2}$.
Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ngũ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ $\overrightarrow{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Lời giải. Từ hai điểm phân biệt, chẳng hạn A, B, ta xác định được hai véc-tơ khác véc-tơ-không là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$. Mà từ năm đỉnh A, B, C, D, E của ngũ giác ta có 10 cặp điểm phân biệt, do đó có 20 véc-tơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O. Tìm các véc-tơ từ 5 điểm A, B, C, D, O

a) Bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OB}$.

b) Có độ dài bằng $\left|\overrightarrow{OB}\right|$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

b) $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OD}$.

Bài 3. Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.

a) Khi nào thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng?

b) Khi nào thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng?

Lời giải.

a) A nằm ngoài đoạn BC.

b) A nằm trong đoạn BC.

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì ba điểm A, B, C có đặc điểm gì?

b) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì bốn điểm A, B, C, D có đặc điểm gì?

Lời giải.

a) B là trung điểm của AC.

b) A, B, C, D thẳng hàng hoặc $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 5. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG. Tính độ dài của các véc-tơ $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BI}$.

Lời giải. Sử dụng tính chất của trọng tâm và định lý Pythagoras.

Đáp án: $\left|\overrightarrow{AG}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\left|\overrightarrow{BI}\right| = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

Dạng 2. Chứng minh hai véc-tơ bằng nhau

Để chứng minh hai véc-tơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

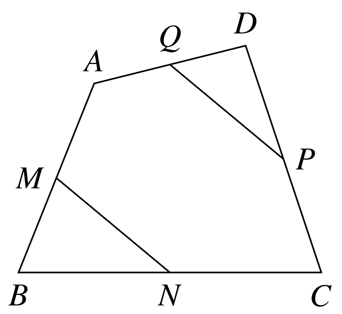
Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải.

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN \parallel AC$ và $MN = \dfrac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự, QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP \parallel AC$ và $QP = \dfrac{1}{2}AC$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp hình vẽ suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.



Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GA}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

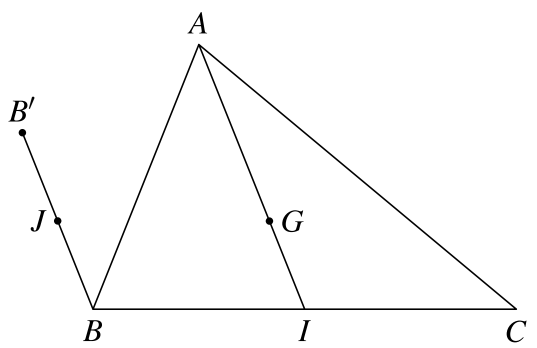
Lời giải.

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $BB' = AG$ và $BB' \parallel AG$. Do đó $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{JG}$ cùng hướng (1).

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG = \dfrac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ = \dfrac{1}{2}BB'$. Vì vậy $BJ = IG$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

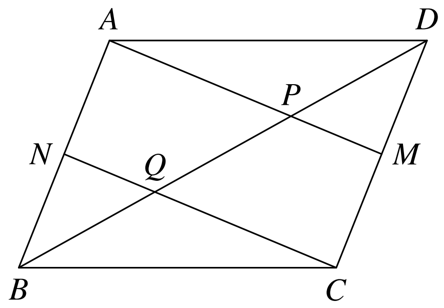


BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB; P là giao điểm của AM và DB; Q là giao điểm của CN và DB. Chứng minh $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải.

Chứng minh $DP = PQ$ dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác DQC và $PQ = QB$ dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác ABP. Suy ra $DP = PQ = QB$.



Bài 7. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Chứng minh rằng:

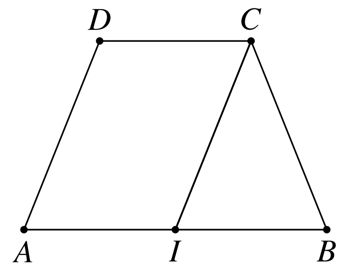
a) $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$.

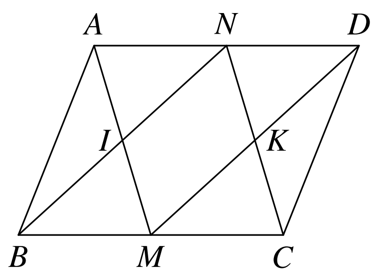
Lời giải.

a) Chứng minh $BICD$ là hình bình hành.

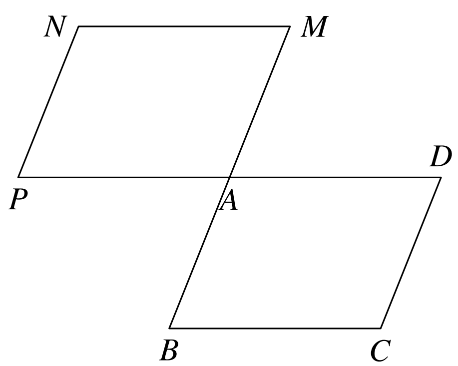
b) Chứng minh I là trung điểm AB và dữ kiện tứ giác $BICD$ là hình bình hành đã chứng minh ở câu a.



Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Điểm I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của DM và CN. Chứng minh $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$.
Lời giải.
Theo giả thiết M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD nên $AN = \dfrac{1}{2}AD$ và $BM = \dfrac{1}{2}BC$. Mà $AD = BC$ do $ABCD$ là hình bình hành. Suy ra $ANMB$ là hình bình hành.
Ta có Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AM và BN của hình bình hành $ANMB$ nên I là trung điểm của BN.
Tương tự, ta cũng chứng minh được K là trung điểm của DM. Từ đó dễ dàng chứng minh được $DKBI$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$.

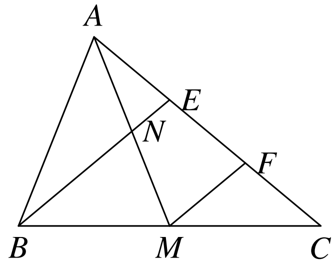


Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0}$.
Lời giải.
Chứng minh $AMNP$ và $QMNP$ đều là hình bình hành, suy ra $A \equiv Q$, suy ra $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0}$.



Bài 10. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N. Chứng minh $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.
Lời giải.

$FM \parallel BE$ vì FM là đường trung bình của tam giác CEB.
Ta có $EA = EF$. Vậy EN là đường trung bình của tam giác AFM. Suy ra N là trung điểm của AM. Vậy $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.



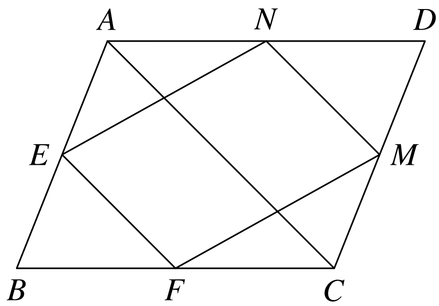
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E,F,M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB,BC,CD và DA.

a) Chứng tỏ rằng 3 vectơ $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ cùng phương;

b) Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành.

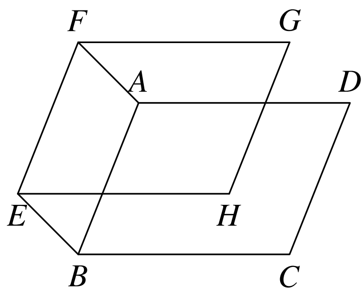
Lời giải.



a) Dựa vào tính chất đường trung bình, ta suy ra được $EF \parallel AC \parallel MN \Rightarrow \overrightarrow{EF},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ cùng phương;

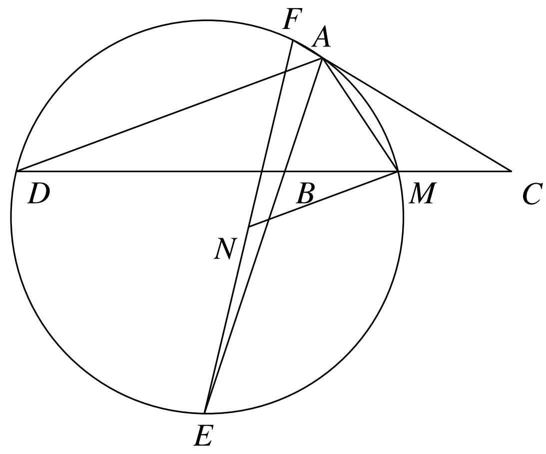
b) Dựa vào tính chất đường trung bình, ta suy ra được $EF = MN = \frac{1}{2}AC$ kết hợp với câu a) $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành.

Bài 12. Cho hai bình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Dựng $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh $CDGH$ là hình bình hành.
Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$ nên tứ giác $EFGH$ là hình bình hành, suy ra $GH \parallel FE \parallel AB \parallel DC$ và $GH = FE = AB = DC$ hay tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.



Bài 13. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC, phân giác ngoài góc A cắt BC ở D. Giả sử giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM với AB, AC lần lượt là E, F (khác A). Gọi N là trung điểm của đoạn EF. Chứng minh hai véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.
Lời giải.

Kẻ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi P là điểm chính giữa cung BC không chứa A, $PA \perp DA$. Q là điểm chính giữa cung BC chứa A. Ta có A, D, Q thẳng hàng và P, M, O, Q cũng thẳng hàng.
Dễ nhận thấy DP là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM. Tam giác PEF cân tại P từ đó có DP là trung trực của EF nên $DP \perp EF$ tại N.
Hai tam giác PED và PCQ đồng dạng, EN và CM là đường cao nên suy ra $\dfrac{PN}{PD} = \dfrac{PM}{PQ} \Rightarrow MN \parallel DQ$.
Vậy, $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.



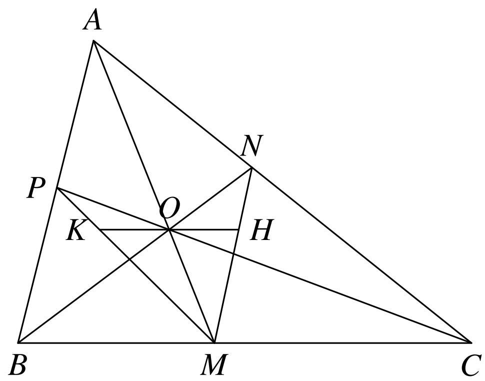
Bài 14. Cho tam giác ABC có O nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện lần lượt tại M, N, P. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt MN, MP tại H, K. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$.

Lời giải.

Do $HK \parallel BC$ nên ta có: $\dfrac{OH}{BM} = \dfrac{ON}{BN} \Rightarrow OH = \dfrac{ON}{BN}.BM$, $\dfrac{OK}{CM} = \dfrac{OP}{CP} \Rightarrow OK = \dfrac{OP}{CP}.CM$. (1)

Mặt khác, ta lại có $\dfrac{ON}{BN} = \dfrac{S_{AON}}{S_{ABN}} = \dfrac{S_{CON}}{S_{CBN}} = \dfrac{S_{AON}+S_{CON}}{S_{ABN}+S_{CBN}} = \dfrac{S_{AOC}}{S_{ABC}}$,
$\dfrac{OP}{CP} = \dfrac{S_{AOB}}{S_{ABC}} \Rightarrow \dfrac{ON}{BN}.\dfrac{CP}{OP} = \dfrac{S_{AOC}}{S_{ABC}}.\dfrac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \dfrac{S_{AOC}}{S_{AOB}} = \dfrac{CM}{BM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OK = OH$. Vì vậy, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$.

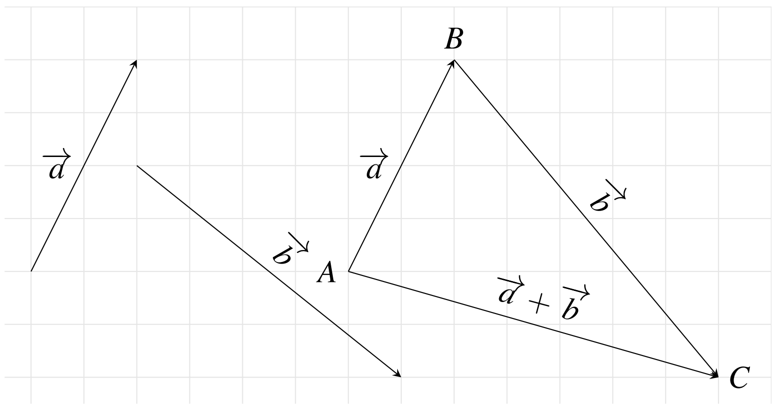


§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

I. Tóm tắt lí thuyết

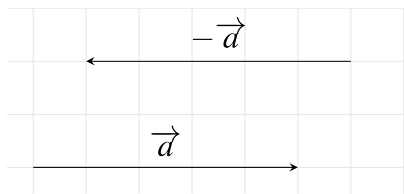
1. Định nghĩa tổng và hiệu hai véc-tơ

Định nghĩa 1 (Phép cộng). Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Với điểm A bất kỳ, dựng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, dựng $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$. Khi đó, véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là véc-tơ tổng của $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$.
Ta ký hiệu: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, tức là: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Phép toán tìm tổng của hai véc-tơ còn gọi là **phép cộng véc-tơ**.

Định nghĩa 2 (Véc-tơ đối). Cho véc-tơ $\overrightarrow{a}$, véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\overrightarrow{a}$ được gọi là véc-tơ đối của $\overrightarrow{a}$, ký hiệu là $-\overrightarrow{a}$.

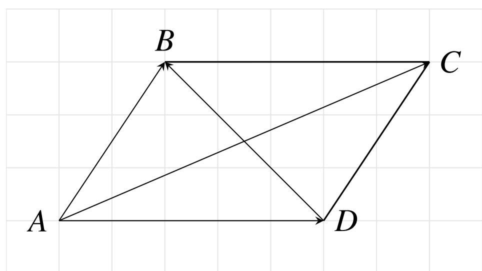


Định nghĩa 3 (Phép trừ). Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Phép phép trừ của $\overrightarrow{a}$ với $\overrightarrow{b}$ được định nghĩa là phép cộng của $\overrightarrow{a}$ với $-\overrightarrow{b}$.
Ký hiệu $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$.

2. Quy tắc hình bình hành

Cho hình bình hành $ABCD$, khi đó

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$



3. Các tính chất của phép cộng, trừ hai véc-tơ

Tính chất 1. (giao hoán và kết hợp)

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, b) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Tính chất 2. (véc-tơ đối)

a) $-\vec{0}=\vec{0}$ b) $\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}-\vec{a})$, c) $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

Tính chất 3. (cộng với véc-tơ $\vec{0}$) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Tính chất 4. Cho 3 điểm A,B,C ta có:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc 3 điểm), b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ).

Tính chất 5. a) (quy tắc trung điểm) I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$,

b) (quy tắc trọng tâm) G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định véc-tơ

Dựa vào quy tắc cộng, trừ, quy tắc 3 điểm, hình bình hành, ta biến đổi và dựng hình để xác định các véc-tơ. Chú ý các quy tắc sau đây.

a) $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc 3 điểm).

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ).

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ($ABCD$ là hình bình hành).

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC.

a) Xác định véc-tơ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

b) Xác định véc-tơ $\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

c) Xác định véc-tơ $\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

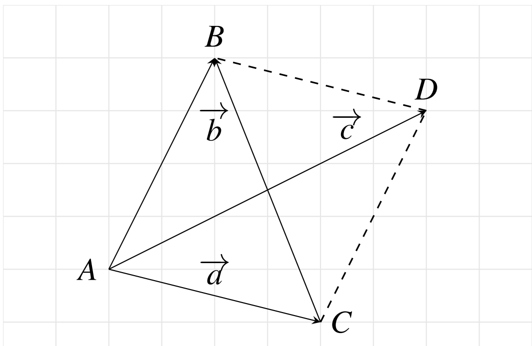
Lời giải.

Ta có

a) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

c) $\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, với $ABDC$ là hình bình hành.



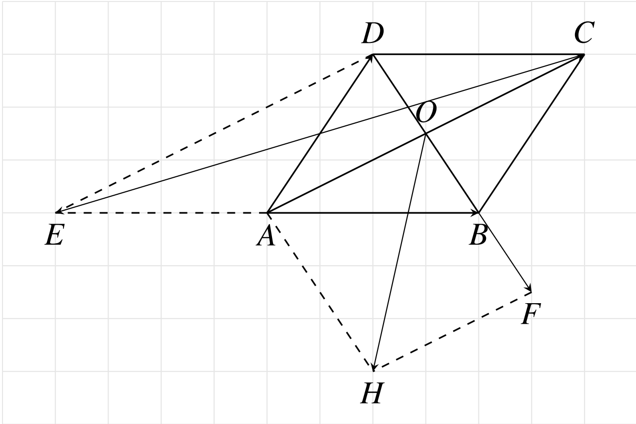
Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, có tâm O. Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

b) $\vec{y}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CD}$.

c) $\vec{z}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}$.

d) $\vec{t}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BD}$.



Lời giải.

a) Theo tính chất hình bình hành $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$.

c) $\vec{z} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE}$ (dựng hình bình hành $CDEA$).

d) $\vec{t} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OH}$. Trong đó, ta dựng $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DB}$ và hình bình hành $OFHA$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC đều, G là trọng tâm và M là trung điểm cạnh BC. Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

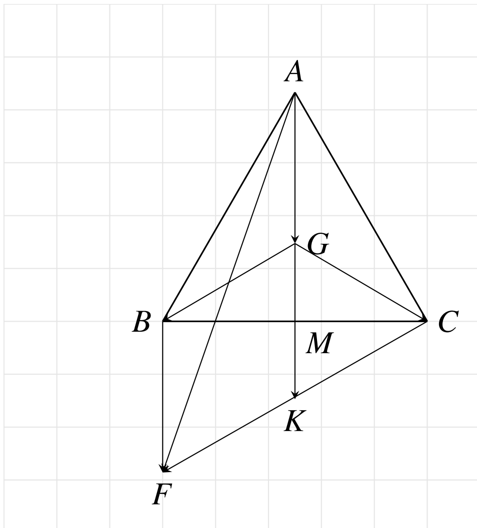
a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Lời giải.



a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GK}$ (dựng hình bình hành $GBKC$).

b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF}$ (dựng $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AG}$).

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$.

Ví dụ 4. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I. Gọi M là một điểm tùy ý không nằm trên đường thẳng AB. Lấy trên tia MI một điểm N sao cho $IN = MI$. Hãy xác định các véc-tơ:

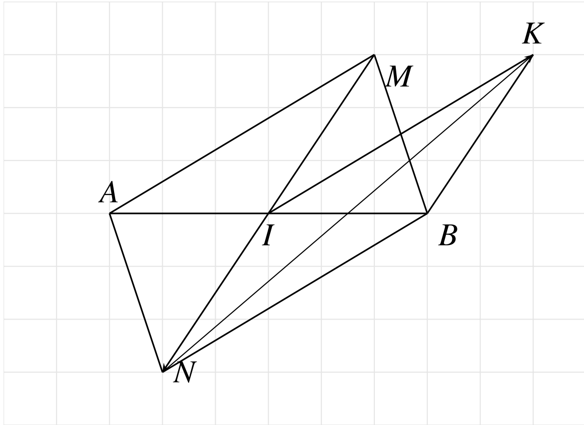
a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NI}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{IN}$.

b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NI}=\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NK}$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Xác định các véc-tơ đối của các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DO}$.

b) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

a) $-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$, $-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$.

b) $-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$, $-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CA}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Tìm véc-tơ $\overrightarrow{x}$ trong các trường hợp:

a) $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{x}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BE}$, với $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm BC,AC,AB. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NA}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{CM}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{ND}$ (dựng thêm điểm D sao cho $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$).

Bài 5. Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm AC và N là điểm đối xứng của B qua M. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CN}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN}$.

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MN}$.

Lời giải. Ta có, tứ giác $BANC$ là hình bình hành.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$ (tính chất hình bình hành $BANC$).

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BE}$ (dựng $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CN}$).

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$.

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{BM}$.

Bài 6. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DE, EF, FA. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CD}$.

b) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{PS}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{0}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt nằm trên cạnh BC,AC,AB sao cho $BD=\frac{1}{3}BC$, $CE=\frac{1}{3}CA$, $AF=\frac{1}{3}AB$. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

Lời giải.

a) Lấy thêm các điểm P,Q về phía ngoài cạnh AB,AC sao cho $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{AF}$. Theo đó, tam giác APQ đồng dạng tam giác ACB nên ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BD}$. Khi đó, $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{0}$.

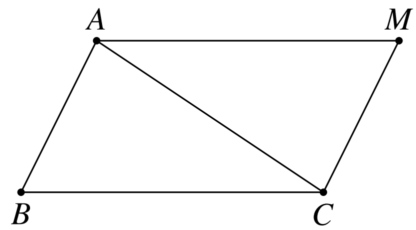
b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AF})-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}$.

Dạng 2. Xác định điểm thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước

Để xác định điểm M thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước, ta làm như sau:
○ **HƯỚNG 1:**
– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{v}$, trong đó A là điểm cố định và $\overrightarrow{v}$ là véc-tơ cố định.
– Lấy A làm điểm gốc, dựng véc-tơ bằng $\overrightarrow{v}$ thì điểm ngọn chính là điểm M cần tìm.
○ **HƯỚNG 2:**
– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$, trong đó A, B là hai điểm cố định.
– Khi đó điểm M cần tìm trùng với điểm B.
○**HƯỚNG 3:**
– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn đúng với mọi điểm M.
– Khi đó điểm M cần tìm là điểm tùy ý.
○**HƯỚNG 4:**
– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn sai với mọi điểm M.
– Khi đó không có điểm M nào thỏa điều kiện.
○**HƯỚNG 5:**
– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\left|\overrightarrow{IM}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, trong đó I, A, B là các điểm cố định.
– Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường tròn tâm I, bán kính AB.
○**HƯỚNG 6:**
– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$, trong đó A, B là các điểm cố định phân biệt.
– Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường trung trực của đoạn AB.

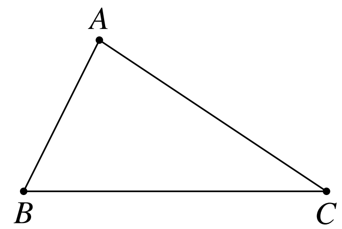
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải.
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$
$\Rightarrow$ Điểm M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.



Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$.

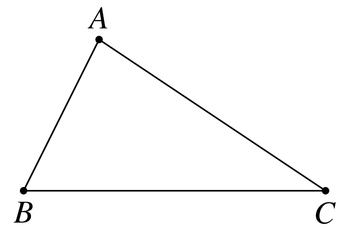
Lời giải.
$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM}$
$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm A.



Ví dụ 7. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

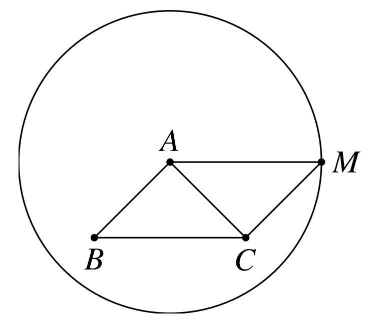
Lời giải.

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$
$\Rightarrow$ không có M nào thỏa điều kiện bài toán.



Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$.

Lời giải.
$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{CB}|\Leftrightarrow MA=CB$
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm A, bán kính CB.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Cho $\triangle ABC$. Dựng điểm M thỏa mãn điều kiện

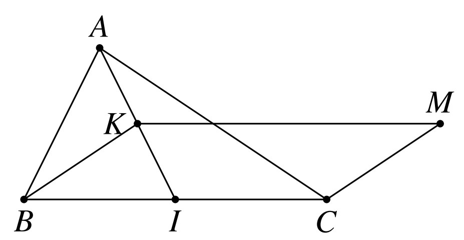
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}. \qquad (1)$$

Lời giải. Ta có $(1)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$. Vậy bốn điểm A,C,B,M tạo thành hình bình hành.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.
Lời giải. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AM}$.
$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBM$.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh AC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$.
Lời giải. $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CM}\right)=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IM}$.
$\Rightarrow M$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $IABM$.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Gọi I,K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC,AI. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.
Lời giải.
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BK}$
$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBKM$.



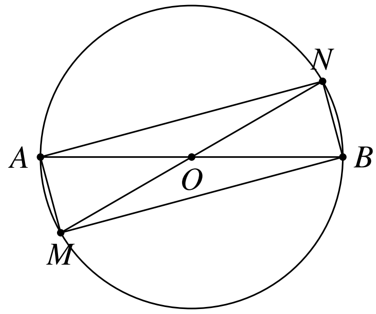
Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OM}$.
Lời giải. $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AM}$.
$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AODM$.

Bài 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$.
Lời giải. $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$.
$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm D.

Bài 14. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$.
Lời giải. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}$.
$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm G.

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$.
Lời giải. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}$.
$\Rightarrow$ Không có điểm M nào thỏa điều kiện trên.

Bài 16. Cho hai điểm A và B. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$.
Lời giải.
$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|\Leftrightarrow MN=BA$.
Với N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AMBN$. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB.
$\Rightarrow 2MO=2OB\Rightarrow MO=OB$.
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm O, bán kính OB.



Bài 17. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$.
Lời giải. $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{BC}|\Leftrightarrow MC=BC$.
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm C, bán kính BC.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}|$.
Lời giải. $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}|\Leftrightarrow MA=MC$.
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC.

Bài 19. Cho năm điểm A,B,C,D,E. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CD}$.
Lời giải. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MM}=\overrightarrow{0}$.
$\Rightarrow$ Điểm M là điểm tùy ý.

Dạng 3. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ

– Độ dài của véc-tơ bằng độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.
– Ta thường sử dụng các công thức về cạnh như hệ thức lượng tam giác vuông, định lý Pytago, tính chất tam giác đều, hình chữ nhật, hình vuông,...

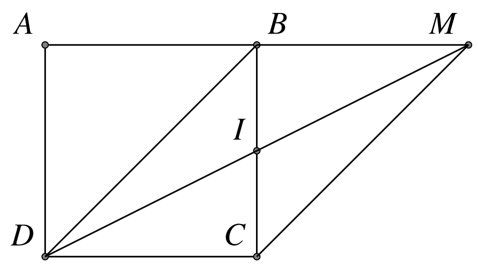
Ví dụ 9. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=a$.

Ví dụ 10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|$.

Lời giải.

Vẽ hình bình hành $CDBM$ thì DM cắt BC tại trung điểm I của mỗi đường.

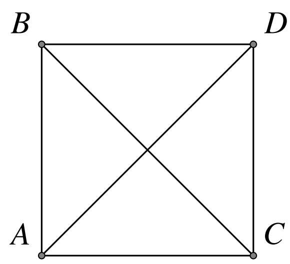


Ta có $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}$ nên $\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|=DM=2DI$

Mà $DI^2=a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}a^2$ nên $\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|=a\sqrt{5}$.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ thì ΔABC là tam giác vuông.

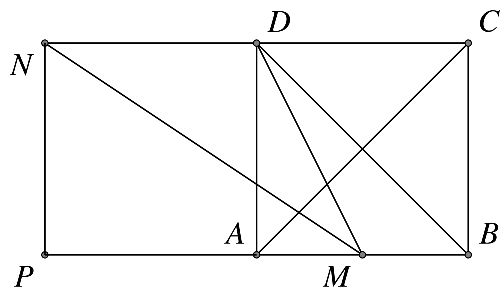
Lời giải.
Dựng hình bình hành $ABDC$.



Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$
Theo quy tắc hiệu hai véc-tơ ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.
Từ giả thiết suy ra $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$, tức là $AD=BC$.
Hình bình hành $ABDC$ có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình chữ nhật, tức là tam giác ABC vuông.

Ví dụ 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của véc-tơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.
Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông MAD ta có



$DM^2=AM^2+AD^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+a^2=\dfrac{5a^2}{4}\Rightarrow DM=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right|=MD=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.
Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM=PA+AM=a+\dfrac{a}{2}=\dfrac{3a}{2}$.

Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông NPM ta có

$MN^2=NP^2+PM^2=a^2+\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2=\dfrac{13a^2}{4}\Rightarrow DM=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right|=MN=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, M là một điểm bất kỳ. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải. Áp dụng quy tắc trừ ta có
$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)-\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}$
LấyB' là điểm đối xứng của B qua A
Khi đó $-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB'}\Rightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BB'}$
Suy ra $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|=|\overrightarrow{BB'}|=BB'=2a$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 20. Cho tam giác đều ABC cạnh $5a$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.
Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=5a$.

Ta có $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=BA=5a$.

Bài 21. Xét các véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Khi nào thì $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$.

Lời giải. Từ điểm O nào đó, ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$. Khi đó $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$. Như vậy:

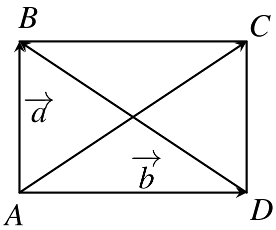
$$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow OB=OA+AB.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi O,A,B thẳng hàng theo thứ tự này. Hay hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng hướng.

Bài 22. Xét các véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Khi nào thì $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$.

Lời giải.

Từ điểm A nào đó, ta kẻ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$. Vẽ điểm C sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AC}$. Theo quy tắc về hiệu véc-tơ ta có: $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Như vậy:



$$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|\Leftrightarrow AC=BD.$$

Điều này xảy ra khi $ABCD$ là hình chữ nhật. Vậy AB vuông góc với AD hay giá của hai véc-tơ vuông góc với nhau.

Bài 23. Chứng minh rằng với $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương thì

$$|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|<\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|<|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|.$$

Lời giải. Gọi A,B là điểm đầu và điểm cuối của $\overrightarrow{a}$. Vẽ điểm C sao cho $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$. Vì $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương nên ba điểm A,B,C không thẳng hàng. Ta có:

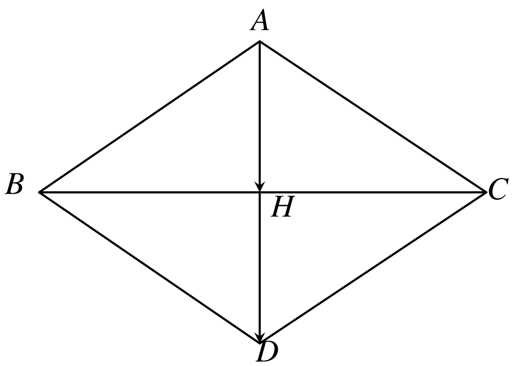
$$|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|=AB-BC<AC=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|<AB+BC=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 24. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết $AB=a$ và $BC=2b$ (với $a>b>0$). Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

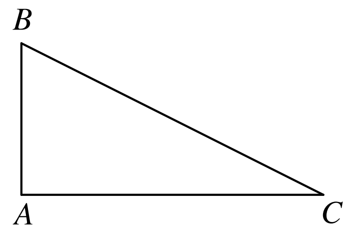
Do tam giác ABC cân tại A, đường cao AH nên H là trung điểm BC. Suy ra $BH=b$. Trong tam giác vuông ABH, ta có:
$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-b^2}$.
Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}$.
Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}\right|=\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{a^2-b^2}$.
Vẽ hình bình hành $ABDC$. Khi đó:
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
Do đó: $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=2AH=2\sqrt{a^2-b^2}$.



Bài 25. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$, $BC=a\sqrt{5}$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

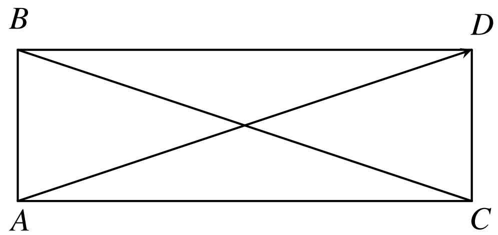
Lời giải.

Do tam giác ABC vuông tại A nên
$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 2a$.
Ta có $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = BA = a$.



Bài 26. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = a$ và $AC = 3a$. Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

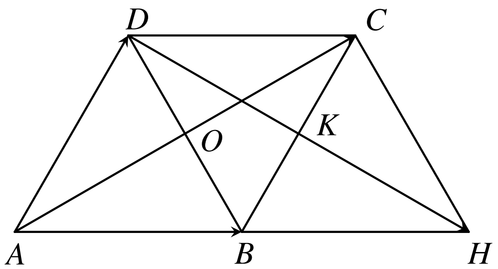
Lời giải.
Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.
Hay $BC = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Do đó $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = a\sqrt{10}$.
Vẽ hình bình hành $ABDC$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = a\sqrt{10}$.



Bài 27. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, cạnh bằng 4 và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính:

$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|, \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}\right|, \left|-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OC}\right|.$$

Lời giải.
Từ giả thiết suy ra ABD là tam giác đều cạnh bằng 4. Do đó $AO = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $AC = 4\sqrt{3}$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Như vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = AC = 4\sqrt{3}$.
Ta có: $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}$.
Suy ra $\left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}\right| = BO = \dfrac{1}{2}BD = 2$.
Vẽ hình bình hành $BDCH$. Do $DB = DC = 4$ nên hình bình hành $BDCH$ là hình thoi, do đó $DH = 2DK = 4\sqrt{3}$ (K là trung điểm của BC).



Ta có: $\left|-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{DH}\right| = 4\sqrt{3}$.

Bài 28. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B phân biệt, không nằm trên d. Tìm $M \in d$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi C là điểm đối xứng của B qua A. Khi đó C là điểm cố định và

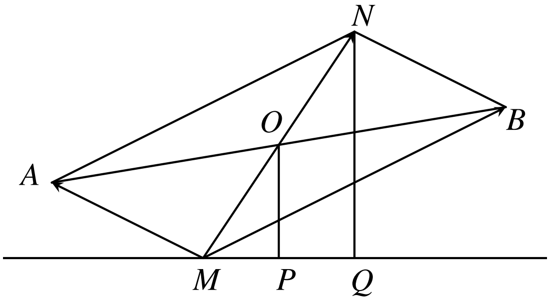
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC}.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right| = MC$. Như vậy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MC nhỏ nhất, hay M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng d.

Bài 29. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$, với $M \in d$.

Lời giải.

Trong trường hợp M,A,B không thẳng hàng, ta dựng hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MN}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=MN$. Gọi O là giao điểm của MN và AB. Khi đó, O là trung điểm AB nên O là điểm cố định. Từ O, N lần lượt kẻ các đường vuông góc với d, cắt d tại P, Q. Ta có $MN \geq NQ = 2OP$. Còn khi M,A,B thẳng hàng thì hiển nhiên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| > 2OP$. Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất là bằng $2OP$, đạt được khi M trùng P.



Dạng 4. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

a) Sử dụng quy tắc ba điểm.

b) Sử dụng quy tắc hình bình hành.

Ví dụ 14. Cho 5 điểm A,B,C,D,E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

Lời giải. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{0}\\ \Leftrightarrow&\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{0}\\ \Leftrightarrow&\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{0}\quad\text{(luôn đúng)}\end{aligned}$$

Ví dụ 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$
Đẳng thức cần chứng minh tương đương với$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ (luôn đúng)

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$.

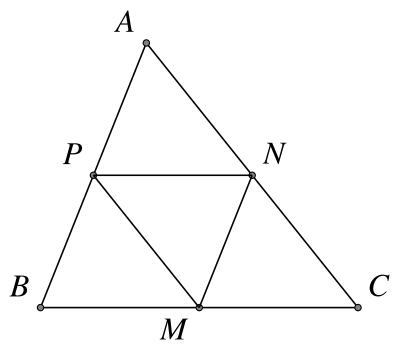
Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\\ \overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\\ \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}\end{cases}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}&=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}\right)\\&=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}\end{aligned}$$

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{MN}\\ \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NC}\end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$



Ví dụ 17. Cho 5 điểm A,B,C,D,E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB} &= \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}\right)\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Ví dụ 18. Chứng minh rằng nếu hai hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có cùng tâm thì $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải. Gọi O là tâm của hai hình bình hành.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'} &= \left(\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OD}\right)\\ &= -\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\left(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}\right)\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 30. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Lời giải. Ta có sự tương đương:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 31. Cho hình bình hành $ABCD$ và M là điểm tùy ý. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}.$$

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA},\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CD}$. Mà $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.

Bài 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)=\overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}\quad\text{(luôn đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành).}$$

Bài 33. Cho tam giác ABC, gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

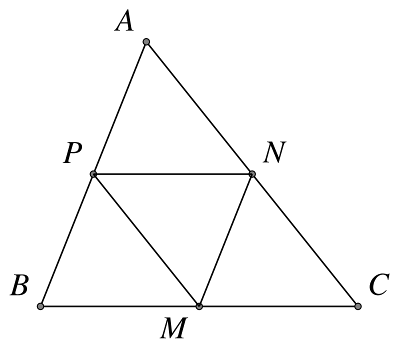
Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{ON}\right)+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\right)=\overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$$



Mặt khác $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\\ \overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\\ \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}\end{cases}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP} &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}\right)\\ &= \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}\end{aligned}$$

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{MN}\\ \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NC}\end{cases}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$$

Bài 34. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AG}$. Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IG}$.

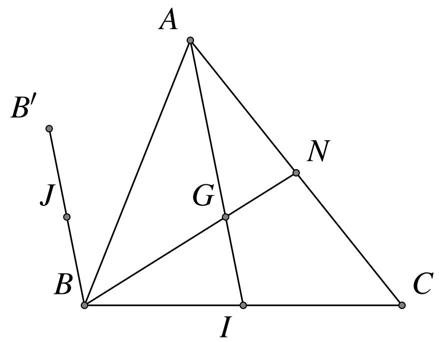
Lời giải. Ta có:

$\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AG}\Rightarrow AGBB'$ là hình bình hành.

$\Rightarrow\overrightarrow{BJ}$ và $\overrightarrow{GA}$ cùng hướng.

$\Rightarrow\overrightarrow{BJ}$ và $\overrightarrow{IG}$ cùng hướng.

Mặt khác $\begin{cases} BJ=\dfrac{1}{2}BB' \\ IG=\dfrac{1}{2}GA \end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IG}$



Bài 35. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'} \end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AC'}\right)=\overrightarrow{0}$

Bài 36. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Nối AF và CE, hai đường này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N. Chứng minh $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NB}$.

Lời giải. Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Dễ thấy I là trung điểm của MN.

Dễ thấy M là trọng tâm $\Delta ADC\Rightarrow DM=2MI$.

N là trọng tâm tam giác $\Delta ABC\Rightarrow BN=2NI$

$\Rightarrow DM=MN=NB\Rightarrow\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NB}$

Bài 37. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC,AB theo thứ tự lấy các điểm M,N sao cho $DM=BN$. Gọi P là giao điểm của AM,DB và Q là giao điểm của CN,DB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{QB}$.

Lời giải. Ta có $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$

$\Delta DPM=\Delta BQN\Rightarrow DP=QB\Rightarrow\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{QB}$

Bài 38. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua O. Chứng minh $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{HC}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{BCB'}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

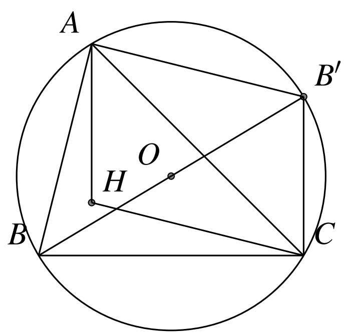
$\Rightarrow AH$ song song với $B'C$ (cùng vuông góc với BC)

$\widehat{BAB'}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CH$ song song với AB' (cùng vuông góc với AB).

$\Rightarrow AHCB'$ là hình bình hành

$\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{HC}$.



Bài 39. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE=\dfrac{1}{3}AC$ và BE cắt AM tại N. Chứng minh $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải. Gọi F là trung điểm của EC

$\Rightarrow E$ là trung điểm của AF

$\Rightarrow MF$ là đường trung bình của ΔBEC
$\Rightarrow MF$ song song với BE.
$\Rightarrow NE$ là đường trung bình của tam giác AMF.
$\Rightarrow N$ là trung điểm của $AM \Rightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{0}$.

Bài 40. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0}$.
Lời giải. Các điểm B, E đối xứng với nhau qua $OA \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OA.
Các điểm D, C đối xứng với nhau qua $OA \Rightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ có giá là đường thẳng OA.
$\Rightarrow$ Véc-tơ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OA.
Tương tự các véc-tơ $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$ và $\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}\right)$ có giá là đường thẳng OB.
$\Rightarrow$ Véc-tơ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OB.
Do $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ có giá không trùng nhau $\Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Bài 41. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$ có tâm O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$.
Lời giải. Ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: n là số chẵn $\Rightarrow n = 2k$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Khi đó các cặp điểm A_i và A_{k+i} với $i = \overline{1,k}$ đối xứng với nhau qua O.
$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_{k+1}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_{k+2}} = \overrightarrow{0} \\ \dots \\ \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_{2k}} = \overrightarrow{0} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

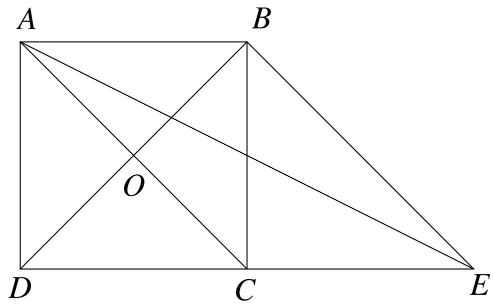
- Trường hợp 2: n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k+1$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Khi đó các cặp điểm A_i và A_{2k+3-i} với $i = \overline{2,k+1}$ đối xứng với nhau qua đường thẳng OA_1.
$\Rightarrow$ Giá của các véc-tơ $\left(\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{2k+3-i}}\right)$ là đường thẳng OA_1.
$\Rightarrow$ Giá của véc-tơ $\overrightarrow{u}$ là đường thẳng OA_1.
Tương tự, giá của các véc-tơ $\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA_{2k}} + \overrightarrow{OA_4}\right)$... là đường thẳng OA_2.
$\Rightarrow$ Giá của véc-tơ $\overrightarrow{u}$ là đường thẳng OA_2.
$\Rightarrow \overrightarrow{u}$ có giá là các đường thẳng OA_1 và $OA_2 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 42. Cho n véc-tơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$. Dựng $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{a_n}$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường gấp khúc $OA_1A_2\dots A_n$ khép kín là $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \cdots + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$.
Lời giải. Dựng $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{a_n}$. Khi đó $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \cdots + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{OA_n}$. Như vậy đường gấp khúc $OA_1A_2\dots A_n$ khép kín khi và chỉ khi O trùng với A_n hay $\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$, tức là $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \cdots + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$.

Bài 43. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh a. Hãy xác định và tính độ dài các véc-tơ:
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Lời giải. Trước hết ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$ và $OA = OB = OC = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ta có: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=a\sqrt{2}$.
Vì O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$.
Vậy: $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{0}|=0$.
Theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}\Rightarrow|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{OD}|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Dựng hình bình hành $BACE$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AE}|=AE.$$

Do đó:

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}.$$

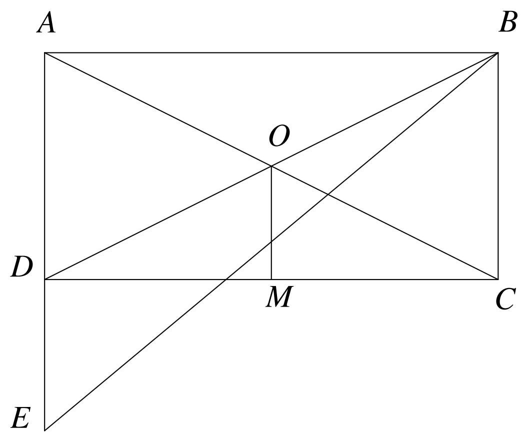
Bài 44. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O, $AB=2a$, $AD=a$, M là trung điểm CD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\right|$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. (1)
Ta có $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.



b) Dựng điểm E sao cho $OMED$ là hình bình hành. Khi đó

$$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BE}.$$

Ta có:

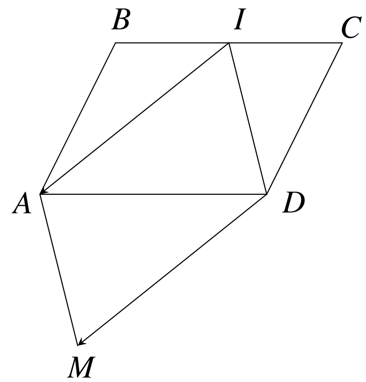
$$BE^2=AB^2+AE^2=4a^2+\frac{9a^2}{4}=\frac{25a^2}{4}\Rightarrow\left|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{BE}\right|=BE=\frac{5a}{2}.$$

Bài 45. Cho hình bình hành $ABCD$, I là trung điểm BC. Tìm điểm M thỏa mãn:

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{CA}. \qquad (*)$$

Lời giải. Ta có sự tương đương sau:

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BI}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BI}\Leftrightarrow(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BI})+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DM}.$$

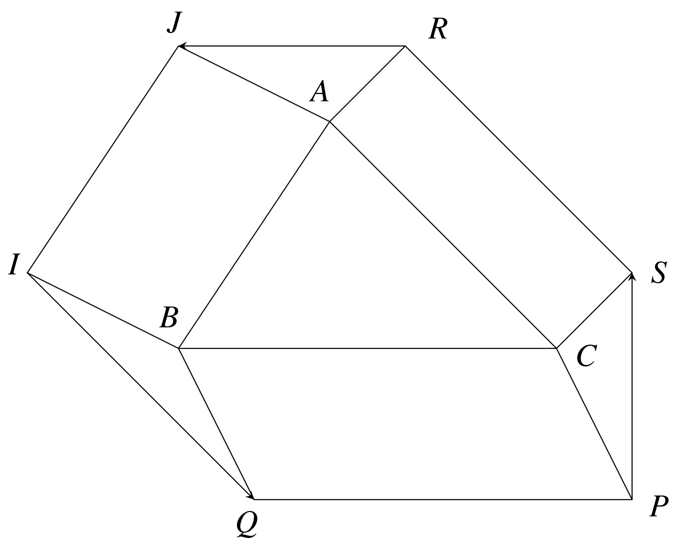


Vậy M là điểm sao cho $MDIA$ là hình bình hành.

Bài 46. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{0}.$$

Lời giải.



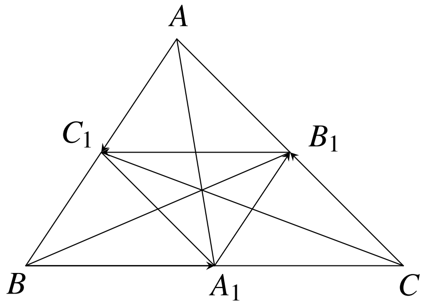
Ta có:

$$\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}$$
$$=(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS})+(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{0}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 47. Cho tam giác ABC. Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.



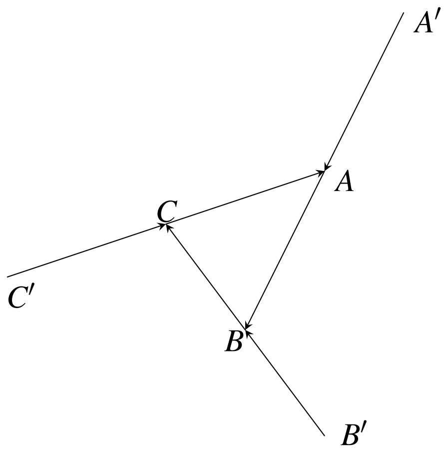
Ta có:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1} &= \left(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1A_1}\right)+\left(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}\right)+\left(\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1B_1}\right)+\left(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)+\left(\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{C_1A_1}\right)\\
&= \overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

Bài 48. Cho ΔABC. Gọi A' là điểm đối xứng với B qua A, gọi B' là điểm đối xứng với C qua B, gọi C' là điểm đối xứng với A qua C. Chứng minh rằng với một điểm O bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}.$$

Lời giải.



Ta có:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'C}\\
&= \left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}\\
&= \left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\\
&= \left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\overrightarrow{0}\\
&= \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}.
\end{aligned}$$

Bài 49. Cho bảy điểm A,B,C,D,E,F,H. Chứng minh:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{HF}.$$

Lời giải. Ta có:

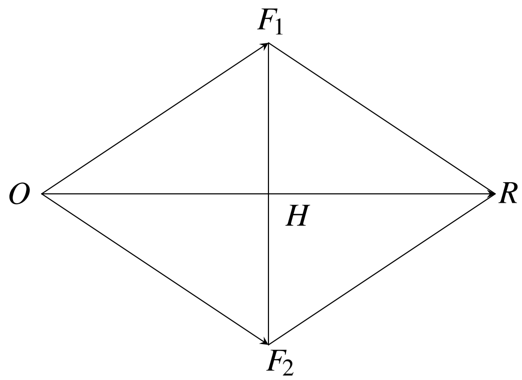
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HA}-(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{HF})\\=&\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HF})\\=&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{HF}$.

Bài 50. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là 40 N, có điểm đặt tại O và hợp với nhau một góc 60°. Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực này.

Lời giải.

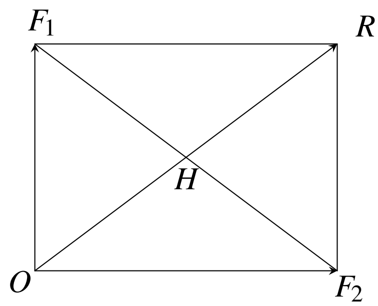
Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OR}$. Mà $OF_1=OF_2=40$ (N) nên OF_1RF_2 là hình thoi có góc $\widehat{F_1OF_2}=60^\circ$ và hai đường chéo RO, F_1F_2 vuông góc với nhau tại trung điểm H. Ta có $OH=40\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}$ (OH là đường cao của tam giác đều cạnh bằng 40). Vậy cường độ lực tổng hợp của hai lực đã cho là $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{OR}\right|=20\sqrt{3}$ (N).



Bài 51. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt có cường độ 30 N và 40 N, có điểm đặt O và vuông góc với nhau. Tính cường độ lực tổng hợp của chúng.

Lời giải.

Do hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ có cùng điểm đặt O nên tổng hợp lực $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ là đường chéo OR của hình bình hành OF_1RF_2. Do hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với nhau nên hình bình hành OF_1RF_2 trở thành hình chữ nhật. Vậy $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OR}$. Ta có $OF_1=30$, $OF_2=40$. Như vậy $OR=F_1F_2=\sqrt{40^2+30^2}=50$. Do đó cường độ lực tổng hợp $\overrightarrow{OR}$ là $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{OR}\right|=50$(N).



Bài 52. Cho 2018 điểm trên mặt phẳng. Bạn Quỳnh kí hiệu chúng là A_1, A_2,..., A_{2018}. Bạn Vân kí hiệu chúng là B_1, B_2,..., B_{2018}. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{2018}B_{2018}}=\overrightarrow{0}.$$

Lời giải. Lấy một điểm O nào đó. Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{2018}B_{2018}}\\=&\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OB_{2018}}-\overrightarrow{OA_{2018}}\\=&\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\cdots+\overrightarrow{OB_{2018}}\right)-\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2018}}\right).\end{aligned}$$

Vì 2018 điểm B_1, B_2,..., B_{2018} cũng là 2018 điểm A_1, A_2,..., A_{2018} nhưng được kí hiệu một cách khác, do đó

$$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\cdots+\overrightarrow{OB_{2018}}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2018}}.$$

Suy ra $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{2018}B_{2018}}=\overrightarrow{0}$.

Bài 53. Cho n-đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ (n lẻ, $n>2$) nội tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}.$$

Lời giải. Gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm O và điểm A_1. Xét các đỉnh của đa giác đã cho mà không nằm trên d_1. Chúng có thể phân tích thành những cặp đỉnh A_i, A_j đối xứng nhau qua đường thẳng d_1 (chẳng hạn cặp A_2, A_{n-1}, cặp A_3, A_{n-2},...). Khi đó tổng $\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}$ là một véc-tơ nằm trên đường thẳng d_1. Từ đó suy ra tổng $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$ cũng là một véc-tơ có giá nằm trên đường thẳng d_1. Hoàn toàn tương tự, nếu gọi d_2 là đường thẳng đi qua O và A_2 thì tổng $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$ cũng là một véc-tơ có giá nằm trên đường thẳng d_2. Vì hai đường thẳng d_1 và d_2 không trùng nhau nên $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$ có hai phương khác nhau, hay $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}$.

§3. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

I. Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho số $k \neq 0$ và $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Tích của véc-tơ $\overrightarrow{a}$ với số k là một véc-tơ, kí hiệu là $k\overrightarrow{a}$, được xác định như sau:

- $k\overrightarrow{a}$ cùng phương $\overrightarrow{a}$.
- $k\overrightarrow{a}$ cùng hướng $\overrightarrow{a}$ khi $k > 0$.
- $k\overrightarrow{a}$ ngược hướng $\overrightarrow{a}$ khi $k < 0$.
- $|k\overrightarrow{a}| = |k|.|\overrightarrow{a}|$

Quy ước: $0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$; $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
Phép lấy tích của một véc-tơ với một số gọi là **phép nhân véc-tơ với một số** (hoặc phép nhân một số với một véc-tơ).

Tính chất

Tính chất 1. Cho $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ bất kì và $k; h \in \mathbb{R}$, khi đó:

- $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$;
- $(k+h)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{b}$;
- $k(h\overrightarrow{a}) = (kh)\overrightarrow{a}$;
- $1.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$; $(-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$.

Tính chất 2 (Tính chất trung điểm). Cho I là trung điểm của đoạn AB, với mọi M ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Tính chất 3 (Tính chất trọng tâm tam giác). Cho G là trọng tâm $\triangle ABC$, với mọi M ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Điều kiện để hai véc-tơ cùng phương

$\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ ta có: $\overrightarrow{a}$ cùng phương $\overrightarrow{b}\,(\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}$.

Phân tích (biểu diễn) một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ không cùng phương. Khi đó $\forall \overrightarrow{x}$ ta luôn tìm được duy nhất cặp số m, n sao cho $\overrightarrow{x} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Các bài toán sử dụng định nghĩa và tính chất của phép nhân véc-tơ với một số.

Phương pháp giải: Áp dụng định nghĩa và các tính chất của phép nhân véc-tơ với một số để giải các bài tập.

Ví dụ 1. Cho $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}$. Tìm véc-tơ đối của $\overrightarrow{u}$.

Lời giải. Véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}$ là: $\overrightarrow{v} = -(-2\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}) = 2\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$.

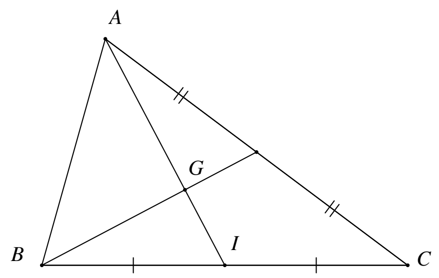
Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy tính:

a) $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{IB}$.

b) $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{IC}$.

c) $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{IA}$.

Lời giải.



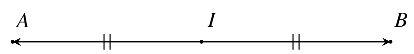
a) Do $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng và có độ dài gấp đôi $\overrightarrow{IB}$ nên $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{IB}$.

b) Do $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và có độ dài gấp đôi $\overrightarrow{IC}$ nên $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IC}$.

c) Do $\overrightarrow{AG}$ ngược hướng và có độ dài bằng $\frac{2}{3}$ véc-tơ $\overrightarrow{IA}$ nên $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải.



($\Rightarrow$) I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng và có cùng độ dài. Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

($\Leftarrow$) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ đối nhau. Do đó I là trung điểm của AB.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$. Tìm các véc-tơ đối của các véc-tơ sau:

a) $\overrightarrow{u} = 7\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$.

b) $\overrightarrow{v} = (\sqrt{3}+1)\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}$.

c) $\overrightarrow{x} = (-2\sqrt{2})(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})$.

Lời giải.

a) Véc-tơ đối của $\overrightarrow{u}$ là: $\overrightarrow{u}' = -7\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}$.

b) Véc-tơ đối của $\overrightarrow{v}$ là: $\overrightarrow{v}' = -(\sqrt{3}+1)\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$.

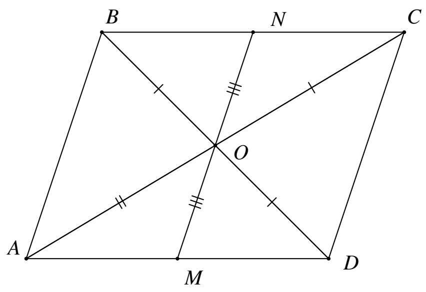
c) Véc-tơ đối của $\overrightarrow{x}$ là: $\overrightarrow{x}' = (6\sqrt{2})3\overrightarrow{a} - 4\sqrt{2}\overrightarrow{b}$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC.

a) Tìm $x;y$ biết $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{BD} = y\overrightarrow{OB}$.

b) Tìm tất cả các véc-tơ $\overrightarrow{u}$ thỏa mãn $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{ON}$.

Lời giải.



a) - Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OM}$ và có độ dài gấp đôi $\overrightarrow{OM}$ nên suy ra $x = 2$
- Do $\overrightarrow{BD}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OB}$ và có độ dài gấp đôi $\overrightarrow{OB}$ nên suy ra $y = -2$

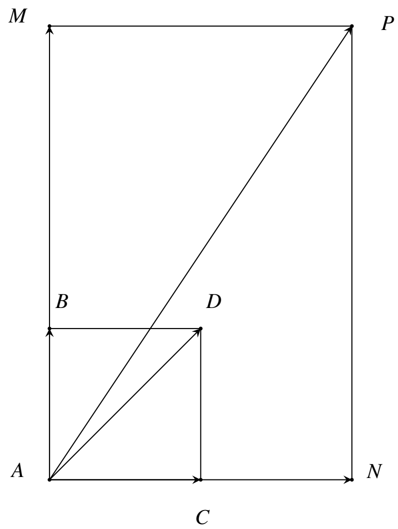
b) Tất cả các véc-tơ $\overrightarrow{u}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN},\overrightarrow{DC}$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông, $AB = AC = 2$. Hãy dựng các véc-tơ sau đây và tính độ dài của chúng.

a) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

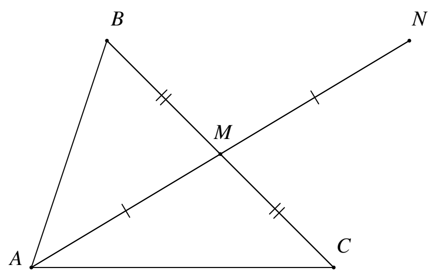


a) Dựng hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ.
Khi đó ta có $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
Suy ra $|\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{2}$.

b) - Trên đường thẳng AB lấy M sao cho $AM = 3AB$, và $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$ cùng hướng.
- Trên đường thẳng AC lấy điểm N sao cho $AN = 2AD$ và $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.
- Dựng hình chữ nhật $AMNP$ như hình vẽ.
Khi đó $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$, $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN}$.
$\Rightarrow \overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP}$.
$\Rightarrow |\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{13}$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh 4 cm. Gọi M là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AM}$.

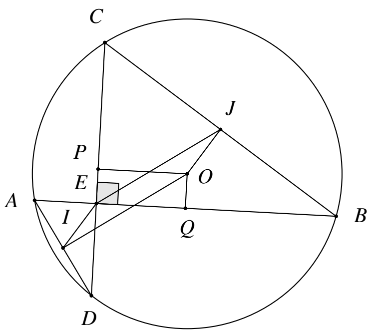
Lời giải.



- Lấy N đối xứng với A qua M.
Khi đó $\overrightarrow{AN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$ và có độ dài gấp đôi $\overrightarrow{AM}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.
- Mặt khác $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh 4 cm nên trung tuyến AM đồng thời là đường cao.
$\Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$.
$\Rightarrow |\overrightarrow{u}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 4\sqrt{3}$.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O và hai dây cung AB,CD vuông góc với nhau và cắt nhau tại E. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của của AD và BC. Chứng minh rằng $OIEJ$ là hình bình hành.

Lời giải.



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CD, AB

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}}{2}$; $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

Do I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC

$\Rightarrow \overrightarrow{EI} = \dfrac{\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}}{2}$; $\overrightarrow{OJ} = \dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{2}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{IE} &= \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}}{2} \\
&= \frac{\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)}{2} + \overrightarrow{EO} \\
&= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{EO} \\
&= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{IE}.$$

Suy ra tứ giác $OIEJ$ là hình bình hành. (đpcm)

Dạng 2. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Dùng các quy tắc về véc-tơ để phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương.
Lý thuyết cần nhớ

- Cho 2 véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương. Khi đó, với mọi $\overrightarrow{x}$, tồn tại duy nhất cặp số h, k sao cho $\overrightarrow{x} = h\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$.
- Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $xAM = yBM$ $(x, y > 0)$ thì $\overrightarrow{AM} = \dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AB}$
- Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
- Quy tắc hình bình hành
  Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- Hiệu của hai véc-tơ: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
- Trung điểm của đoạn thẳng
  I là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, \forall M$ bất kỳ
- Trọng tâm của tam giác
  G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M$ bất kỳ

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

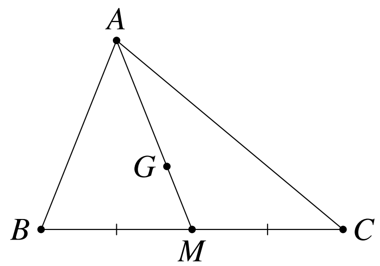
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Suy ra: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Mà $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Do đó: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



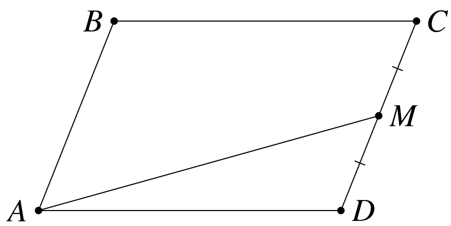
Ví dụ 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành)

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Gọi H, K lần lượt thuộc 2 cạnh AB và AC sao cho $3AH=2AB$, $3AK=AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $4BM=3MC$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{BM}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{AK}$.

Lời giải.

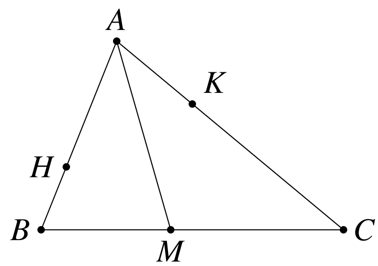
Ta có $3AH=2AB\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AH}$.

$3AK=AC\Rightarrow\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AK}$.

$4BM=3MC\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{BC}$.

Mà $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

Suy ra: $\overrightarrow{BM}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}-\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}=\dfrac{9}{7}\overrightarrow{AK}-\dfrac{9}{14}\overrightarrow{AH}$.



Ví dụ 7. Cho tứ giác $ABCD$ (AD và BC không song song). Trên cạnh AB và CD lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho $AM=kAB$ và $DN=kDC$ $(0<k<1)$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Với mọi điểm O bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$

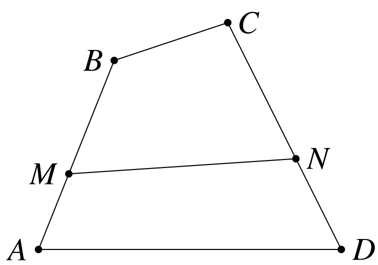
$=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$

Tương tự: $\overrightarrow{ON}=(1-k)\overrightarrow{OD}+k\overrightarrow{OC}$

Suy ra: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$

$=(1-k)\overrightarrow{OD}+k\overrightarrow{OC}-\left[(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}\right]$

$=(1-k)\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)+k\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=(1-k)\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{BC}$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Cho hình bình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$. Hãy biểu diễn các vec-tơ sao đây theo vec-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

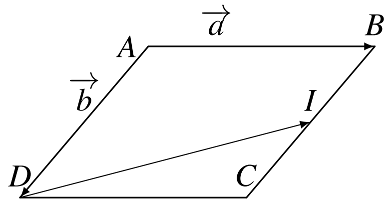
a) $\overrightarrow{DI}$ với I là trung điểm BC.

b) $\overrightarrow{AG}$ với G là trong tâm của tam giác CDI.

Lời giải.

a) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI} \\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{a};\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{b} \end{cases}$

Do đó $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$.



b) Ta có $\overrightarrow{AG}$ với G là trọng tâm của tam giác CDI.
Theo tính chất của trọng tâm tam giác CDI, ta có:
$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AI})$.
Bên cạnh đó, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ (qui tắc hình bình hành)
và $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{a}+\frac{5}{6}\overrightarrow{b}$.

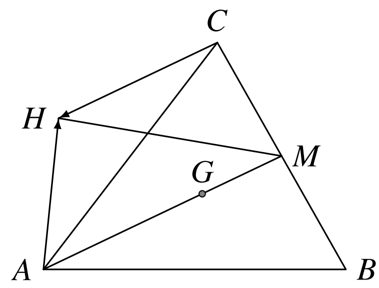
Bài 7. Cho tam giác ABC có trong tâm G. H là điểm đối xứng của B qua G.

a) Tính $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{CH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi M là trung điểm của BC.
Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

a) Tính $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{CH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
Ta có: $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AG}$(qui tắc trung điểm)
$=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ (vì $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$)
$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Tương tự: $\overrightarrow{CH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$
$=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

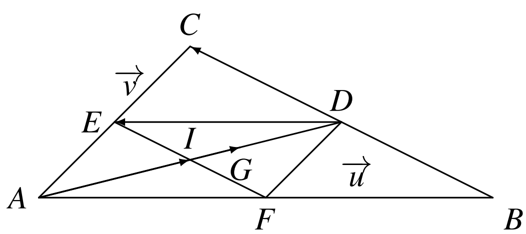


b) Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$
(do câu a).
Vậy $\overrightarrow{MH}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có trong tâm G. Cho các điểm D,E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA,AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vec-tơ $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AG},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}$ theo hai vec-tơ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.

Lời giải.

Vì tứ giác $AEDF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$
và $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
Ta có: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\frac{1}{2}\overrightarrow{u}+\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\frac{2}{3}\overrightarrow{u}+\frac{2}{3}\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}=-1.\overrightarrow{v}+0.\overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.



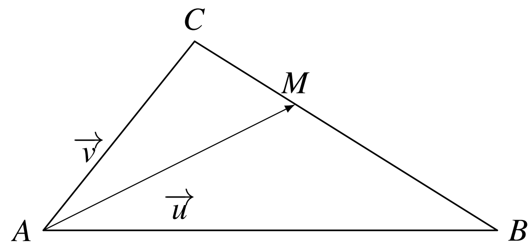
Bài 9. Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vec-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Vậy: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$.



Bài 10. Cho tam giác ABC có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

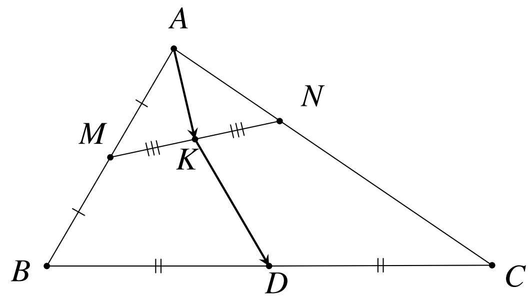
+) Phân tích $\overrightarrow{AK}$ hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

+) Phân tích $\overrightarrow{KD}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AK}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



Bài 11. Cho tam giác ABC. Gọi M trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC sao cho: $AN = 2NC$.

a) Gọi K là trung điểm của BC. Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AK}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

b) Gọi H là trung điểm của MN. Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AH}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải. a) Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}$.

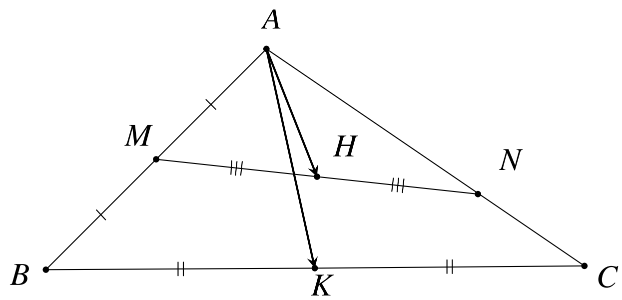
Suy ra $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}\right) = \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AN}$.

Vậy $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AN}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



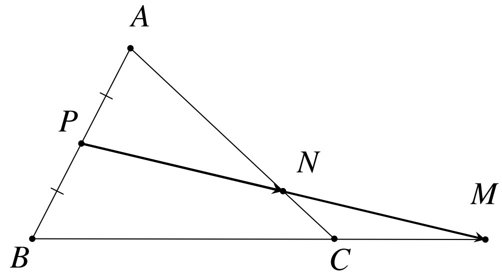
Vậy $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi các điểm M,N,P thỏa mãn $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{CN},\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{0}$. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=3\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.

Suy ra:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM}&=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{MB}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}\\&=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{CN}=3\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

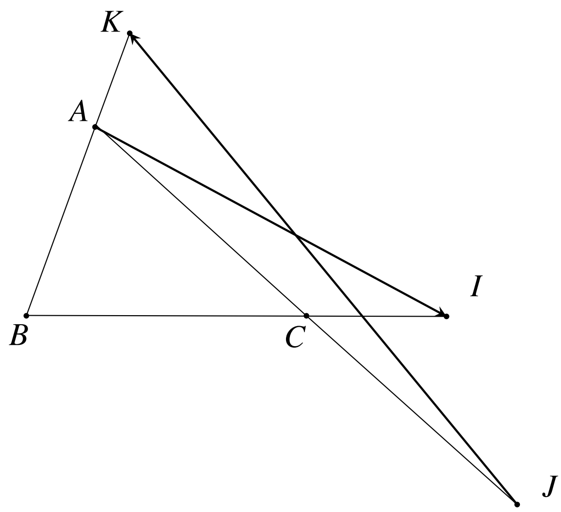
Bài 13. Cho tam giác ABC. Điểm I thuộc tia đối của tia CB kéo dài sao cho $IB=3IC$, điểm J thuộc tia đối của tia CA sao cho $JA=2JC$, điểm K thuộc tia đối của tia AB sao cho $KB=3KA$.

a) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{JK}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$.

Lời giải.

a) Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}&=\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BA}\\&=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\\&=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AB}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\\\overrightarrow{JK}&=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AJ}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{JK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

b) Từ câu a) ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{JK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=-\frac{8}{7}\overrightarrow{AI}-\frac{6}{7}\overrightarrow{JK}\\\overrightarrow{AC}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AI}-\frac{2}{7}\overrightarrow{JK}\end{cases}$$

$\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AI}+\frac{4}{7}\overrightarrow{JK}$.

Vậy ta có $\overrightarrow{BC}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AI}+\frac{4}{7}\overrightarrow{JK}$.

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ có chứa tích của véc-tơ với một số

Phương pháp giải:

- *Hướng 1.* Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó:
  - Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
  - Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích véc-tơ.
- *Hướng 2.* Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.
- *Hướng 3.* Biến đổi một đẳng thức véc-tơ đã biết luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý:

- *Quy tắc ba điểm:* Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

- *Quy tắc hình bình hành:* Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- *Quy tắc trừ:* Với ba điểm A, B, O bất kì ta luôn có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

- *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng:* Với điểm M tuỳ ý và I là trung điểm của AB ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}.$$
$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right).$$

- *Tính chất trọng tâm tam giác:* Với điểm M tuỳ ý và G là trọng tâm của tam giác ABC ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

- *Các tính chất của phép cộng, trừ véc-tơ và phép nhân một số với một véc-tơ.*

Ví dụ 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}.$$

Lời giải. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + 2\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AG}$.

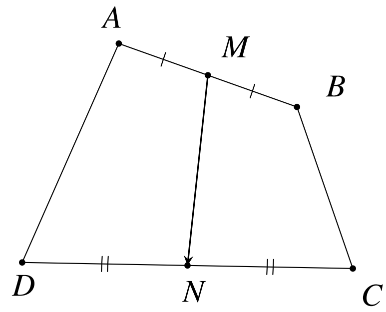
Lời giải. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AG}.$$

Ví dụ 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC},\\ \overrightarrow{BD}&=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}&=2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)\\ &=2\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{0}$).

Cách 2. Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN},\\ \overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

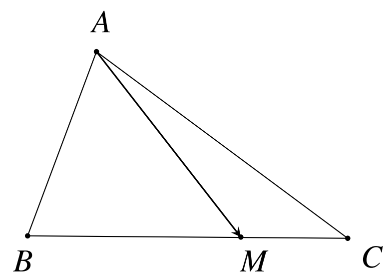
$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN}&=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\\ &=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{0}$).

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB=2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\ &=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\ &=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\ &=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

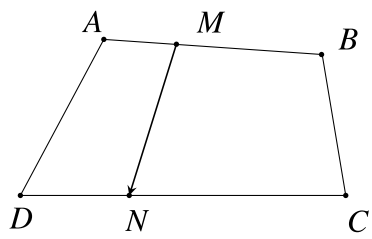
Ví dụ 12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB,CD sao cho $MB=2MA$ và $NC=2ND$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Lời giải.

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN},$$
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}.$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN}=\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\left(2\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}\right).$$



Vì M,N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB,CD sao cho $MB=2MA$ và $NC=2ND$ nên ta có:

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0},$$
$$2\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{0}.$$

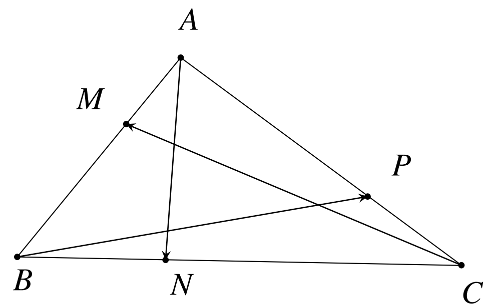
Vậy $3\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC. Lần lượt lấy các điểm M,N,P trên các đoạn thẳng AB,BC và CA sao cho $AM=\frac{1}{3}AB, BN=\frac{1}{3}BC, CP=\frac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}.$$

Lời giải.
Ta có:

$$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad (1.1)$$
$$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \quad (1.2)$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad (1.3)$$



Từ $(1),(2),(3)$ ta suy ra:

$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{4}{3}.\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}.$$

Ví dụ 14. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.
a) Vì O là trung điểm của AC và BD nên ta có:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$$

Do đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$.

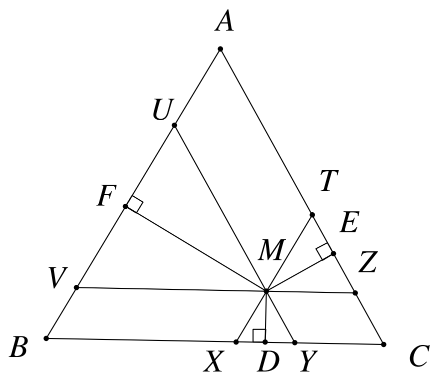
b) Theo quy tắc ba điểm ta có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$
Theo ý a) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$.
Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

Ví dụ 15. Cho tam giác đều ABC tâm O. M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.
Qua điểm M dựng:



- đường thẳng song song với BC, cắt các cặp đường thẳng AB, AC tại V, Z.
- đường thẳng song song với AB, cắt các cặp đường thẳng AC, BC tại T, X.
- đường thẳng song song với BC, cắt các cặp đường thẳng AB, AC tại V, Z.

Ta dễ dàng chứng minh được $MTAU, MVBX, MYCZ$ là các hình bình hành và các điểm D, E, F tương ứng là trung điểm của XY, ZT, UV.
Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MZ} + \overrightarrow{MT}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MU}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MX}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MZ}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.\end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}$.

Bài 15. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Lời giải. Theo quy tắc cộng ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{GA'}\\ \overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{GB'}\\ \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{GC'}\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+\left(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}\right)$.
Vì G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$ nên ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'} &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Bài 16. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC,BD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.
Lời giải. Vì M,N lần lượt là trung điểm của AC và BD nên ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD} &= 2\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

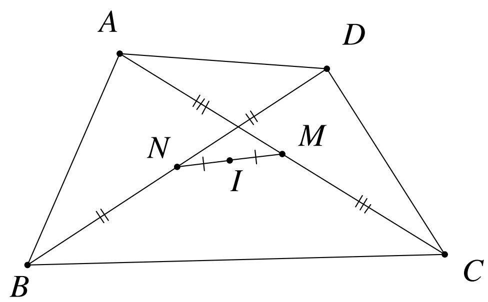
Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right) = 2\overrightarrow{MN}$.

Bài 17. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N,I lần lượt là trung điểm của AC,BD và MN. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$ (với O là điểm bất kì).

Lời giải.
a) Vì M,N lần lượt là trung điểm của AC và BD nên ta có:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC} &= 2\overrightarrow{IM}\\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID} &= 2\overrightarrow{IN}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID} &= \left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}\right)\\ &= 2\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}\right).\end{aligned}$$

Mặt khác I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{0}$.
Vậy $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID} = 2.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
b) Với điểm O bất kì ta có:

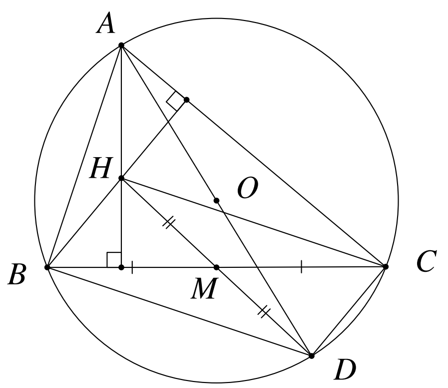
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC} &= 2\overrightarrow{OM}\\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} &= 2\overrightarrow{ON}\\ \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON} &= 2\overrightarrow{OI}\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} &= \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)\\ &= 2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}\\ &= 2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)\\ &= 4\overrightarrow{OI}.\end{aligned}$$

Bài 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Chứng minh rằng:
a)$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.
b)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

Lời giải.



a) Ta có:
$BH \perp AC$ (vì H là trực tâm của tam giác ABC).
$DC \perp AC$ (vì AD là đường kính).
Do đó $BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC).
Chứng minh tương tự ta có: $CH \parallel BD$ (vì cùng vuông góc với AB).
Suy ra $BHCD$ là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.
BC và HD là hai đường chéo của hình bình hành nên cắt nhau tại trung điểm M.
Trong tam giác AHD, O là trung điểm của AD nên ta có: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$.

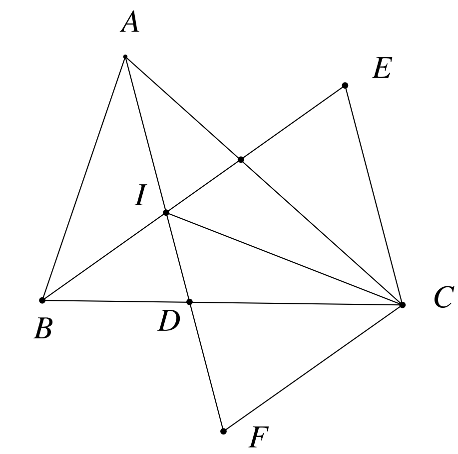
Vậy $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$.
b) Theo quy tắc ba điểm ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}&=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}\\ \overrightarrow{OB}&=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\\ \overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}+\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$.
Mặt khác theo kết quả ý a) ta có: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.
Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{OH}$.

Bài 19. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB=c, AC=b, BC=a$. Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.



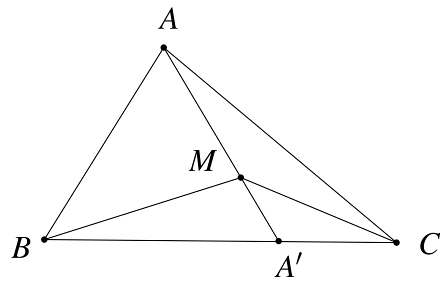
Qua C dựng đường thẳng song song với IA, cắt đường thẳng BI tại E.
Qua C dựng đường thẳng song song với IB, cắt đường thẳng AI tại F.
$IECF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}(1)$.
Gọi D là giao điểm của AI và BC. Vì $ID \parallel CE$ và AD là đường phân giác nên ta có:
$\dfrac{BI}{IE} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{IE} = -\dfrac{b}{c}\overrightarrow{IB}(2)$
Tương tự ta chứng minh được $\overrightarrow{IF} = -\dfrac{a}{c}\overrightarrow{IA}(3)$
Từ $(1),(2),(3)$ suy ra
$\overrightarrow{IC} = -\dfrac{b}{c}\overrightarrow{IB} - \dfrac{a}{c}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.
Bài tập tương tự: Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\sin A.\overrightarrow{IA} + \sin B.\overrightarrow{IB} + \sin C.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}.$$

Bài 20. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng:

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}.$$

Lời giải.



Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC.
Ta có: $\overrightarrow{MA'} = \dfrac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \dfrac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$
Mà $\dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \dfrac{S_b}{S_c}$
$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A'C}{BC} = \dfrac{S_b}{S_b+S_c} \\ \dfrac{A'B}{BC} = \dfrac{S_c}{S_c+S_b} \end{cases}$
$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \dfrac{S_b}{S_b+S_c}\overrightarrow{MB} + \dfrac{S_c}{S_b+S_c}\overrightarrow{MC}.(*)$
Mặt khác $\dfrac{MA'}{MA} = \dfrac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \dfrac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \dfrac{S_{MA'B}+S_{MA'C}}{S_{MAB}+S_{MAC}} = \dfrac{S_a}{S_b+S_c}$
$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \dfrac{-S_a}{S_b+S_c}\overrightarrow{MA}$.
Thay vào $(*)$ ta được:
$-S_a\overrightarrow{MA} = S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. ***Nhận xét:***

- Cho M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, ta được kết quả: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
- Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC, ta được kết quả:

$$a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}.$$

- Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, ta có:

$$x.\overrightarrow{MA} + y.\overrightarrow{MB} + z.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0},$$

  trong đó x,y,z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC,CA và AB.

- Khi M nằm ngoài tam giác ABC, ta có các kết quả như sau:
  - Nếu M thuộc góc $\widehat{BAC}$ và góc đối đỉnh của nó thì: $-S_a.\overrightarrow{MA}+S_b.\overrightarrow{MB}+S_c.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.
  - Nếu M thuộc góc $\widehat{ABC}$ và góc đối đỉnh của nó thì: $S_a.\overrightarrow{MA}-S_b.\overrightarrow{MB}+S_c.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.
  - Nếu M thuộc góc $\widehat{ACB}$ và góc đối đỉnh của nó thì: $S_a.\overrightarrow{MA}+S_b.\overrightarrow{MB}-S_c.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.

Dạng 4. Chứng minh tính thẳng hàng, đồng quy

Phương pháp giải:

a) Sử dụng nhận xét: ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

b) Sử dụng kết quả: Cho tam giác ABC. Khi đó M, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+(1-\alpha)\overrightarrow{AC}$.

c) Sử dụng các định lí về tính thẳng hàng, đồng quy như Menelaus, Ceva.

Lý thuyết cần nhớ

Định lí 1. *Điều kiện cần và đủ để hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$) cùng phương là tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{b}$.*

Định lí 2. *Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.*

Định lí 3. *Cho tam giác ABC. Khi đó điểm M thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi tồn tại số α sao cho $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+(1-\alpha)\overrightarrow{AC}$.*

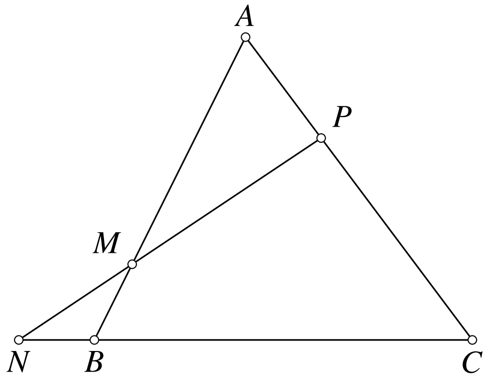
Định lí 4 (Định lí Menelaus dạng véc-tơ). *Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC}=\beta\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA}=\gamma\overrightarrow{PB}$. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\alpha\beta\gamma=1$.*

Định lí 5 (Định lí Ceva dạng véc-tơ). *Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC}=\beta\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA}=\gamma\overrightarrow{PB}$. Khi đó các đường thẳng AM, BN, CP đôi một song song hoặc đồng quy khi và chỉ khi $\alpha\beta\gamma=-1$.*

Ví dụ 16. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=6\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.

Cách 1. Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{NC}=6\overrightarrow{NB}$, suy ra $\overrightarrow{AN}=\dfrac{\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}}{-5}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AP}+\dfrac{8}{5}\overrightarrow{AM}$. Do $\left(-\dfrac{3}{5}\right)+\dfrac{8}{5}=1$ nên ba điểm M, N, P thẳng hàng.



Cách 2. Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$. Do $(-3)\cdot\dfrac{1}{6}\cdot(-2)=1$ nên theo định lí Menelaus ta có ba điểm M, N, P thẳng hàng.

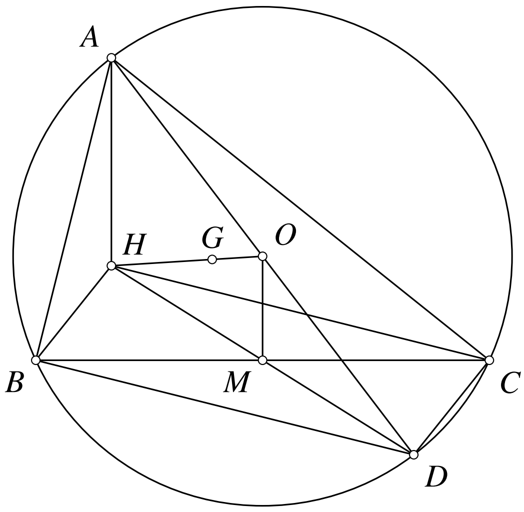
Ví dụ 17. Cho tam giác ABC có O, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác đó. Chứng minh rằng ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Lời giải.

Ta chỉ xét trường hợp ba điểm O, H, G phân biệt.
Lấy điểm D đối xứng với A qua O, khi đó D thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Suy ra DB, DC lần lượt vuông góc với AB, AC. Từ tính chất của trực tâm H ta có CH, BH lần lượt vuông góc với AB, AC. Do đó $HBDC$ là hình bình hành. Khi đó HD cắt BC tại trung điểm M của mỗi đường. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.

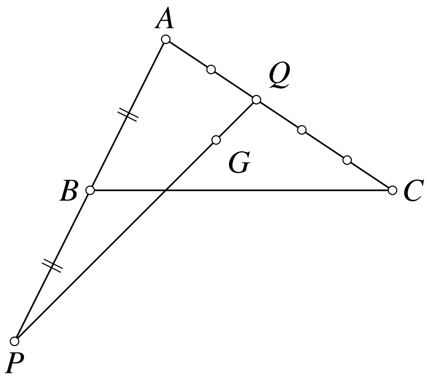


BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 21. Cho tam giác ABC và các điểm P, Q thoả mãn $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AQ}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. Chú ý rằng $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ nên ba điểm P, Q, G thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.



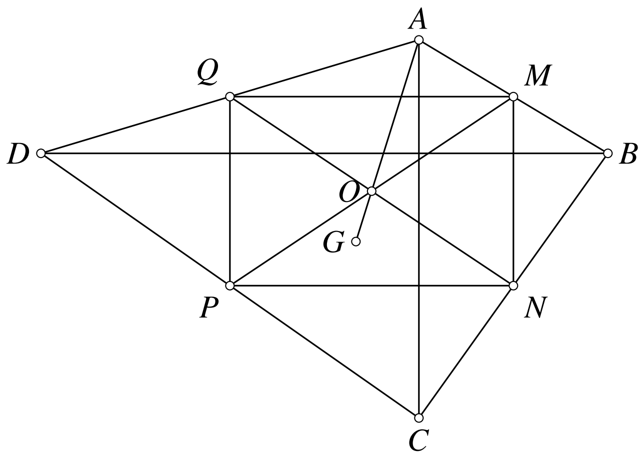
Bài 22. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng MP, NQ; G là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

Lời giải.

Dễ thấy MN và PQ lần lượt là đường trung bình ứng với cạnh AC của tam giác ABC và DAC. Suy ra MN và PQ cùng song song và bằng một nửa AC hay tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. Do đó O là trung điểm của MP và NQ. Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP} = \vec{0}\\ \Rightarrow\ &3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm A, O, G thẳng hàng.



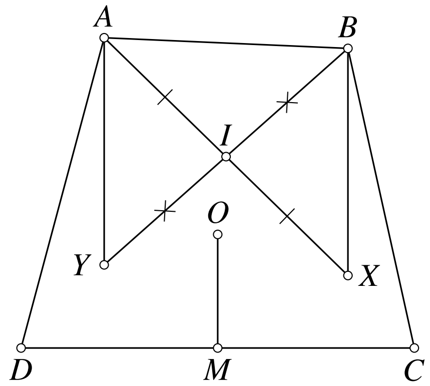
Bài 23. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Lấy các điểm I và J sao cho $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{ID} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng O, I, J thẳng hàng.

Lời giải. Theo giả thiết ta có

$$3\overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}.$$

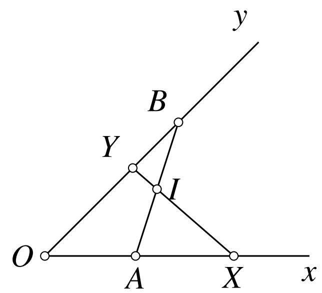
Từ đó ta có $\overrightarrow{OJ} = -3\overrightarrow{OJ}$ hay ba điểm O, I, J thẳng hàng.

Bài 24. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). X, Y, Z, T lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy.
Lời giải.
Gọi M là trung điểm của CD. Theo Ví dụ 17, ta có $\overrightarrow{BX} = 2\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AY} = 2\overrightarrow{OM}$. Suy ra $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{BX}$ hay tứ giác $ABXY$ là hình bình hành. Do đó AX và BY cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.
Chứng minh tương tự, ta được AX, BY, CZ, DT đồng quy tại trung điểm I của mỗi đường.



Bài 25. Cho góc xOy và hai điểm A, B thay đổi lần lượt trên tia Ox, Oy và hai số dương a, b sao cho $aOA + bOB = 1$. Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng AB luôn thuộc vào một đường thẳng cố định.
Lời giải.
Chọn hai điểm X, Y lần lượt nằm trên tia Ox, Oy sao cho $OX = \dfrac{1}{2a}$ và $OY = \dfrac{1}{2b}$.
Khi đó ta có

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB}}{2} = \frac{OA}{2OX}\overrightarrow{OX} + \frac{OB}{2OY}\overrightarrow{OY}$$
$$= aOA\overrightarrow{OX} + bOB\overrightarrow{OY}.$$



Do $aOA + bOB = 1$ nên I, X, Y thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Dạng 5. Xác định M thoả mãn đẳng thức véc-tơ

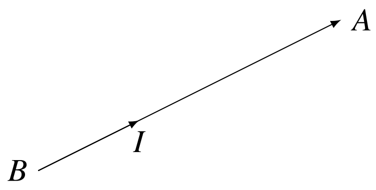
Phương pháp: Biến đổi đẳng thức véc-tơ về một trong các dạng sau:
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$ (O cố định và $\overrightarrow{v}$ đã biết) $\Rightarrow M$ xác định duy nhất.
Những điểm cần chú ý:

- *Áp dụng các qui tắc để biến đổi như: qui tắc 3 điểm, qui tắc hình bình hành, qui tắc hiệu.*
- *Biến đổi đẳng thức véc-tơ sao cho có duy nhất một vec tơ có chứa điểm cuối là điểm cần tìm qua các véc-tơ đã xác định.*
- *Vẽ hình để xác định điểm hoặc mô tả điểm cần tìm ở vị trí nào so với các điểm cố định mà đề bài đã cho.*

Ví dụ 18. Cho hai điểm A, B. Tìm I thoả mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

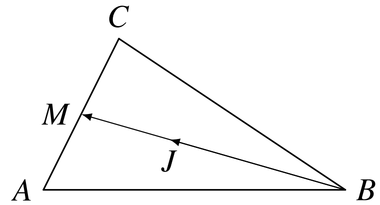


Vậy I nằm trên đoạn AB cách B một đoạn $\frac{1}{3}BA$.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC. Tìm J thoả mãn $\overrightarrow{JA}+2.\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CB}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CB}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BA}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BA}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BA})$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$(Với M là trung diểm của cạnh AC).

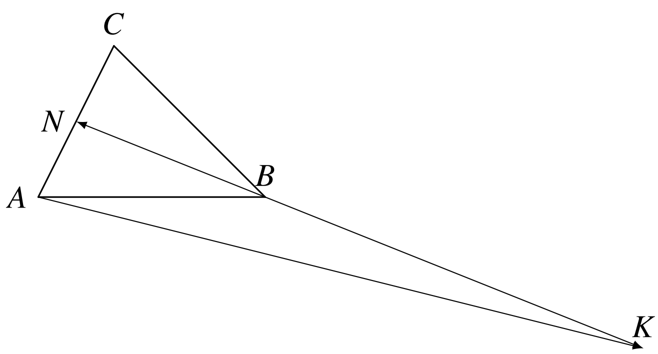


Vậy J nằm trên đoạn BM (với M là trung điểm AC) cách B một đoạn $\frac{2}{3}BM$

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC. Tìm K thoả mãn: $\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

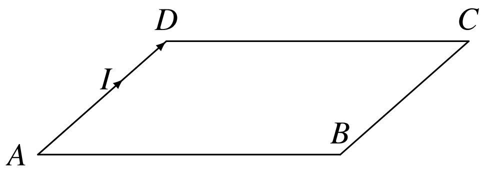
Ta có: $\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}-\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow -\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BN}$(Với N là trung điểm của AC).
Vậy: K nằm trên đường thẳng BN (với N là trung điểm AC ngược hướng của N và cách B một đoạn $2BN$.



Ví dụ 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm I thoả mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Ta có: $3.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{DA}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$(Vì $ABCD$ là hình bình hành)
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{DA}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



Vậy: I nằm trên cạnh AD cách A một đoạn $\frac{2}{3}AD$.

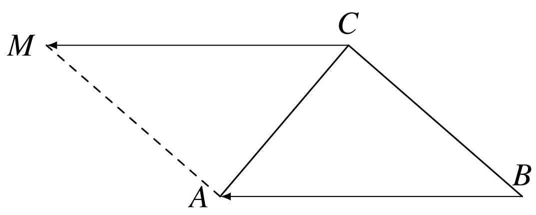
Ví dụ 22. Cho trước hai điểm A,B và hai số thực $\alpha+\beta\neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn $\alpha.\overrightarrow{IA}+\beta.\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải. Ta có: $\alpha.\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{IA}+\beta(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{0}$ (Vì $\alpha+\beta\neq 0$).
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.
Vậy tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện đề bài.

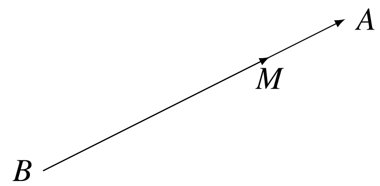
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.

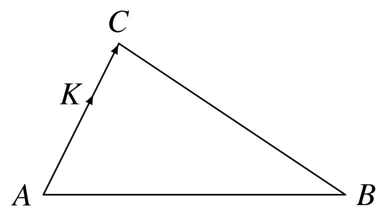
Lời giải.
Ta có: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$.
Vậy M xác định duy nhất thoả ($\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$).



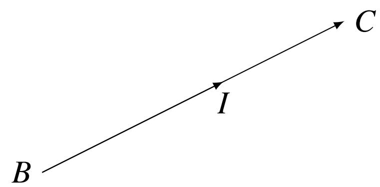
Bài 27. Cho hai điểm A,B phân biệt. Xác định điểm M thoả $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$.
Lời giải.
Ta có: $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 4.\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
Vậy: M nằm trên đoạn AB cách B một đoạn $\dfrac{3}{4}AB$.



Bài 28. Cho tam giác ABC. Xác định điểm K thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{CB}$.
Lời giải.
Ta có: $\overrightarrow{KA}+(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{CB}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}=2\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\dfrac{2}{3}.\overrightarrow{AC}$ Vậy K nằm trên đoạn AC và cách A một đoạn là $\dfrac{2}{3}AC$

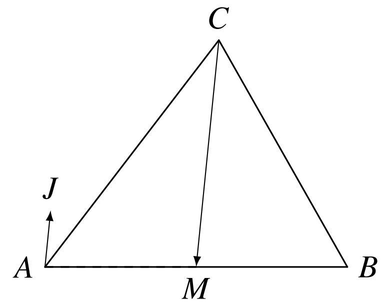


Bài 29. Cho hai điểm B,C. Xác định điểm I thoả mãn $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$.
Lời giải.
Ta có: $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB}+3(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{O}$
$\Leftrightarrow 5.\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{O}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
Vậy: I nằm trên đoạn BC và cách B một đoạn là $\dfrac{3}{5}BC$



Bài 30. Cho tam giác ABC. Xác định điểm J thoả mãn $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CA}$.
Lời giải.

Ta có: $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CM}$ (Với M là trung điểm AB).

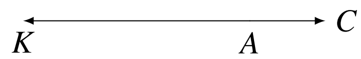


Vậy: J xác định duy nhất thoả $(\overrightarrow{AJ}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CM})$ với M là trung điểm AB

Bài 31. Cho hai điểm A,C. Xác định điểm K thoả mãn $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}=3\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=-3\overrightarrow{AC}$.

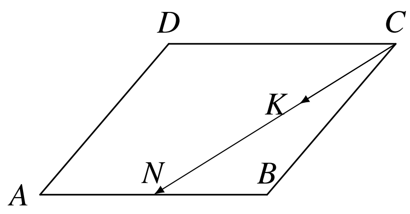


Vậy: K nằm trên đường AC và cách A một đoạn là $3BC$ ngược hướng với C

Bài 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm K thoả mãn: $3.\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Ta có: $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{0}$ (Với N là trung điểm của AB).
$\Leftrightarrow \overrightarrow{CK}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CN}$.

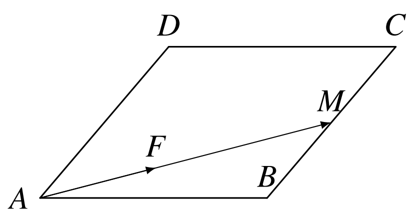


Vậy: K nằm trên đoạn CN và cách C một đoạn là $\dfrac{2}{5}BC$ với N là trung điểm AB.

Bài 33. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm F thoả mãn $3\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có: $3\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$
$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành)
$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{FA}=2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BA}$
$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AM}$ (Với M là trung điểm BC)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.



Vậy điểm F cần tìm thoả mãn đẳng thức vec tơ $\overrightarrow{AF}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Bài 34. Cho trước ba điểm A,B,C và ba số thực $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn $\alpha.\overrightarrow{IA}+\beta.\overrightarrow{IB}+\gamma.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Ta có: $\alpha.\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \alpha.\overrightarrow{IA}+\beta(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})+\gamma(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma).\overrightarrow{IA}+\beta.\overrightarrow{AB}+\gamma.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ (Vì $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$).
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.\overrightarrow{AB}$.

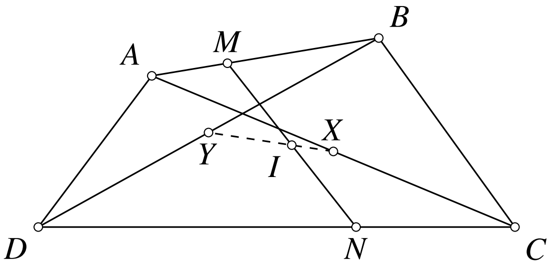
Vậy: Tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện đề bài.

III. Bài tập tổng hợp

Bài 35. Cho tứ giác $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên các cạnh AB và CD sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{CN}{CD}$. Tìm tập hợp các điểm I là trung điểm của đoạn MN.

Lời giải.

Giả sử $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{CN}{CD} = k$. Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của AC, BD. Ta có



$$\begin{aligned}2\overrightarrow{IX} &= \left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AX}\right)+\left(\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CX}\right)\\ &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NC}.\end{aligned}$$

Tương tự $2\overrightarrow{IY} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ND}$. Từ giả thiết ta có

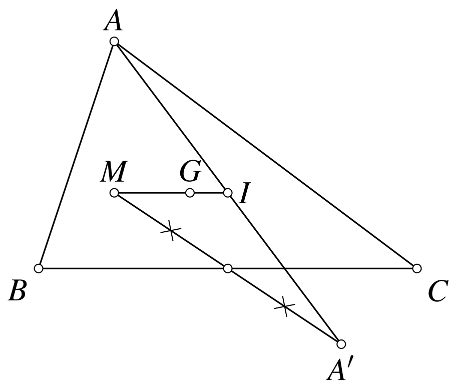
$$\begin{aligned}(1-k)\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{0}\\ (1-k)\overrightarrow{NC}+k\overrightarrow{ND} &= \overrightarrow{0},\end{aligned}$$

suy ra $(1-k)\overrightarrow{IX}+k\overrightarrow{IY} = \overrightarrow{0}$. Chú ý rằng $0 \le k \le 1$ nên tập các điểm I là đoạn thẳng XY.

Bài 36. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và điểm M. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng với M qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng bốn đường thẳng AA', BB', CC' và MG đồng quy.

Lời giải.

Dễ thấy $MBA'C$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{0}$. Tương tự $\overrightarrow{B'C}+\overrightarrow{B'A}-\overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{0}$. Trừ hai vế của hai đẳng thức trên ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} &= \overrightarrow{A'B}-\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{B'C}-\overrightarrow{A'M}+\overrightarrow{B'M}\\ &= \overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{B'A}.\end{aligned}$$

Từ đó ta có $ABA'B'$ là hình bình hành, do đó AA' và BB' cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Chứng minh tương tự, ta có AA', BB', CC' đồng quy tại trung điểm I của mỗi đường.

Ta có $\overrightarrow{MI} = \dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA'}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{2} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MG}$. Vậy MG đi qua I, ta được điều phải chứng minh.

Bài 37. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I. Điểm M là tuỳ ý không nằm trên đường thẳng AB. Trên MI kéo dài lấy một điểm N sao cho $IN = MI$.

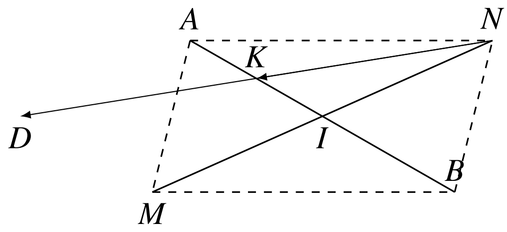
a) Chứng minh: $\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MB}$.

b) Tìm các điểm D,C sao cho: $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NI} = ND$ và $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$.

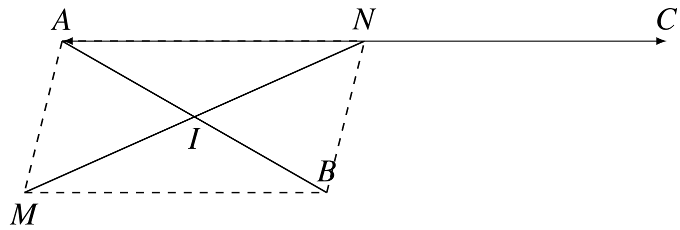
Lời giải.

a) Xét:$\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}$
$= \overrightarrow{AN}-\overrightarrow{MB}$
$= \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB}$
$= \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{BI}$
$= \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{0}$ (Điều phải chứng minh).

b) Tìm D
Ta có: $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NI}=\overrightarrow{ND}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{ND}=2\overrightarrow{NK}$ (với K là trung điểm của AI).
Vậy: D nằm trên đường NK và cách N một đoạn $2NK$ cùng hướng với K.



Tìm C
Ta có:$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CN}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CN}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{NC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{NA}$.
Vậy: C xác định duy nhất thoả $\overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{NA}$.



Bài 38. Cho hình bình hành $ABCD$.

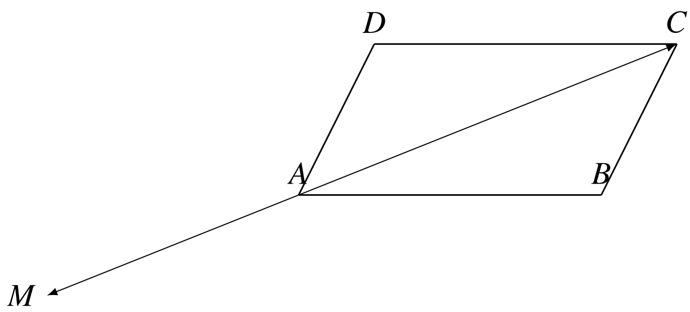
a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

b) Xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

a) Xét: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}.=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$.
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành)
$=2\overrightarrow{AC}$ (Điều phải chứng minh).

b) Ta có: $3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AC}$ (Theo chứng minh câu a)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
Vậy: M xác định duy nhất $\overrightarrow{AM}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.



Bài 39. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC.

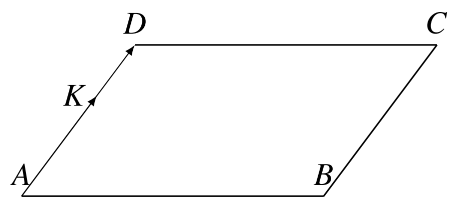
a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

b) Xác định điểm K thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành).
Vì vậy: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$
Nên: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.(Điều phải chứng minh).

b) Ta có:$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AD}$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
Vậy: K xác định duy nhất $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



Bài 40. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi A',B',C',D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD,CDA,ABD và ABC.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{0}$.
b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC,BD và I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{ID'}=\overrightarrow{0}.$$

Lời giải. a) Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA'}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\\
\overrightarrow{BB'}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)\\
\overrightarrow{CC'}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right)\\
\overrightarrow{DD'}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\\
&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\right)\\
&=\frac{1}{3}\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

b) Theo kết quả đã biết ta có:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{A'A}\right)+\left(\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'B}\right)+\left(\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{C'C}\right)+\left(\overrightarrow{ID'}+\overrightarrow{D'D}\right)=\overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{ID'}-\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}\right)=\overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{ID'}=\overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

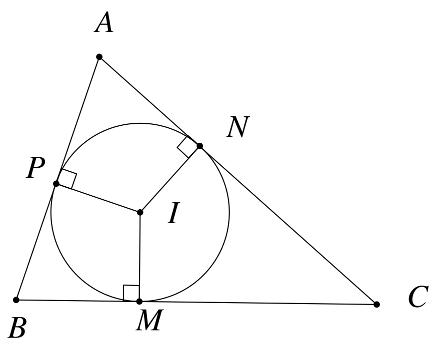
(Vì theo kết quả ý a) ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{0}$).

Bài 41. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại M,N,P. Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IM}+b\overrightarrow{IN}+c\overrightarrow{IP}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, ta có:

$$\begin{cases}AP=AN=p-a\\BM=BP=p-b\\CN=CM=p-c\end{cases}$$



Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}
&MC.\overrightarrow{MB}+MB.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow(p-c)\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)+(p-b)\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)=\overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow(2p-b-c)\overrightarrow{IM}=(p-c)\overrightarrow{IB}+(p-b)\overrightarrow{IC}\\
&\Leftrightarrow a\overrightarrow{IM}=(p-c)\overrightarrow{IB}+(p-b)\overrightarrow{IC}(1)
\end{aligned}$$

Tương tự, ta chứng minh được $\begin{cases}b\overrightarrow{IN}=(p-a)\overrightarrow{IC}+(p-c)\overrightarrow{IA}(2)\\c\overrightarrow{IP}=(p-b)\overrightarrow{IA}+(p-a)\overrightarrow{IB}(3)\end{cases}$

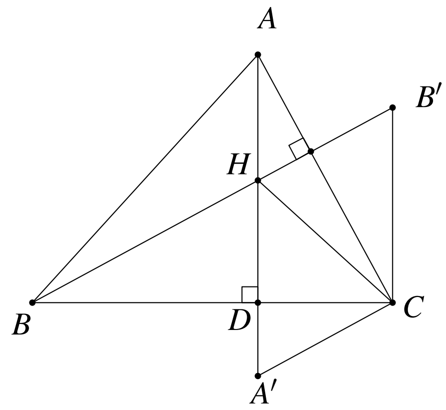
Cộng từng vế các đẳng thức $(1),(2),(3)$ thu được

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{IM}+b\overrightarrow{IN}+c\overrightarrow{IP} &= (2p-b-c)\overrightarrow{IA}+(2p-a-c)\overrightarrow{IB}+(2p-a-b)\overrightarrow{IC} \\ &= a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC} \\ &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Bài 42. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Chứng minh rằng:

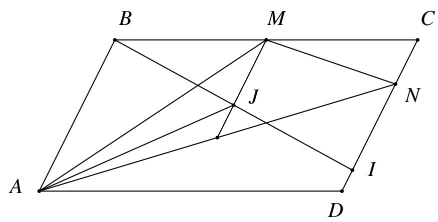
$$\tan A.\overrightarrow{HA}+\tan B.\overrightarrow{HB}+\tan C.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}.$$

Lời giải. Qua điểm C dựng: đường thẳng song song với AH, cắt BH tại B'; đường thẳng song song với BH, cắt AH tại A'. Khi đó $A'HB'C$ là hình bình hành.



Gọi D là giao điểm của AH và BC. Áp dụng định lý Ta - lét ta có:
$\dfrac{HB'}{HB}=\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{\frac{AD}{BD}}{\frac{AD}{DC}}=\dfrac{\tan B}{\tan C}$.
$\Rightarrow \overrightarrow{HB'}=-\dfrac{\tan B}{\tan C}.\overrightarrow{HB}$ (Do $\overrightarrow{HB'}$ và $\overrightarrow{HB}$ ngược hướng).
Tương tự ta có: $\Rightarrow \overrightarrow{HA'}=-\dfrac{\tan A}{\tan C}.\overrightarrow{HA}$.
Vì $AHB'C$ là hình bình hành nên ta có:
$\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}=-\dfrac{\tan A}{\tan C}.\overrightarrow{HA}-\dfrac{\tan B}{\tan C}.\overrightarrow{HB}$.
$\Rightarrow \tan A.\overrightarrow{HA}+\tan B.\overrightarrow{HB}+\tan C.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$.

Bài 43. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy M,N sao cho $\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. Gọi I,J là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CI}=\alpha\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BJ}=\beta\overrightarrow{BI}$. Xác định α,β để J là trọng tâm tam giác AMN.
Lời giải.
Ta có:



$$\begin{aligned} \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{JN} &= \overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IN} \\ &= \overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BJ}+\frac{\overrightarrow{BC}}{2}+\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{BA}+\frac{\overrightarrow{BC}}{2}+(-3\beta+1)\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{BA}+\frac{\overrightarrow{BC}}{2}+(-3\beta+1)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}\right)+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{BA}+\left(\frac{3}{2}-3\beta\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{CN}-3\beta\overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{BA}+\left(\frac{3}{2}-3\beta\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}-3\alpha\beta\overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{BA}+\left(\frac{3}{2}-3\beta\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\left(\frac{1}{3}-3\alpha\beta\right)\overrightarrow{BA} \\ &= \left(-\frac{17}{6}+3\beta+3\alpha\beta\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{3}{2}-3\beta\right)\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Để J là trọng tâm $\triangle AMN$ thì $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{JN}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{17}{6}+3\beta+3\alpha\beta\right)\overrightarrow{AB}+\left(\dfrac{3}{2}-3\beta\right)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Mặt khác, do $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên suy ra:

$$\begin{cases} -\dfrac{17}{6}+3\beta+3\alpha\beta=0 \\ \dfrac{3}{2}-3\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{8}{9} \\ \beta=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

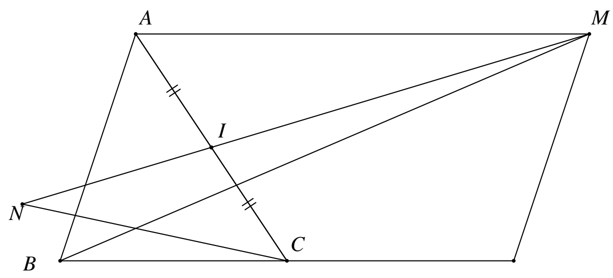
Vậy với $\alpha=\dfrac{8}{9},\beta=\dfrac{1}{2}$ thì J là trọng tâm $\triangle AMN$.

Bài 44. Cho $\triangle ABC$, gọi M,N lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ với $k\in\mathbb{R}$.

a) Tìm k để M,N đi qua trung điểm I của AC.

b) Tính $\dfrac{IM}{IN}$.

Lời giải.



a) Do I là trung điểm của AC nên ta có $\overrightarrow{BI}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}$. Khi đó:

$\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BM}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}$,

$\overrightarrow{NI}=\overrightarrow{CI}-\overrightarrow{CN}=-\dfrac{1}{2}-k\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{1}{2}-k\right)\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

Mặt khác MN đi qua I nên suy ra $\exists t$ sao cho:

$$\overrightarrow{MI}=t\overrightarrow{NI}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}=t\left(-\frac{1}{2}-k\right)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}=t\left(-\dfrac{1}{2}-k\right) \\ -2=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ k=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

b) Với $t=-2\Rightarrow \dfrac{IM}{IN}=2$.

§4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

I. Tóm tắt lí thuyết

Trục và độ dài đại số trên trục

Trục tọa độ (còng gọi là *trục*) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O cố định và véc-tơ đơn vị $\overrightarrow{i}$ (véc-tơ có độ dài bằng 1).

Điểm O gọi là *gốc tọa độ*.

Hướng của véc-tơ đơn vị là *hướng của trục*.

Trục tọa độ như vậy ký hiệu là $(O;\overrightarrow{i})$.

Cho điểm tùy ý M nằm trên trục $(O;\overrightarrow{i})$. Khi đó, có duy nhất một số k xác định sao cho $\overrightarrow{OM}=k\cdot\overrightarrow{i}$.

Số k được gọi là *tọa độ* của điểm M đối với trục $(O;\overrightarrow{i})$.

Cho véc-tơ $\overrightarrow{a}$ nằm trên trục $(O;\overrightarrow{i})$. Khi đó có duy nhất số t xác định sao cho $\overrightarrow{a}=t\cdot\overrightarrow{i}$. Số t được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\overrightarrow{a}$ đối với trục $(O;\overrightarrow{i})$.

Như vậy tọa độ của điểm M là tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$.

Nếu hai điểm A,B nằm trên trục Ox. Khi đó có duy nhất một số t sao cho $\overrightarrow{AB}=t\cdot\overrightarrow{i}$. Ta gọi số t đó là *độ dài* của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho, ký hiệu là $\overline{AB}$. Như vậy $\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\cdot\overrightarrow{i}$.

⚠ *Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{i}$ thì $\overline{AB}=AB$.*

Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{i}$ thì $\overline{AB}=-AB$.

Nếu hai điểm A,B trên trục $(O;\overrightarrow{i})$ có tọa độ lần lượt là a,b thì $\overline{AB}=b-a$.

Định lí 1. *Trên trục số*

Với ba điểm bất kỳ trên trục, ta có $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau khi và chỉ khi $\overline{AB}=\overline{CD}$.

Hệ trục tọa độ

Hệ trục tọa độ $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ gồm hai trục $(O;\overrightarrow{i})$ và $(O;\overrightarrow{j})$ vuông góc với nhau, trong đó

Điểm O gọi là *gốc tọa độ*.

Trục $(O;\overrightarrow{i})$ gọi là *trục hoành*, ký hiệu là Ox.

Trục $(O;\overrightarrow{j})$ gọi là *trục tung*, ký hiệu là Oy.

Các véc-tơ $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$ là các *véc-tơ đơn vị* trên trục Ox và Oy.

Hệ trục tọa độ $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ còn được ký hiệu là Oxy.

⚠ *Mặt phẳng trên đó đã chọn một hệ trục tọa độ Oxy được gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy hay mặt phẳng Oxy.*

Tọa độ của véc-tơ đối với hệ trục tọa độ

Đối với hệ trục tọa độ $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ nếu $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ thì cặp số $(x;y)$ được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\overrightarrow{u}$, ký hiệu $\overrightarrow{u}=(x;y)$ hay $\overrightarrow{u}(x;y)$.

Số x gọi là *hoành độ*, y gọi là *tung độ* của véc-tơ $\overrightarrow{u}$.

Định lí 2. *Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}=(x;y)$, $\overrightarrow{b}=(x';y')$ và số thực k. khi đó*

(i) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$

(ii) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(x+x';y+y')$ *và* $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(x-x';y-y')$

(iii) $k\overrightarrow{a}=(kx;ky)$

(iv) $\overrightarrow{a}$ *cùng phương với* $\overrightarrow{b}\,(\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0})\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}$ *sao cho* $\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\end{cases}$

Tọa độ của điểm

Trong mặt phẳng Oxy, tạo độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là *tọa độ* của điểm M. Như vậy, $(x;y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=(x;y)$, ký hiệu $M(x;y)$ hay $M=(x;y)$.

Số x được gọi là *hoành độ*, số y được gọi là *tung độ* của điểm M.

⚠ *Nếu gọi H,K lần lượt là hình chiếu của M trên Ox và Oy thì*

$$M(x;y)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}.$$

Như vậy $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{i}$ hay $x=\overline{OH}$ và $\overrightarrow{OK}=y\overrightarrow{j}$ hay $y=\overline{OK}$.

Định lí 3. *Với hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ ta có*

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$$

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm của tam giác

Định lí 4. *Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Khi đó trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ* $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}$

Định lí 5. *Cho ba điểm $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$ và $C(x_C;y_C)$. Khi đó trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ* $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}$

II. Các dạng toán

Dạng 1. Tìm tọa độ của một điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục $(O;\overrightarrow{e})$. Tìm tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v},k\overrightarrow{u}$

Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của điểm, độ dài đại số của véc-tơ và các công thức tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v},k\overrightarrow{u}$.

- Điểm M có tọa độ $a\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=a.\overrightarrow{e}$ với O là điểm gốc.
- Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m=\overline{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{e}$.
- Nếu A và B có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB}=b-a$.
- Tọa độ trung điểm I của đoạn AB : $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$.
- Nếu $\overrightarrow{u}=(u_1;u_2)$, $\overrightarrow{v}=(v_1;v_2)$ thì $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(u_1+v_1;u_2+v_2)$; $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(u_1-v_1;u_2-v_2)$; $k\overrightarrow{u}=(ku_1;ku_2),k\in\mathbb{R}$.

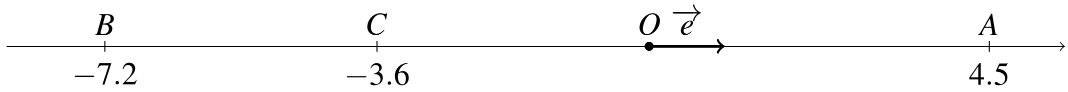
Ví dụ 1. Trên trục tọa độ $(O;\overrightarrow{e})$, cho ba điểm A, B, C với: $\overrightarrow{OA}=4{,}5\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{OB}=-7{,}2\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{OC}=-3{,}6\overrightarrow{e}$.

a. Xác định tọa độ các điểm A, B, C.

b. Tìm tọa độ các trung điểm M, N, P theo thứ tự của các đoạn thẳng AB, BC, CA.

c. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA.

Lời giải.



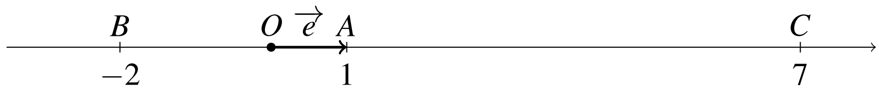
a. $A(4,5)$, $B(-7,2)$, $C(-3,6)$.

b. Vì M là trung điểm $AB \Rightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -1,35 \Rightarrow M(-1,35)$. Tương tự ta được $N(-5,4)$, $P(0,45)$.

c. $\overline{AB} = 11,7$, $\overline{BC} = 3,6$, $\overline{CA} = 8,1$.

Ví dụ 2. Trên trục tọa độ $(O,\overrightarrow{e})$, cho ba điểm $A(1)$, $B(-2)$, $C(7)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overline{AM} + 3\overline{BM} = 2\overline{CM}$.

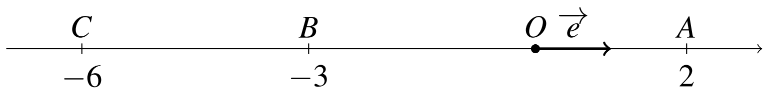
Lời giải.



Gọi $M(x)$, ta có $\overline{AM} = x - 1$, $\overline{BM} = x + 2$, $\overline{CM} = x - 7$.
Theo giả thiết ta suy ra $x - 1 + 3(x+2) = 3(x-7) \Leftrightarrow x = -26$.

Ví dụ 3. Trên trục tọa độ $(O,\overrightarrow{e})$, cho các điểm $A(2)$, $B(-3)$, $C(-6)$. Tìm tọa độ của $D(x)$ sao cho $\overline{DA} + 4\overline{DB} \leq 3\overline{DC}$.

Lời giải.



Ta có: $\overline{DA} = 2 - x$, $4\overline{DB} = -12 - 4x$, $3\overline{DC} = -18 - 3x$.
Theo giả thiết ta suy ra $2 - x - 12 - 4x \leq -18 - 3x \Rightarrow x \geq 4$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\overrightarrow{a} = (-4;2)$, $\overrightarrow{b} = (5;8)$. Tính tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $3\overrightarrow{a}$, $5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, $-(5\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})$.

Lời giải. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (1;10)$, $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (-9;-6)$, $3\overrightarrow{a} = (-12;6)$.
Ta có: $5\overrightarrow{a} = (-20;10)$, $2\overrightarrow{b} = (10;16)$
Nên $5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = (-10;26)$ và $-(5\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) = (30;6)$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho các véc-tơ $\overrightarrow{a} = (4;-2)$, $\overrightarrow{b} = (-1;-1)$, $\overrightarrow{c} = (2;5)$. Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{b}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{c}$.

Lời giải. Giả sử $\overrightarrow{b} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{c} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4m + 2n \\ -1 = -2m + 5n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{8} \\ n = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{b} = -\dfrac{1}{8}\overrightarrow{a} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{c}$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\overrightarrow{a} = (x;2)$, $\overrightarrow{b} = \left(-5;\dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{c} = (x;7)$. Tìm véc-tơ $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{4a} - 3\overrightarrow{b}$.

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{c}=4\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4x-3.(-5)\\7=4.2-3.\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=-5.$

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\overrightarrow{a}(1;-2)$; $\overrightarrow{b}(-3;0)$; $\overrightarrow{c}(4;1)$. Tìm tọa độ của $\overrightarrow{t}=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

Lời giải. Ta có $2\overrightarrow{a}=(2;-4)$; $-3\overrightarrow{b}=(9;0)$.
Mà $\overrightarrow{t}=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(15;-3)\Rightarrow\overrightarrow{t}(15;-3)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\overrightarrow{a}=(2;1)$, $\overrightarrow{b}=(3;4)$, $\overrightarrow{c}=(7;2)$.

a. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

b. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{v}$ sao cho $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$.

c. Tìm các số k,h để $\overrightarrow{c}=k\overrightarrow{a}+h\overrightarrow{b}$.

Lời giải.

a. $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(4;2)-(9;12)+(7;2)=(2;-8)$.

b. $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}\Leftrightarrow\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=(-6;1)$.

c. $\overrightarrow{c}=k\overrightarrow{a}+h\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\begin{cases}7=2k+7h\\2=k+4h\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{22}{5}\\h=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$. Suy ra $\overrightarrow{c}=\dfrac{22}{5}\overrightarrow{a}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{b}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\overrightarrow{a}=(-1;3)$, $\overrightarrow{b}=(0;5)$, $\overrightarrow{c}=(5;-2)$. Tính tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ định bởi:

a) $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}$.

b) $4\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{c}$.

Lời giải.

a) Ta có: $2\overrightarrow{a}=(-2;6)$, $3\overrightarrow{b}=(0;15)$, $4\overrightarrow{c}=(20;-8)$, $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=(-2;21)$.
$\Rightarrow\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}=(-22;29)$.

b) Ta có: $4\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{c}\Rightarrow\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{c}$.
mà $-2\overrightarrow{a}=(2;-6)$, $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{c}=\left(\dfrac{15}{2};-3\right)$, $-2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(2;-1)$.
$\Rightarrow\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{c}=\left(-\dfrac{11}{2};2\right)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\overrightarrow{a}=(x;2)$, $\overrightarrow{b}=(-5;1)$, $\overrightarrow{c}=(x;7)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{c}=2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$.

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{c}=2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2x+3.(-5)\\7=2.2+3.1\end{cases}\Leftrightarrow x=15.$

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\overrightarrow{a}=(2;1)$, $\overrightarrow{b}=(3;4)$, $\overrightarrow{c}=(7;2)$. Tìm tọa độ $\overrightarrow{c}=m.\overrightarrow{a}+n.\overrightarrow{b}$.

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{c}=m.\overrightarrow{a}+n.\overrightarrow{b} \Leftrightarrow \begin{cases}7=2m+3n\\2=m+4n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{22}{5}\\n=-\dfrac{3}{5}.\end{cases}$

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\overrightarrow{a}=(-2;1)$, $\overrightarrow{b}=(3;4)$ và $\overrightarrow{c}=(0;8)$. Tìm tọa độ $\overrightarrow{x}$ thỏa $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c} \Leftrightarrow \overrightarrow{x}=-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c} \Leftrightarrow \overrightarrow{x}=-(-2;1)+(3;4)-(0;8) \Leftrightarrow \overrightarrow{x}=-(-2;1)+(3;4)-(0;8) \Leftrightarrow \overrightarrow{x}=(5;-5)$.

Bài 6. Cho $\overrightarrow{a}=(0;1)$, $\overrightarrow{b}=(-1;2)$, $\overrightarrow{c}=(-3;-2)$. Tìm tọa độ của $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}$.

Lời giải. Ta có: $3\overrightarrow{a}=(0;3)$, $2\overrightarrow{b}=(-2;4)$, $-4\overrightarrow{c}=(12;8)$ nên $\overrightarrow{u}=(10;15)$.

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\overrightarrow{a}=(2;1)$, $\overrightarrow{b}=(3;4)$, $\overrightarrow{c}=(7;2)$. Tìm m và n để $\overrightarrow{c}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$.

Lời giải. Ta có: $m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}=(2m+3n;m+4n)$.

Mà: $\overrightarrow{c}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b} \Leftrightarrow \begin{cases}2m+3n=7\\m+4n=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{22}{5}\\n=-\dfrac{3}{5}.\end{cases}$

Bài 8. Trên trục Ox cho các điểm $A(2)$, $B(-2)$. Tìm điểm $M(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{MA}.\overline{MB} \le \overline{AB}^2$.

Lời giải. Ta có: $\overline{MA}=2-x$, $\overline{MB}=-2-x$, $\overline{AB}=-4$.

$\overline{MA}.\overline{MB} \le \overline{AB}^2 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \ge -16 \Leftrightarrow x^2-8 \le 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} \le x \le 2\sqrt{5}$.

Bài 9. Trên trục tọa độ $(O;\overrightarrow{e})$, cho ba điểm $A(-4)$, $B(9)$, $C(-3)$.

a. Tìm điểm $M(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{AB}=2\overline{CM}$.

b. Tìm điểm $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{PA}+2\overline{PB}+3\overline{PC} \le 0$.

c. Tìm điểm $Q(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{QA}.\overline{QB} \le \overline{QC}^2$.

Lời giải.

a. $\overline{AB}=13$, $2\overline{CM}=2x+6$. Theo giả thiết ta suy ra $13=2x+6 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$.

b. $\overline{PA}=-4-x$, $2\overline{PB}=18-2x$, $3\overline{PC}=-9-3x$.
Theo giả thiết ta suy ra $-4-x+18-2x-9-3x \le 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{5}{6}$.

c. $\overline{QA}=-4-x$, $\overline{QB}=9-x$, $\overline{QC}=-3-x$.
Theo giả thiết ta suy ra $(-4-x)(9-x) \le (-3-x)^2 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{45}{11}$.

Bài 10. Trên trục tọa độ $x'Ox$ cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là 9, -6, 2. Tìm các điểm đối xứng với điểm A và B qua C.

Lời giải. Gọi A', B' lần lượt là điểm đối xứng với điểm A và B qua C.

Vì C là trung điểm của đoạn AA' nên $x_C=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'}=2x_C-x_A=4-9=-5$.

Tương tự ta suy ra $x_{B'}=4+6=10$.

Dạng 2. Xác định tọa độ của một véc-tơ và một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Trong mặt phẳng Oxy, với điểm M tùy ý, luôn tồn tại duy nhất hai số thực x, y sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Bộ hai số thực $(x;y)$ được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$, ký hiệu $\overrightarrow{OM} = (x;y)$ hay $\overrightarrow{OM}(x;y)$.

⚠

- *Tọa độ của véc-tơ đơn vị* $\overrightarrow{i}$ *là* $(1;0)$, *tức là* $\overrightarrow{i} = (1;0)$.
- *Tọa độ của véc-tơ đơn vị* $\overrightarrow{j}$ *là* $(0;1)$, *tức là* $\overrightarrow{j} = (0;1)$.
- *Tọa độ của véc-tơ-không là* $(0;0)$, *tức là* $\overrightarrow{0} = (0;0)$.

Nếu biết tọa độ của hai điểm A, B thì ta tính tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ theo công thức

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(3;2)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm D.

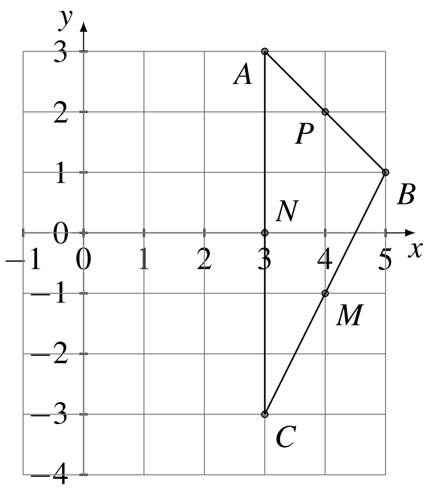
Lời giải. Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (x-3; y-2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4;-1)$.

Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $\begin{cases} x-3 = -4 \\ y-2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm D là $(-1;1)$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC. Gọi $M(4;-1), N(3;0)$ và $P(4;2)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{NA} = (x_A - 3; y_A), \overrightarrow{MP} = (0;3)$.

Vì $NAPM$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$

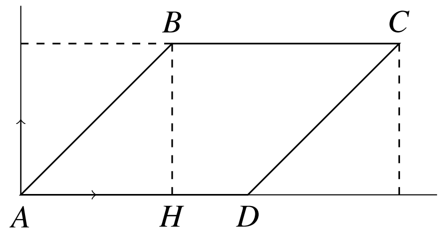
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 3 = 0 \\ y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ y_A = 3. \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm A là $(3;3)$.

Tương tự, từ $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$ ta tính được $B(5;1), C(3;-3)$.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 3$ và chiều cao ứng với cạnh AD bằng 2 góc $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Chọn hệ trục tọa độ $(A; \vec{i}, \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Tìm tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



Kẻ $BH \perp AD$. Ta có $BH = 2$, $AB = 4$, $AH = 2\sqrt{3}$.
Do đó ta có $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(5;2)$, $D(3;0)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2;2), \overrightarrow{BC} = (3;0), \overrightarrow{CD} = (-2;-2), \overrightarrow{AC} = (5;2)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;4)$, $B(2;6)$, $C(1;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải. Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (x+1; y-4)$, $\overrightarrow{BC} = (-1;-5)$.

Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $\begin{cases} x+1 = -1 \\ y-4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1. \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm D là $(-2;-1)$.

Bài 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho bốn điểm $A(1;-1)$, $B(2;2)$, $C(1;-5)$, $D(3;1)$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;3), \overrightarrow{CD} = (2;6)$.

Suy ra $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$. Do đó hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (0;-4)$ và $\overrightarrow{AB} = (1;3)$ không cùng phương vì $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{-4}{3}$.

Vậy $AB \parallel CD$.

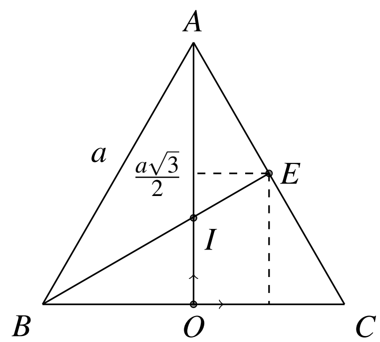
Bài 13. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Chọn hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó O là trung điểm của cạnh BC, $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OC}$, $\vec{j}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$.

a) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC;

b) Tìm tọa độ trung điểm E của cạnh AC;

c) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.



a) Ta có $B\left(-\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(0;\frac{a}{2}\right)$.

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) $E\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Ta có $OI=\frac{1}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Suy ra $I\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$.

Dạng 3. Tính tọa độ trung điểm - trọng tâm

Phương pháp giải, kinh nghiệm giải.

M là trung điểm $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}. \end{cases}$

G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}. \end{cases}$

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;4)$, $B(-2;6)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải. Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$ là trung điểm AB, khi đó:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{1-2}{2} \\ y_M=\dfrac{4+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-\dfrac{1}{2} \\ y_M=5. \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{-1}{2};5\right)$.

Ví dụ 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(1;4)$, $C(-1;-2)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải. Gọi $G\left(x_G;y_G\right)$ là trọng tâm tam giác ABC, khi đó:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{-1+1-1}{3} \\ y_G=\dfrac{2+4-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{-1}{3} \\ y_G=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{-1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Ví dụ 13. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(3;1)$, $B(2;2)$, $G(2;-1)$. Tìm tọa độ điểm C biết G là trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải. Gọi $C\left(x_C;y_C\right)$.

Ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{3+2+x_C}{3} \\ -1 = \dfrac{1+2+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -6. \end{cases}$$

Vậy $C(1;-6)$.

Ví dụ 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;0)$, $B(0;-4)$. Gọi M là trung điểm của AB, tìm tọa độ trọng tâm tam giác OBM.

Lời giải. Gọi $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác OBM, $M(x_M;y_M)$ là trung điểm AB.
Ta có:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_O+x_B+x_M}{3} \\ y_G = \dfrac{y_O+y_B+y_M}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1}{3} \\ y_G = \dfrac{-4-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1}{3} \\ y_G = -2. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\dfrac{-1}{3};-2\right)$.

Ví dụ 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;5)$, $B(-4;-3)$, $C(2;-1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, tìm tọa độ điểm G' là điểm đối xứng của G qua B.

Lời giải. Gọi $G(x_G;y_G)$, $G'(x'_G;y'_G)$. Ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{1-4+2}{3} \\ y_G = \dfrac{5-3-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1}{3} \\ y_G = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Vì G' là ảnh đối xứng của G qua B nên B là trung điểm của GG'. Ta có:

$$\begin{cases} x_{G'} = 2x_B - x_G \\ y_{G'} = 2y_B - y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = 2.(-4) - \dfrac{-1}{3} \\ y_{G'} = 2.(-3) - \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = \dfrac{-23}{3} \\ y_{G'} = \dfrac{-19}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\dfrac{-23}{3};\dfrac{-19}{3}\right)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(0;2)$, $B(-3;-2)$. Tìm tọa độ trung điểm của AB.

Lời giải. Gọi $M(x_M,y_M)$ là trung điểm AB, khi đó:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{0-3}{2} \\ y_M = \dfrac{2-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{-3}{2} \\ y_M = 0. \end{cases}$$

Vậy $M\left(\dfrac{-3}{2};0\right)$.

Bài 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1;2)$, $B(5;-2)$, $C(-2;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải. Gọi $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC, khi đó:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1+5-2}{3} \\ y_G = \dfrac{2-2+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2}{3} \\ y_G = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;1)$, $D\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$.

a) Tìm tọa độ điểm B biết D là trung điểm đoạn AB.

b) Tìm tọa độ điểm M đối xứng với A qua B.

Lời giải.

a) Gọi $B\left(x_B;y_B\right)$.
Ta có:
$$\begin{cases} x_D=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_D=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=\dfrac{-1+x_B}{2} \\ \dfrac{5}{2}=\dfrac{1+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-1 \\ y_B=4. \end{cases}$$
Vậy $B\left(-1;4\right)$.

b) Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$ là điểm đối xứng với A qua B, khi đó B là trung điểm của MA.
Ta có:
$$\begin{cases} x_M=2x_B-x_A \\ y_M=2y_B-y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=2.(-1)-(-1) \\ y_M=2.4-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-1 \\ y_M=7. \end{cases}$$
Vậy $M\left(-1;7\right)$.

Bài 17. Trọng mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $A(-3;2)$, $B(4;3)$ và điểm C nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC và điểm C, biết G nằm trên trục Oy.
Lời giải. Gọi $G\left(0;y_G\right)$, $C\left(x_C;0\right)$

Ta có: $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=\dfrac{-3+4+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{2+3+0}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=-1 \\ y_G=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Vậy $G\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$, $C(-1;0)$.

Bài 18. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC, biết trung điểm của các cạnh AB, BC, AC lần lượt là $M(2;1)$, $N(2;4)$, $P(-3;0)$.
Lời giải. Gọi $A\left(x_A;y_A\right)$, $B\left(x_B;y_B\right)$, $C\left(x_C;y_C\right)$ là tọa độ ba đỉnh của tam giác ABC.
$G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC.
Ta có:
$$\begin{cases} \dfrac{x_A+x_B}{2}=x_M \\ \dfrac{x_B+x_C}{2}=x_N \\ \dfrac{x_A+x_C}{2}=x_P \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \dfrac{y_A+y_B}{2}=y_M \\ \dfrac{y_B+y_C}{2}=y_N \\ \dfrac{y_A+y_C}{2}=y_P \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B+x_C=x_M+x_N+x_P \\ y_A+y_B+y_C=y_M+y_N+y_P. \end{cases}$$

Khi đó: $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{2} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{x_M+x_N+x_P}{3} \\ y_G=\dfrac{y_M+y_N+y_P}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{2+2+(-3)}{3}=\dfrac{1}{3} \\ y_G=\dfrac{1+4+0}{3}=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Vậy $G\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, điểm thuộc đường thẳng

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau:

- Hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi ba điểm M, A, B thẳng hàng.

Ví dụ 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(2;4)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M. Tìm tọa độ điểm M.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;2)$ và $\overrightarrow{AC} = (3;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Do đó, ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Vì Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương.
Gọi $M(x;0)$ thuộc trục Ox. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;2)$ và $\overrightarrow{AM} = (x+1;-1)$.
$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$.
Vậy $M(-2;0)$.

Ví dụ 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba véc-tơ $\overrightarrow{a} = (1;2)$, $\overrightarrow{b} = (-3;1)$ và $\overrightarrow{c} = (6;5)$. Tìm m để véc-tơ $\overrightarrow{u} = m\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ cùng phương với $\overrightarrow{c}$.

Lời giải.
Ta có: $\overrightarrow{u} = m\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (m-3;2m+1)$.
Suy ra: $\overrightarrow{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{c} \Leftrightarrow \dfrac{m-3}{6} = \dfrac{2m+1}{5} \Leftrightarrow m = -3$.
Vậy $m = -3$.

Ví dụ 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(5;5)$, $B(6;-2)$, $C(-2;4)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-7)$ và $\overrightarrow{AC} = (-7;-1)$.
Vì $\dfrac{1}{-7} \neq \dfrac{-7}{-1}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Do đó A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi $D(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AD} = (x-5;y-5)$ và $\overrightarrow{BC} = (-8;6)$.
$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = -8 \\ y-5 = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 11. \end{cases}$
Vậy $D(-3;11)$.

Ví dụ 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;1)$ và $B(-4;5)$.

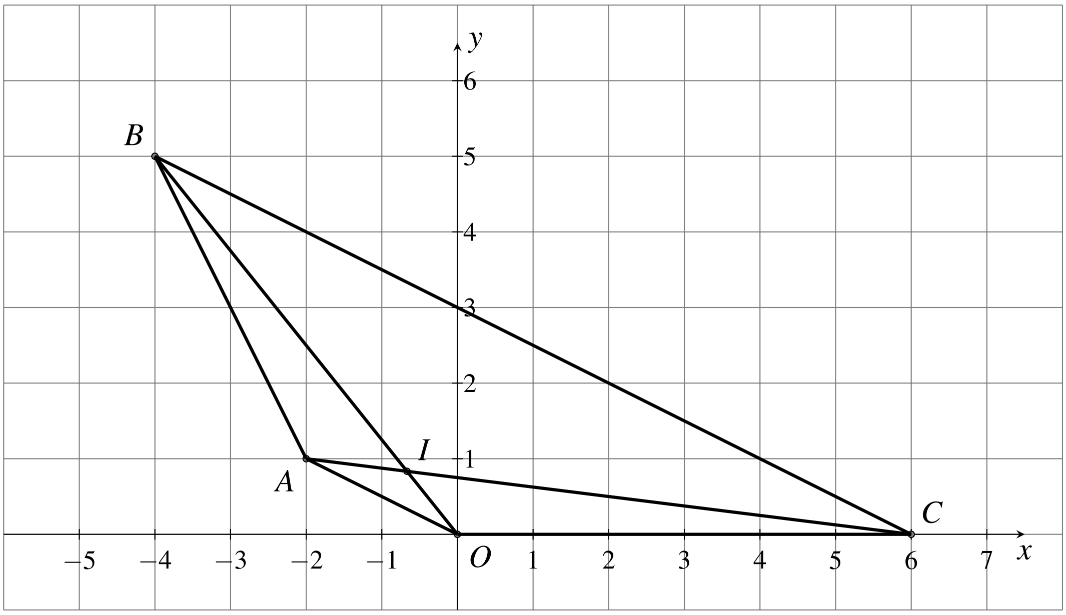
a) Tìm trên trục Ox điểm C sao cho $ABCO$ là hình thang có cạnh đáy là AO.

b) Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường chéo của hình thang $ABCO$.

Lời giải.

a) Gọi $C(x;0)$ thuộc trục Ox. Vì $ABCO$ là hình thang có cạnh đáy là AO nên $AO \parallel BC$. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.
Ta có: $\overrightarrow{AO} = (2;-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (x+4;-5)$.
$\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{-5}{-1} \Leftrightarrow x = 6$.
Vậy $C(6;0)$.

b) Gọi $I(x;y)$ là giao điểm hai đường chéo OB và AC của hình thang $ABCO$.



Ta có: $\overrightarrow{OI} = (x;y)$, $\overrightarrow{OB} = (-4;5)$, $\overrightarrow{AI} = (x+2;y-1)$, $\overrightarrow{AC} = (8;-1)$.
Ta có: O, I, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng phương $\dfrac{x}{-4} = \dfrac{y}{5} \Leftrightarrow 5x+4y = 0$ (1).
Lại có: A, I, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\dfrac{x+2}{8} = \dfrac{y-1}{-1} \Leftrightarrow x+8y = 6$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 5x+4y=0 \\ x+8y=6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$

Vậy $I\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}. \end{cases}$

Khi $k = -1$ thì $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$, M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài 20. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;2)$, $B(1;1)$ và $C(-1;-2)$. Các điểm A', B', C' lần lượt chia các đoạn thẳng BC, CA, AB theo các tỉ số $\frac{1}{2}$, -2, -1.

a) Tìm tọa độ các điểm A', B', C'.

b) Chứng minh ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Lời giải.

a) Ta có:

$\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C} \Rightarrow A'(3;4)$.

$\overrightarrow{B'C} = -2\overrightarrow{B'A} \Rightarrow B'\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{C'A} = -\overrightarrow{C'B} \Rightarrow C'\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{A'B'} = \left(-\frac{10}{3};-\frac{10}{3}\right)$ và $\overrightarrow{A'C'} = \left(-\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{A'C'}$.

Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ cùng phương. Do đó, ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Bài 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(5;0)$, $B(3;-2)$. Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm M. Trong ba điểm A, B, M, điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

Lời giải.

Vì Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm M nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương.

Gọi $M(0;m)$ thuộc trục Oy. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;-2)$ và $\overrightarrow{AM} = (-5;m)$.

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{-5}{-2} = \frac{m}{-2} \Leftrightarrow m = -5$.

Suy ra $M(-2;0)$. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;-2)$ và $\overrightarrow{AM} = (-5;-5)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM}$.

Vậy điểm B nằm giữa hai điểm A và M.

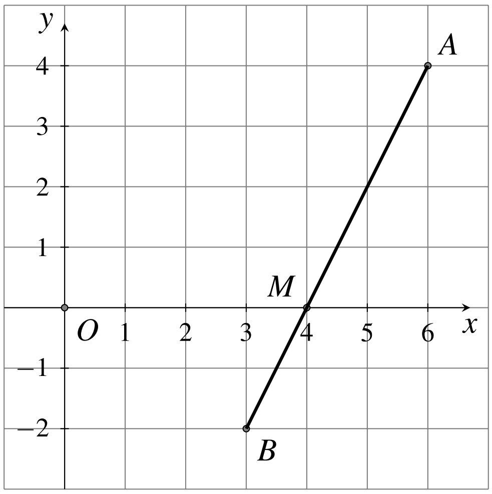
Bài 22. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(6;4)$, $B(3;-2)$, $C\left(\frac{1}{2};2\right)$.

a) Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm trên trục hoành điểm N sao cho $NA + NC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

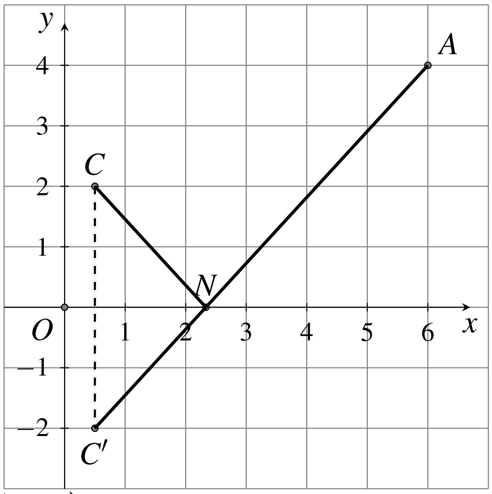
Lời giải.

a) Ta có hai điểm A và B nằm về hai phía đối với trục hoành.
Với mọi $M \in Ox$, ta có $MA + MB \geq AB$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, M, B thẳng hàng.
Vậy $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất là bằng AB, đạt được khi M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục hoành.
Vì M là giao điểm của của đường thẳng AB và truc hoành nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.
Gọi $M(x;0)$ thuộc trục Ox. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x-6;-4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-3;-6)$.



$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-6}{-3} = \dfrac{-4}{-6} \Leftrightarrow x = 4$.
Vậy $M(4;0)$.

b) Ta có hai điểm A và C nằm về một phía đối với trục hoành.
Gọi C' là điểm đối xứng với C qua trục hoành. Khi đó, ta có $C'\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$.
Với mọi $N \in Ox$, ta có $NA + NC = NA + NC' \geq AC'$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, N, C' thẳng hàng.
Vậy $NA+NC$ có giá trị nhỏ nhất là bằng AC', đạt được khi N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục hoành.
Vì N là giao điểm của của đường thẳng AC' và truc hoành nên ba điểm N, A, C' thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương.



Gọi $N(x;0)$ thuộc trục Ox. Ta có: $\overrightarrow{AN} = (x-6;-4)$ và $\overrightarrow{AC'} = \left(-\dfrac{11}{2};-6\right)$.
$\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{-2(x-6)}{11} = \dfrac{-4}{-6} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$.
Vậy $N\left(\dfrac{7}{3};0\right)$.

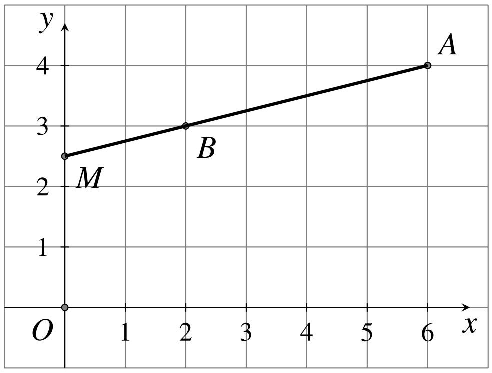
Bài 23. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(6;4)$, $B(2;3)$, $C(-2;1)$.

a) Tìm trên trục tung điểm M sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Tìm trên trục tung điểm N sao cho $|NA - NC|$ đạt giá trị lớn nhất.

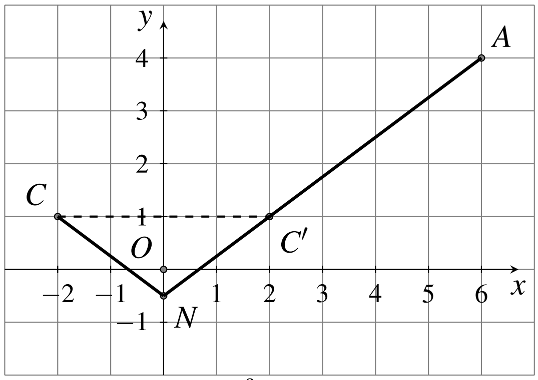
Lời giải.

a) Ta có hai điểm A và B nằm về một phía đối với trục tung.
Với mọi $M \in Oy$, ta có $|MA - MB| \leq AB$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, M, B thẳng hàng.
Vậy $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất là bằng AB, đạt được khi M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục tung.
Vì M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục tung nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.



Gọi $M(0;y)$ thuộc trục Oy. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-6; y-4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-4;-1)$.
$\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{y-4}{-1} \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{2}$.
Vậy $M\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$.

b) Ta có hai điểm A và C nằm về hai phía đối với trục hoành.
Gọi C' là điểm đối xứng với C qua trục tung. Khi đó, ta có $C'(2;1)$.
Với mọi $N \in Oy$, ta có $|NA - NC| = |NA - NC'| \leq AC'$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, N, C' thẳng hàng.
Vậy $|NA - NC|$ có giá trị lớn nhất là bằng AC', đạt được khi N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục tung.



Vì N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục tung nên ba điểm N, A, C' thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương.
Gọi $N(0;y)$ thuộc trục Oy. Ta có: $\overrightarrow{AN} = (-6; y-4)$ và $\overrightarrow{AC'} = (-4;-3)$.
$\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{y-4}{-3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
Vậy $N\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

III. Bài tập tổng hợp

Bài 24. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ của các véc-tơ sau:

a) $\overrightarrow{a} = -5\overrightarrow{i}$;
b) $\overrightarrow{b} = 7\overrightarrow{j}$;
c) $\overrightarrow{c} = -3\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j}$;
d) $\overrightarrow{d} = 0,5\overrightarrow{i} - \sqrt{11}\overrightarrow{j}$.

Lời giải. a) $\overrightarrow{a} = -5\overrightarrow{i} = (-5;0)$;
b) $\overrightarrow{b} = 7\overrightarrow{j} = (0;7)$;
c) $\overrightarrow{c} = -3\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j} = (-3;8)$;
d) $\overrightarrow{d} = 0,5\overrightarrow{i} - \sqrt{11}\overrightarrow{j} = (0,5;-\sqrt{11})$.

Bài 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-3;-1)$, $B(1;1)$ và $C(7;4)$.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$. Chứng minh A,B,C thẳng hàng.
b) Chứng minh A,B,O không thẳng hàng. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABO.
c) Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành để A,B,D thẳng hàng.

Lời giải.

a)Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;2), \overrightarrow{BC} = (6;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Do đó hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.
Vậy A, B, C thẳng hàng.
b) Ta có $\overrightarrow{AO} = (3;1)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AO}$ là hai véc-tơ không cùng phương.
Do đó A, B, O không thẳng hàng.
Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABO
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_O}{3} = \dfrac{-3+1+0}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_O}{3} = \dfrac{-1+1+0}{3} = 0. \end{cases}$$
Vậy $G\left(-\frac{2}{3};0\right)$.
c) Vì $D \in Ox$ nên $D(x;0)$ và $\overrightarrow{AD} = (x+3;1)$
Do A, B, D thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ cùng phương
$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$.
Vậy $D(-1;0)$.

Bài 26. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-2;3)$, $B(2;4)$ và $C(1;-2)$.
a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của tam giác.
b) Tính tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của BC.
c) Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải.
a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;1)$ và $\overrightarrow{AC} = (3;-5)$.
Vì $\dfrac{4}{3} \neq \dfrac{1}{-5}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Suy ra A, B, C không thẳng hàng.
Vậy A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
b) Gọi $M(x;y)$ là trung điểm của BC. Ta có
$$\begin{cases} x = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{4-2}{2} = 1. \end{cases}$$
Do đó $M\left(\frac{3}{2};1\right)$.
Vậy $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{7}{2};-2\right)$.
c) Gọi $G(x;y)$ là trọng tâm tam giác ABC. Ta có
$$\begin{cases} x = \dfrac{-2+2+1}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{3+4-2}{3} = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$
Vậy $G\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Bài 27. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;2)$, $B(1;4)$, $C(5;1)$.
a) Tìm tọa độ trung điểm I của AC.
b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.
a) Gọi $I(x;y)$ là trung điểm của AC. Ta có
$$\begin{cases} x = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên I là trung điểm của BD.

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{x_D+1}{2}=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{y_D+4}{2}=\dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D+1=3\\ y_D+4=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=2\\ x_D=-1.\end{cases}$

Vậy $D(2;-1)$.

Bài 28. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(-3;5)$, $C(4;-7)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tức giác $BGCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Gọi $G(x;y)$ là trọng tâm tam giác ABC. Ta có

$$\begin{cases}x=\dfrac{2-3+4}{3}=1\\ y=\dfrac{-1+5-7}{3}=-1\end{cases}.$$

Vậy $G(1;-1)$.

b) Ta có $\overrightarrow{CD}=(x_D-4;y_D+7)$, $\overrightarrow{GB}=(-4;6)$.

Vì $BGCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{GB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_D-4=-4\\ y_D+7=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=0\\ y_D=-1.\end{cases}$

Vậy tọa độ điểm D là $(0;-1)$.

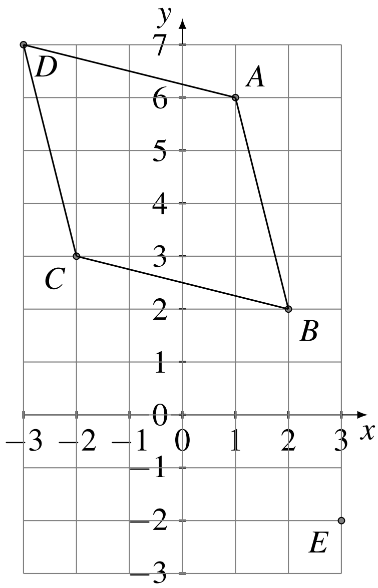
Bài 29. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1;6)$, $B(2;2)$ và $C(-2;3)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là một hình bình hành.

c) Tìm tọa độ điểm $E(x;-2)$ sao cho A,B,E thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-4)$ và $\overrightarrow{AC}=(-3;-3)$.

Vì $\dfrac{1}{-3}\neq\dfrac{-4}{-3}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Suy ra A,B,C không thẳng hàng.

Vậy A,B,C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{CD}=(x+2;y-3)$, $\overrightarrow{BA}=(-1;4)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=-1 \\ y-3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=7. \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm D là $(-3;7)$.

c) Ta có $\overrightarrow{AE}=(x-1;-8), \overrightarrow{AB}=(1;-4)$.

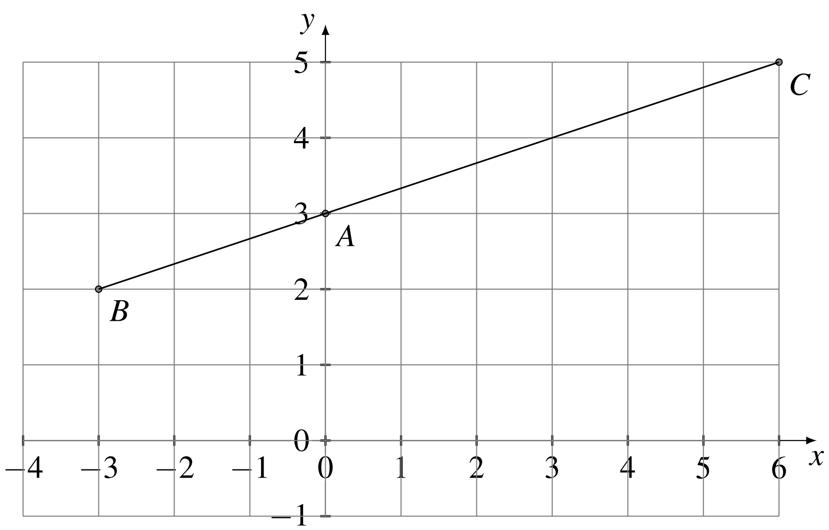
Vì A,B,E thẳng hàng nên $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{-8}{-4}$.

Suy ra $x=3$.

Vậy $E(3;-2)$.

Bài 30. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-3;2)$ và $C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm A thuộc trục tung sao cho $AB+AC$ bé nhất.

Lời giải.



Vì A thuộc trục tung nên $A(0;y)$.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;y-2), \overrightarrow{BC}=(9;3)$.

Vì $x_B=-3<0$ và $x_C=6>0$ nên B và C nằm về hai phía đối với trục tung.

Do đó $AB+AC$ bé nhất khi và chỉ khi A,B,C thẳng hàng.

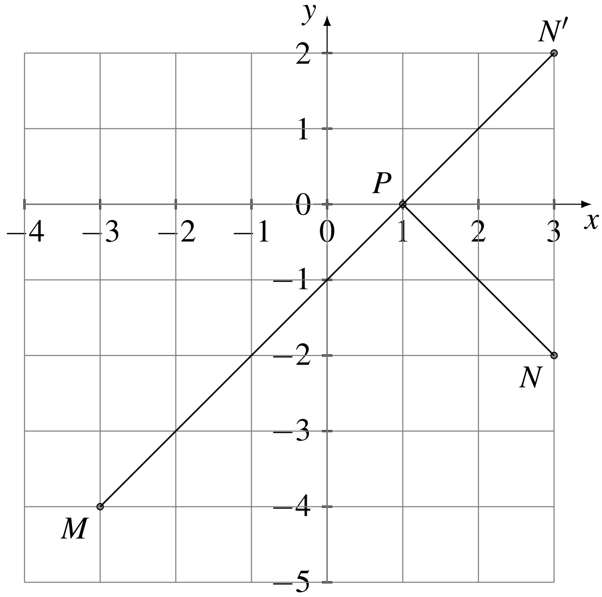
Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Tức là $\dfrac{3}{9}=\dfrac{y-2}{3} \Leftrightarrow y=3$.

Vậy $A(0;3)$.

Bài 31. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $M(-3;-4)$ và $N(3;-2)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục Ox sao cho $PM+PN$ bé nhất.

Lời giải.



Vì $P \in Ox$ nên $P(x;0)$.
Vì $y_M = -4 < 0$ và $y_N = -2 < 0$ nên M, N nằm cùng phía đối với Ox.
Gọi N' là điểm đối xứng với N qua Ox.
Suy ra $N'(3;2)$ và $\overrightarrow{MN'} = (6;6), \overrightarrow{MP} = (x+3;4)$.
Ta có $PM + PN = PM + PN'$. Do đó $PM + PN$ bé nhất khi và chỉ khi $PM + PN'$ bé nhất.
$PM + PN'$ bé nhất
$\Leftrightarrow P, M, N'$ thẳng hàng
$\Leftrightarrow$ Hai véc-tơ $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN'}$ cùng phương
$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{6} = \dfrac{4}{6} \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy $P(1;0)$.

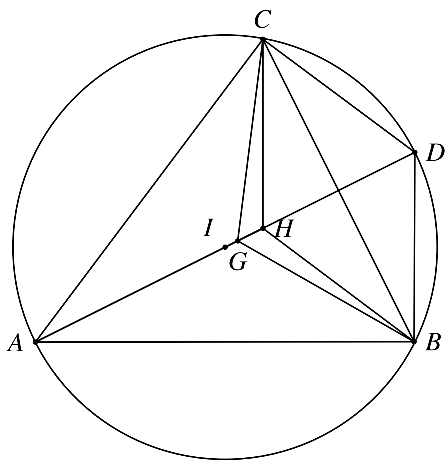
Bài 32. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(0;4)$, $C(3;2)$. Tìm điểm D sao cho $D \in Ox$ và $ABCD$ là hình thang đáy là AB.
Lời giải. Gọi $D(x_D;0)$ là điểm cầm tìm.

Để $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$ $(k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = k(x_C - x_D) \\ y_B - y_A = k(y_C - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - 1 = 3k - k.x_D \\ 4 - (-2) = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ x_D = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$ (nhậ

Vậy $D\left(\dfrac{10}{3};0\right)$.

Bài 33. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC. Gọi G, I, H lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ trọng tâm G biết $I(0;2)$, $H(3;5)$.
Lời giải.

Kéo dài AI cắt đường tròn tại D.
Ta có: $\widehat{ACD}=90^0 \Rightarrow CD\perp AC$ mà $BH\perp AC \Rightarrow BH$ song song CD.
Tương tự ta cũng có BD song song HC.
$\Rightarrow HCDB$ là hình bình hành.
Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
Chèn điểm H vào ta suy ra $3\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$.
Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.
Ta suy ra được $3\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{HI}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}3(x_H-x_G)=2(x_I-x_H)\\3(y_H-y_G)=2(x_I-x_H)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_G=5\\y_G=7.\end{cases}$
Vậy $G(5;7)$.



Bài 34. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(5;3)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm trên trục tung điểm N sao cho $\left|\overrightarrow{NA}-4\overrightarrow{NB}+9\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-6)$ và $\overrightarrow{AC}=(-7;-2)$.
Vì $\dfrac{-3}{-7}\neq\dfrac{-6}{-2}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Do đó A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

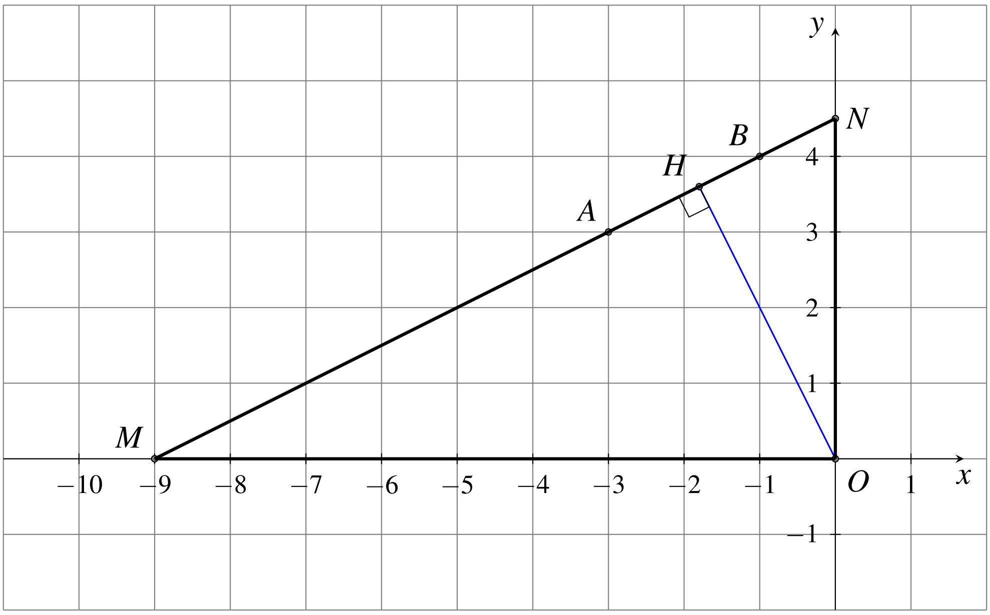
b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: $G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.
Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$.
Do đó, $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G trên trục hoành.
Suy ra $M\left(\dfrac{5}{3};0\right)$.

c) Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IB}+9\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.
Gọi $I(x;y)$, ta có:
$\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IB}+9\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}x-5-4(x-2)+9(x+2)=0\\y-3-4(y+3)+9(y-1)=0.\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}6x+21=0\\6y-24=0.\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{7}{3}\\y=4.\end{cases}$
Suy ra $I\left(-\dfrac{7}{3};4\right)$.
Ta có:

$\left|\overrightarrow{NA}-4\overrightarrow{NB}+9\overrightarrow{MC}\right|$
$=\left|\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}-4\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)+9\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|$
$=\left|6\overrightarrow{NI}+\left(\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IB}+9\overrightarrow{IC}\right)\right|$
$=\left|6\overrightarrow{NI}\right|=6NI.$
Do đó, $\left|\overrightarrow{NA}-4\overrightarrow{NB}+9\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow NI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow N$ là hình chiếu của I trên trục tung.
Suy ra $N(0;4)$.

Bài 35. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-3;3)$, $B(-1;4)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A và B cắt trục hoành tại M và cắt trục tung tại N. Tính diện tích tam giác OMN và độ dài đường cao của tam giác OMN kẻ từ O.

Lời giải.



Vì Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.
Gọi $M(x;0)$ thuộc trục Ox. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(x+3;-3)$ và $\overrightarrow{AB}=(2;1)$.
$\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{-3}{1}\Leftrightarrow x=-9$.
Vậy $M(-9;0)$.
Vì Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm N nên ba điểm N, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.
Gọi $N(0;y)$ thuộc trục Oy. Ta có: $\overrightarrow{AN}=(3;y-3)$ và $\overrightarrow{AB}=(2;1)$.
$\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}=\dfrac{y-3}{1}\Leftrightarrow y=\dfrac{9}{2}$.
Vậy $N\left(0;\dfrac{9}{2}\right)$.
Vì tam giác OMN vuông tại O nên tam giác OMN có diện tích là:

$$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}OM.ON=\frac{1}{2}.9.\frac{9}{2}=\frac{81}{4}.$$

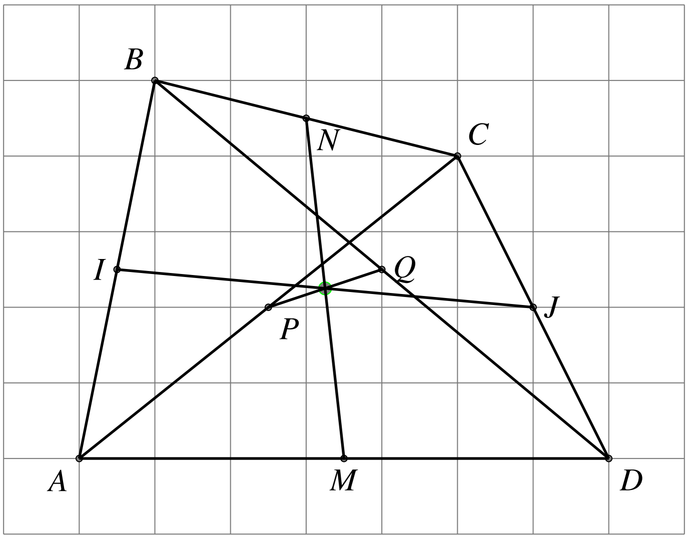
Gọi H là chân đường cao kẻ từ O của tam giác vuông OMN. Khi đó, ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{81}+\frac{4}{91}=\frac{5}{81}.$$

Do đó, ta có: $OH^2=\dfrac{81}{5}\Rightarrow OH=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$.

Bài 36. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và CD; P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD; M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có cùng trung điểm.

Lời giải.



Xét mặt phẳng tọa độ Oxy. Giả sử $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$ và $D(d_1;d_2)$. Ta có:

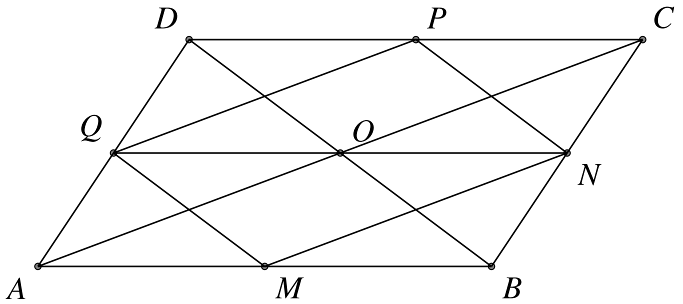
- $I\left(\dfrac{a_1+b_1}{2};\dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$, $J\left(\dfrac{c_1+d_1}{2};\dfrac{c_2+d_2}{2}\right)$. Suy ra trung điểm của đoạn thẳng IJ có tọa độ là $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1+d}{4}\right.$ (1).
- $P\left(\dfrac{a_1+c_1}{2};\dfrac{a_2+c_2}{2}\right)$, $Q\left(\dfrac{b_1+d_1}{2};\dfrac{b_2+d_2}{2}\right)$. Suy ra trung điểm của đoạn thẳng PQ có tọa độ là $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4};\dfrac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right)$ (2).
- $M\left(\dfrac{a_1+d_1}{2};\dfrac{a_2+d_2}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{b_1+c_1}{2};\dfrac{b_2+c_2}{2}\right)$. Suy ra trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4};\dfrac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có cùng trung điểm.

§5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

I. Đề số 1a

Câu 1. (1 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DA (hình vẽ).



a) Từ hình vẽ, hãy chỉ ra tất cả các véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Từ hình vẽ, chỉ ra tất cả các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{OA}$.

Lời giải.

a) Các véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{NQ},\overrightarrow{CD}$. . . . . 0,5 điểm.

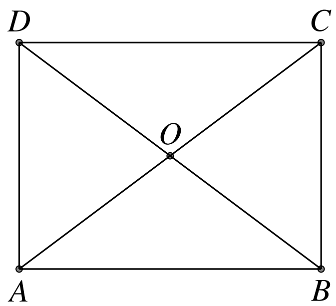
b) Các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ là $\overrightarrow{CO},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{NM}$. . . . . 0,5 điểm.

Câu 2. (1 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm.

a) Chứng minh rằng, với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$.

Lời giải. Hình vẽ



a) Vì $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC}$ (đúng với mọi M) nên ta có đẳng thức cần chứng minh. . . . . 0,5 điểm.

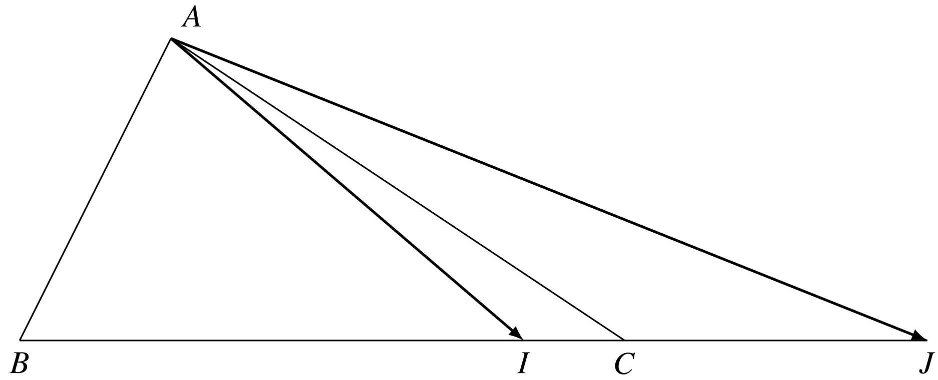
b) Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. . . . . 0,25 điểm.
Do đó $|\overrightarrow{u}| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{AB^2+BC^2} = 10$ cm. . . . . 0,25 điểm.

Câu 3. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn điều kiện

$$3\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|.$$

Lời giải. Gọi I là trung điểm BC, ta có $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$. . . . . 0,5 điểm.
Suy ra $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MI}\right|=2\left|\overrightarrow{IA}\right|$ . . . . 0,5 điểm.
Do đó $3\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow AM=\dfrac{2}{3}AI$. . . . . 0,5 điểm.
Vậy, quỹ tích các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $r=\dfrac{2}{3}AI$. . . . . 0,5 điểm.

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi I và J lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{JB}-3\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{0}$. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.
Lời giải. Hình vẽ.



Ta có $\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)+5\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$. . . . . 1 điểm.
$\overrightarrow{JB}-3\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AJ}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. . . . . 1 điểm.

Câu 5. (4 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;4)$, $P(1;1)$ và điểm N sao cho $\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$.

a) Chứng minh rằng M,N,P không thẳng hàng. Xác định điểm Q sao cho $MPNQ$ là hình bình hành.

b) Xác định điểm I trên trục Oy sao cho $\left|\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IP}+4\overrightarrow{IM}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

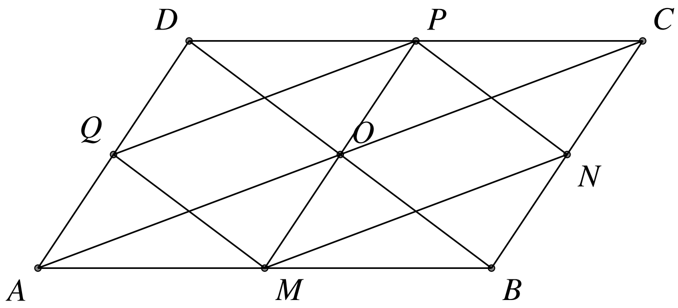
Lời giải.

a) Từ $\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ suy ra $N(2;-1)$. . . . . 0,25 điểm.
Ta có $\overrightarrow{MN}=(5;-5),\overrightarrow{MP}=(4;-3)$ và $\dfrac{5}{4}\neq\dfrac{-5}{-3}$ nên M,N,P không thẳng hàng. . . . . 0,5 điểm.
Giả sử $Q(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{MP}=(4;-3)$ và $\overrightarrow{QN}=(2-x;-1-y)$. . . . . 0,5 điểm.
$MPNQ$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{QN}\Leftrightarrow\begin{cases}4=2-x\\-3=-1-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$. . . . . 0,5 điểm.
Vậy $Q(-2;2)$. . . . . 0,25 điểm.

b) Gọi $K(a;b)$ là điểm sao cho $\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{KP}+4\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{0}$. . . . . 0,5 điểm.
Ta có $\overrightarrow{KN}=(2-a;-1-b),\overrightarrow{KP}=(1-a;1-b),\overrightarrow{KM}=(-3-a;4-b)$. . . . . 0,5 điểm.
Do đó $\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{KP}+4\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\b=\dfrac{8}{3}\end{cases}$. Suy ra $K\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{8}{3}\right)$ . . . . 0,5 điểm.
Vì $I\in Oy$ nên $\left|\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IP}+4\overrightarrow{IM}\right|=\left|6\overrightarrow{IK}\right|=6.IK$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi I là hình chiếu vuông góc của K lên Oy. Suy ra $I\left(0;\dfrac{8}{3}\right)$. . . . . 0,5 điểm.

II. Đề số 1b

Câu 1. (1 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DA (hình vẽ).



a) Từ hình vẽ, hãy chỉ ra tất cả các véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{BC}$.

b) Từ hình vẽ, chỉ ra tất cả các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{OB}$.

Lời giải.

a) Các véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ là $\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{PM}$. . . . . 0,5 điểm.

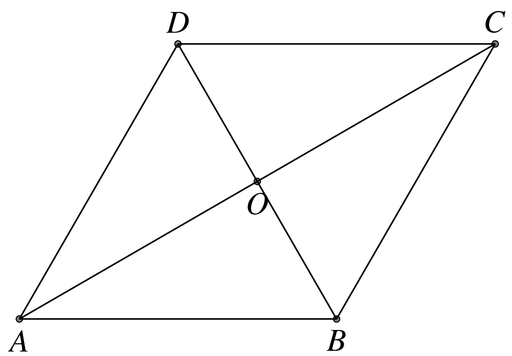
b) Các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{OB}$ là $\overrightarrow{DO},\overrightarrow{QM},\overrightarrow{PN}$. . . . . 0,5 điểm.

Câu 2. (1 điểm) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB=6$ cm, $\widehat{BAD}=60^\circ$.

a) Chứng minh rằng, với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$.

Lời giải. Hình vẽ



a) Vì $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}$ (đúng với mọi M) nên ta có đẳng thức cần chứng minh. . . . . 0,5 điểm.

b) Vì $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. . . . . 0,25 điểm.
Do đó $|\overrightarrow{u}|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=2AO=6\sqrt{3}$ cm. . . . . 0,25 điểm.

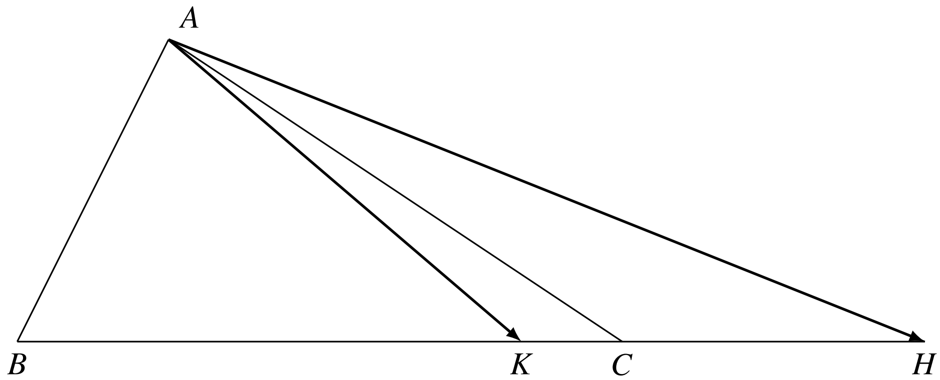
Câu 3. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn điều kiện

$$\left|\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|.$$

Lời giải. Gọi I là trung điểm AB. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ . . . . 0,5 điểm.
Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}-2\overrightarrow{MC}\right|=2\left|\overrightarrow{CI}\right|$. . . . . 0,5 điểm.
Do đó $\left|\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow BM=2IC$. . . . . 0,5 điểm.
Vậy, quỹ tích các điểm M là đường tròn tâm B, bán kính $r=2IC$. . . . . 0,5 điểm.

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi K và H lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{HB}-3\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{AH}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Lời giải. Hình vẽ.



Ta có $\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)+5\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$. .... 1 điểm.

Ta có $\overrightarrow{HB}-3\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. .... 1 điểm.

Câu 5. (4 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $N(2;-1),P(1;1)$ và điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=-3\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}$.

a) Chứng minh rằng M,N,P không thẳng hàng. Xác định điểm Q sao cho $MNQP$ là hình bình hành.

b) Xác định điểm I trên trục Ox sao cho $\left|\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IP}+4\overrightarrow{IM}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Từ $\overrightarrow{OM}=-3\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}$ suy ra $M(-3;4)$. .... 0,25 điểm.
Ta có $\overrightarrow{MN}=(5;-5),\overrightarrow{MP}=(4;-3)$ và $\frac{5}{4}\neq\frac{-5}{-3}$ nên M,N,P không thẳng hàng. .... 0,5 điểm.
Giả sử $Q(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{MP}=(4;-3)$ và $\overrightarrow{QN}=(x-2;y+1)$. .... 0,5 điểm.
$MNQP$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}4=x-2\\-3=y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=-4\end{cases}$. .... 0,5 điểm.
Vậy $Q(6;-4)$. .... 0,25 điểm.

b) Gọi $K(a;b)$ là điểm sao cho $\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{KP}+4\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{0}$. .... 0,5 điểm.
Ta có $\overrightarrow{KN}=(2-a;-1-b),\overrightarrow{KP}=(1-a;1-b),\overrightarrow{KM}=(-3-a;4-b)$. .... 0,5 điểm.
Do đó $\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{KP}+4\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\b=\frac{8}{3}\end{cases}$. Suy ra $K\left(-\frac{3}{2};\frac{8}{3}\right)$ .... 0,5 điểm.
Vì $I\in Ox$ nên $\left|\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IP}+4\overrightarrow{IM}\right|=\left|6\overrightarrow{IK}\right|=6.IK$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi I là hình chiếu vuông góc của K lên Ox. Suy ra $I\left(-\frac{3}{2};0\right)$. .... 0,5 điểm.

III. Đề số 2a

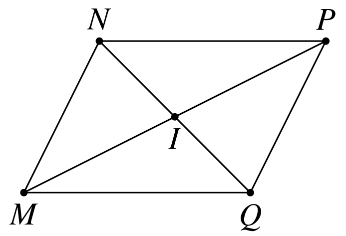
Câu 1. (2 điểm) Cho hình bình hành $MNPQ$ có I là giao điểm của hai đường chéo. Xét các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là một trong các điểm M, N, P, Q, I.

a) Tìm véc-tơ bằng $\overrightarrow{MI}$.

b) Tìm tất các các véc-tơ đối của $\overrightarrow{QI}$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{QI}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.



a) Véc-tơ bằng $\overrightarrow{MI}$ là $\overrightarrow{IP}$ 0,5

b) Tất cả các véc-tơ đối của $\overrightarrow{QI}$ là $\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{NI}$ 0,5

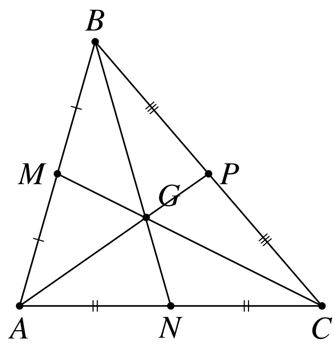
c) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{IP}$, $\overrightarrow{NI}=\overrightarrow{IQ}$ 0,5
Do đó:
$\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{QI}=\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{QI}=\overrightarrow{0}$ 0,5

Câu 2. (2 điểm) Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Tìm x, y biết $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AG}=y\overrightarrow{AP}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



a) Do MN là đường trung bình của tan giác ABC nên $BC=2MN$.
Suy ra: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
Vậy $x=\frac{1}{2}$ 0,5
Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $AG=\frac{2}{3}AP$.
Suy ra: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$.
Vậy $y=\frac{2}{3}$ 0,5

b) Do P là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 0,5
Mà $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$
Do đó: $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 0,5

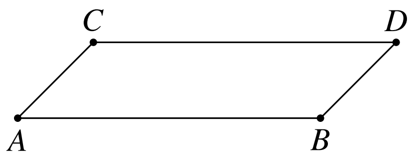
Câu 3. (2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho 3 điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$ $C(2;3)$.

a) Chứng minh 3 điểm A, B, C tạo thành 3 đỉnh của một tam giác.

b) Tìm điểm D sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;0)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1)$ 0,5



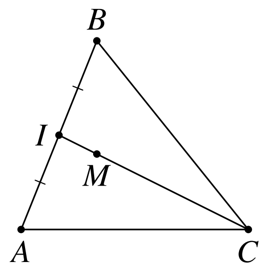
Suy ra: $\overrightarrow{AB}\neq k\overrightarrow{AC}, \forall k\in\mathbb{R}$.
Do đó, hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Suy ra, 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.
Vậy, 3 điểm A, B, C tạo thành 3 đỉnh của một tam giác 0,5

b) Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{CD}=(x-2;y-3)$.
Tứ giác $ABDC$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$
Vậy $D=(6;3)$ 0,5

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

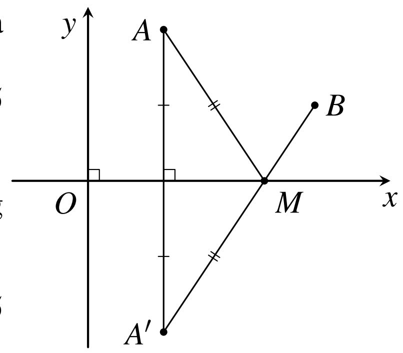
Gọi I là trung điểm của AB.



Ta có $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$ 1,0
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}=-4\overrightarrow{MI}$
Vậy, điểm M nằm giữa 2 điểm C và I sao cho $MC=4MI$ 1,0

Câu 5. (2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 điểm $A(1;2)$ và $B(3;1)$. Tìm điểm M thuộc Ox sao cho $\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải.



Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua trục Ox. Suy ra $A'(1;-2)$ và $AM=A'M$.
Gọi $M(x;0)$. Khi đó: $\overrightarrow{A'M}=(x-1;2)$, $\overrightarrow{A'B}=(2;3)$ 0,5
Ta có $\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|=MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.
Do đó, $\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ chỉ 3 điểm A', M, B thẳng hàng 0,5
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}^*, \overrightarrow{A'M}=k\overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2k \\ 2=3k \end{cases}$ 0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ x=\dfrac{7}{3} \end{cases}$.
Vậy $M=\left(\dfrac{7}{3};0\right)$ 0,5

IV. Đề số 2b

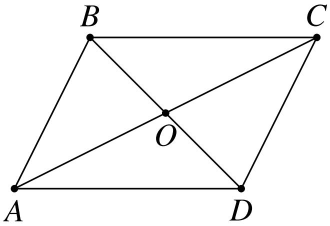
Câu 1. (2 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Xét các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là một trong các điểm A, B, C, D, O.

a) Tìm véc-tơ bằng $\overrightarrow{CO}$.

b) Tìm tất các các véc-tơ đối của $\overrightarrow{OA}$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



a) Véc-tơ bằng $\overrightarrow{CO}$ là $\overrightarrow{OA}$ 0,5

b) Tất cả các véc-tơ đối của $\overrightarrow{OA}$ là $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$ 0,5

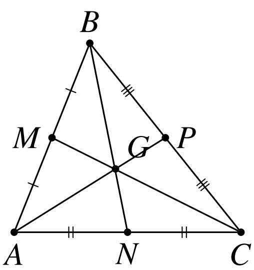
c) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. 0,5
Do đó:
$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}$. 0,5

Câu 2. (2 điểm) Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Tìm x, y biết $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{PM}$ và $\overrightarrow{CG}=y\overrightarrow{MG}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{BG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.



a) Do MP là đường trung bình của tan giác ABC nên $AC=2MP$.
Suy ra: $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{PM}$.
Vậy $x=-2$ 0,5
Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $CG=2MG$.
Suy ra: $\overrightarrow{CG}=-2\overrightarrow{MG}$.
Vậy $y=-2$ 0,5

b) Do N là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
$\Rightarrow \overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 0,5
Mà $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$
Do đó: $\overrightarrow{BG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ 0,5

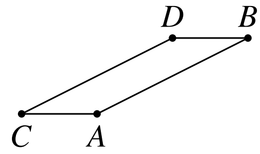
Câu 3. (2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho 3 điểm $A(1;3)$, $B(3;4)$ $C(0;3)$.

a) Chứng minh 3 điểm A, B, C tạo thành 3 đỉnh của một tam giác.

b) Tìm điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;0)$ 0,5



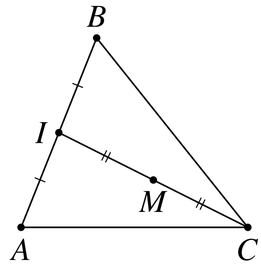
Suy ra: $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}, \forall k \in \mathbb{R}$.
Do đó, hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Suy ra, 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.
Vậy, 3 điểm A, B, C tạo thành 3 đỉnh của một tam giác 0,5

b) Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{CD} = (x;y-3)$.
Tứ giác $ABDC$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$
Vậy $D = (2;4)$ 0,5

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải.

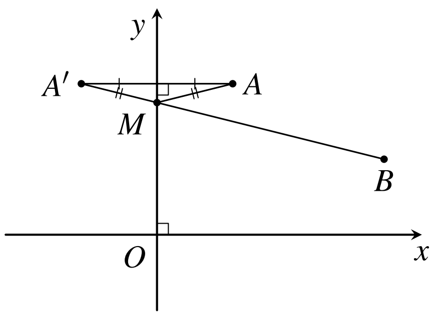
Gọi I là trung điểm của AB.
Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ 1,0
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MI}$
Vậy, điểm M là trung điểm của đoạn thẳng MI 1,0



Câu 5. (2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 điểm $A(1;2)$ và $B(3;1)$. Tìm điểm M thuộc Oy sao cho $\left|\overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua trục Oy. Suy ra $A'(-1;2)$ và $AM = A'M$.
Gọi $M(0;y)$. Khi đó: $\overrightarrow{A'M} = (1;y-2)$, $\overrightarrow{A'B} = (4;-1)$ 0,5
Ta có $\left|\overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| = MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.
Do đó, $\left|\overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ chi 3 điểm A', M, B thẳng hàng 0,5
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*, \overrightarrow{A'M} = k\overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 1 \\ y - 2 = -k \end{cases}$ 0,5



$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{7}{4} \end{cases}$.
Vậy $M = \left(0;\dfrac{7}{4}\right)$ 0,5

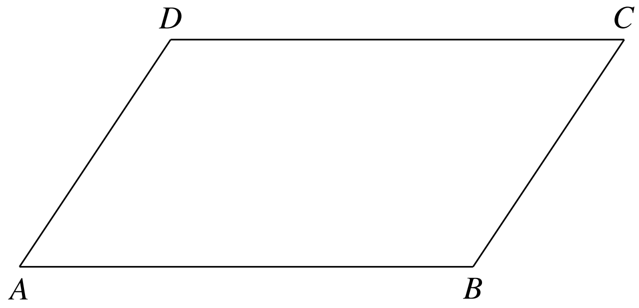
V. Đề số 3a

Câu 1. (2 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$. Chỉ xét các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

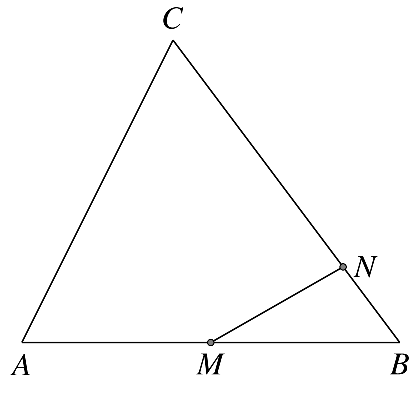


a) $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ 1,0

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ 1,0

Câu 2. (1 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi M, N là các điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{NC}+3\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{0}$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ 1,0

Câu 3. Cho ba véc-tơ $\overrightarrow{a}=(1;2)$, $\overrightarrow{b}=(-3;3)$, $\overrightarrow{c}=(5;-2)$.

a) Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{x}=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}$.

b) Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{a}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$.

Lời giải.

a) Ta có: $2\overrightarrow{a}=(2;4)$, $3\overrightarrow{b}=(-9;9)$, $2\overrightarrow{c}=(10;-4)$. Vậy $\overrightarrow{x}=(21;-9)$ 1,0

b) Giả sử $\overrightarrow{d} = m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}$.

Ta có hệ $\begin{cases} -3m+5n=1 \\ 3m-2n=2 \end{cases}$. Giải hệ ta được $m = \dfrac{4}{3}$, $n = 1$.

Vậy $\overrightarrow{d} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ 1,0

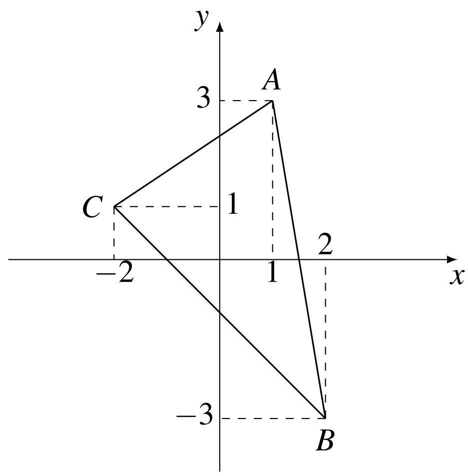
Câu 4. (3 điểm) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;3)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tạo độ điểm D sao cho C là trọng tâm của tam giác ABD

c) Tìm tọa độ điểm I trên trục Ox sao cho ba điểm A, I, B thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-6)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;-2)$, do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vì vậy, ba điểm A, B, C không thẳng hàng hay ba điểm đó tạo thành 3 đỉnh của một tam giác 1,0

b) Gọi $D(a,b)$ là điểm sao cho C là trọng tâm tam giác ABD.

Ta có: $\begin{cases} -2 = \dfrac{a+1+2}{3} \\ 1 = \dfrac{b+3-3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-9 \\ b=3 \end{cases}$. Vậy $D(-9;3)$ 1,0

c) Giả sử đường thẳng qua A và B có phương trình dạng $y = ax+b$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3 = a\cdot 1+b \\ -3 = a\cdot 2+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=9 \end{cases}$. Do đó, phương trình đường thẳng đi qua A và B là $y = -6x+9$.

Giao điểm của đường thẳng AB với trục Ox là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=0 \\ y=-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y=0 \end{cases}$. Vậy, $I\left(\dfrac{3}{2};0\right)$

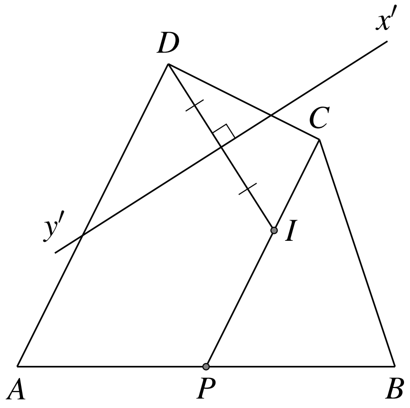
1,0

Câu 5. (2 điểm) Cho tứ giác $ABCD$.

a) Xác định điểm I thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$;

b) Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right| = 5\left|\overrightarrow{MD}\right|$.

Lời giải.



a) Gọi P là trung điểm của AB. Lúc này, với mọi điểm I ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IP}$. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{IP}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{IC}$, do đó điểm I nằm giữa hai điểm P, C và được lấy như sau: chia đoạn PC thành 5 phần bằng nhau rồi lấy I sao cho $IC=\dfrac{2}{5}PC$ 1,0

b) Từ giả thiết ta có $\left|\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{MD}\right|$ (với I là điểm được xác định ở câu a). Vậy, tập hợp các điểm M nằm trên đường trung trực $x'y'$ của đoạn thẳng ID..1,0

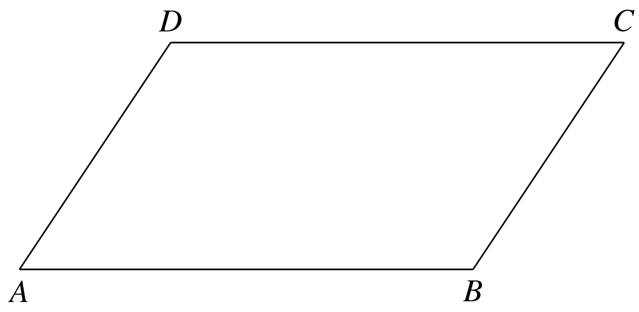
VI. Đề số 3b

Câu 1. (2 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$.Chỉ xét các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

Lời giải.

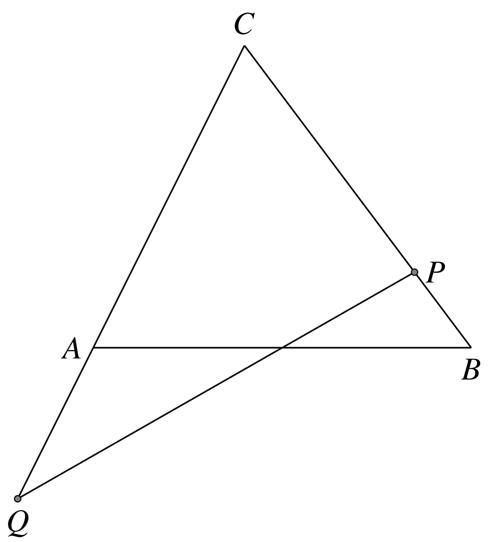


a) $\overrightarrow{AD}$ cùng phương với $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ 1,0

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ 1,0

Câu 2. (1 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi P, Q là các điểm thoả mãn $\overrightarrow{QC}-3\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{0}$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{PQ}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ 1,0

Câu 3. (2 điểm) Cho ba véc-tơ $\overrightarrow{a}=(-1;2)$, $\overrightarrow{b}=(3;-3)$, $\overrightarrow{c}=(5;-2)$.

a) Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{x}=2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c}$.

b) Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{a}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$.

Lời giải.

a) Ta có: $2\overrightarrow{a} = (-2;4)$, $3\overrightarrow{b} = (9;-9)$, $2\overrightarrow{c} = (10;-4)$. Vậy, $\overrightarrow{x} = (-3;-1)$ 1,0

b) Giả sử $\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}$. Ta có hệ $\begin{cases} 3m + 5n = -1 \\ -3m - 2n = 2 \end{cases}$. Giải hệ ta được $m = -\dfrac{8}{9}$, $n = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{a} = -\dfrac{8}{9}\overrightarrow{b} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{c}$ 1,0

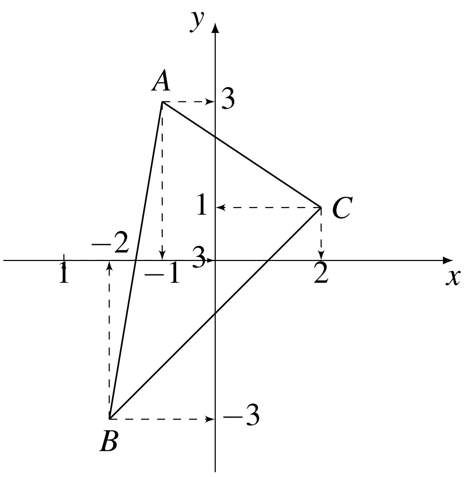
Câu 4. (3 điểm) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-1;3)$, $B(-2;-3)$, $C(2;1)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tạo độ điểm D sao cho C là trọng tâm của tam giác ABD

c) Tìm tọa độ điểm I trên trục Ox sao cho ba điểm A, I, B thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;-6)$, $\overrightarrow{AC} = (3;-2)$, do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vì vậy, ba điểm A, B, C không thẳng hàng hay ba điểm đó tạo thành 3 đỉnh của một tam giác 1,0

b) Gọi $D(a,b)$ là điểm sao cho C là trọng tâm tam giác ABD. Ta có: $\begin{cases} 2 = \dfrac{a-1-2}{3} \\ 1 = \dfrac{b+3-3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 3 \end{cases}$. Vậy $D(9;3)$ 1,0

c) Giả sử đường thẳng qua A và B có phương trình dạng $y = ax + b$.

Ta có hệ $\begin{cases} 3 = -a \cdot 1 + b \\ -3 = -a \cdot 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 9 \end{cases}$. Do đó, phương trình đường thẳng đi qua A và B là $y = 6x + 9$.

Giao điểm của đường thẳng AB với trục Ox là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 0 \\ y = 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$.

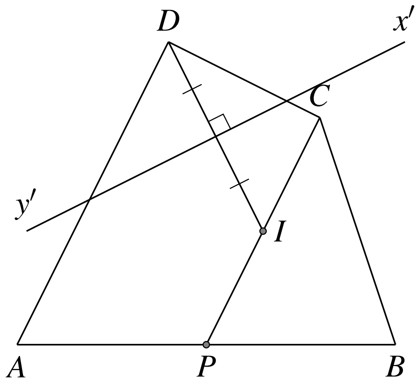
Vậy, $I\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$ 1,0

Câu 5. (2 điểm) Cho tứ giác $ABCD$.

a) Xác định điểm I thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$;

b) Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right| = 4\left|\overrightarrow{MD}\right|$.

Lời giải.



a) Gọi P là trung điểm của AB. Lúc này, với mọi điểm I ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IP}$. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{IP}=-\overrightarrow{IC}$, do đó điểm I là trung điểm đoạn thẳng PC 1,0

b) Từ giả thiết ta có $\left|\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{MD}\right|$. Vậy, tập hợp các điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng ID 1,0