Trung tâm luyện thi Việt Star

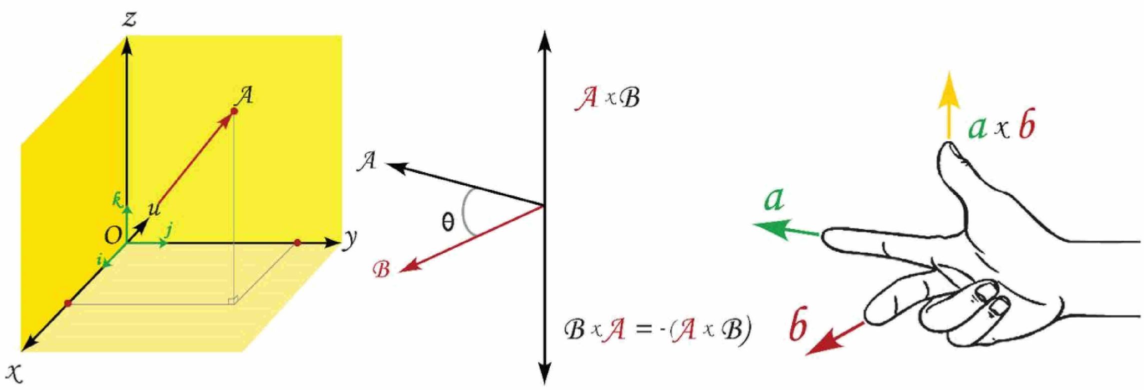
GV: NGUYỄN HOÀNG VIỆT

TOÁN HỌC

2022

Chuyên đề

Phương pháp tọa độ trong không gian



Quảng Bình, ngày 13-02-2022

LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

Chương 1

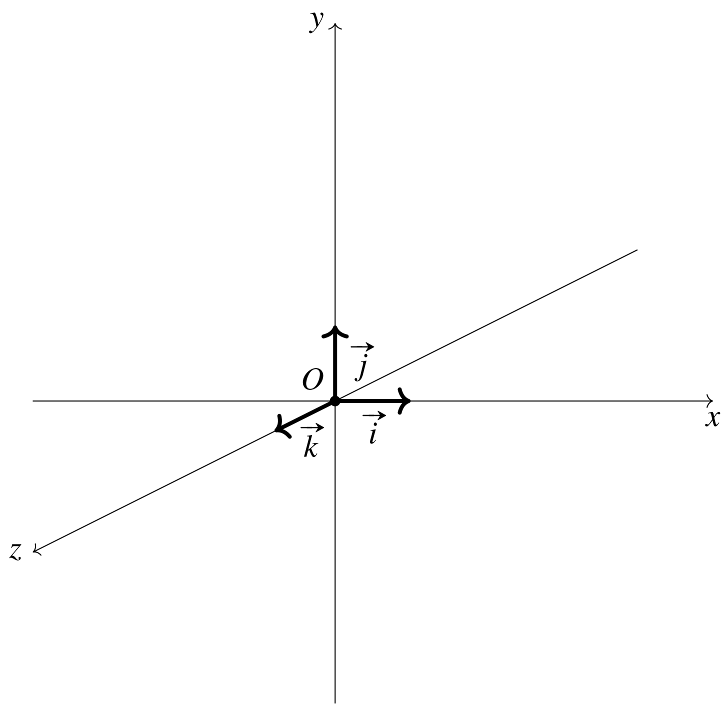
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tọa độ của điểm và véc-tơ

Hệ tọa độ



- Điểm O gọi là gốc tọa độ.
- Trục Ox gọi là trục hoành; Trục Oy gọi là trục tung; Trục Oz gọi là trục cao.
- Các mặt phẳng chứa hai trục tọa độ gọi là các mặt phẳng tọa độ. Ta kí hiệu chúng lần lượt là (Oxy), (Oyz), (Ozx).
- véc-tơ đơn vị của trục Ox, Oy, Oz lần lượt là: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- Các véc tơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau và có độ dài bằng 1:

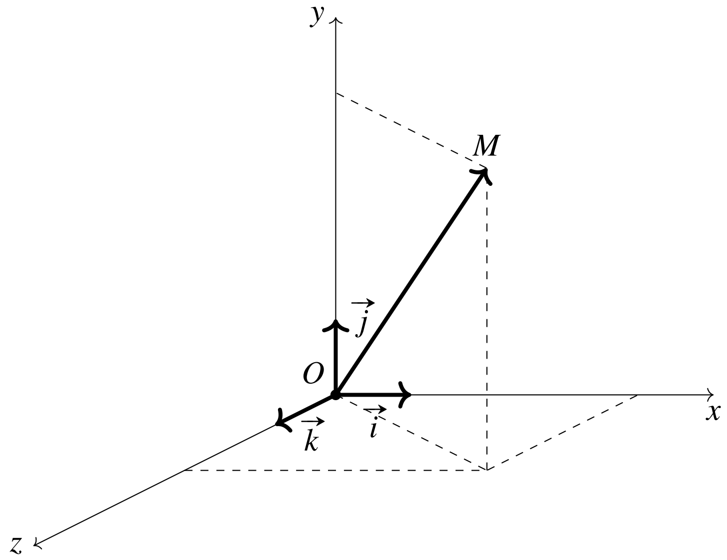
$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$

Tọa độ của một điểm

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm M tùy ý. Vì ba véc-tơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ không đồng phẳng nên có một bộ số duy nhất $(x;y;z)$ sao cho:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}}$$



Ta gọi bộ ba số $(x;y;z)$ là tọa độ của điểm M. Ký hiệu:

$$\boxed{M(x;y;z) \text{ hoặc } M = (x;y;z)}$$

Đặc biệt:

- Gốc $O(0;0;0)$
- M thuộc $Ox \Leftrightarrow M(x_M;0;0)$
- M thuộc $Oy \Leftrightarrow M(0;y_M;0)$
- M thuộc $Oz \Leftrightarrow M(0;0;z_M)$
- M thuộc $(Oxy) \Leftrightarrow M(x_M;y_M;0)$
- M thuộc $(Oyz) \Leftrightarrow M(0;y_M;z_M)$
- M thuộc $(Oxz) \Leftrightarrow M(x_M;0;z_M)$

Tọa độ của véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm véc-tơ $\vec{a}$. Khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1;a_2;a_3)$ sao cho:

$$\vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j} + a_3.\vec{k}$$

Ta gọi bộ ba số $(a_1;a_2;a_3)$ là tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$. Ký hiệu: $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

- Trong hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ của điểm M cũng chính là tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$
- $\vec{i} = (1;0;0)$; $\vec{j} = (0;1;0)$; $\vec{k} = (0;0;1)$

2. Biểu thức tọa độ của các phép toán véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$. Khi đó

Định lí 1.1.

- $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$
- $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$
- $k.\vec{a}=(k.a_1;k.a_2;k.a_3)$ *(k là số thực)*

Hệ quả 1.1.

Trong không gian Oxyz, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ khi đó

$$\boxed{\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}}$$

Với hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ thì tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)}$$

véc-tơ $\vec{0}=(0;0;0)$. véc-tơ $\vec{u}$ được gọi là biểu diễn (hoặc phân tích) theo ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nếu có hai số x, y, z sao cho $\vec{u}=x.\vec{a}+y.\vec{b}+z.\vec{c}$. $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}\\\exists k\neq 0:\vec{a}=k.\vec{b}\end{cases}$ hay $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ (với $\vec{b}\neq\vec{0}$) A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

3. Tích vô hướng

Biểu thức tọa độ tích vô hướng

Định lí 1.2. *Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ và $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Khi đó tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là :*

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$$

hay

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}$$

Ứng dụng

a) Độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ là:

$$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

b) Khoảng cách giữa hai điểm A và B:

$$\boxed{AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

c) Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn

$$\boxed{\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}}$$

d) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$.

4. Phương trình mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ bán kính R là:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

Phương trình:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$$

với điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

5. Một số yếu tố trong tam giác

Xét tam giác ABC, ta có:

- H là chân đường cao hạ từ A của $\Delta ABC\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BC}\end{cases}$.
- AD là đường phân giác trong của $\Delta ABC\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}=-\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$.
- AE là đường phân giác ngoài của $\Delta ABC\Leftrightarrow\overrightarrow{EB}=\dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{EC}$.
- H là trực tâm của $\Delta ABC\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}$.
- I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\overrightarrow{IA}\right|=\left|\overrightarrow{IB}\right|\\ \left|\overrightarrow{IA}\right|=\left|\overrightarrow{IC}\right|\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI}=0\end{cases}$.

Dạng 1. Sự cùng phương của hai véc-tơ. Ba điểm thẳng hàng

a) Hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ (với $\vec{a}\neq\vec{0}$) cùng phương với nhau khi và chỉ khi

$$\vec{b}=k\vec{a}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=ka_1\\ b_2=ka_2\\ b_3=ka_3\end{cases}$$

Nếu $a_1\cdot a_2\cdot a_3\neq 0$ thì hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$$

b) Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, tức là tồn tại số thực k sao cho
$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{a} = (5;-7;2)$, $\vec{b} = (0;3;4)$, $\vec{c} = (-1;2;3)$. Tìm tọa độ các véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = 3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$.

Lời giải.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\dfrac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \dfrac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$.

a) Chứng minh $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

b) Tìm m và n để véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương.

Lời giải.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a} = (2;1;-1)$, véc-tơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ và $\left|\vec{b}\right| = 2\sqrt{6}$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{b}$.

Lời giải.

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A=(1;-1;0)$, $B=(3;-4;1)$, $C=(-2;0;1)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

c) Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng AB với mặt phẳng tọa độ Oyz.

Lời giải.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ biết $A(0;1;3)$, $B(-1;2;1)$, $B'(-2;1;0)$, $C'(5;3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A' và C.

Lời giải.

Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(4;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) sao cho $S = MA + MB$ nhỏ nhất.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{a} = (5;1;2)$, $\vec{b} = (3;0;4)$, $\vec{c} = (-6;1;-1)$. Tìm tọa độ các véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{c}$, $\vec{v} = \vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

Lời giải.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;-3;4)$.

a) Tìm y, z để vec-tơ $\vec{b} = (2;y;z)$ cùng phương với $\vec{a}$.

b) Tìm $\vec{c}$ biết $\vec{c}$ ngược hướng với $\vec{b}$ và $|\vec{c}| = 3\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$.

Lời giải.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;-2)$, $B(0;-1;3)$, $C(m;n;8)$ (với m, n là tham số). Tìm m, n để ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Lời giải.

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(4;-2;1)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là hình bình hành.

c) Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz).

Lời giải.

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OM}$.

Lời giải.

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B\left(\frac{1}{4};0;1\right)$, $C(2;0;1)$. Tìm tọa độ chân đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;2)$, $B(-1;3;-9)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng tọa độ (Oyz) sao cho $P = |MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

Dạng 2. Tìm tọa độ điểm thỏa điều kiện cho trước.

- Cho điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và điểm $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó,

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A).$$

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

- Cho $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$. Khi đó,

$$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=v_1\\u_2=v_2\\u_3=v_3\end{cases}$$

$\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ khi và chỉ khi tồn tại $t\in\mathbb{R}$ sao cho $\vec{u}=t\cdot\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=t\cdot v_1\\u_2=t\cdot v_2\\u_3=t\cdot v_3.\end{cases}$

- Cho điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và điểm $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó, trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ là

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}.\end{cases}$$

- Cho tam giác ABC có $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$, $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ và $C\left(x_C;y_C;z_C\right)$. Khi đó, trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3} \end{cases}$$

- Cho tứ diện $ABCD$ có $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$, $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$, $C\left(x_C;y_C;z_C\right)$ và $D\left(x_D;y_D;z_D\right)$. Khi đó, trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ có tọa độ là:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4} \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 7. Cho 3 điểm $A\left(0;1;-2\right);B\left(3;0;0\right)$ và điểm C thuộc trục Oz. Biết ABC là tam giác cân tại C. Tìm toạ độ điểm C.

Lời giải.

....

Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\left(-1;2;3\right),B\left(2;4;2\right)$ và tọa độ trọng tâm $G\left(0;2;1\right)$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải.

....

Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\left(1;0;1\right)$, $B\left(2;1;2\right)$, $D\left(1;-1;1\right)$, $C'\left(4;5;5\right)$. Tìm toạ độ của C và A' .

Lời giải.

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0;1;-2);B(3;0;0)$ và điểm C thuộc trục Oz. Biết ABC là tam giác cân tại C. Tìm toạ độ điểm C.

Lời giải.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$, $P(1;m-1;2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N?

Lời giải.

Bài 10. Cho hai điểm $A(2,-1,1);B(3,-2,-1)$. Tìm điểm N trên trục $x'Ox$ cách đều A và B.

Lời giải.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy), cách đều ba điểm $A(2,-3,1),B(0;4;3),C(-3;2;2)$.

Lời giải.

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Lời giải.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh $A(-4;9;-9)$, $B(2;12;-2)$ và $C(-m-2;1-m;m+5)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B.

Lời giải.

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;-4;0)$, $B(0;2;4)$, $C(4;2;1)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục Ox sao cho $AD = BC$.

Lời giải.

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;3), B(2;4;2)$ và tọa độ trọng tâm $G(0;2;1)$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải.

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;1), B(2;1;-1), C(0;4;6)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox. Tìm tọa độ M để $P = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$ cho $M(2;4;-3)$, $\overrightarrow{MN} = (-1;-3;4)$; $\overrightarrow{MP} = (-3;-3;3)$; $\overrightarrow{MQ} = (1;-3;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện $MNPQ$.

Lời giải.

Bài 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(2;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oz mà MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM}=(1;5;2)$, $\overrightarrow{ON}=(3;7;-4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Tìm tọa độ điểm P.

Lời giải.

Bài 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(1;2;3)$, $N(2;3;1)$ và $P(3;-1;2)$.Tìm tọa độ điểm Q sao cho $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Bài 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3;2;1)$, $C(4;2;0)$, $B'(-2;1;1)$, $D'(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

Lời giải.

Bài 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0), B(3;0;0), D(0;3;0)$ và $D'(0;3;-3)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác $A'B'C$.

Lời giải.

Dạng 3. Một số bài toán về tam giác

Xét tam giác ABC, ta có các điểm đặc biệt sau:

- Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}; \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}; \dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.
- A' là chân đường cao kẻ từ A của tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} \text{ và } \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương.} \end{cases}$
- H là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ đồng phẳng.} \end{cases}$
- D là chân đường phân giác trong của góc A của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$.
- E là chân đường phân giác ngoài của góc A của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} = \dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{EC}$.
- I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ đồng phẳng.} \end{cases}$
- J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow J$ là chân đường phân giác trong của góc B của tam giác ABD, với D là chân đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Ví dụ 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$ và $C(3;2;4)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G, tọa độ trực tâm H, tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Chứng minh ba điểm G, H, I thẳng hàng.

Lời giải.

Ví dụ 11. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;0;2)$, $B(0;4;3)$ và $C(-2;1;2)$. Tìm độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

Lời giải.

Ví dụ 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;1)$, $B(0;-1;2)$ và $C(1;0;3)$.

a) Tìm tọa độ chân đường cao H hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ giao điểm D của đường thẳng AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 24. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;-1;3)$, $B(1;2;-1)$ và $C(-4;7;5)$. Các đường phân giác trong và ngoài của góc A của tam giác ABC cắt BC lần lượt tại D và E. Tìm độ dài các đoạn thẳng AD và AE.

Lời giải.

Bài 25. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2;0;1)$, $B(0;-1;1)$ và $C(0;0;-1)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tính bán kính R của đường tròn đó.

Lời giải.

Bài 26. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-4;2)$, $B(0;2;-2)$, $C(4;8;0)$, $D(6;2;4)$.

a) Chứng minh $ABCD$ là một hình thoi.

b) Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp hình thoi $ABCD$.

Lời giải.

Bài 27. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}-2x;3-x;\frac{5}{2}-2x\right)$ và tam giác ABC với $A(1;1;3)$, $B(0;5;2)$, $C(-1;3;4)$.

a) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng với mọi $x \neq 0$, đường thẳng MI luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Bài 28. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp, bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tích có hướng của hai véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ khi đó tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một véc-tơ kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ và có tọa độ

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_1b_3-a_3b_1;a_1b_2-a_2b_1)$$

- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$; $\left[\vec{a};\vec{b}\right]\perp\vec{b}$.
- $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=-\left[\vec{b};\vec{a}\right]$
- Ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$.
- A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq 0$.
- Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.
- Thể tích hình tứ diện: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

2. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa 2.1. Cho mặt phẳng (α). Nếu $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).

Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}$ với $k\neq 0$, cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$ và không cùng phương với nhau được gọi là cặp vectơ chỉ phương của (α) nếu giá của chúng song song hoặc nằm trên (α).
Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó vectơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ được gọi là tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{n}=\vec{a}\wedge\vec{b}$ hoặc $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa 2.2. Phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ trong đó A,B,C không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

a) *Nếu mặt phẳng* (α) *có phương trình tổng quát là* $Ax+By+Cz+D=0$ *thì nó có một vectơ pháp tuyến là* $\vec{n}=(A;B;C)$.

b) *Phương trình mặt phẳng đi qua điểm* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *nhận vectơ* $\vec{n}=(A;B;C)$ *khác* $\vec{0}$ *làm vectơ pháp tuyến là* $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sự đồng phẳng của ba vec-tơ, bốn điểm đồng phẳng

- Trong không gian $Oxyz$, cho ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vec-tơ $\vec{0}$.
  - Ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=0$.
  - Ngược lại, ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ **không** đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\neq 0$.
- Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.
  - Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi các vec-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=0$.
  - Ngược lại, bốn điểm A, B, C, D **không** đồng phẳng khi và chỉ khi các vec-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng hay $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$.

Ví dụ 1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, xét sự đồng phẳng của các vec-tơ sau:

a) $\vec{a}=(1;-1;1)$, $\vec{b}=(0;1;2)$ và $\vec{c}=(4;2;3)$.

b) $\vec{u}=(4;3;4)$, $\vec{v}=(2;-1;2)$ và $\vec{w}=(1;2;1)$.

Lời giải.

....

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, xét sự đồng phẳng của các điểm sau đây:

a) $A(-4;4;0)$, $B(2;0;4)$, $C(1;2;-1)$ và $D(7;-2;3)$.

b) $M(6;-2;3)$, $N(0;1;6)$, $P(2;0;-1)$ và $Q(4;1;0)$.

Lời giải.

....

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, cho các điểm $A(1;-4;5)$, $B(2;1;0)$ và hai vec-tơ $\overrightarrow{OC}=\vec{k}-\vec{j}-2\vec{i}$, $\overrightarrow{DO}=3\vec{i}+2\vec{k}$. Chứng minh rằng $ABCD$ là một tứ diện.

Lời giải.

Ví dụ 4. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vec-tơ $\vec{a}=(1;m;2)$, $\vec{b}=(m+1;2;1)$ và $\vec{c}=(0;m-2;2)$. Tìm các giá trị của m để ba vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ví dụ 5. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ với $\vec{a}=(2;-3;5)$, $\vec{b}=(6;-2;1)$, $\vec{c}=(3;0;1)$.

Lời giải.

Ví dụ 6. Tìm m để các véctơ $\vec{a}=(m;2;3)$, $\vec{b}=(-2;m+3;5)$, $\vec{c}=(-11;m+1;0)$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ví dụ 7. Xét sự đồng phẳng của các điểm $A=(0;2;5)$; $B=(-1;-3;3)$; $C=(2;-5;1)$; $D=(8;0;2)$.

Lời giải.

Ví dụ 8. Tìm m để các điểm $A=(-2;2;1)$; $B=(-3;0;2)$; $C=(2;-4;1)$; $D=(7;m+3;2)$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ví dụ 9. Cho các điểm $A=(2;5;-1)$; $B=(5;0;1)$; $C=(1;-4;0)$; $D=(2;3;-2)$ Chứng minh rằng AB và CD chéo nhau.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng bốn điểm $A=(1;0;1)$; $B=(0;0;2)$; $C=(0;1;1)$; $D=(-2;1;0)$ là bốn đỉnh của một tứ diện.

Lời giải.

Bài 2. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ với $\vec{a}=(0;-3;-2)$, $\vec{b}=(5;-3;1)$, $\vec{c}=(5;3;5)$.

Lời giải.

Bài 3. Tìm m để các điểm $A=(-5;3;1)$; $B=(m+2;0;1)$; $C=(1;0;2)$; $D=(-3;m+3;-4)$ đồng phẳng.

Lời giải.

Bài 4. Cho các vectơ $\vec{a}=(2;-1;0)$, $\vec{b}=(1;0;1)$, $\vec{c}=(1;-1;0)$, tìm vectơ đơn vị $\vec{d}$ biết $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ đồng phẳng và góc giữa $\vec{c}$, $\vec{d}$ bằng 45^0.

Lời giải.

Bài 5. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, xét sự đồng phẳng của các vec-tơ sau:

a) $\vec{a}=(-3;1;-2)$, $\vec{b}=(1;1;1)$ và $\vec{c}=(-2;2;1)$.

b) $\vec{d}=(4;2;5)$, $\vec{e}=(3;1;3)$ và $\vec{f}=(2;0;1)$.

c) $\vec{u}=(-1;-1;2)$, $\vec{v}=(1;-2;3)$ và $\vec{w}=(3;0;-1)$.

d) $\vec{m}=(-1;2;1)$, $\vec{n}=(-2;1;0)$ và $\vec{p}=(4;1;2)$.

Lời giải.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, xét sự đồng phẳng của các điểm sau đây:

a) $A(1;-1;1)$, $B(2;-3;2)$, $C(4;-2;2)$ và $D(1;2;3)$.

b) $M(2;-1;1)$, $N(2;-3;2)$, $P(4;-2;2)$ và $Q(1;2;-1)$.

c) $G(1;1;3)$, $H(-1;3;3)$, $I(2;-8;-1)$ và $J(-3;7;4)$.

d) $E(3;0;-1)$, $F(-2;1;-2)$, $R(0;5;-4)$ và $S(1;-3;2)$.

Lời giải.

Bài 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, cho các điểm $A(1;-4;5)$, $B(3;2;1)$ và hai vec-tơ $\overrightarrow{OC}=5\vec{i}+3\vec{k}$, $\overrightarrow{DO}=7\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD. Chứng minh rằng bốn điểm O, M, N, P lập thành một tứ diện.

Lời giải.

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(m;1;1)$, $B(2;m;-1)$, $C(3;-3;m)$ và $D(m;-1;4)$. Tìm giá trị của m để bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.

Bài 9. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;1)$, $B(3;4;5)$, $C(-1;-7;2)$, $D(-2;2;0)$ và $E(2;-9;3)$. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, E tạo thành một hình chóp.

Lời giải.

Bài 10. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, tìm các giá trị của m để:

a) $\vec{a}=(2m;-4;-2)$, $\vec{b}=(m;m-1;-1)$, $\vec{c}=(3m;m;m-4)$ đồng phẳng.

b) $\vec{u}=(1;m+1;1-m)$, $\vec{v}=(m-2;3;m+3)$, $\vec{w}=(-3;m+2;3m+2)$ đồng phẳng.

Lời giải.

Dạng 2. Diện tích của tam giác

Phương pháp: Sử dụng công thức

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB.AC \sin \widehat{BAC} \\ &= \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right| \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Ví dụ 10. Trong không gian $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}, \overrightarrow{BC} = (2; -7; 1)$ và $A'(4; 1; -7)$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác $A'BC$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (cho mỗi dạng)

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;-1), B(3;2;3), C(-1;1;1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;-1;3), B(3;-4;0)$. Tìm trên Oz điểm C (C khác O) để diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;0;1), B(-1;1;0), C(a;1-a;0)$. Tìm tất cả các giá trị của a để tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải.

Dạng 3. Thể tích khối chóp

Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \cdots$

Ví dụ 11. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(3;-2;1), B(-1;0;2), C(3;4;-5), D(0;0;1)$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Các đỉnh của khối chóp có tọa độ là $A(2;1;-3), B(4;3;-2), C(6;-4;-1), S(2;1;-5)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (cho mỗi dạng)

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các đỉnh của khối chóp có tọa độ $S(0;0;2), A(-2;4;6), B(1;-2;-2), C(3;-4;0)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(-1;1;1), B(1;0;1), C(0;-1;1)$. Tìm trên Oz điểm S sao cho thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng 2.

Lời giải.

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;1), B(-3;0;-2), C(0;1;1)$. Tìm tất cả các giá trị của a để điểm $D(a;a-2;0)$ là đỉnh thứ tư của khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\dfrac{11}{6}$.

Lời giải.

Dạng 4. Thể tích khối hộp

Thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCDA'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] \cdot \overrightarrow{AA'}\right| = \cdots$

Ví dụ 13. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $B(1;3;1), C(0;1;-1), D(-2;0;1), A'(2;1;1)$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải.

Bài 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, có $A(2;-3;1), B(1;-1;-3), D(-1;-2;2)$ và $\overrightarrow{OC'} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Tính thể tích khối hộp trên.

Lời giải.

Dạng 5. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có vectơ pháp tuyến cho trước

Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A;B;C)$.
Khi đó $(\alpha): A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

Ví dụ 14. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;1;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1;1;2)$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 18. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;7;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;0;1)$.

Lời giải.

Bài 19. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(4;-1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;1;3)$.

Lời giải.

Dạng 6. Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm của AB và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 15. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2;1;1)$ và $B(2;-1;-1)$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 20. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1;-1;-4)$ và $B(2;0;5)$.

Lời giải.

Bài 21. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2;3;-4)$ và $B(4;-1;0)$.

Lời giải.

Dạng 7. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có cặp vectơ chỉ phương cho trước

Mặt phẳng có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Ví dụ 16. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;1;2)$, $\vec{b}=(3;2;-1)$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(3;-1;-2)$, $\vec{b}=(0;3;4)$.

Lời giải.

Bài 23. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-1;3;4)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;7;2)$, $\vec{b}=(3;2;4)$.

Lời giải.

Bài 24. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-4;0;5)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(6;-1;3)$, $\vec{b}=(3;2;1)$.

Lời giải.

Dạng 8. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và song song mặt phẳng cho trước

Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$.
Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với (β).
Khi đó vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(A;B;C)$.

Ví dụ 17. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;1)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x-y+3=0$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 25. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-1;1;0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): x-2y+z-10=0$.

Lời giải.

Bài 26. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(3;6;-5)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): -x+z-1=0$.

Lời giải.

Bài 27. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-3;5)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): x+2y-z+5=0$.

Lời giải.

Bài 28. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;1;1)$ và song song với mặt phẳng (β) : $10x-10y+20z-40=0$.

Lời giải.

Bài 29. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;1;5)$ và song song với mặt phẳng (Oxy).

Lời giải.

Dạng 9. Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng

Cho ba điểm A,B,C phân biệt không thẳng hàng.
Khi đó mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Ví dụ 18. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết $A(1;-2;4)$, $B(3;2;-1)$ và $C(-2;1;-3)$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 30. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết $A(0;0;0)$, $B(-2;-1;3)$ và $C(4;-2;1)$.

Lời giải.

Bài 31. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và $C(-2;2;2)$.

Lời giải.

Dạng 10. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cho trước

Cho điểm M và đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A, B.
Khi đó mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 19. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;4)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;2;-1)$, $B(-2;1;-3)$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 32. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;-1;3)$, $B(4;2;-1)$.

Lời giải.

Bài 33. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(0;1;0)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $B(2;3;1)$ và $C(-2;2;2)$.

Lời giải.

Dạng 11. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước

Cho điểm M và hai mặt phẳng cắt nhau (β) và (γ).
Khi đó mặt phẳng (α) đi qua điểm M, vuông góc với mặt phẳng (β) và (γ) có $\vec{n} = \left[\vec{n}_{(\beta)}, \vec{n}_{(\gamma)}\right]$.

Ví dụ 20. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;2;-1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): x+y-2z+1=0$, $(\gamma): 2x-y+z=0$.

Lời giải.

....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 34. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(3;4;1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): 2x-y+2z+1=0$, $(\gamma): x-y-z+1=0$.

Lời giải.

....
....
....

Bài 35. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-1;0)$, vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): 3x-2y-4z+1=0$, và (Oxy).

Lời giải.

....
....
....

Dạng 12. Lập phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm và vuông góc với một mặt phẳng cắt nhau cho trước

Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (β).
Khi đó mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β) có $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(\beta)}\right]$.

Ví dụ 21. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(3;1;-1)$, $B(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x-y+3z-1=0$.

Lời giải.

....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 36. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(-2;-1;3)$, $B(4;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x+3y-2z+5=0$.

Lời giải.

Bài 37. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(2;-1;3)$, $B(-4;7;-9)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 3x+4y-8z-5=0$.

Lời giải.

Dạng 13. Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm cho trước

Cho mặt cầu (S) có tâm I.
Khi đó mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H có $\vec{n}=\overrightarrow{IH}$.

Ví dụ 22. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ tại điểm $M(-1;3;0)$.

Lời giải.

Bài 38. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0$ tại điểm $M(4;3;0)$.

Lời giải.

Dạng 14. Viết phương trình của mặt phẳng liên quan đến mặt cầu và khoảng cách

Kiến thức cần nhớ

1. Khoảng cách từ điểm đến mặt.

2. Vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu.

1. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu.

Ví dụ 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$.

Lời giải.

Ví dụ 24. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$ và tiếp xúc với (S).

Lời giải.

Ví dụ 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$ và mặt phẳng $(P): x+z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(3;1;-1)$ vuông góc với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Lời giải.

Câu hỏi tương tự

Với $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+5=0, (P): 2x+y-6z+5=0, M(1;1;2)$.

ĐS: $(Q): 2x+2y+z-6=0$ hoặc $(Q): 11x-10y+2z-5=0$.

Ví dụ 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$.

Lời giải.

Ví dụ 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $x-y-2=0, 2x-z-6=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=1$.

Lời giải.

Ví dụ 28. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x+2y-z+17=0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) song song với (α) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng $2p=6\pi$.

Lời giải.

Câu hỏi tương tự:
Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-11=0, (\alpha): 2x+y-2z+19=0, p=8\pi$.

ĐS: $(\beta): 2x+y-2z+1=0$

2. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách.

Ví dụ 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó b,c dương và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ví dụ 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và $(Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ví dụ 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và cách (Q) một khoảng bằng 3.

Lời giải.

Ví dụ 32. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua O, vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+y+z=0$ và cách điểm $M(1;2;-1)$ một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ví dụ 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) biết B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Lời giải.

Ví dụ 34. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M,N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và (P) cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải.

Bài 40. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $M(-1;1;0)$, $N(0;0;-2)$, $I(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và N, đồng thời khoảng cách từ I đến (P) bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Bài 41. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-1;2)$, $B(1;3;0)$, $C(-3;4;1)$, $D(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A,B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Lời giải.

Câu hỏi tương tự Với $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1), D(0;3;1)$.

ĐS: $(P): 4x+2y+7z-15=0$ hoặc $(P): 2x+3z-5=0$.

Bài 42. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-1;2)$, $B(1;3;0)$, $C(-3;4;1)$, $D(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A,B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Lời giải.

Câu hỏi tương tự Với $A(1;2;1)$,$B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$, $D(0;3;1)$.

ĐS: $(P): 4x+2y+7z-15=0$ hoặc $(P): 2x+3z-5=0$.

Bài 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3)$,$B(0;-1;2)$, $C(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và gốc tọa độ O sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

Lời giải.

Câu hỏi tương tự: Với $A(1;2;0)$,$B(0;4;0)$,$C(0;0;3)$.

ĐS: $-6x+3y+4z=0$ hoặc $6x-3y+4z=0$.

Bài 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-1)$,$B(1;1;2)$,$C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$.

Lời giải.

Bài 45. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;0;3)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$.

Lời giải.

Bài 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.

Lời giải.

Dạng 15. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến góc hoặc liên quan đến tam giác

Giải bài toán viết phương trình mặt phẳng liên quan đến góc hoặc liên quan đến tam giác thường phải sử dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng và phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn dưới đây:

- Giả sử $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có các véc-tơ pháp tuyến tương ứng là $\vec{n}_\alpha=(A;B;C)$ và $\vec{n}_\beta=(A';B';B')$. Khi đó, góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (β) được tính theo công thức
$$\cos\varphi=|\cos(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)|=\frac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|}.$$
- Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ (với $abc\neq 0$) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ví dụ 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+3z-5=0$ và $A(3;-2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và song song với (α).

Lời giải.

Ví dụ 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-1), B(2;-1;4)$ và $(\alpha): x-2y+3z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (α).

Lời giải.

Ví dụ 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Ox và tạo với mặt phẳng $(P): \sqrt{5}x + y + 2z = 0$ một góc bằng 60°.

Lời giải.

Ví dụ 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 5x - 2y + 5z - 1 = 0$ và $(Q): x - 4y - 8z + 12 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (P) và hợp với mặt phẳng (Q) một góc 45°.

Lời giải.

Ví dụ 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(3;0;0), C(0;0;1)$ và cắt trục Oy tại điểm B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-1;4)$ và song song với mặt phẳng $(P): 3x-y+2z=0$.

Lời giải.

Bài 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;1;-1), B(5;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): -x+z+10=0$.

Lời giải.

Bài 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến d của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-1=0$, $(\beta): 4x-3y+z-3=0$ và tạo với mặt phẳng $(Q): x-2y+2z+1=0$ một góc φ mà $\cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải.

Bài 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1;-1;3), N(3;1;5)$ và mặt phẳng $(Q): x+2y-z+3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N và tạo với (Q) một góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) biết nó đi qua điểm $G(-1;2;-3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải.

Dạng 16. Các dạng khác về viết phương trình mặt phẳng

a) Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Giả sử mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

$\Rightarrow (P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

- (P) cắt tia $Ox \Rightarrow a>0$, (P) cắt tia đối của tia $Ox \Rightarrow a<0$.
- $OA=|a|; Ob=|b|; OC=|c|$.
- $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}|a|\cdot|b|=\dfrac{1}{2}|ab|$.
- $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}OA.OB.OC=\dfrac{1}{6}|abc|$.

b) Một số bất đẳng thức cơ bản

- Bất đẳng thức Cauchy.
  Cho 2 số thực không âm x, y. Khi đó $x+y\geq 2\sqrt{xy}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y$.
  Cho 3 số thực không âm x, y, z. Khi đó $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$.
- Bất đẳng thức B-C-S (Bunyakovski)
  Cho các số thực x, y, z, a, b, c. Khi đó

$$(ax+by+cz)^2\leq\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

  Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

Ví dụ 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;1); N(-1;0;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C khác gốc tọa độ O sao cho $AM=\sqrt{3}BN$.

Lời giải.

Ví dụ 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $B(0;3;0)$, $M(4;0;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa B,M và cắt các tia Ox,Oz lần lượt tại A,C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 3.

Lời giải.

Ví dụ 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;4;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A,B,C sao cho $4OA = 2OB = OC$.

Lời giải.

Ví dụ 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho biểu thức
$\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Lời giải.

Ví dụ 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;4;9)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ có giá trị nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

Lời giải.

Bài 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;-3)$, $B(-2;1;1)$, $C(2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+4y+5z+1=0$. Gọi D là điểm thuộc (α) và có tung độ dương sao cho có vô số mặt phẳng (P) đi qua C, D thỏa mãn khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (P). Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

Lời giải.

Bài 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q): 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính r. Tìm r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu.

Lời giải.

Bài 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z+18=0$, M là điểm di động trên mặt phẳng (P), N là điểm thuộc tia OM sao cho $OM.ON=24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (P).

Lời giải.

Bài 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_m): (x+m)^2+(y-2m)^2+z^2-5m^2+4m-1=0$. Biết khi m thay đổi thì (S_m) luôn giao với mặt phẳng (P) có định với giao tuyến là một đường tròn (C) cố định. Tính bán kính của đường tròn (C).

Lời giải.

Dạng 17. Ví trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P_1) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và (P_2) $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.
Khi đó ta có ba trường hợp

1. $(P_1) \equiv (P_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.
2. $(P_1) \parallel (P_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.
3. (P_1) cắt $(P_2) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$.

Lưu ý: $A_1.A_2 + B_1.B_2 + C_1.C_2 = 0 \Leftrightarrow (P_1) \perp (P_2)$.

Ví dụ 45. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) $x + y + z - 1 = 0$ và (Q) $2x - 1 = 0$.

Lời giải.

Ví dụ 46. Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) $2x - 3y + 5z - 1 = 0$ và (Q) $x - y - z + 2 = 0$.

Lời giải.

Ví dụ 47. Cho (P) $(m+1)x + (n+3)y + 2z - 1 = 0$ và (Q) $x + 2y + z + 3 = 0$. Tìm $m, n \in \mathbb{R}$ để (P) song song với (Q).

Lời giải.

Ví dụ 48. Cho (P) $(m+2n)x + (2n^2+3)y + z - 8 = 0$ và (Q) $x - my + (n^2 - 5m + 15)z - 3 = 0$. Chứng tỏ (P) và (Q) cắt nhau.

Lời giải.

Ví dụ 49. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua $A(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng (Q) $x+2y-3z+3=0$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 57. Cho (P) $x+2y-2z-3=0$ và (Q) $(m+1)x-(m-5)y-4mz+1+m=0$. Tìm m để (P) song song với (Q).

Lời giải.

Bài 58. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua $A(1;2;3)$ song song với mặt phẳng (Oxy).

Lời giải.

Dạng 18. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Ta có ba trường hợp

1. $d(I,(P))=R \Leftrightarrow (P)$ tiếp xúc (S).
2. $d(I,(P))<R \Leftrightarrow (P)$ cắt (S) theo đường tròn $(\mathscr{C})$.
3. $d(I,(P))>R \Leftrightarrow (P)$ không cắt (S).

Ví dụ 50. Cho mặt cầu (S) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ và mặt phẳng (P) $x+2y+2z+1=0$. Xác định vị trí tương đối của (S) và (P).

Lời giải.

Ví dụ 51. Cho (P) $3x+4y+4=0$ và $A(1;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm A cắt mặt phẳng (P) theo đường tròn giao tuyến (C) có chu vi bằng 8π.

Lời giải.

Ví dụ 52. Cho mặt phẳng (P) $x+y+2z+3=0$ và (Q) $2x-y-z+3=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời giao tuyến của (S) với các mặt phẳng (P), (Q) là các đường tròn có bán kính lần lượt là $\dfrac{\sqrt{46}}{2}$, r. Xác định r sao cho có đúng một mặt cầu thoả mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải.

Ví dụ 53. Cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, $a,b,c>0$ thoả mãn $a+2b+3c=4$. Xác định phương trình mặt phẳng chứa đường tròn lớn của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ độc lập với a,b,c.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 59. Cho phương trình mặt cầu (S) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$ và hai điểm $A(0;-1;0)$, $B(1;1;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A,B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính lớn nhất.

Lời giải.

Bài 60. Cho phương trình mặt cầu $(S)(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$. Viết phương trình tiếp diện với mặt cầu (S) tại $M(3;0;-1)$.

Lời giải.

Bài 61. Cho phương trình mặt phẳng (P) $x+2y-2z+6=0$ và mặt cầu (S) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=1$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và tiếp xúc với (S).

Lời giải.

Bài 62. Viết phương trình mặt cầu (S) qua $A(3;-3;4)$ tiếp xúc đồng thời với các mặt phẳng (α) $x-2=0$, (β) $y+2=0$ và (γ) $z-2=0$.

Lời giải.

Dạng 19. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Tìm hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng. Tìm điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng.

- Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (P) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ là
$$d(M,(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: Chọn một điểm trên mặt phẳng (cho $y=z=0$). Tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng kia.

Ví dụ 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0$ và điểm $M(1;2;3)$. Tính khoảng cách từ M đến (P).

Lời giải.

Ví dụ 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;3)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Ví dụ 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P): x+2y-2z+7=0$ và $(Q): x+2y-2z-4=0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng.

Lời giải.

Ví dụ 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm điểm thuộc trục Ox sao cho khoảng cách đến mặt phẳng $(\alpha): x-y+z+1=0$ bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ví dụ 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm điểm thuộc trục Oy cách đều điểm $A(1;1;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-5=0$.

Lời giải.

Ví dụ 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Biết $b,c>0$, phương trình mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$. Tìm tọa độ các điểm B và C.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách từ A đến (P)

Lời giải.

Bài 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z+5=0$ và điểm $B(-1;2;-3)$. Tính khoảng cách từ B đến (α)

Lời giải.

Bài 65 (ĐH-2013NC-Khối D). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y-2z+5=0$ và điểm $C(-1;3;-2)$. Tính khoảng cách từ C đến (P). Viết phương trình mặt phẳng đi qua C và song song với (P).

Lời giải.

. . . .

Bài 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+4z-7=0$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+3=0$. Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P).

Lời giải.

. . . .

Dạng 20. Tìm tọa độ hình chiếu của điểm trên mặt phẳng. Điểm đối xứng qua mặt phẳng

- Để tìm hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (P):
  Gọi $H(x;y;z)$. Tính véc-tơ $\overrightarrow{AH}$. Sử dụng điều kiện $\overrightarrow{AH}=k\cdot\overrightarrow{n}_{(P)}$ và $H\in(P)$.
- Để tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua (P):
  Sử dụng điều kiện H là trung điểm AB.

Ví dụ 60. Cho $A(1;-1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+4=0$.

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (P).

b) Tìm tọa độ điểm A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P).

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;1)$, $B(0;1;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 67. Tìm tọa độ hình chiếu H của điểm $M(2;-3;5)$ trên mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-26=0$.

Lời giải.

Bài 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;1)$ và mặt phẳng $(P): 3x+y+2z+11=0$. Tìm tọa độ điểm M' là điểm đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P).

Lời giải.

Bài 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;1;-2)$. Tìm tọa độ điểm A' là điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (Oxz).

Lời giải.

Bài 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(2;0;-1)$, $B(1;-2;3)$, $C(0;1;2)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Bài 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-4=0$. Tìm tọa độ điểm N là điểm đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P).

Lời giải.

Bài 72 (TN-2011-Ban cơ bản). Cho điểm $A(3;1;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$. Tính khoảng cách từ A đến (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P). Xác định tọa độ hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P).

Lời giải.

Bài 73 (CĐ-2014). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1-1)$, $B(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải.

Bài 74 (ĐH-2013-Khối D). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;-1;-2)$, $B(0;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải.

Bài 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;-5)$, $B(1;4;5)$, $C(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P): 7x+5y+z+57=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;1;0)$, $B(-9;4;9)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+z+1=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- Phương trình tham số của đường thẳng d qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ là $d:\begin{cases}x=x_0+at,\\ y=y_0+bt,\\ z=z_0+ct.\end{cases}$

- Phương trình chính tắc của đường thẳng d qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ là $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ với $abc\neq 0$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng khi biết một điểm thuộc nó và một véc-tơ chỉ phương

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ.

Lời giải.

....

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1,2,3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;3;2)$.

Lời giải.

....

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của trục Oz.

Lời giải.

....

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(2;3;4)$ và $C(0;0;1)$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm C và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(2;-1;3)$. Viết phương trình tham số đường thẳng đi qua điểm M và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{i}$.

Lời giải.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;-2;3)$, $B(3;0;-3)$ và $C(-1;2;3)$. Viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Lời giải.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc đường thẳng qua $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, biết $\vec{a} = (0;2;1)$, $\vec{b} = (-1;1;-4)$; $\vec{c} = (2;-1;0)$.

Lời giải.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng qua $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{ON}$, với O là gốc tọa độ và N là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (Oxz).

Lời giải.

Dạng 2. Viết phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm cho trước

- Phương trình đường thẳng đi qua điểm A hoặc B và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ hoặc véc-tơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-1;1)$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng đi qua hai điểm O và $M(1;2;3)$ (với O là gốc tọa độ).

Lời giải.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;-4)$. Viết phương trình tham số đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải.

Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M cho trước và vuông góc với mặt phẳng (α) cho trước

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm M và có một véc-tơ chỉ phương là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy).

Lời giải.

Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua điểm $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x+3y-z+5=0$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), B(0;3;0)$ và $C(0;0;-4)$. Viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 4x+3y-7z+1=0$. Viết phương trình của đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

Lời giải.

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), B(0;3;0)$ và $C(0;0;-4)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Viết phương trình tham số của đường thẳng OH.

Lời giải.

Dạng 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và song song với một đường thẳng cho trước

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm M và có một véc-tơ chỉ phương là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đã cho.

Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với trục Oz.

Lời giải.

....

Ví dụ 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng đi qua $A(3;5;7)$ và song song với $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Lời giải.

....

Bài 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-1;3), B(1;0;1), C(-1;1;2)$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC.

Lời giải.

....

Dạng 5. Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q)

Phương pháp. VTPT của (P), (Q) lần lượt là $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$. Lúc này ta được VTCP của đường thẳng d là $[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}]$.

Ví dụ 10. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-1;1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): x+y-3z-1=0$ và $(Q): -2x+y-4z+1=0$.

Lời giải.

Ví dụ 11. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0$ và $(Q): 3x-2y+4z-2018=0$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(0;1;-1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): -2x+3y-z=0$ và mp(Oxy).

Lời giải.

Bài 13. Viết phương trình đường thẳng d. Biết d đi qua giao điểm của hai đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{1}$ và $\Delta': \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-1}{7}$. Và song song với hai mặt phẳng

$(P): 7x-10y+5z+1=0$ $\qquad$ $(Q): 3x+6y-2z-2018=0$

Lời giải.

Bài 14. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+5t \\ y = 2-6t \\ z = -7+t \end{cases}$ và ba mặt phẳng $(P): x+2y-3z-16=0$, $(Q): x+y+z+1=0$, $(R): -x+2y-z+2=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của Δ và (P), đồng thời song song với hai mặt phẳng $(Q), (R)$.

Lời giải.

Bài 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(3;1;0)$, $A'(1;0;2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua B' và song song với $(ABCD)$ và $(ACC'A')$.

Lời giải.

Bài 16. Cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$ và mặt phẳng $(P):-x+2y+3z+1=0$, và mặt phẳng (Q) tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm $A(0;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và song song với mặt phẳng (P), (Q).

Lời giải.

Dạng 6. Đường thẳng d qua M song song với mp(P) và vuông góc với d' (d' không vuông góc với Δ)

Phương pháp. Đường thẳng d' có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u'}$, mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}$. Lúc này ta được véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\left[\overrightarrow{u'},\overrightarrow{n}\right]$.

Ví dụ 12. Cho điểm $A(2;-5;-1)$ và mặt phẳng $(P):x-y-z+9=0$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Lập phương trình của đường thẳng Δ qua A, song song với (P) và vuông góc với d.

Lời giải.

Ví dụ 13. Cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P):-x+3y-4z-5=0$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-4+5t\\z=2-t\end{cases}$. Lập phương trình của đường thẳng Δ qua A, song song với (P) và vuông góc với d.

Lời giải.

Ví dụ 14. Cho điểm $A(-2;1;-6)$ và hai mặt phẳng $(P):2x+3y-z+12=0$, $(Q):x-2y+2z-1=0$. Lập phương trình của đường thẳng Δ qua A, song song với (P) và vuông góc với giao tuyến của (P)và (Q) .

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 17. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(1;-2;3)$, vuông góc với đường thẳng (Δ) : $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-3+2t \\ z=2-t \end{cases}$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x+y+3z-5=0$

Lời giải.

Bài 18. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $A(1;1;-2)$, vuông góc với đường thẳng (d) : $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và song song với mặt phẳng $(P): x-y-z+3=0$

Lời giải.

Bài 19. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $M(2;2;4)$, vuông góc với đường thẳng (d) : $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ và song song với mặt phẳng $(P): x+3y+2z+3=0$.

Lời giải.

Bài 20. Trong không gian cho các điểm $A(1;1;-1); B(2;-1;3), C(1;2;2), D(-1;-2;1)$. Viết phương trình của đường thẳng (d) đi qua A, vuông góc với AB và song song với mặt phẳng (BCD).

Lời giải.

Bài 21. Trong không gian cho điểm $M(2;2;4)$, đường thẳng $(d): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+3y+2z+2=0$. Hãy ;ập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm M, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d).

Lời giải.

Bài 22. Trong không gian cho điểm $M(3;-1;4)$, đường thẳng $(d): \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$. Hãy lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm M, song song với mặt phẳng (Oxy) và vuông góc với đường thẳng (d).

Lời giải.

Dạng 7. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ của các đường thẳng $(d_1), (d_2)$

Bước 2. Gọi $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d) ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}]$$

Bước 3. Viết phương trình (d) đi qua M và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$

Ví dụ 15. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=t\\y=1-4t\\z=2+6t\end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases}x=2t\\y=1+t\\z=2-5t\end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Ví dụ 16. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2+t\end{cases}$ và $(d_2):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Ví dụ 17. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=1+8t\\y=-2+t\\z=t\end{cases}$ và (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và $(Q):x+1=0$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(0;1;1)$ và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Ví dụ 18. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1;1;3)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết :
$(d_1) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-6}{6}$ và $(d_2) : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-5}$.

Lời giải.

Ví dụ 19. Trong không gian cho các điểm $A(1;1;-1); B(2;-1;3), C(1;2;2), D(-1;-2;1)$. Lập phương trình của đường thẳng (d) đi qua O, vuông góc với AB và CD.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 10 + 2t \\ z = t \end{cases}$ và $(d_2) : \begin{cases} x = 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 \end{cases}$.
Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(6;-1;2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Bài 2. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 2 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $(d_2): \dfrac{x}{4} = \dfrac{y - \frac{7}{4}}{1} = \dfrac{z - \frac{11}{4}}{1}$.
Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(0;4;2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Bài 3. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ và (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$ và $(Q): y - z + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(2;1;4)$ và vuông góc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải.

Bài 4. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(2;3;-1)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết :
$(d_1): \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{2}$ và $(d_2): \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{5}$.

Lời giải.

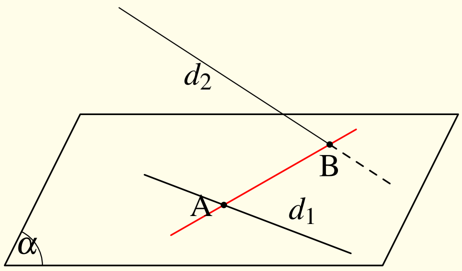
Bài 5. Trong không gian cho các điểm $A(1;1;-1); B(2;-1;3), C(1;2;2), D(-1;-2;1)$. Lập phương trình của đường thẳng (d) đi qua $M(1;1;5)$, vuông góc với AC và BD.

Lời giải.

Dạng 8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2

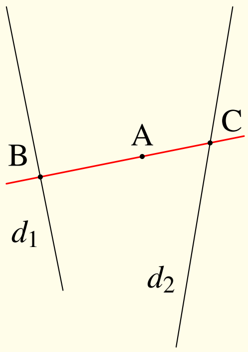
Cách 1:

- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và chứa đường thẳng d_1.
- Tìm giao điểm $B = (\alpha) \cap d_2$.
- Đường thẳng cần tìm đi qua A và B.



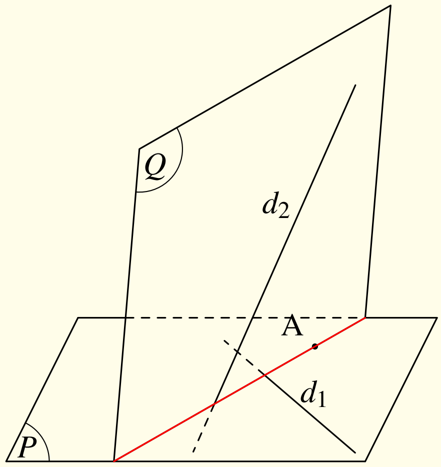
Cách 2:

- Gọi B, C lần lượt là hai điểm thuộc d_1, d_2.
- Ba điểm A, B, C thẳng hàng suy ra tọa độ B, C.
- Đường thẳng cần tìm đi qua ba điểm A, B, C.



Cách 3:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng d_1.
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa đường thẳng d_2.
- Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (P) và (Q).



Ví dụ 20. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-6)$, đường thẳng $d_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z}{2}$ và đường thẳng $d_2 : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 1+4t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Ví dụ 21. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;0)$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 3-t \\ y = 1+t \\ z = -2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A đồng thời cắt cả trục tọa độ Ox và đường thẳng d.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;1)$, đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$ và đường thẳng $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 7. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;1)$, đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$ và đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=2+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$. Đường thẳng d đi qua điểm A lần lượt cắt hai đường thẳng d_1, d_2 tại B, C. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

Lời giải.

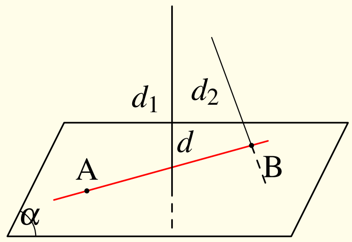
Bài 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$, đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$, đường thẳng $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+at\\y=bt\\z=9t\end{cases}$. Tìm a,b để đường thẳng Δ đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Dạng 9. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2

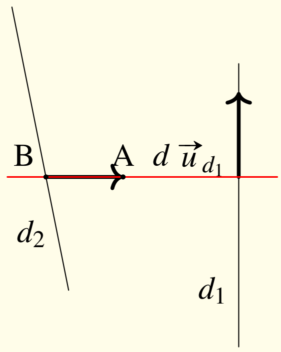
Cách 1:

- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc đường thẳng d_1.
- Tìm giao điểm $B = (\alpha) \cap d_2$.
- Đường thẳng cần tìm đi qua A và B.



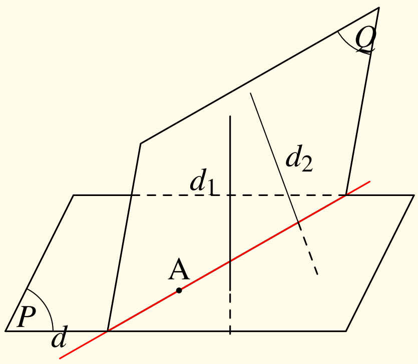
Cách 2:

- Gọi B là giao điểm của d và d_2.
- Vì AB vuông góc d_1 nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \Rightarrow$ tọa độ B.
- Đường thẳng cần tìm đi qua điểm A, B.



Cách 3:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc đường thẳng d_1.
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa đường thẳng d_2.
- Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (P) và (Q).



Ví dụ 22. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;0)$, đường thẳng $d_1 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và đường thẳng $d_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

Lời giải.

Ví dụ 23. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;0;1)$, đường thẳng $d_1: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;1)$, đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = -3+5t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

Lời giải.

Bài 10. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;0)$, đường thẳng $d_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$, và đường thẳng $d_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 tại điểm B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

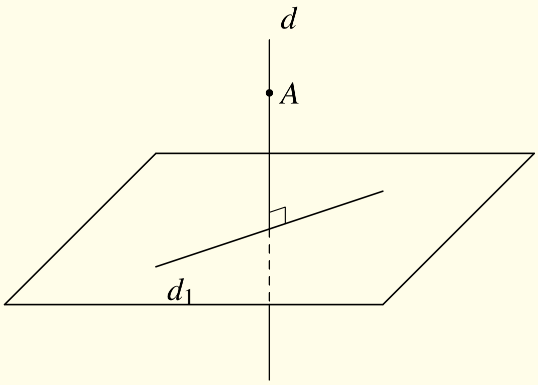
Lời giải.

Bài 11. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{1}$, đường thẳng $d_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + bt \end{cases}$. Tìm a, b để đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

Lời giải.

Dạng 10. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_1

- Gọi $M \in d \cap d_1$.
- Vì $d \perp d_1$ nên ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0$. Từ đây tìm được tọa độ điểm M.
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và M.



Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-2)$ và đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d_1.

Lời giải.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-1;1)$ và đường thẳng $d_1 : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{4}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d_1.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d_1.

Lời giải.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;1)$ và đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = 3 \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d_1.

Lời giải.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, $(P) : x+2y-z+2=0$ và $(Q) : -x+3y+2z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc và cắt giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

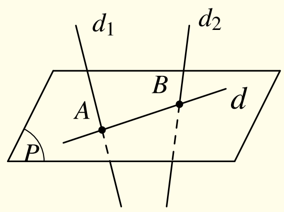
Lời giải.

Dạng 11. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2

a) Trường hợp trong hai đường thẳng d_1, d_2 có đường thẳng song song với (P) thì không tồn tại đường thẳng d.

b) Trường hợp d_1 và d_2 đều không nằm trên (P) và cắt (P):

- Gọi giao điểm của d_1, d_2 với (P) lần lượt là A và B. Từ đó tìm được tọa độ A và B.
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và B.



c) Trường hợp có đường thẳng nằm trên (P), giả sử $d_1 \subset (P)$:

- Nếu $d_2 \subset (P)$ thì với mỗi điểm M nằm trên (P) ta sẽ lập được vô số đường thẳng d qua M, đồng thời cắt d_1 và d_2.
- Nếu $d_2 \not\subset (P)$, d_2 cắt (P) thì ta tìm giao điểm M của d_2 và (P). Như vậy, cũng có vô số đường thẳng d qua M và cắt d_1.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): y+2z=0$, $d_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4}$ và $d_2: \begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \\ z=1 \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x-3y+3z-4=0$, $d_1: \begin{cases} x=-7+3t \\ y=4-2t \\ z=4+3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1+3t' \\ y=2+t' \\ z=1-t' \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x-y+z-3=0$, $d_1: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=4-2t \\ z=4+3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+t' \\ y=4-t' \\ z=3-3t' \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 3x+y+z+3=0$, $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-2t \\ z=1+t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-t' \\ y=2+t' \\ z=1-3t' \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 3x+y+z+3=0$, $d_1: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=4-3t \\ z=-1-3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-t' \\ y=-2+2t' \\ z=-4+t' \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

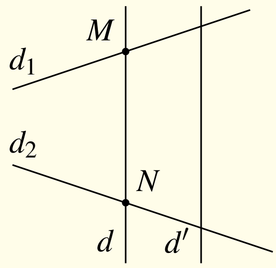
Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 3x-z+2=0$, $d_1: \begin{cases} x=-2+t \\ y=4-5t \\ z=1+3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-t' \\ y=-2+2t' \\ z=-4+t' \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Dạng 12. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2

- Gọi $M \in d \cap d_1$, $N \in d \cap d_2$.
- Vì $d \parallel d'$ nên $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}_{d'}$. Từ đây tìm được tọa độ M, N.
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{d'}$.



Nếu $d_1 \parallel d'$, $d_1 \cap d_2 = \varnothing$ hoặc $d_2 \parallel d'$, $d_1 \cap d_2 = \varnothing$ hoặc một trong hai đường thẳng d_1, d_2 trùng với d' thì không tồn tại đường thẳng d.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d' : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$, $d_1 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1+2t \\ z = -3+t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d' : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{1}$, $d_1 : \begin{cases} x = 1-3t \\ y = -1+t \\ z = -3-t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2+3t' \\ y = -1+2t' \\ z = -3+t' \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d' : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases}$, $d_1 : \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ và $d_2 : \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d' : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$, $d_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{1}$ và $d_2 : \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d' : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$, $d_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{1}$ và $d_2 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+6}{4} = \dfrac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

Dạng 13. Viết phương trình đường thẳng d song song và cách đều hai đường thẳng song song cho trước và nằm trong mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.

Để viết phương trình đường thẳng d song song và cách đều hai đường thẳng song song cho trước d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó ta thực hiện theo các bước sau:

- Xác định điểm $A \in d_1, B \in d_2$ và gọi I là trung điểm của AB, khi đó d đi qua I.
- Xác đinh véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d_1 hoặc của đường thẳng d_2. Khi đó $\vec{u}$ cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d

Ví dụ 3. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1, d_2, với $d_1 : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-4}{3}; d_2 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

Lời giải.

Ví dụ 4. Cho đường thẳng d_1 là giao của hai mặt phẳng $(P) : 2x - z = 3, (Q) : 3x - 2y = 8$ và đường thẳng d_2 là giao của hai mặt phẳng $(P') : -2x + z = 1, (Q') : 3x - 10y + 6z = 8$. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1, d_2.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng song song $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+5}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(5; 1; -5)$ và đường thẳng $d_1 : \dfrac{x+1}{3} =$

$\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Gọi d_2 là đường thẳng qua A và song song với d_1. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3), B(1;-2;1$ và đường thẳng $(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t\\z=-1-2t\end{cases}$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là các đường thẳng qua A, B và song song với (Δ). Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều d_1, d_2 và nằm trong mặt phẳng chứa d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;2;-1), B(3;-4;1), B'(2;-1;3)$ và $D'(0;3;5)$. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều các đường thẳng AB', DC' và nằm trong mặt phẳng chứa các đường thẳng đó.

Lời giải.

Bài 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;2;-1), B(3;-4;1), B'(2;-1;3)$ và $D'(0;3;5)$. Viết phương trình đường thẳng d song song, cách đều các đường thẳng AA', BB', CC', DD'.

Lời giải.

Dạng 14. Viết phương trình đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cho trước

Để viết phương trình đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cho trước ta có thể thực hiện theo các cách sau:

Cách 1:

- Đưa phương trình d_1, d_2 về dạng tham số và xác định các véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ của các đường thẳng d_1, d_2.
- Lấy các điểm bất kỳ $A \in d_1, B \in d_2$ và tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$. Khi đó đường thẳng AB là đường vuông góc chung của d_1, d_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$. Từ đó tìm được tọa độ của các điểm A, B.
- Đường vuông góc chung d của d_1, d_2 là đường thẳng đi qua các điểm A, B

Cách 2:

- Xác định các véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, khi đó $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ là một véc-tơ chỉ phương của d.
- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua d_1 và có véc-tơ pháp tuyến $[\vec{u}_1, \vec{u}]$ và phương trình mặt phẳng (Q) đi qua d_2 và có véc-tơ pháp tuyến $[\vec{u}_2, \vec{u}]$.
- Đường vuông góc chung d của d_1, d_2 chính là giao tuyến của các mặt phẳng (P), (Q).

Ví dụ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 ở đó d_1 là giao của hai mặt phẳng $(P): 3x - 2y = -1, (Q): y + 3z = 8$; d_2 là giao của hai mặt phẳng $(P'): x - 4y = -1, (Q): 3y - z = 4$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1, d_2.

Lời giải.

Ví dụ 6. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng sau $d_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}; d_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng chéo nhau $d_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng chéo nhau $d_1:\begin{cases}x=4+t\\y=3+3t\\z=3+2t\end{cases}$ và $d_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng chéo nhau $d_1:\begin{cases}x=4+2t\\y=4+2t\\z=-3-t\end{cases}$ và $d_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng chéo nhau $d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-3+3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2+s\\y=-3+2s\\z=1+3s\end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

Lời giải.

Bài 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $A(1;2;0)$, $B(4;6;0)$, $D(-3;5;0)$. Viết phương trình đường vuông góc chung của các đường thẳng SH và BC, ở đó H là tâm của hình vuông $ABCD$.

Lời giải.

Dạng 15. Viết phương trình tham số của đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng d trên mặt phẳng (P)

Dạng bài này thường có hai hướng để làm

- Thứ nhất, lấy hai điểm bất kỳ trên d và xác định hình chiếu vuông góc xuống (P), tiếp tục viết phương trình đi qua hai hình chiếu ta được phương trình d'
- Thứ hai, viết phương trình mặt phẳng (Q) qua d và vuông góc với (P), khi đó d' là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P),(Q)$.
- Trong trường hợp d' song song hay cắt (P), ta chỉ cần lấy hình chiếu của một điểm xuống mặt phẳng (P).

Ví dụ 7. Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ lên mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$.

Lời giải.

Ví dụ 8. Cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$, hãy viết phương trình đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của $d'\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$ lên (P).

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{1}$ trên mặt phẳng tọa độ (Oxy).

Lời giải.

Bài 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3), B(2;5;7)$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oxz).

Lời giải.

Bài 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình $d: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$, $(P): 3x + y - z - 4 = 0$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (P).

Lời giải.

Bài 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên mặt phẳng $(P): 3x - y + z - 9 = 0$.

Lời giải.

Bài 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm I. Biết $A(1;2;1$, $B(2;3;0)$, $D(-2;1;2)$ và $S(0;4;3)$. Gọi M là trung điểm SB và G là trọng tâm tam giác SBD. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng MG trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

BÀI 4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

A – ĐỀ SỐ 1A

Câu 1 (3 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác BCD.

b) Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

c) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD).

Lời giải.

Câu 2 (2 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;3;-2)$ và $B(0;3;-1)$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng AB.

b) Giả sử AB cắt mặt cầu tâm O bán kính $\sqrt{10}$ tại hai điểm phân biệt M,N. Tính độ dài MN.

Lời giải.

Câu 3 (2 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) biết rằng (P) chứa trục Ox và khoảng cách từ $A(0;1;2)$ đến (P) bằng 1.

Lời giải.

Câu 4 (3 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình $d_1 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{2} = z-3$ và $d_2 : \dfrac{x+5}{6} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{2}$.

a) Chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau, gọi giao điểm là I.

b) Tìm tọa độ các điểm A, B lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác AIB cân tại I và có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{41}}{42}$.

Lời giải.

B – ĐỀ SỐ 1B

Câu 1 (3 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2,5,1)$, $B(3,2,4)$, $C(-1,7,3)$, $D(2,-4,8)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

c) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm D và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Câu 2 (3 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;0;1)$ và $N(6;-2;1)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua O và vuông góc với MN.

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua M,N và tạo với (Oyz) một góc α thỏa $\cos\alpha = \dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Câu 3 (2 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình $d_1 : x = y = \dfrac{z}{2}$ và $d_2 : \dfrac{x+1}{-2} = y = z-1$.

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Tìm tọa độ các điểm A,B lần lượt thuộc d_1,d_2 sao cho MN song song với mặt phẳng $(P): x-y+z=0$ và độ dài $MN=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 4 (2 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1:\begin{cases}x=1\\y=1\\z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$, $d_2:\begin{cases}x=2\\y=u\\z=1+u\end{cases}(u\in\mathbb{R})$, $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả d_1, d_2 và có tâm thuộc đường thẳng Δ.

Lời giải.

C – ĐỀ SỐ 2A

Câu 1. *(2,0 điểm)* Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{3}=1$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Tìm tọa độ trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACB$.

Lời giải.

Câu 2. *(2,0 điểm)* Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=3$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và tiếp xúc với (S).

Lời giải.

Câu 3. ***(2,0 điểm)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(3;10;1)$ và cắt cả d_1 và d_2.

Lời giải.

Câu 4. ***(2,0 điểm)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua H, cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm $\triangle ABC$. Tìm tọa độ A, B, C.

Lời giải.

Câu 5. ***(2,0 điểm)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(Q)\colon x+2y+2z-3=0$. Gọi α là góc giữa d và (Q). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với (Q) một góc α.

Lời giải.

D – ĐỀ SỐ 2B

Câu 1. *(2,0 điểm)* Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=1$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Tìm tọa độ trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ACB$.

Lời giải.

Câu 2. *(2,0 điểm)* Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-y-z+3=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2mx+3m=0$ (m là tham số). Tìm m để mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Lời giải.

Câu 3. ***(2,0 điểm)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng d_1: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$; d_2: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{3}$ và d_3: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với d_2 đồng thời cắt cả d_1 và d_3.

Lời giải.

Câu 4. ***(2,0 điểm)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(6;0;0)$, $B(0;6;0)$ và $C(0;0;3)$. Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.

Lời giải.

Câu 5. ***(2,0 điểm)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $x-2y+2z+1=0$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x-6y-6z+17=0$. Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của (S) và (α). Viết phương trình mặt cầu (S') chứa (C) và tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz).

Lời giải.

E – ĐỀ SỐ 3A

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;0;-1)$, $C(1;-5;3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC có 3 đỉnh $A(m;0;0)$, $B(2;1;2)$, $C(0;2;1)$. Tìm m để $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{35}}{2}$.

Lời giải.

Câu 3. Cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;1)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Câu 4. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(3;-1;0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 4x-2y-z+3=0$.

Lời giải.

Câu 5. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm $A(2;0;0)$, $B(1;2;3)$, $C(0;-1;4)$.

Lời giải.

Câu 6. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=9$, biết rằng (α) song song với mặt phẳng $(\beta)\colon 2x-3y+\sqrt{3}z=0$.

Lời giải.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-4}{1}$ sao cho khoảng cách từ $A(5;3;1)$ đến (P) là lớn nhất.

Lời giải.

Câu 8. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(0;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 8x+4y+3z-1=0$.

Lời giải.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z-4=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-11}{-5}$. Hãy tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Lời giải.

Câu 10. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1;1)$ và cắt cả hai đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=2-1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$, $\Delta'\colon \begin{cases} x=-2-t' \\ y=3+3t' \\ z=-t' \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

F – ĐỀ SỐ 3B

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;2;5)$, $B(6;4;1)$, $C(3;1;1)$, $D(1;5;3)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$, điểm D nằm trên trục Oy và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 5. Hãy tìm tọa độ của điểm D.

Lời giải.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;6)$, $B(-1;2;4)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-2y+z-5=0$. Hãy tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MA+MB$ bé nhất.

Lời giải.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-3z+10=0$ và điểm $M(2;-2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng (α).

Lời giải.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải.

Câu 6. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$; $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A; B và vuông góc với (P).

Lời giải.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1,0,0)$, $B(0,-2,3)$ và $C(1,1,1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai điểm A, B và cách điểm C một khoảng bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;2)$, $B(2;-1;3)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

Lời giải.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ và $d'\colon \begin{cases} x=2t \\ y=1+4t \\ z=2+6t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Hãy xét vị trí tương đối của d và d'.

Lời giải.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

Lời giải.

G–ĐỀ SỐ 4A

Câu 1. Cho 4 điểm $A(1;1;1)$, $B(3;3;1)$, $C(3;1;3)$, $D(1;3;3)$.

a) Chứng minh $ABCD$ là một tứ diện đều. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

b) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$.

c) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua AB và chia tứ diện $ABCD$ thành hai phần sao cho tỉ lệ thể tích của chúng là $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P).

b) Gọi (d) đường thẳng đi qua A và song song với (P). Hãy viết phương trình đường thẳng (d) mà khoảng cách từ B đến (d) là nhỏ nhất.

Lời giải.

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+9}{6}$, $\Delta_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

a) Chứng minh rằng Δ_1 và (P) cắt nhau. Tìm tọa độ giao điểm của Δ_1 và (P).

b) Chứng minh rằng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Tính khoảng cách giữa chúng.

c) Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau, biết M có tọa độ nguyên.

Lời giải.

H – ĐỀ SỐ 4B

Câu 1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$.

a) Chứng minh $ABCD$ là một tứ diện. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Lời giải.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

b) Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải.

Câu 3. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ và $\Delta_2: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$.

a) Chứng minh rằng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Tính khoảng cách giữa chúng.

b) Tìm tọa độ chân đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2.

c) Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

Lời giải.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(2;1;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất.

Lời giải.