SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ KIỂM TRA CHỌN ĐỘI TUYỂN CHÍNH THỨC DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM 2019

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ nhất: **21/08/2018.**

Câu 1. (*5 điểm*) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n + 1} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*.$

a) Chứng minh rằng: dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{2018} u_k^2 < 4036.$

Câu 2: *(5 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ có H là trực tâm, nội tiếp đường tròn (O). BE, CF là các đường cao của tam giác ABC $(E \in AC, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G, đường thẳng AG cắt đường tròn (O) tại M.

a) Gọi T là trung điểm của BC. Chứng minh: $GH \perp AT$.

b) Lấy điểm P nào đó trên tia BC (P nằm ngoài đoạn BC). Đường tròn (O) cắt AP tại I và cắt đường tròn đường kính AP tại Q (I, Q đều khác A). AQ cắt BC tại J. Chứng minh rằng: đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 3. (*5 điểm*) Cho $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ là đa thức với hệ số thực, n là số nguyên dương chẵn và có n nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt). Giả sử y là số thực dương thỏa mãn với mọi số thực $t < y$ thì $P(t) > 0$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{P(0)} - \sqrt[n]{P(y)} \geq y.$

Câu 4. (*5 điểm*) Cho 2018 số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_{2018}$ và số nguyên $a > 1$ sao cho a chia hết cho $a_1.a_2.....a_{2018}$. Chứng minh rằng: $a^{2019} + a - 1$ không chia hết cho $(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)...(a + a_{2018} - 1)$.

............................HẾT...............................

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ KIỂM TRA CHỌN ĐỘI TUYỂN CHÍNH THỨC DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM 2019

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ nhất: **21/08/2018.**

HƯỚNG DẪN CHẤM

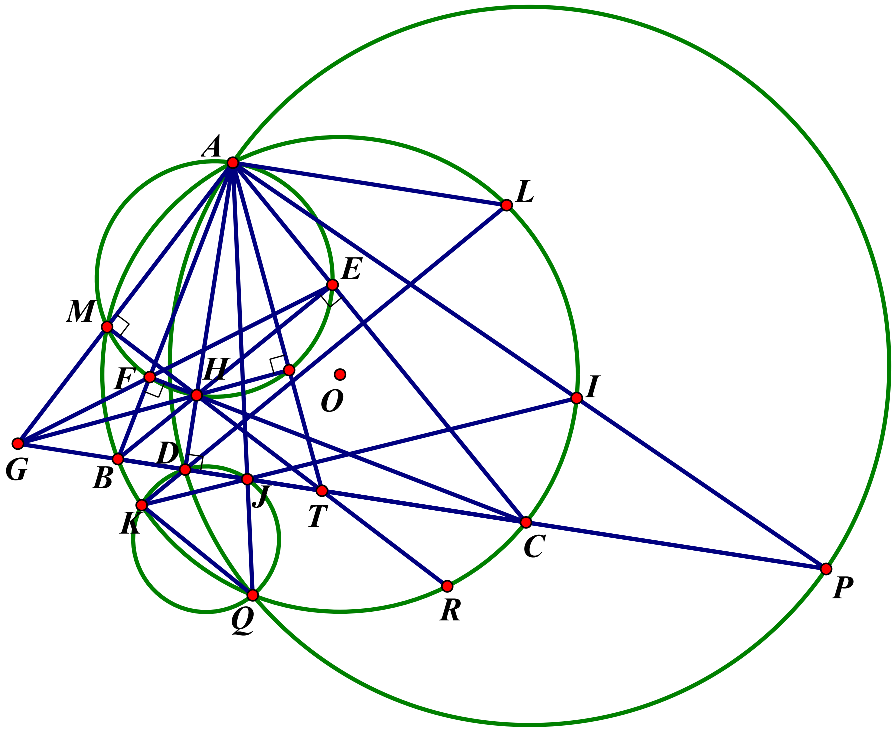
(Đáp án, hướng dẫn này có 6 trang)

Yêu cầu chung

*** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lô gic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.**
*** Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu hình, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.**
*** Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,5 điểm. Đối với điểm thành phần lớn hơn 0,5 điểm thì tuỳ tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,5 điểm.**
*** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng bài.**
*** Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài**

BÀI	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1	***Cho dãy số*** (u_n) ***thỏa mãn*** $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=1+\dfrac{1}{u_n+1} \end{cases} \forall n\in\mathbb{N}^*.$ ***a) Chứng minh: dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*** ***b) Chứng minh rằng:*** $\sum\limits_{k=1}^{2018} u_k^2 < 4036.$	**5,0 điểm**
1a		**2,5 điểm**

	Từ cách cho dãy số ta có: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Ta có $u_2 = \frac{3}{2}; u_3 = \frac{7}{5} > u_1; u_4 = \frac{17}{12} < u_2$ Xét hàm số $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$, ta có $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow 1 < f(x) < 2, \forall x > 0$. Ta có $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.	**1,0**
	$u_1 < u_3 \Rightarrow f(\mathrm{u}_1) > f(u_3) \Rightarrow u_2 > u_4 \Rightarrow f(u_2) < f(u_4) \Rightarrow u_3 < u_5 \Rightarrow ...$ suy ra dãy (u_{2n+1}) tăng và dãy (u_{2n}) giảm. Theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra $(u_{2n+1}), (u_{2n})$ là các dãy hội tụ.	**0,5**
	Giả sử $\lim u_{2n} = a$; $\lim u_{2n+1} = b \ \ (a, b \in [1;2])$ Do hàm f liên tục nên: Từ $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \Rightarrow \lim u_{2n+1} = \lim f(u_{2n}) \Rightarrow b = f(a)$ Từ $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \Rightarrow \lim u_{2n+2} = \lim f(u_{2n+1}) \Rightarrow a = f(b)$.	**0,5**
	Giải hệ phương trình $\begin{cases} b = 1 + \frac{1}{1+a} \\ a = 1 + \frac{1}{1+b} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}$. Vậy $\lim u_n = \sqrt{2}$.	**0,5**
1b		**2,5 điểm**
	Từ giả thiết, ta thấy $u_n \ge 1, \forall n \ge 1$. Mà $u_{n+1}^2 - 2 = \left(1 + \frac{1}{u_n + 1}\right)^2 - 2 = \frac{2 - u_n^2}{(u_n + 1)^2}$.	**0,5**
	Do đó : $u_{n+1}^2 > 2 \Leftrightarrow u_n^2 < 2$.	**0,5**
	Ta lại có $u_1 = 1$ suy ra $u_n^2 < 2$ nếu *n* lẻ; $u_n^2 > 2$ nếu *n* chẵn.	**0,5**

	Với mọi n lẻ ta có $u_{n+1}^2-2=\dfrac{2-u_n^2}{\left(u_n+1\right)^2}<2-u_n^2$. $\Rightarrow u_n^2+u_{n+1}^2<4$.	**0,5**
	Do đó $\sum\limits_{k=1}^{2018}u_k^2=\left(u_1^2+u_2^2\right)+\left(u_3^2+u_4^2\right)+...+\left(u_{2017}^2+u_{2018}^2\right)<1009.4$ $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{2018}u_k^2<4036.$	**0,5**
Câu 2	***Cho tam giác*** ABC ***nhọn*** $\left(AB<AC\right)$ ***có*** H ***là trực tâm, nội tiếp đường tròn (O).*** BE,CF ***là các đường cao của tam giác ABC*** $\left(E\in AC,F\in AB\right)$***. Đường thẳng EF cắt BC tại G, đường thẳng AG cắt (O) tại M.*** ***a) Gọi T là trung điểm của BC. Chứng minh*** $GH\perp AT$ ***.*** b) ***Lấy điểm P nào đó trên tia BC(P nằm ngoài đoạn BC). Đường tròn (O) cắt AP tại I và cắt đường tròn đường kính AP tại Q (I, Q đều khác A). AQ cắt BC tại J. Chứng minh rằng: đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.***	**5,0 điểm**
2a		**2,5 điểm**

	Ta có tứ giác BCEF nội tiếp nên $GE.GF = GB.GC = GM.GA$	**0,5**
	Mặt khác $GB.GC = GM.GA$ Từ đó suy ra $GE.GF = GM.GA$ Do đó tứ giác AMFE nội tiếp	**0,5**
	Hơn nữa ta có tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH nên M nằm trên đường tròn đường kính AH hay $MH \perp MA$	**0,5**
	Gọi R là giao điểm của MH với (O) ta có $\widehat{AMR} = 90^0$ nên AR là đường kính của (O) suy ra tứ giác HBRC là hình bình hành	**0,5**
	Do đó HR cắt BC tại trung điểm của BC hay M, H ,T thẳng hàng. Vậy H là trực tâm của tam giác AGT nên $GH \perp AT$.	**0,5**
2b		**2,5 điểm**
	Gọi K là giao điểm của IJ với (O). Ta chứng minh K cố định. Thật vậy: Gọi D là giao điểm của AH với BC, Gọi L là giao điểm của KD với (O) (L khác K)	**0,5**
	vì $\widehat{ADP} = 90^0$ suy ra D thuộc đường tròn đường kính AP	**0,5**
	Ta có $\widehat{QDJ} = \widehat{QAP} = \widehat{QAI} = \widehat{QKI} = \widehat{QKJ}$ suy ra tứ giác DKQJ nội tiếp	**0,5**
	Do đó $\widehat{JDL} = \widehat{KQJ} = \widehat{KQA} = \widehat{KLA}$ suy ra AL//BC nên L cố định	**0,5**
	Mặt khác D cố định nên K cố định.	**0,5**
Câu 3	***Cho*** $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ ***là đa thức với hệ số thực, n là số nguyên dương chẵn và có*** n ***nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt). Giả sử*** y ***là số thực dương thỏa mãn với mọi số thực*** $t < y$ ***thì*** $P(t) > 0$***. Chứng minh rằng:*** $\sqrt[n]{P(0)} - \sqrt[n]{P(y)} \ge y.$	**5,0 điểm**

	Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ là n nghiệm của $P(x)$. Nếu tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $x_i < y$ thì $P(x_i) > 0$ (mâu thuẫn vì x_i là nghiệm của $P(x)$) Vậy ta có $0 < y \le x_i (i = \overline{1, n})$	**1,0**
	Theo định lý Bezout,ta có: $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$. Vì n chẵn nên: $P(0) = (-1)^n x_1 x_2 .... x_n = x_1 x_2 .... x_n > 0$ $P(y) = (y - x_1)(y - x_2)...(y - x_n) = (x_1 - y)(x_2 - y)...(x_n - y) \ge 0$	**1,5**
	Ta cần chứng minh: $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \ge y + \sqrt[n]{(x_1 - y)(x_2 - y)...(x_n - y)}$	**1,0**
	Áp dụng BĐT Minkowski thứ II ta có: $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} = \sqrt[n]{(y + x_1 - y)(y + x_2 - y)...(y + x_n - y)}$ $\ge \sqrt[n]{y^n} + \sqrt[n]{(x_1 - y)(x_2 - y)...(x_n - y)} = y + \sqrt[n]{(x_1 - y)(x_2 - y)...(x_n - y)}$ Suy ra điều phải chứng minh.	**1,0**
	Dấu bằng xảy ra khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$	**0,5**
Câu 4	***Cho 2018 số nguyên dương*** $a_1, a_2, ..., a_{2018}$ ***và số nguyên a > 1 sao cho a chia hết cho*** $a_1.a_2.....a_{2018}$***. Chứng minh rằng*** $a^{2019} + a - 1$ ***không chia hết cho*** $(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)...(a + a_{2018} - 1)$	**5,0 điểm**
	Ta chứng minh bài toán trong trường hợp thay số 2018 bởi số n nguyên dương bất kì. Giả sử $(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)...(a + a_n - 1) \mid a^{n+1} + a - 1$, khi đó tồn tại k nguyên dương để $a^{n+1} + a - 1 = k\left[(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)...(a + a_n - 1)\right]$ (1) Ta chứng minh k =1. Thật vậy Xét theo $\bmod(a-1)$, ta có $a^{n+1} + a - 1 \equiv 1(\bmod(a-1))$ và $k\left[(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)...(a + a_n - 1)\right] \equiv k a_1 a_2 ... a_n (\bmod(a-1))$	**1,0**

	Do đó $ka_1a_2...a_n \equiv 1\left(\bmod\left(a-1\right)\right)$ $\quad(2)$. Dễ thấy $k \neq a$	
	Nếu $k \geq a+1$ thì $VP\left(1\right) \geq \left(a+1\right)a^n > a^{n+1}+a-1$ (mâu thuẫn). Suy ra $k \in \left\{1;2;....;a-1\right\}$ Theo giả thiết $\left(a_1a_2...a_n;a-1\right)=1$ nên chỉ có duy nhất $k \in \left\{1;2;...;a-1\right\}$ thỏa mãn (2) và dễ thấy $k = \dfrac{a}{a_1a_2...a_n}$	**1,0**
	Nếu k > 1 thì $\left(k;a\right)=k>1$, mà $VT\left(1\right) \equiv -1\left(\bmod a\right)$ nên mâu thuẫn. Do đó k = 1	**1,0**
	Khi đó $a = a_1a_2...a_n$ và $a^{n+1}+a-1 = \left(a+a_1-1\right)\left(a+a_2-1\right)...\left(a+a_n-1\right)$ Từ đó suy ra $\left(a+a_1-1\right)\left(a+a_2-1\right)...\left(a+a_n-1\right) \equiv -1\left(\bmod a\right) \Rightarrow \left[\left(a_1-1\right)\left(a_2-1\right)...\left(a_n-1\right)+1\right] \vdots a$	**1,0**
	Mặt khác $\left[\left(a_1-1\right)\left(a_2-1\right)...\left(a_n-1\right)+1\right] \leq a$. Dấu đẳng thức xảy ra khi n = 1 và $a = a_1$ Khi đó $a^2+a-1 = 2a-1 \Leftrightarrow a=1$ (vô lý). Bài toán được chứng minh. Xét trường hợp n = 2018, ta có điều phải chứng minh cho bài toán.	**1,0**

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ KIỂM TRA CHỌN ĐỘI TUYỂN CHÍNH THỨC
DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM 2019

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ hai: **22/08/2018.**

Câu 5: *(6 điểm)*

Tìm tất cả các hàm số f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức $f(x-y)+f(xy)=f(x)-f(y)+f(x)f(y)$ với mọi số thực x,y.

Câu 6: *(7 điểm)*

Cho tam ABC có M là trung điểm BC. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC,CA và AB. Đường thẳng EF cắt các đường thẳng BI,CI và AM lần lượt tại X,Y và N.

a) Giả sử B,C cố định và A thay đổi trong mặt phẳng sao cho $\widehat{BAC}=\alpha$ không đổi $(0^0<\alpha<180^0)$. Chứng minh: độ dài đoạn thẳng XY không đổi.

b) Giả sử tam giác ABC không cân. Chứng minh: ba điểm N,I,D thẳng hàng và $\frac{NX}{NY}=\frac{AC}{AB}$.

Câu 7. (*7 điểm*)

Cho số nguyên dương $n\geq 2$. Điền các số $1,2,3,\ldots,n^2$ vào tất cả các ô vuông của một bảng vuông kích thước $n\times n$, mỗi số một ô vuông. Chứng minh rằng: tồn tại hai ô vuông kề nhau (có chung một cạnh) mà hiệu hai số trong đó không nhỏ hơn n.

............................HẾT...............................

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ KIỂM TRA CHỌN ĐỘI TUYỂN CHÍNH THỨC
DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM 2019

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ hai: **22/08/2018.**

HƯỚNG DẪN CHẤM

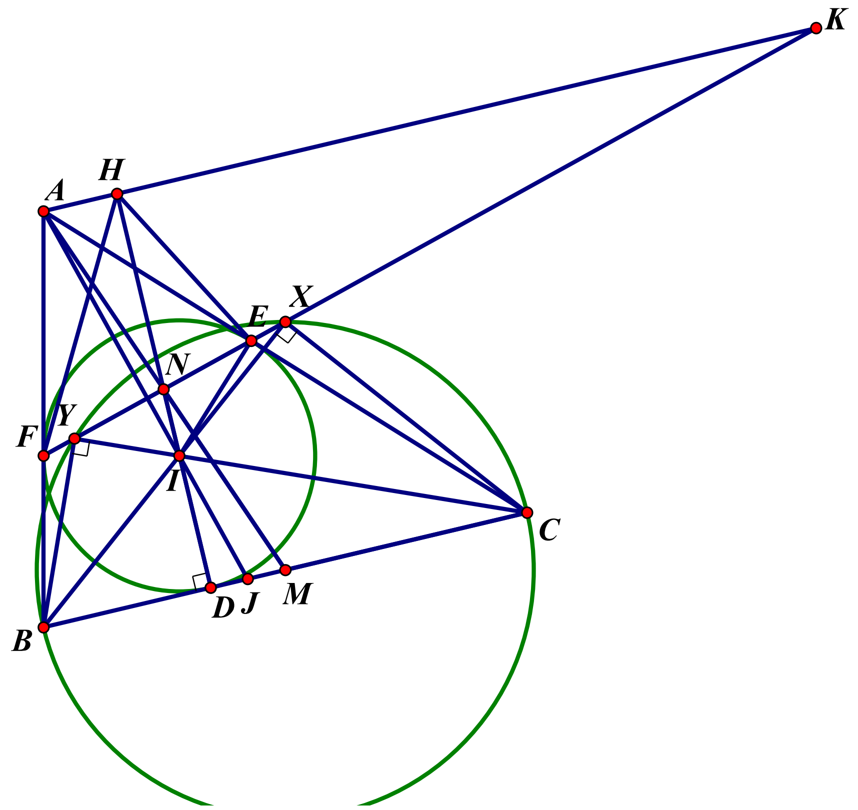
(Đáp án, hướng dẫn này có 5 trang)

yêu cầu chung

*** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lô gic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.**
*** Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 2 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.**
*** Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,5 điểm. Đối với điểm thành phần lớn hơn 0,5 điểm thì tuỳ tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,5 điểm.**
*** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng bài.**
*** Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài**

Câu	Nội dung	Điểm
1	***Tìm tất cả các hàm số f :*** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***thỏa mãn hệ thức:*** $f(x-y)+f(xy)=f(x)-f(y)+f(x)f(y)$ ***với mọi số thực x, y.***	**6.0 điểm**
	Trong (1) thay x=y=0 ta thấy $2f(0)=\mathrm{f}^2(0)$. Suy ra $f(0)=2$ hoặc $f(0)=0$	**0,5**
	Trường hợp 1: $f(0)=2$ Thay x=0 vào (1) ta được $f(-y)+2=2-\mathrm{f(y)}+2\,\mathrm{f(y)}$ hay $f(-y)=f(y)$	**0,5**
	Trong (1) thay y bởi –y và kết hợp với $f(-y)=f(y)$ ta có $f(x+y)+\mathrm{f(xy)}=\mathrm{f(x)}-\mathrm{f(y)}+\mathrm{f(x)\,f(y)}$ (2)	**0,5**
	Từ (1) và (2) suy ra $f(x-y)=\mathrm{f(x+y)}$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. Từ đó suy ra $f(x)$ là hàm hằng mà f(0)=2 nên f(x)=2	**0,5**
	Trường hợp 2: $f(0)=0$ Thay x=0 vào (1) ta thu được $f(-y)=-f(y)$, với mọi $y\in\mathbb{R}$ (3)	**0,5**
	Trong (1) thay y bởi –y và kết hợp (3) ta thu được $f(x+y)-\mathrm{f(xy)}=\mathrm{f(x)}+\mathrm{f(y)}-\mathrm{f(x)\,f(y)}$ (4)	**0,5**

	Cộng (1) và (3) theo vế, ta có $f(x-y)+\mathrm{f(x+y)}=2\,\mathrm{f(x)}$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ (5)	**0,5**
	Trong (5) thay x=y và kết hợp $f(0)=0$ ta được $\mathrm{f(2x)}=2\,\mathrm{f(x)}$ Vậy (5) trở thành $f(x-y)+\mathrm{f(x+y)}=\mathrm{f(2x)}$	**0,5**
	Đặt $u=x-y$,$v=x+y$ ta có $f(\mathrm{u})+\mathrm{f(v)}=\mathrm{f(u+v)}$ với mọi $\mathrm{u,v}\in\mathbb{R}$ Hay $f(x+y)=\mathrm{f(x)}+\mathrm{f(y)}$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ (6) Vậy f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$	**0,5**
	Từ (4) và (6) suy ra $f(xy)=\mathrm{f(x)f(y)}$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ (7) Vậy f là hàm nhân tính trên $\mathbb{R}$	**0,5**
	Từ đó ta được hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=0$ và điều kiện (6), (7) là $f(x)=0$ và $f(x)=x$	**0,5**
	Thử lại ta thấy cả ba hàm số $f(x)=0$, $f(x)=2$ $f(x)=x$ đều thỏa mãn	**0,5**
2	***Cho tam*** ABC ***có M là trung điểm*** BC***. Gọi*** D,E,F ***lần lượt là tiếp điểm của đường tròn*** (I) ***nội tiếp tam giác*** ABC ***với các cạnh*** BC,CA ***và*** AB***. Đường thẳng*** EF ***cắt các đường thẳng*** BI,CI ***và*** AM ***lần lượt tại*** X,Y ***và*** N ***.*** ***a) Giả sử*** B,C ***cố định và*** A ***thay đổi trong mặt phẳng sao cho*** $\widehat{BAC}=\alpha$ ***không đổi*** $(0^0<\alpha<180^0)$ ***. Chứng minh độ dài đoạn thẳng*** XY ***không đổi.*** ***b) Giả sử tam giác*** ABC ***không cân. Chứng minh ba điểm*** N,I,D ***thẳng hàng và*** $\dfrac{NX}{NY}=\dfrac{AC}{AB}$.	**7.0 điểm**

2a		
		2,5 điểm
	Xét tứ giác IEXC ta có $\widehat{XEC}=\widehat{FEA}=90^0-\dfrac{\widehat{A}}{2}$ (1) $\widehat{XIC}=\dfrac{\widehat{B}}{2}+\dfrac{\widehat{C}}{2}=90^0-\dfrac{\widehat{A}}{2}$ (2)	**0,5**
	Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{XEC}=\widehat{XIC}$ Suy ra tứ giác IEXC nội tiếp mà $IE\perp BC$ suy ra $\widehat{CXI}=90^0$ hay $\widehat{BXC}=90^0$ (3)	**0,5**
	Tương tự ta có $\widehat{BYC}=90^0$ (4) Từ (3) và (4) suy ra Tứ giác BCXY nội tiếp (5)	**0,5**
	Mặt khác $\widehat{IEC}=\widehat{IXC}=90^0$ Suy ra tứ giác ICXE nội tiếp.	**0,5**
	Suy ra $\widehat{XCY}=\widehat{XCI}=\widehat{FEI}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$ (6) Ta có B, C cố định kết hợp với (5) và (6) suy ra XY không đổi.	**0,5**

2b		**4,5 điểm**
	Dựng đường thẳng d đi qua A song song với BC cắt EF tại K . Giả sử ID cắt d tại H và cắt EF tại N' ta chứng minh N' trùng N.	**0,5**
	Thật vậy: Vì các điểm F, H,E cùng nhìn AI dưới một góc vuông nên tứ giác HFIE nội tiếp suy ra $\widehat{IHF} = \widehat{FEI} = \widehat{EFI} = \widehat{IHE}$ Do đó HI là phân giác góc $\widehat{FHE}$	**1,0**
	Hơn nửa $HI \perp HK$ nên $(KN'FE) = -1 \Rightarrow (AK, AN', AF, AE) = -1$ Ta có $d // BC$, M là trung điểm BC nên $(AK, AM, AB, AC) = -1$ hay $(AK, AN, AF, AE) = -1$ Từ đó suy ra N trùng với N'.	**0,5**
	Gọi J là giao điểm của AI với BC Từ tứ giác BCXY nội tiếp, suy ra $\widehat{NXY} = \widehat{YXB} = \widehat{YCB} = \widehat{ICJ}$	**0,5**
	Mặt khác $\widehat{NIX} = \widehat{BID} = 90^0 - \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \widehat{JIC}$ Suy ra $\Delta NIX \sim \Delta JIC \Rightarrow \frac{NX}{NI} = \frac{JB}{JI}$ (*)	**1,0**
	Tương tự ta cũng có $\frac{NY}{NI} = \frac{JB}{JI}$ (**)	**0,5**
	Từ (*) và (**) suy ra $\frac{NX}{NY} = \frac{JC}{JB} = \frac{AC}{AB}$	**0,5**
3	*Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Điền các số $1, 2, 3, \ldots, n^2$ vào tất cả các ô vuông của một bảng vuông kích thước $n \times n$, mỗi số một ô vuông. Chứng minh rằng: tồn tại hai ô vuông kề nhau (có chung một cạnh) mà hiệu hai số trong đó không nhỏ hơn n.*	**7 điểm**
	Gọi k là số nguyên nhỏ nhất sao cho tồn tại một hàng hoặc một cột chỉ chứa các số thuộc tập $\{1, 2, \ldots, k\}$	**1,0**

	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 11 & 4 & 10 \\ \hline 16 & 2 & 14 & 5 \\ \hline 7 & 13 & 8 & 15 \\ \hline 12 & 3 & 6 & 9 \\ \hline \end{array}$ Chẳng hạn trong hình vẽ trên, nếu xét theo hàng thì phần tử lớn nhất mỗi hàng là 11,16,15,12, số bé nhất trong đó là 11. Nếu xét theo cột, các số lớn nhất là 11,16,14,15, số bé nhất trong đó là 11. So sánh hàng và cột đó, thấy hàng 1 là hàng chứa các số 1,11,4,10, đều là các số thuộc tập $\{1,2,\ldots,11\}$	
	Giả sử số k thuộc hàng r và cột c, các ô còn lại của hàng r đều thuộc tập $\{1,2,\ldots,k-1\}$. Nhận xét: Mỗi cột trừ cột c đều chứa ít nhất một số $\geq k+1$ và không phải tất cả các ô cùng cột đều $\geq k+1$. Suy ra cột thứ i tùy ý phải chứa một cặp (a_i,b_i) kề nhau mà $a_i \leq k-1, b_i \geq k+1$.	**1,5**
	(1) Nếu tồn tại một ô của cột c chứa số $\geq k+1$ thì cột c chứa cặp (a,b) kề nhau mà $a \leq k, b \geq k+1$ (2) Nếu mọi ô của cột c đều $\leq k$ thì c chứa cặp (a,b) kề nhau mà $a \leq k-1, b=k$.	**1,0**
	Như vậy, trong mọi trường hợp, tồn tại cặp (a_i,b_i) kề nhau trong cột thứ i mà $\max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\} = A < B = \min\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$. Nếu (1) xảy ra thì A = k, B = k + 1. Nếu (2) xảy ra thì A= k - 1, B = k.	**1,0**
	Từ đó $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq B+B+1+B+2+\cdots+B+n-1=(B+\frac{n-1}{2})n$ và $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq A+A-1+\cdots+(A-n+1)=(A-\frac{n-1}{2})n$.	**1,5**
	Suy ra $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i) \geq n^2$ nên tồn tại $j: b_j-a_j \geq n$. Điều phải chứng minh.	**1,0**