

ĐỀ CHÍNH THỨC

Lưu ý : Thí sinh làm mỗi câu trên một tờ giấy riêng và ghi rõ số thứ tự câu ở trang 1 của mỗi tờ giấy thi.
Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hai đa thức $P(x) = x^4 - 2x - 1$ và $Q(x) = x^6 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 1$.

- Chứng minh đa thức $P(x)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.
- Gọi hai nghiệm thực phân biệt của $P(x)$ là u và v . Chứng minh uv là một nghiệm của $Q(x)$.

Câu 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + x_n^2} - x_n}{1 + \sqrt{1 + x_n^2} + x_n}$ với mọi n nguyên dương. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho số nguyên dương m ($m \geq 2$). Gọi p là ước nguyên tố của $2^{2^m} + 1$. Giả sử $p = k \cdot 2^n + 1$ với k là số nguyên dương lẻ và n là số nguyên dương.

- Chứng minh $n \geq m + 1$.
- Chứng minh $k^{2^{m-1}} - 1$ chia hết cho p .

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC cắt đoạn thẳng AM tại K ; tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng BC ở điểm S .

- Chứng minh $MK \cdot MA = MB^2$ và $SA = SK$.
- Đường thẳng SK cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q . Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác TPQ tiếp xúc với đường tròn (O) .

Câu 5 (4,0 điểm). Ban chấp hành Đoàn trường THPT X gồm có n thành viên. Trong năm học, Đoàn trường tổ chức m chương trình, mỗi chương trình có đúng k thành viên trong ban chấp hành tham gia. Mỗi thành viên trong ban chấp hành tham gia ít nhất một chương trình.

- Cho $m = 8; k = 3$. Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có đúng một thành viên trong ban chấp hành tham gia cả hai chương trình đó. Chứng minh $n = 17$.
- Cho $n = 25; k = 10$. Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có không quá 3 thành viên trong ban chấp hành cùng tham gia. Chứng minh $m \leq 6$.

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi **KHÔNG** giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: SBD:

Trường: Tỉnh/TP:

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC
MÔN : TOÁN – KHỐI : 11

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hai đa thức $P(x) = x^4 - 2x - 1$ và $Q(x) = x^6 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 1$.

- a) Chứng minh đa thức $P(x)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.
b) Gọi hai nghiệm thực phân biệt của $P(x)$ là u và v . Chứng minh uv là một nghiệm của $Q(x)$.

Câu	Nội dung	Điểm
1a	$P'(x) = 4x^3 - 2; P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$	1,0
	Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ và $P\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) < 0 \Rightarrow P(x)$ có đúng hai nghiệm thực.	1,0
1b	Dễ thấy $u \neq 0; v \neq 0$ và $u^4 = 2u + 1; v^4 = 2v + 1.$	0,5
	Đặt $\alpha = uv$, ta có $\alpha^3 = \left(\frac{1}{u} + 2\right)\left(\frac{1}{v} + 2\right) = \frac{1}{\alpha} + 2\frac{u+v}{\alpha} + 4 \Rightarrow \alpha(\alpha^3 - 4) = 1 + 2(u+v)$ (*)	0,5
	Lại có $2(u-v) = u^4 - v^4 = (u-v)(u^3 + v^3 + uv(u+v))$ $\Rightarrow 2 = \left(\frac{1}{u} + 2\right) + \left(\frac{1}{v} + 2\right) + uv(u+v) = 4 + \frac{u+v}{\alpha} + \alpha(u+v) = 4 + (u+v)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ $\Rightarrow u+v = \frac{-2\alpha}{\alpha^2 + 1}$	0,5
	Thay vào (*) thu được $\alpha^4 - 4\alpha = 1 - \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 1} \Rightarrow \alpha^6 + \alpha^4 - 4\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0.$ Vậy $\alpha = uv$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.	0,5

Câu 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (x_n) biết rằng $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + x_n^2} - x_n}{1 + \sqrt{1 + x_n^2} + x_n}$ với mọi n nguyên dương. Chứng minh

dãy số (x_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.

Cách 1.

Câu	Nội dung	Điểm
2	Từ giả thiết ta thấy $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ tồn tại $\varphi_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x_n = \tan \varphi_n.$	0,5
	Ta có $\tan \varphi_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{\cos \varphi_n} - \tan \varphi_n}{1 + \frac{1}{\cos \varphi_n} + \tan \varphi_n} = \frac{1 + \cos \varphi_n - \sin \varphi_n}{1 + \cos \varphi_n + \sin \varphi_n} = \frac{\cos \frac{\varphi_n}{2} - \sin \frac{\varphi_n}{2}}{\cos \frac{\varphi_n}{2} + \sin \frac{\varphi_n}{2}}$	0,5
	$\Rightarrow \tan \varphi_{n+1} = \cot \left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_n}{2}\right).$	0,5
	Mà $\varphi_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_n}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varphi_{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_n}{2} \forall n \in \mathbb{N}^*.$	0,5

	Khi đó : $\varphi_{n+1} - \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \left(\varphi_n - \frac{\pi}{6} \right) \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \varphi_n - \frac{\pi}{6} = \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{6} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Hay $\varphi_n = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^*.$	0,5
	$\lim x_n = \lim \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$	0,5

Cách 2.

Câu	Nội dung	Điểm
2	Để thấy $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Ta có $x_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x_n^2} + x_n}}{1 + \sqrt{1+x_n^2} + x_n} = \frac{1}{\sqrt{1+x_n^2} + x_n} = \sqrt{1+x_n^2} - x_n \forall n \in \mathbb{N}^*.$	1,0
	$\Rightarrow \left x_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right = \left \sqrt{1+x_n^2} - x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right = \left \frac{(1+x_n^2) - \left(x_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2}{\sqrt{1+x_n^2} + x_n + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right = \frac{2}{\sqrt{3} \left(\sqrt{1+x_n^2} + x_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)} \cdot \left x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right $ Mà $\sqrt{3} \left(\sqrt{1+x_n^2} + x_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) > \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} + 1 \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Nên $\left x_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}} \left x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right \forall n \in \mathbb{N}^*.$	1,0
	Do đó $\left x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}} \right)^{n-1} \cdot \left x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Do $\lim \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}} \right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim \left x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right = 0 \Rightarrow \lim x_n = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$	1,0

Câu 3 (4,0 điểm). Cho số nguyên dương m ($m \geq 2$). Gọi p là ước nguyên tố của $2^{2^m} + 1$. Giả sử $p = k \cdot 2^n + 1$ với k là số nguyên dương lẻ và n là số nguyên dương.

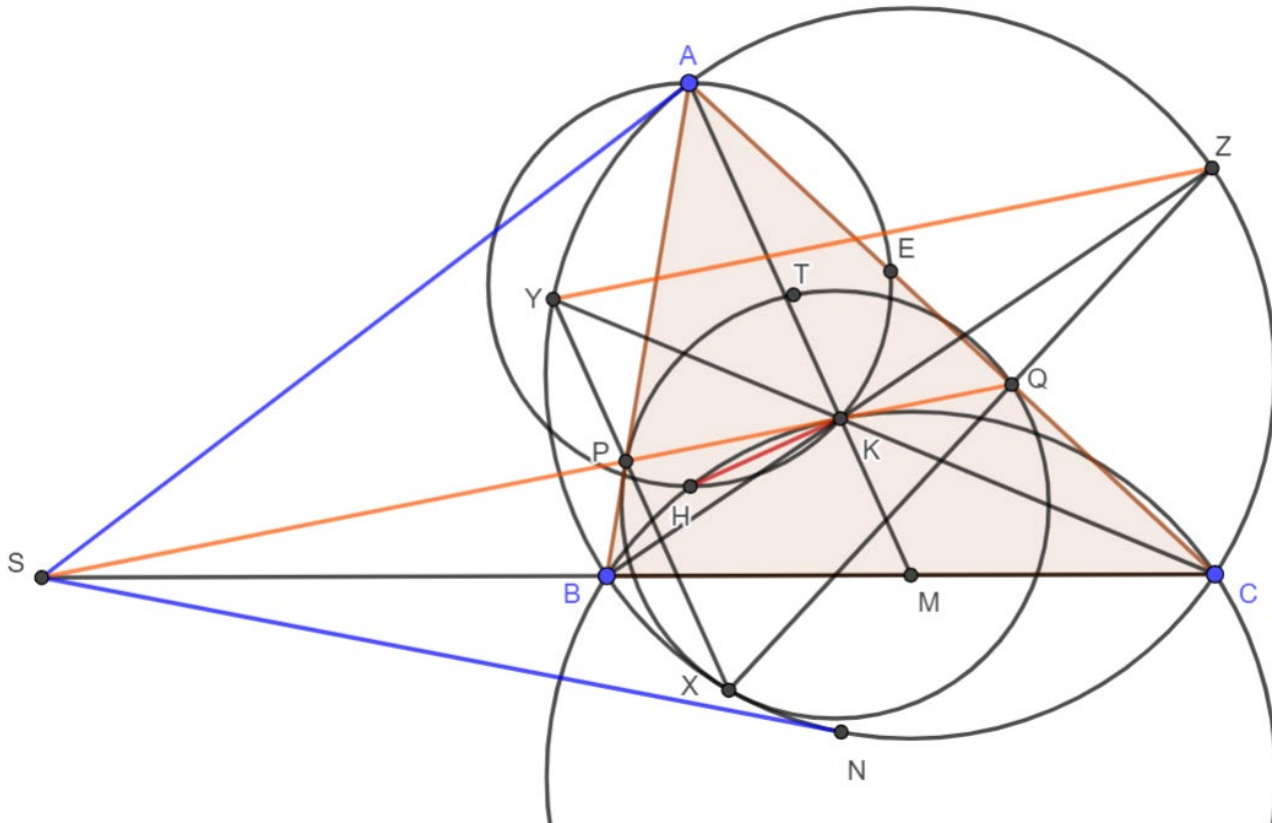
- Chứng minh $n \geq m + 1$.
- Chứng minh $k^{2^{n-1}} - 1$ chia hết cho p .

Câu	Nội dung	Điểm
3a	Để thấy p lẻ nên theo định lý Fermat $\Rightarrow p \mid 2^{p-1} - 1 = 2^{k \cdot 2^n} - 1$.	0,5
	Từ giả thiết $p \mid 2^{2^m} + 1 \mid 2^{2^{m+1}} - 1 \Rightarrow p \mid \gcd(2^{2^{m+1}} - 1; 2^{k \cdot 2^n} - 1)$	0,5
	Ta có $\gcd(2^{2^{m+1}} - 1; 2^{k \cdot 2^n} - 1) = 2^{\gcd(2^{m+1}; k \cdot 2^n)} - 1$. Nếu $n \leq m \Rightarrow \gcd(2^{m+1}; k \cdot 2^n) = 2^n \mid 2^m$.	0,5
	Khi đó $p \mid 2^{2^n} - 1 \mid 2^{2^m} - 1$ điều này vô lý do $p \mid 2^{2^m} + 1$. Do đó phải có $n \geq m + 1$.	0,5
	Ta có $m \geq 2 \Rightarrow 8 \mid 2^{m+1} \mid 2^n \mid p - 1 \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{8}$	0,5
	$\Rightarrow \left(\frac{2}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$	0,5

3b	Đặt $d = \text{ord}_p 2 \Rightarrow d \mid \frac{p-1}{2} \Rightarrow 2d \mid p-1$. Tuy nhiên do $2^{2^m} \equiv -1 \pmod{p}$ và $2^{2^{m+1}} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow d \mid 2^{m+1}$ và $d \nmid 2^m \Rightarrow d = 2^{m+1}$. Đến đây ta thấy $n = v_2(p-1) \geq v_2(2d) = m+2$.	0,5
	$\Rightarrow p \mid 2^{2^{m+1}} - 1 \mid 2^{2^{n-1}} - 1 \Rightarrow 2^{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Do đó $1 = (-1)^{2^{n-1}} \equiv (k \cdot 2^n)^{2^{n-1}} = (2^{2^{n-1}})^n \cdot k^{2^{n-1}} \equiv k^{2^{n-1}} \pmod{p}$.	0,5

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC cắt đoạn thẳng AM tại K ; tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng BC ở điểm S .

- Chứng minh $MK \cdot MA = MB^2$ và $SA = SK$.
- Đường thẳng SK cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q . Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác TPQ tiếp xúc với đường tròn (O) .



Câu	Nội dung	Điểm
4a	Vẽ đường cao BE của tam giác ABC. Dễ thấy ME là tiếp tuyến của (AHE) tại E. Gọi K' là giao điểm thứ hai của MA và (AHE). Ta có $MK' \cdot MA = ME^2$. $\Rightarrow MK' \cdot MA = MB^2 = MC^2$.	0,5
	Hai tam giác MBK', MAB đồng dạng $\Rightarrow \widehat{MK'B} = \widehat{MBA}$. Hai tam giác MCK', MAC đồng dạng $\Rightarrow \widehat{MK'C} = \widehat{MCA}$.	1,0
	Khi đó $\widehat{BK'C} = \widehat{MBA} + \widehat{MCA} = \widehat{BHC} \Rightarrow K' \in (BHC) \Rightarrow K' \equiv K$. Vậy $MK \cdot MA = MB^2$.	

	Hai tam giác MBK', MAB đồng dạng $\Rightarrow \frac{KB}{AB} = \frac{MK}{MB}$. Tương tự $\frac{KC}{AC} = \frac{MK}{MC} \Rightarrow \frac{KB}{AB} = \frac{KC}{AC}$.	0,5
	Gọi N là điểm đối xứng của K qua $BC \Rightarrow N \in (O)$ (do $(HBC); (O)$ đối xứng nhau qua BC). Lại có $\frac{NB}{AB} = \frac{KB}{AB} = \frac{KC}{AC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow (AN, BC) = -1 \Rightarrow SN$ là tiếp tuyến của (O) . Do đó $SA = SN = SK$.	0,5
4b	Đường thẳng CK, BK cắt lại (O) tại Y, Z khác C, B . Do ba điểm P, K, Q thẳng hàng nên hai đường thẳng YP, ZQ cắt nhau tại X thuộc đường tròn (O) .	0,5
	Dễ thấy $SK^2 = SA^2 = SB \cdot SC \Rightarrow SK$ tiếp xúc $(BKC) \Rightarrow \widehat{SKB} = \widehat{KCB} = \widehat{PXB} \Rightarrow KPBX$ nội tiếp. Tương tự $KQCX$ nội tiếp.	0,5
	Lúc này $\widehat{PXQ} = \widehat{PBK} + \widehat{QCK} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} - (\widehat{KBC} + \widehat{KCB}) = 180^\circ - 2\widehat{BAC}$. (Do $\widehat{KBC} + \widehat{KCB} = 180^\circ - \widehat{BKC} = 180^\circ - \widehat{BHC} = \widehat{BAC}$). Mà $\widehat{PTQ} = 2\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{PTQ} + \widehat{PXQ} = 180^\circ \Rightarrow X \in (TPQ)$.	1,0
	Ta có $\widehat{XPQ} = \widehat{XBK} = \widehat{XYZ} \Rightarrow PQ \parallel YZ$. Từ đây suy ra hai đường tròn $(XPQ), (O)$ tiếp xúc nhau tại X . Vậy (TPQ) và (O) tiếp xúc nhau.	0,5

Câu 5 (4,0 điểm). Ban chấp hành Đoàn trường THPT X gồm có n thành viên. Trong năm học, Đoàn trường tổ chức m chương trình, mỗi chương trình có đúng k thành viên trong ban chấp hành tham gia. Mỗi thành viên trong ban chấp hành tham gia ít nhất một chương trình.

- a) Cho $m = 8; k = 3$. Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có đúng một thành viên trong ban chấp hành tham gia cả hai chương trình đó. Chứng minh $n = 17$.
- b) Cho $n = 25; k = 10$. Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có không quá 3 thành viên trong ban chấp hành cùng tham gia. Chứng minh $m \leq 6$.

Câu	Nội dung	Điểm
5a	Ta đánh số thứ tự các chương trình là $1, 2, 3, \dots, 8$. Giả sử chương trình 1 có ba thành viên tham gia là A, B, C . Khi đó mỗi chương trình $2, 3, \dots, 8$ có đúng một trong ba thành viên A, B, C tham dự. Theo nguyên lý Dirichlet thì có một trong ba thành viên A, B, C tham gia ít nhất ba trong bảy chương trình $2, 3, \dots, 8$.	0,5
	Không giảm tổng quát giả sử A là thành viên tham gia ba chương trình $2, 3, 4$. Khi đó giả sử các thành viên tham dự chương trình $1, 2, 3, 4$ lần lượt là $(A, B, C), (A, D, E), (A, F, G), (A, H, I)$. Ta chứng minh A có tham dự tất cả chương trình $5, 6, 7, 8$. Thật vậy : giả sử A không tham dự chương trình 5. Khi đó trong các cặp $(B, C), (D, E), (F, G), (H, I)$ mỗi cặp có đúng một thành viên tham dự chương trình 5. Điều này vô lý do chương trình này chỉ có đúng 3 thành viên tham dự.	1,0
	Như vậy A có tham dự đủ tám chương trình và ngoài A thì mỗi chương trình còn có thêm hai thành viên khác $\Rightarrow n = 1 + 2 \cdot 8 = 17$.	0,5
	Gọi S là số bộ $(\{x; y\}; t)$ trong đó $\{x; y\}$ là hai chương trình (không có thứ tự) và t là thành viên tham gia cả hai chương trình. Số cách chọn cặp $\{x; y\}$ là C_m^2 . Do hai chương trình có chung không quá ba thành viên nên với mỗi cặp $\{x; y\}$ có không quá 3 cách chọn thành viên $t \Rightarrow S \leq 3C_m^2 = \frac{3(m^2 - m)}{2}$	0,5

5b	Ta đếm S bằng cách khác. Với mỗi thành viên $t \in \{1; 2; \dots; 25\}$, ta ký hiệu x_t là số chương trình mà thành viên này tham gia. Do mỗi chương trình có 10 thành viên nên $x_1 + x_2 + \dots + x_{25} = 10m$. Với mỗi thành viên t, số cách chọn cặp $\{x; y\}$ là $C_{x_t}^2 \Rightarrow S = C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + \dots + C_{x_{25}}^2$	0,5
	$\Rightarrow S = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{25}^2}{2} - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{25}}{2} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{25})^2}{2 \cdot 25} - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{25}}{2}$ $\Rightarrow S \geq \frac{(10m)^2}{50} - \frac{10m}{2} = 2m^2 - 5m. \text{ Do đó } 2m^2 - 5m \leq \frac{3(m^2 - m)}{2} \Rightarrow m \leq 7.$	0,5
	Giả sử $m = 7 \Rightarrow$ các đẳng thức ở trên phải xảy ra. Khi đó $x_1 = x_2 = \dots = x_{25}$ và do $x_1 + x_2 + \dots + x_{25} = 10m = 70 \Rightarrow x_1 = \frac{70}{25}$ (vô lý). Vậy ta phải có $m \leq 6$.	0,5

-----HẾT-----