

Câu I (2+2=4 điểm)

Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx - 1$

- 1) Tìm các giá trị của $a; b$ để parabol có đỉnh $S\left(\frac{-3}{2}; \frac{-11}{2}\right)$.
- 2) Với giá trị của $a; b$ tìm được ở câu 1, tìm giá trị của k để đường thẳng $\Delta: y = x(k + 6) + 1$ cắt parabol tại hai điểm phân biệt $M; N$ sao cho trung điểm của đoạn thẳng MN nằm trên đường thẳng $d: 4x + 2y - 3 = 0$.

Câu II (2 điểm)

Cho tam giác đều ABC và các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$,

$\overrightarrow{AP} = \frac{4}{15} \overrightarrow{AB}$. Tìm k để AM vuông góc với PN .

Câu III(3+3+3=9 điểm)

- 1) Tìm m để phương trình $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + m\sqrt{x+2\sqrt{x-9}-8} = x + \frac{3m+1}{2}$

có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 10 < x_2$

- 2) Giải phương trình $x = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{4-x} + \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{5-x} + \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{3-x}$

- 3) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 6 + 2\sqrt{2y+3} = 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 \end{cases}$$

Câu IV(1.5+1.5=3 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh có độ dài là a . Gọi $E; F$ là các điểm xác định bởi

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$, đường thẳng BF cắt đường thẳng AE tại điểm I .

- 1) Tính giá trị của $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{CE}$ theo a .

- 2) Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = 90^\circ$.

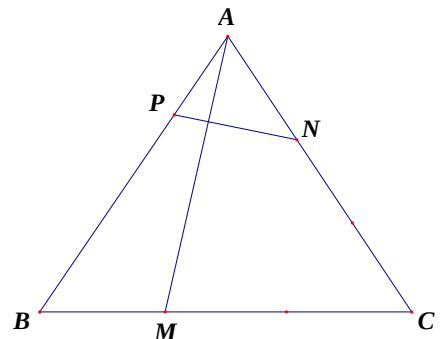
Câu V (2 điểm)

Cho các số dương a, b, c có $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}}.$$

----- Hết -----

“CHÚ Ý : HỌC SINH KHÔNG ĐƯỢC SỬ DỤNG MÁY TÍNH”

Bài	HƯỚNG DẪN CHẤM	Điểm
Bài 1		4 điểm
Câu 1	Tìm $a; b \dots$	2 điểm
	Do Parabol nên $a \neq 0$ và có trục đối xứng $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{3}{2}$ nên $3a - b = 0$.	0,5
	Tọa độ đỉnh có tung độ là $y = -\frac{\Delta}{4a}$ mà $\Delta = b^2 + 4a$ nên ta có: $b^2 + 4a = 22a$ hay $b^2 - 18a = 0$	0,5
	Ta có hệ pt $\begin{cases} 3a - b = 0 \\ b^2 - 18a = 0 \end{cases}$ thế vào ta được: $b^2 - 6b = 0 \Rightarrow b = 0; b = 6$ Nếu $b = 0 \Rightarrow a = 0$ loại. Nếu $b = 6 \Rightarrow a = 2$ thỏa mãn. Vậy $a = 2; b = 6$ là giá trị cần tìm.	1,0
Câu 1 ý 2	Tìm $m \dots$ với parabol $y = 2x^2 + 6x - 1$	2 điểm
	Để đường thẳng cắt Parabol tại hai điểm phân biệt thì pt $2x^2 + 6x - 1 = kx + 6x + 1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$, hay pt: $2x^2 - kx - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ có $\Delta - k^2 + 16 > 0$	0,5
	Khi đó, giao điểm $M(x_1; (k+6)x_1 + 1)$, $N(x_2; (k+6)x_2 + 1)$, nên trung điểm của đoạn MN là $I(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{(k+6)x_1+1+(k+6)x_2+1}{2})$.	0,5
	Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}$ nên $I\left(\frac{k}{4}; \frac{2+3k+\frac{1}{2}k^2}{2}\right)$	0,5
	Do I thuộc đường thẳng $4x + 2y - 3 = 0$ nên $k^2 + 8k - 2 = 0$ hay $k = -4 \pm \sqrt{18}$ thì thỏa mãn bài toán.	0,5
Bài 2	Cho tam giác đều ABC và các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{15}\overrightarrow{AB}$. Tìm k để AM vuông góc với PN .	
	+) $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$. +) $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = -\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 	

	Để AM vuông góc với PN thì $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$ $\Leftrightarrow \left[(1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} \right] \left(-\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \right) = 0$	
	$\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15}AB^2 + \frac{k}{3}AC^2 + \left(\frac{1-k}{3} - \frac{4k}{15} \right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15} + \frac{k}{3} + \left(\frac{1-k}{3} - \frac{4k}{15} \right) \cos 60^\circ = 0$ $\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$ KL: $k = \frac{1}{3}$	
Câu 3		
	1) Tìm m để phương trình $\sqrt{x+6}\sqrt{x-9} + m\sqrt{x+2}\sqrt{x-9} - 8 = x + \frac{3m+1}{2}$ Giải: PT $\Leftrightarrow \sqrt{x-9} + 3 + m(\sqrt{x-9} + 1) = x + \frac{3m+1}{2}$ đặt $t = \sqrt{x-9}, t \geq 0$ PT trở thành : $t + 3 + m(t+1) = t^2 + 9 + \frac{3m+1}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 2(m+1)t + m + 13 = 0 \quad (1)$ PT ban đầu có nghiệm $x_1 < 10 < x_2$ $\Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm } 0 \leq t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 2(m+13) > 0 \\ \frac{m+13}{2} - m - 1 + 1 < 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 25 > 0 \\ 13 - m < 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 13$	
	2) Giải phương trình $x = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{4-x} + \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{5-x} + \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{3-x}$ giải: Điều kiện: $x \leq 3$	

	Đặt $\sqrt{3-x}=a; \sqrt{4-x}=b; \sqrt{5-x}=c$ với a, b, c là số thực không âm. Ta có $x=3-a^2=4-b^2=5-c^2=a.b+b.c+c.a$ Do đó $\begin{cases} 3-a^2=ab+bc+ca \\ 4-b^2=ab+bc+ca \\ 5-c^2=ab+bc+ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(c+a)=3 \\ (b+c)(a+b)=4 \\ (c+a)(b+c)=5 \end{cases}$ Nhân từng vế ba phương trình ta được $(a+b)(b+c)(c+a)=2\sqrt{15}$ Suy ra $\begin{cases} a+b=\frac{2\sqrt{15}}{5} \\ b+c=\frac{2\sqrt{15}}{3} \\ c+a=\frac{2\sqrt{15}}{4} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=\frac{\sqrt{15}}{5}+\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{15}}{3}$ Suy ra $x=\frac{671}{240}$. Thử lại $x=\frac{671}{240}$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\frac{671}{240}$	
	3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-2y-6+2\sqrt{2y+3}=0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2 \end{cases}$. Giải Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-2y-6+2\sqrt{2y+3}=0 & (1) \\ (x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2 & (2) \end{cases}$. ĐKXĐ: $y \geq -1,5$. (2) $\Leftrightarrow$ $x^3-y^3+3x-3y=3(x^2+y^2)+2 \Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3 \Leftrightarrow x-1=y+1 \Leftrightarrow y=x-2$ Thay vào pt thứ nhất ta được: $x^2-3x+1=-\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1-x \\ \sqrt{2x-1}=x \end{cases}$ (Có thể bình phương được pt: $(x-1)^2(x^2-4x+2)=0$) Giải hai pt này ta được $x=1, x=2-\sqrt{2}$	

	Vậy hệ có hai nghiệm là $(x; y) = (1; -1), (2 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.	
Câu 4	Giải: 1. Tính $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{CE}$ theo a. Ta có $CE = \frac{2a}{3}$; Ta có $AE^2 = AB^2 + BE^2 = a^2 + \frac{a^2}{9} = \frac{10a^2}{9}$ nên $AE = \frac{a\sqrt{10}}{3}$ Mặt khác: $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{CE} = EA \cdot CE \cdot \cos \widehat{AEB}$ Trong tam giác vuông BAE ta có $\cos \widehat{AEB} = \frac{BE}{AE} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ Nên $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{CE} = EA \cdot CE \cdot \cos \widehat{AEB} = \frac{a\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{2}{9}a^2$. 2. Chứng minh $\widehat{AIC} = 90^\circ$ Ta có $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Giả sử $\overrightarrow{EI} = k\overrightarrow{BF}$, $k \in R$. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + (BC + CF) = \left(1 + \frac{k}{2}\right)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD}$ Do $A; E; I$ thẳng hàng nên: $\left(1 + \frac{k}{2}\right) : 1 = k : \frac{1}{3}$ nên $k = \frac{2}{5}$ Nên $\overrightarrow{AI} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$; và $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ Nên $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CI} = \left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{6}{25}a^2 - \frac{6}{25}a^2 = 0$ nên $\widehat{AIC} = 90^\circ$.	
Câu 5	Cho các số dương a, b, c có a+b+c=3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}}$. Giải $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}} = \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+(a+b+c)}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+3}} + \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+3}} + \frac{c+3}{8} \right) - \frac{c+3}{16}$ $\geq \frac{1}{2} 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+3}} \cdot \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{c+3}} \cdot \frac{c+3}{8}} - \frac{c+3}{16} = \frac{3a}{4} - \frac{c+3}{16}$ Suy ra: $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}} \geq \frac{3a}{4} - \frac{c+3}{16}$ Tương tự $\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}} \geq \frac{3b}{4} - \frac{a+3}{16}$ và $\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}} \geq \frac{3c}{4} - \frac{b+3}{16}$	

	Cộng các vế tương ứng của ba BĐT cùng chiều ta được $P \geq \frac{3}{2}$, $P = \frac{3}{2}$ khi a=b=c=1. KL	
--	---	--