CHỦ ĐỀ 8: BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

Dạng 1: Viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm

Phương pháp giải:

Cho hàm số $y = f(x)(C)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(x_0; f(x_0)) \in (C)$ là

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Trong đó x_0 được gọi là hoành độ tiếp điểm: $y_0 = f(x_0)$ là tung độ tiếp điểm và $k = f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến. Điểm $A(x_0; y_0)$ được gọi là tiếp điểm.

Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3\text{x}(C)$ tại:

a) Điểm $A(1;4)$.

b) Điểm có hoành độ $x_0 = -1$

c) Điểm có tung độ $y_0 = 14$.

d) Giao điểm của (C) với đường thẳng $d: y = 3x - 8$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = 3\text{x}^2 + 3 \Rightarrow f'(1) = 6$.

Do vậy phương trình tiếp tuyến tại $A(1;4)$ là $y = 6(x-1) + 4 = 6\text{x} - 2$

b) Với $x = x_0 = -1 \Rightarrow f(x_0) = -4 \Rightarrow f'(x_0) = 6$

Do vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 6(x+1) - 4 = 6x + 2$

c) Với $y_0 = 14 \Rightarrow x^3 + 3x = 14 \Leftrightarrow x_0 = 2; f'(2) = 15$

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 15(x-2) + 14 = 15x - 16$

d) Hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^3 + 3\text{x} = 3x - 8 \Leftrightarrow x = -2$

Với $x = -2 \Rightarrow y = -14 \Rightarrow f'(-2) = 15$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = 15(x+2) - 14 = 15x + 16$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}(C)$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ $y_0 = 3$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d: y = x - 2$.

Lời giải

Ta có: $y' = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$

a) Ta có: $y_0 = 3 \Rightarrow \dfrac{x-2}{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 5\text{x} = -5 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y'(-1) = 5$.

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $y=5(x+1)+3$ hay $y=5x+8$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\frac{x-2}{2x+1}=x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$

Với $x_0=2 \Rightarrow y_0=0; y'(2)=\frac{1}{5}$ suy ra phương trình tiếp tuyến là: $y=\frac{1}{5}(x-2)$.

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=-2; y'(0)=5$ suy ra phương trình tiếp tuyến là: $y=5x-2$.

Ví dụ 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-4x+2$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là:

A. $y=-x-2$ **B.** $y=x-2$ **C.** $y=-x$ **D.** $y=-x+1$

Lời giải

Ta có $x_0=1 \Rightarrow y_0=-1; f'(x)=3x^2-4 \Rightarrow f'(1)=-1$

Do vậy PTTT là: $y=-(x-1)-1=-x$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}(C)$ tại giao điểm của (C) với trục tung là:

A. $y=-3x-1$ **B.** $y=-3x-3$ **C.** $y=-3x$ **D.** $y=-3x+3$

Lời giải

$(C) \cap Oy=A(0;-1)$. Lại có $y'=\frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0)=-3$

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $y=-3x-1$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}$ tại điểm có hoành độ $x-2$ là:

A. $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ **B.** $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ **C.** $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$ **D.** $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

Lời giải

Với $x=2 \Rightarrow y=1$. Lại có $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{3-x}} \Rightarrow f'(2)=\frac{3}{4}$

Do đó phương trình tiếp tuyến là: $y=\frac{3}{4}(x-2)+1=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-4x^2+1$ tại điểm x_0 thỏa mãn $f''(x_0)=4$ là:

A. $y=-3x+1$ **B.** $y=-4x-1$ **C.** $y=4x-1$ **D.** $y=-4x+1$

Lời giải

Ta có: $f'(x)=3x^2-8x \Rightarrow f''(x)=6x-8$.

Giải $f''(x)=4 \Leftrightarrow x_0=2 \Rightarrow y_0=-7; f'(2)=-4$

Do đó phương trình tiếp tuyến là: $y=-4(x-2)-7=-4x+1$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+2$ tại điểm $x_0=-1$ là:

A. $y=4x+1$ **B.** $y=-4x-1$ **C.** $y=4x+2$ **D.** $y=4x+3$

Lời giải

Ta có: $x_0=-1\Rightarrow y_0=-1$. Mặt khác $y'=4x^3-8x\Rightarrow y'(-1)=4$

Khi đó phương trình tiếp tuyến là: $y=4(x+1)-1=4x+3$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{2x+1}(C)$ tại giao điểm của (C) với trục hoành là:

A. $y=\dfrac{1}{5}(x-2)$ **B.** $y=\dfrac{1}{25}(x-2)$ **C.** $y=\dfrac{2}{5}(x-2)$ **D.** $y=\dfrac{-3}{25}(x-2)$

Lời giải

Ta có: $(C)\cap Ox=A(2;0)$. Mặt khác $f'(x)=\dfrac{5}{(2x+1)^2}\Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{5}$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(2;0)$ là: $y=\dfrac{1}{5}(x-2)$. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x+1(C)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ cắt đồ thị (C) tại điểm thứ 2 có hoành độ là:

A. 0 **B.** -2 **C.** 3 **D.** -1

Lời giải

Ta có: $x=1\Rightarrow y=0; f'(x)=6x^2-3\Rightarrow f'(1)=3$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y=3(x-1)(d)$

Xét $d\cap(C)\Rightarrow 2x^3-3x+1=3(x-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ tại điểm có tung độ bằng -3 là:

A. $y=3x+2$ **B.** $y=5(x+1)$ **C.** $y=3x+5$ **D.** $y=5x+2$

Lời giải

Giải $\dfrac{2x-1}{x+2}=-3\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-2\\2x-1=-3x-6\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$. Lại có $f'(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}\Rightarrow f'(-1)=5$

Phương trình tiếp tuyến là: $y=5(x+1)-3=5x+2$. **Chọn D.**

Ví dụ 11: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+2$ tại thời điểm có hoành độ $x=-1$ cắt trục hoành tại điểm.

A. $A(0;-1)$	**B.** $A\left(-\frac{7}{2};0\right)$	**C.** $A\left(-\frac{7}{4};0\right)$	**D.** $A\left(-\frac{1}{4};0\right)$

Lời giải

Ta có: $x=-1; y=3; y'(-1)=-4$. Do đó phương trình tiếp tuyến là: $y=-4(x+1)+3=-4x-1(d)$.

Do đó $d\cap Ox = A\left(\frac{-1}{4};0\right)$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=2x^4-3x^2+1(C)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ *O* đến tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

A. $d=\frac{2}{\sqrt{5}}$	**B.** $d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$	**C.** $d=\frac{1}{\sqrt{5}}$	**D.** $d=2$

Lời giải

Ta có $x=1\Rightarrow y=0; f'(1)=8-6=2$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y=2(x-1)(d)$.

Do đó $d:2x-y-2=0$ suy ra $d(0;d)=\frac{|-2|}{5}$. **Chọn A.**

Chú ý: Bài toán này yêu cầu các em ghi nhớ công thức khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $d:ax+by+c=0$ là: $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y=x^3+mx(C)$. Tìm giá trị của tham số *m* để khoảng cách từ gốc tọa độ *O* đến tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của (C) bằng $\sqrt{2}$ là:

A. $\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=-1\end{array}\right.$	**B.** $\left[\begin{array}{l}m=-5\\m=-3\end{array}\right.$	**C.** $\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=-2\end{array}\right.$	**D.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=0\end{array}\right.$

Lời giải

Với $x_0=1\Rightarrow y_0=1+m; f'(1)=3+m$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=(m+3)(x-1)+m+1(d)$

$d(O;d)=\frac{|-m-3+m+1|}{\sqrt{(m+3)^2+1}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow (m+3)^2+1=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=-2\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc

Phương pháp giải:

Để viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)(C)$ khi biết hệ số góc là *k*

Giải phương trình $k=f'(x)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_{01}\\x=x_{02}\\\text{..........}\\x=x_i\end{array}\right.\Rightarrow y(x_i)\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến.

Chú ý: Cho 2 đường thẳng $d_1: \mathrm{y} = \mathrm{k}_1 x + b_1$ và $d_2: y = k_2 x + b_2$

Khi đó k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các đường thẳng d_1 và d_2.

▪ Nếu $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

▪ Nếu $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$

▪ Đường thẳng $d: y = kx + b$ tạo với trục hoành một góc α thì $k = \pm \tan \alpha$.

Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ biết:

a) Tiếp tuyến có hệ số góc là $k = -1$.

b) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -4x + 5$.

c) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = 9x + 2$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-1}{(x-2)^2}$

a) Do tiếp tuyến có hệ số góc $k = -1$ nên ta có: $\frac{-1}{(x-2)^2} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -1(x-3) + 2 = -x + 5$.

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -(x-1) = -x + 1$.

b) Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -4x + 2 \Rightarrow k_u = -4 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x-2)^2} = -4$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $x_0 = \frac{5}{2} \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -4\left(x - \frac{5}{2}\right) + 3 = -4x + 13$

Với $x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -4\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1 = -4x + 5$ (loại vì trùng với đường thẳng đã cho)

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -4x + 13$.

c) Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = 9x + 2$ suy ra $k_u.k_d = -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{k_d} = \frac{-1}{9}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = \frac{4}{3} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{1}{9}(x-5) + \frac{4}{3} = \frac{-1}{9}x + \frac{17}{9}$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{1}{9}(x+1) + \frac{2}{3} = \frac{-1}{9}x + \frac{5}{9}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = \frac{x-1}{x+1}(C)$

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x+2y+1=0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d_1: x-2y-1=0$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

a) Ta có: $d: \mathrm{y} = \frac{-1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow k_d = -\frac{1}{2} \Rightarrow k_u = 2$. Khi đó $y'(x_0) = \frac{2}{(x_0+1)^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = 2x - 1$

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = 2(x+2) + 3 = 2x + 7$

b) Ta có: $d_1: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 20x + 1 \Rightarrow k_n = y'(x_0) = \frac{2}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{1}{2}(x-1) \equiv d$ (loại)

Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{1}{2}(x+3) + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Ví dụ 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có hệ số góc $k = -3$ là:

A. $y = -3x + 3$ **B.** $y = -3x + 2$ **C.** $y = -3x$ **D.** $y = -3x - 3$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$. Giải $3x^2 - 6x = -3 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y = -3(x-1)$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 2x + y - 7 = 0$ là:

A. $y = -2x - 3$ **B.** $y = -2x + 3$ **C.** $y = -2x + 1$ **D.** $y = -2x - 1$

Lời giải

Ta có: $d: y=-2x+7; y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Với $x=2 \Rightarrow y=3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y=-2(x-2)+3=-2x+7 \equiv d$ (loại).

Với $x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y=-2x-1$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+x^2-5$ mà vuông góc với đường thẳng $x+6y+1999=0$ là:

A. $y=6x-9$ **B.** $y=6x-6$ **C.** $y=-6x+9$ **D.** $y=-6x+6$

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{-1}{6}x-\dfrac{1999}{6}(d)$. Do tiếp tuyến vuông góc với *d* nên $k_d.k_u=-1 \Rightarrow k_u=\dfrac{-1}{k_d}=6$.

Giải $y'=6 \Leftrightarrow 4x^3+2x=6 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y=6(x-1)-3=6x-9$.

Chọn A.

Ví dụ 6: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{2-x}$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ có hệ số góc là:

A. 1 **B.** 7 **C.** $\dfrac{7}{9}$ **D.** $\dfrac{1}{9}$

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{7}{(2-x)^2} \Rightarrow y'(-1)=\dfrac{7}{9}=k$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x=-2$ có hệ số góc là $k=3$. Giá trị của tham số *m* là:

A. $m=4$ **B.** $m=-4$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=2$

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{1+m}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(-2)=1+m=3 \Leftrightarrow m=2$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-4mx^2+3x+2$ tại điểm có hoành độ $x=1$ có hệ số góc $k=-2$. Giá trị của tham số *m* là:

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=2$

Lời giải

Ta có: $y'(1)=3-8m+3=-2 \Leftrightarrow m=1$. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=24x-1$.

A. $y=24x-48$	**B.** $y=24x-21$	**C.** $y=24x-45$	**D.** $y=24x-43$

Lời giải

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=24x-1$ suy ra $k_n=24$

Khi đó $y'=4x^3-4x=24\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=5$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y=24(x-2)+5=24x-43$. **Chọn D.**

Ví dụ 10: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-3$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{-x}{9}+1$.

A. $y=9x-8$	**B.** $y=9x+24$	**C.** $y=9x+10$	**D.** $\left[\begin{array}{l} y=9x-8 \\ y=9x+24 \end{array}\right.$

Lời giải

Do tiếp tuyến vuông góc với $y=\frac{-x}{9}+1$ nên $k_u=\frac{-1}{k_d}=9$

Giải $y'=3x^2+6x=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Với $x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y=9(x-1)+1=9x-8$

Với $x=-3\Rightarrow y=-3\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y=9(x+3)-3=9x+24$

Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến là $y=9x-8; y=9x+24$. **Chọn D.**

Ví dụ 11: Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y=\frac{3x+2}{x-1}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $5x+y+2=0$.

A. $y=-5x-2$	**B.** $y=-5x+18$	**C.** $y=-5x+10$	**D.** $y=-5x+12$

Lời giải

Ta có: $d: y=-5x-2\Rightarrow k_u=-5$. Giải $y'=\frac{-5}{(x-1)^2}=-5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Với $x=0\Rightarrow y=-2\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y=-5x-2$ (loại).

Với $x=2\Rightarrow y=8\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y=-5(x-2)+8=-5x+18$. **Chọn B.**

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=x^3+2mx+2(C)$. Tìm giá trị của tham số *m* biết tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$ vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+3$.

A. $m=-5$	**B.** $\frac{-5}{2}$	**C.** $\frac{5}{2}$	**D.** 5

Lời giải

Ta có: $k_u = y'(-1) = 3 + 2m$. Từ gt $\Rightarrow (3+2m).\frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow 3 + 2m = -2 \Leftrightarrow m = \frac{-5}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = -x^3 + 2mx^2 + n(C)$. Tìm tổng $m+n$ biết tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;3)$ có hệ số góc là $k=1$.

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Ta có: $y' = -3x^2 + 4mx \Rightarrow y'(1) = -3 + 4m = 1 \Leftrightarrow m = 1$

Mặt khác điểm $A(1;3) \in (C)$ nên $3 = -1 + 2m + n = n + 1 \Leftrightarrow n = 2$. Vậy $m + n = 3$. **Chọn B.**

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+n}(C)$. Biết tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(2;-4)$ song song với đường thẳng $y = -5x + 2017$. Vậy giá trị của $2m - n$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7

Lời giải

Giải hệ $\begin{cases} -4 = \frac{m+2}{n+2} \\ y'(2) = \frac{n-m}{(n+2)^2} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4n - 10 \\ \frac{5n+10}{(n+2)^2} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4n - 10 \\ \frac{1}{n+2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow 2m - n = 7$.

Chọn D.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = \frac{mx+n}{x-2}(C)$. Biết (C) đi qua điểm $A(1;-3)$ và tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 3$ có hệ số góc $k = -5$. Giá trị của biểu thức $m^2 + n^2$ bằng:

A. 5 **B.** 10 **C.** 13 **D.** 25

Lời giải

Giải hệ $\begin{cases} -3 = \frac{m+n}{1-2} \\ y'(3) = \frac{-2m-n}{(3-2)^2} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = 3 \\ 2m + n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow m^2 + n^2 = 5$.

Chọn A.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + nx(C)$. Tìm giá trị của $m^2 + n^2$ để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;5)$ và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{3}x + 2$.

A. 5 **B.** 10 **C.** 20 **D.** 25

Lời giải

Giải hệ $\begin{cases} 5 = -1 + m - n \\ y'(1).\dfrac{-1}{3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 6 \\ (3 + 2m + n) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -4 \end{cases} \Rightarrow m^2 + n^2 = 20$. **Chọn C.**

Ví dụ 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để có 2 tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 2$ có cùng hệ số góc $k = -3$.

A. $-1 < m < 1$ **B.** $-1 \le m \le 1$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$ **D.** $m = \pm 1$

Lời giải

Để có 2 tiếp tuyến thì phải có 2 tiếp điểm phân biệt. Giả sử hoành độ tiếp điểm là $x = a$.

Khi đó ta có: $y'(a) = 3a^2 + 6ma = -3 \Leftrightarrow a^2 + 2ma + 1 = 0$.

Đk có 2 tiếp tuyến có cùng hệ số góc $k = -3$ là: $\Delta_{(1)} = m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Ví dụ 18: Gọi *d* là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 9x - 11$. Đường thẳng *d* đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\left(-5; \frac{2}{3}\right)$ **B.** $P\left(5; -\frac{2}{3}\right)$ **C.** $N\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ **D.** $Q\left(-2; \frac{5}{3}\right)$

Lời giải

Ta có $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 9x - 11 \longrightarrow y' = 2x^2 - 8x + 9, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến *d* của đồ thị hàm số tại $M(x_0; y_0)$ là $k = y'(x_0) = 2x_0^2 - 8x_0 + 9$.

Mặt khác $2x_0^2 - 8x_0 + 9 = 2(x_0^2 - 4x_0 + 4) + 1 = 2(x_0 - 2)^2 + 1 \ge 1 \Rightarrow k_{\min} = 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $(x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -\frac{11}{3}$.

Vậy phương trình *d* là $y + \frac{11}{3} = x - 2 \Leftrightarrow y = x - \frac{17}{3} \Rightarrow P\left(5; -\frac{2}{3}\right) \in d$. **Chọn B.**

Ví dụ 19: Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx - 1}(C)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung song song với đường thẳng $y = 2x + 2018$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	

y	-3 ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	-3

Giá trị của biể thức $T=a+2b+3c$ là:

A. $T=3$ **B.** $T=1$ **C.** $T=3$ **D.** $T=2$

Lời giải

Do đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=-3$

Do đó hàm số có dạng: $y=\dfrac{-3x+b}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{3-b}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(0)=3-b$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=2x+2018\Rightarrow 3-b=2\Leftrightarrow b=1$.

Vậy $a=-3;b=1;c=1\Rightarrow T=2$. **Chọn D.**

Ví dụ 20: Cho hàm số $y=\dfrac{x+4}{x-3}(C)$. Điểm $M(x_0;y_0)$ (với $y_0>0$) thuộc sao (C) cho tiếp tuyến tại *M* cắt các trục *Ox, Oy* lần lượt tại *A* và *B* sao cho $AB=5.OA\sqrt{2}$. Giá trị của $2x_0+y_0$ là:

A. 16 **B.** 17 **C.** 18 **D.** 19

Lời giải

Ta có: ΔOAB vuông tại *O* ta có: $\tan\widehat{BAO}=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{\sqrt{AB^2-OA^2}}{OA}=7$

Gọi *k* là hệ số góc của tiếp tuyến ta có: $k=\pm 7$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0+4}{x_0-3}\right)\Rightarrow y'(x_0)=\dfrac{-7}{(x_0-3)^2}=\pm 7\Leftrightarrow (x_0-3)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=4\\x_0=2\end{array}\right.$

Suy ra $M(4;8)\Rightarrow T=16$. **Chọn A.**

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến đi qua một điểm

Phương pháp giải:

Cách viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua $B(\alpha;\beta)$

Gọi $A(x_0;f(x_0))\in(C)$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm *A* của (C) là $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)(d)$.

Mặt khác *d* đi qua $B(\alpha;\beta)$ nên $\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$ từ đó giải phương trình tìm x_0.

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y=\dfrac{x+2}{x-1}(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến qua $A(1;7)$.

Lời giải

Ta có: $y=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-1}$. Tiếp tuyến qua $A(1;7)$.

Do vậy $7=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-1}=\frac{x_0+5}{x_0-1}\Leftrightarrow 7(x_0-1)=x_0+5\Leftrightarrow x_0=2$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y=-3(x-2)+4$ hay $y=-3x+10$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=x^4+2x^2+5(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ.

A. $y=4x$ hoặc $y=-4x$ **B.** $y=-2x$ hoặc $y=2x$

C. $y=8x$ hoặc $y=-8x$ **D.** $y=4x-4$ hoặc $y=4x+4$

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0;x_0^4+2x_0^2\right)$ là $y=\left(4x_0^3+4x_0\right)(x-x_0)+x_0^4+2x_0^2+5(d)$

Do $O(0;0)\in d$ nên $0=-3x_0^4-2x_0^2+5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=-1\end{array}\right.\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $\left[\begin{array}{l}y=8x\\y=-8x\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-2}(C)$. Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A(2;-8)$ đến đồ thị (C).

A. $y=-5x+2$ **B.** $y=-5x+8$ **C.** $y=-3x+2$ **D.** $y=-3x+8$

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0;\frac{2x_0+1}{x_0-2}\right)$ là $y=\frac{-5}{(x_0-2)}(x-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0-2}(d)$

Do $A(2;-8)\in d$ nên ta có: $-8=\frac{-5(2-x_0)}{(x_0-2)^2}+\frac{2x_0+1}{x_0-2}=\frac{2x_0+6}{x_0-2}\Leftrightarrow x_0=1$

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $y=-5(x-1)-3=-5x+2$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^3-3x(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(2;2)$.

A. $y=9x-16$ **B.** $y=2$ **C.** $y=2$ hoặc $y=9x-16$ **D.** $y=9x-18$

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;x_0^3-3x_0\right)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến là $y=\left(3x_0^2-3\right)(x-x_0)+x_0^3-3x_0$

Do tiếp tuyến đi qua $A(2;2)$ nên $2=\left(3x_0^2-3\right)(2-x_0)+x_0^3-3x_0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\Rightarrow y_0=2\\x_0=2\Rightarrow y_0=2\end{array}\right.$

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $\left[\begin{array}{l}y=2\\y=9(x-2)+2=9x-16\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;-9)$.

A. $y = 24x + 15$

B. $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$

C. $y = 24x + 15$ hoặc $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$

D. $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$ hoặc $y = 24x + 11$

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A\left(x_0; 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1\right)$ là:

$y = \left(12x_0^2 - 12x_0\right)(x - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1(d)$

Cho $M(-1;-9) \in d$ ta có: $-9 = \left(12x_0^2 - 12x_0\right)(-1 - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{5}{4} \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = 24x + 15$

Với $x_0 = \frac{-5}{4} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$. **Chọn C.**

Ví dụ 6: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x + 1(C)$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-2;1)$ là:

A. $y = -x - 1$ hoặc $y = 8x - 17$

B. $y = -x + 1$ hoặc $y = 8x - 17$

C. $y = -x + 1$ hoặc $y = -8x - 17$

D. $y = -x - 1$ hoặc $y = 8x + 17$

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0; x_0^3 - 4x_0 + 1\right)$ là: $y = \left(3x_0^2 - 4\right)(x - x_0) + x_0^3 - 4x_0 + 1$

Cho tiếp tuyến qua $A(-2;1)$ ta có:

$1 = \left(3x_0^2 - 4\right)(-2 - x_0) + x_0^3 - 4x_0 + 1 \Leftrightarrow -2x_0^3 - 6x_0^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Do vậy có 2 phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 1$, $y = 8x + 17$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3(C)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $x = 2$ của (C) đi qua điểm $A(a; a + 2)$. Giá trị của a là:

A. $a = 1$

B. $a = -1$

C. $a = 3$

D. $a = -3$

Lời giải

Ta có: $x = 2; y = 3; f'(2) = 2$. Tiếp tuyến tại điểm $M(2;3)$ là: $y = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1(d)$.

Do $A \in d$ nên $a + 2 = 2a - 1 \Leftrightarrow a = 3$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b \in (-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 15 **B.** 9 **C.** 16 **D.** 17

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; x_0^3 - 3x_0^2)$ có dạng: $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2$

Do tiếp tuyến đi qua điểm $(0;b) \Rightarrow b = (3x_0^2 - 6x_0)(-x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 = -2x_0^3 + 3x_0^2$

Để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua $B(0;b)$ thì phương trình $b = -2x_0^3 + 3x_0^2$ có duy nhất một nghiệm. Xét hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 \Rightarrow y' = -6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra PT có 1 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} b > 1 \\ b < 0 \end{array}\right.$

Vậy $b \in (-10;10)$ có 17 giá trị nguyên của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi *S* là tập hợp các giá trị thực của *a* để có đúng một tiếp tuyến của (C) kẻ qua *A*. Tổng giá trị các phần tử của *S* là:

A. 1 **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x_0; \dfrac{-x_0+2}{x_0-1}\right)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-1} = \frac{1}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1}$$

Do tiếp tuyến đi qua điểm $A(a;1)$ nên $1 = \dfrac{x_0 - a + (2 - x_0)(x_0 - 1)}{(x_0-1)^2}$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = -x_0^2 + 4x_0 - 2 - a \Leftrightarrow 2x_0^2 - 6x_0 + 3 + a = 0 \, (*)$

Để có đúng một tiếp tuyến đi qua *A* thì (*) có nghiệm kép hoặc (*) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x_0 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' = 3 - 2a = 0 \\ \begin{cases} \Delta' = 3 - 2a > 0 \\ 2.1 - 6 + 3 + a = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{3}{2} \\ a = 1 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 6x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;2)$. Gọi *S* là tập hợp các giá trị thực của *m* để qua *M* có hai tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng các phần tử của *S* là

A. $\frac{20}{3}$	**B.** $\frac{13}{2}$	**C.** $\frac{12}{3}$	**D.** $\frac{16}{3}$

Lời giải

Gọi $A\left(a;-a^3+6a^2+2\right)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là: $y=\left(-3a^2+12a\right)(x-a)-a^3+6a^2+2$

Do tiếp tuyến đi qua $M(m;2)$ nên $2=\left(-3a^2+12a\right)(x-a)-a^3+6a^2+2$

$\Leftrightarrow\left(-3a^2+12\right)(m-a)=a^3-6a^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\(-3a+12)(m-a)=a^2-6a(*)\end{array}\right.$

$(*)\Leftrightarrow-3ma-12a+12m+3a^2=a^2-6a\Leftrightarrow g(a)=-2a^2+3(m+2)a-12m=0$

Để qua M có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) ta có 2 trường hợp.

TH1: $g(a)=0$ có nghiệm kép khác 0 $\Leftrightarrow\begin{cases}g(0)=-12m\neq0\\\Delta=9(m+2)^2-96m=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{2}{3}\\m=6\end{array}\right.$

TH2: $g(a)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó 1 nghiệm bằng 0 (vô nghiệm)

Vậy $m=\frac{2}{3};m=6\Rightarrow\sum m=\frac{20}{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để có đúng một tiếp tuyến từ (C) đi qua A. Tổng tất cả giá trị của phần tử S bằng

A. 1	**B.** -1	**C.** 0	**D.** $-\frac{1}{2}$

Lời giải

Gọi $M\left(a;\frac{a+1}{a-1}\right)\in(C)$, phương trình tiếp tuyến tại M là: $y=\frac{-2}{(a-1)^2}(x-a)+\frac{a+1}{a-1}$

Tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;\mathrm{m})\Rightarrow m=\frac{2a}{(a-1)^2}+\frac{a+1}{a-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\m(a-1)^2=2a+a^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\g(a)=(m-1)a^2-2(m+1)a+m+1=0\end{cases}(*)$

Để có đúng một tiếp tuyến từ (C) đi qua A ta xét các trường hợp sau:

TH1: Với $m=1\Rightarrow-4a+2=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

TH2: Do $g(1)=-2$ nên để có đúng một tiếp tuyến từ (C) đi qua A thì $g(a)$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1 \\ \Delta'=(m+1)^2-(m+1)(m-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$. Vậy $\sum m=0$. **Chọn C.**

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=x^3-12x+12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;-4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2;5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của tập S bằng

A. 7 **B.** 9 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Gọi $M(a;a^3-12a+12)\in(C)$, phương trình tiếp tuyến tại M là:

$y=(3a^2-12)(x-a)+a^3-12a+12$

Tiếp tuyến đi qua điểm $A(m;-4)$ khi $-4=(3a^2-12)(m-a)+a^3-12a+12$

$\Leftrightarrow a^3-12a+16+3(a-2)(a+2)(m-a)=0 \Leftrightarrow (a-2)\left[(a+4)(a-2)+(3a+6)(m-a)\right]=0$

$\Leftrightarrow (a-2)(-2a^2+2a+3ma-6a-8+6m)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ g(a)=-2a^2+(3m-4)a+6m-8=0 \end{array}\right.$

Để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C) khi $g(a)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(2)=-8+6m-8+6m-8\ne 0 \\ \Delta=(3m-4)^2+8(6m-8)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>\frac{4}{3} \\ m<-4 \end{array}\right. \\ m\ne 2 \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in(2;5)} m=3;4 \Rightarrow \sum m=7$. **Chọn A.**

Ví dụ 13: Cho $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A là điểm trên $d:y=2x+1$ có hoành độ a mà từ A kẻ được hai tiếp tuyến tới (C). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a\in(-1;2)\setminus\{0;1\}$ **B.** $a\in(-1;2)\setminus\{0\}$ **C.** $a\in(-2;2)\setminus\{1\}$ **D.** $a\in(-2;2)\setminus\{0\}$

Lời giải

Gọi $A(a;2a+1)$, gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0+3}{x_0-1}\right)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

Do tiếp tuyến đi qua điểm $A(a;2a+1)$ nên $2a+1=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(a-x_0)+\dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ (2a+1)(x_0-1)^2 = -4a+4x_0+x_0^2+2x_0-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ g(x_0) = ax_0^2 - 2(a+2)x_0 + 3a + 2 = 0 \end{cases}$

Để từ *A* kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) thì phương trình $g(x_0)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ g(1) = -4a+4 \neq 0 \\ \Delta' = (a+2)^2 - 3a^2 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0; a \neq 1 \\ -2a^2+2a+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1;2)\setminus\{0;1\}$. **Chọn A.**

Dạng 4: Tiếp tuyến với bài toán tương giao

Phương pháp giải:

Viết phương trình hoành độ giữa đồ thị hàm số $y=f(x)(C)$ và đường thẳng $d: y=ax+b$. Gọi $A(x_i;ax_i+b)$ là tọa độ giao điểm khi đó $k_i = f'(x_i)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm *A*.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}(C)$. Chứng minh rằng với mọi *m* đường thẳng $d: y=x+m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt *A, B*. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại *A* và *B*. Tìm *m* để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $\dfrac{-x+1}{2x-1} = x+m \Leftrightarrow (x+m)(2x-1) = -x+1$ (Do $x=\dfrac{1}{2}$ không phải là nghiệm) $\Leftrightarrow 2x^2+2x-m-1=0(*)$.

Ta có: $\Delta' = m^2+2m+2>0(\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow d$ luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*) theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1x_2 = \dfrac{-m-1}{2} \end{cases}$

Khi đó $k_1+x_2 = \dfrac{-1}{(2x_1-1)^2} - \dfrac{1}{(2x_2-1)^2} = -\dfrac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2 - 2(x_1+x_2)+1\right]^2}$

$= -4m^2-8m-6 = -4(m+1)^2 - 2 \leq -2$.

Do đó k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=-1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=x^3+4x^2+3(C)$. Viết phương trình đường thẳng *d* qua $A(0;3)$ và cắt (C) tại 3 điểm phân biệt *A, B, C* sao cho các tiếp tuyến tại *B, C* vuông góc với nhau.

Lời giải

Phương trình đường thẳng *d* là: $y=kx+3$

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^3+4x^2+3=kx+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=0 \Rightarrow A(0;3) \\ g(x)=x^2+4x-k=0 \end{array}\right.$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=4+k>0 \\ k\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\neq k>-4$

Khi đó gọi, $B(x_1;kx_1+3)$, $C(x_2;kx_2+3) \Rightarrow k_1=y'(x_1)=3x_1^2+8x_1, k_2=3x_2^2+8x_2$

Để các tiếp tuyến tại *B, C* vuông góc với nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1$

$\Leftrightarrow x_1.x_2(3x_1+8)(3x_2+8)=-1 \Leftrightarrow x_1.x_2(9x_1x_2+24(x_1+x_2)+64)=-1$

$\Leftrightarrow -k(-9k-32)=-1 \Leftrightarrow 9k^2+32k+1=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{-16\pm\sqrt{247}}{9}$ (thỏa mãn)

Vậy $k=\dfrac{-16\pm\sqrt{247}}{9} \Rightarrow d: y=\dfrac{-16\pm\sqrt{247}}{9}x+3$.

Ví dụ 3: Gọi k_1 và k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến tại các giao điểm của $(C): y=\dfrac{x-1}{x-2}$ và đường thẳng $d: y=2x+1$. Giá trị của k_1+k_2 là:

A. 5 **B.** 10 **C.** 20 **D.** 30

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $\dfrac{x-1}{x-2}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ 2x^2-4x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

Mặt khác ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow k_1+k_2=y'\left(\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right)+y'\left(\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}\right)=20$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Tìm giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=x^2-2mx$ cắt đường thẳng $y=-1$ tại 2 điểm phân biệt *A, B* sao cho tổng hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại *A* và *B* bằng 4.

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=-3$ **D.** $m=3$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2-2mx+1=0$

Đk cắt tại 2 điểm phân biệt là: $\Delta'=m^2-1>0$. Khi đó $x_1;x_2$ là hoành độ giao điểm thì $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=1 \end{cases}$

Lại có $y'=2x-2 \Rightarrow y'(x_1)+y'(x_2)=2x_1-2+2x_2-2=4m-4=4 \Leftrightarrow m=2$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3mx+2(C)$. Số các giá trị của *m* để (C) cắt trục *Ox* tại 3 điểm phân biệt $A(1;0)$, *B, C* sao cho tiếp tuyến tại *B* và *C* của (C) song song với nhau.

A. 1	**B.** 0	**C.** 2	**D.** 3

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^3-3(m+1)x^2+3mx+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-(3m+2)x-2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ g(x)=x^2-(3m+2)x-2=0 \end{cases}$

+) Để (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(3m+2)^2+8>0 \\ g(1)=-3m-3\neq 0 \end{cases} (*)$

Khi đó gọi, $B(x_1;0), C(x_2;0) \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3m+2 \\ x_1x_2=-2 \end{cases} (x_1\neq x_2)$

Ta có: $k_1=y'(x_1)=3x_1^2-6(m+1)x_1+3m, k_2=y'(x_2)=3x_2^2-6(m+1)x_2+3m$

Do tiếp tuyến tại *B* và *C* song song nên ta có: $k_1=k_2 \Leftrightarrow x_1^2-2(m+1)x_1=x_2^2-2(m+1)x_2$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-2m-2)=0 \Leftrightarrow x_1+x_2=2m+2 \Leftrightarrow 3m+2=2m+2 \Leftrightarrow m=0$ (t/m). **Chọn A.**

Ví dụ 6 [Đề thi THPT QG năm 2018]: Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm $A\in(C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại *A* cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ (*M, N* khác *A*) thỏa mãn $y_1-y_2=6(x_1-x_2)$?

A. 1	**B.** 2	**C.** 0	**D.** 3

Lời giải

Từ giả thiết ta được đường thẳng *MN* có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;6)$.

Suy ra hệ số góc của đường thẳng *MN* bằng 6.

Gọi $A(x_0;y_0)$ ta có: $f'(x_0)=6 \Leftrightarrow x_0^3-7x_0=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3 \\ x_0=-1 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$.

Ta được các phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y=6x-\frac{117}{4}$, $y=6x+\frac{11}{4}$, $y=6x+2$.

Kiểm tra điều kiện cắt tại 3 điểm

Ta xét phương trình $\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2=6x+m \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2-6x=m(*)$.

Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-7x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Ta được bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\dfrac{11}{4}$	$\searrow$	$-\dfrac{117}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT suy ra $m = \dfrac{11}{4}$, $m = 2$ thì phương trình (*) có ba nghiệm.

Vậy có hai điểm A thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 2x\left(C\right)$. Biết tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại các điểm có hoành độ x_1 và x_2 có cùng hệ số góc $k = 5$. Biết $x_1^2 + x_2^2 = 10$ giá trị của *m* là:

A. $m = \pm 1$ **B.** $m = \pm\sqrt{2}$ **C.** $m = \pm 2$ **D.** $m = \pm\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có $y'\left(x_1\right) = y'\left(x_2\right) = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_1^2 + 6mx_1 + 2 = 5 \\ 3x_2^2 + 6mx_1 + 2 = 5 \end{array}\right.$. Khi đó $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình

$3x^2 + 6mx + 2 = 5$ hay $x^2 + 2mx - 1 = 0\left(m^2 + 1 > 0\right)$. Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$

Lại có $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 + 2 = 10 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m+1\right)x\left(C\right)$. Số các giá trị nguyên của *m* để trên $\left(C\right)$ tồn tại 2 điểm $M\left(x_1; y_1\right), N\left(x_2; y_2\right)$ phân biệt sao cho tiếp tuyến tại *M* và *N* cùng vuông góc với đường thẳng $d: x - 3y + 2 = 0$ và $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2\sqrt{5}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Viết lại $d: y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$. $y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m+1\right)$

Ta có: $y'\left(x_1\right).\dfrac{1}{3} = -1$, $y'\left(x_2\right).\dfrac{1}{3} = -1$ nên $x_1; x_2$ là nghiệm của PT: $x^2 - 2mx + m + 1 = -1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0\left(1\right)$

Để tồn tại 2 điểm *M, N* thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt dương

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m + 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 2m + 2\sqrt{m+2} = 20$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 10 \\ m + 2 = (10 - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 7$ (tm). **Chọn A.**

Dạng 5: Tiếp tuyến của hàm số hợp

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)(C)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(1-x) + f(1-x^2) = x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y = x - \frac{1}{5}$ **B.** $y = -\frac{1}{5}x + 1$ **C.** $y = x - 1$ **D.** $y = -x + 1$

Lời giải

Ta có: $(C) \cap Oy$ tại điểm có hoành độ $x = 0$.

Đặt $\begin{cases} f(0) = a \\ f'(0) = b \end{cases}$, thay $x = 1$ vào giả thiết ta có: $f^3(0) + f(0) = 2 \Leftrightarrow a^3 + a = 2 \Leftrightarrow a = 1$

Đạo hàm 2 vế biểu thức $f^3(1-x) + f(1-x^2) = x + 1$ ta được: $-3f^2(1-x)f'(1-x) - 2x.f'(1-x^2) = 1(*)$

Thay $x = 1$ vào biểu thức (*) ta có: $-3a^2b - 2b = 1 \xrightarrow{a=1} -3b - 2b = 1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{5}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{5}x + 1$. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)(C)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(2-x) + x = 3 + 3x.f(x)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$.

A. $\left[\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \end{array}\right.$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} f(1) = a \\ f'(1) = b \end{cases}$, thay $x = 1$ vào giả thiết ta có: $a^3 + 1 = 3 + 3a \Leftrightarrow a^3 - 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}\right.$

Đạo hàm 2 vế biểu thức $f^3(2-x) + x = 3 + 3x.f(x)$ ta được:

$$-3f^2(2-x)f'(2-x) + 1 = 3f(x) + 3x.f'(x)(*)$$

Thay $x=1$ vào biểu thức (*) ta có: $-3a^2b+1=3a+3b$

TH1: Với $a=-1\Rightarrow -3b+1=-3+3b\Leftrightarrow b=\dfrac{2}{3}$

Phương trình tiếp tuyến là: $y=\dfrac{2}{3}(x-1)-1=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$.

TH2: Với $a=2\Rightarrow -12b+1=6+3b\Leftrightarrow b=-\dfrac{1}{3}$

Phương trình tiếp tuyến là: $y=-\dfrac{1}{3}(x-1)+2=\dfrac{-1}{3}x+\dfrac{7}{3}$. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)(C)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(2-x)+f(x+1)=x^2+2x$. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$ đi qua điểm nào trong các điểm sau:

A. $(2;1)$ **B.** $\left(1;\dfrac{5}{3}\right)$ **C.** $\left(2;\dfrac{-2}{3}\right)$ **D.** $\left(1;\dfrac{13}{3}\right)$

Lời giải

Thay $x=0;x=1$ vào đề bài ta có: $\begin{cases}2f(2)+f(1)=0\\2f(1)+f(2)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(2)=-1\\f(1)=2\end{cases}$

Đạo hàm 2 vế biểu thức: $2f(2-x)+f(x+1)=x^2+2x$ ta được: $-2f'(2-x)+f'(x+1)=2x+2(*)$

Thay $x=0;x=1$ vào (*) ta được: $\begin{cases}-2f'(2)+f'(1)=2\\-2f'(1)+f'(2)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(2)=-\dfrac{8}{3}\\f'(1)=\dfrac{-10}{3}\end{cases}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=2$ có phương trình là:

$y=-\dfrac{8}{3}(x-2)-1=\dfrac{-8}{3}x+\dfrac{13}{3}$

Do đó tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x-2$ đi qua điểm $\left(1;\dfrac{5}{3}\right)$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f(x)(C)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(1-x)+f(1+x)=3(2x^2+1)$. Tiếp tuyến của (C) tại thời điểm có hoành độ $x=3$ cắt trục tọa độ tại 2 điểm *A* và *B*. Diện tích tam giác *OAB* là S_{OAB} thỏa mãn:

A. $0<S_{OAB}<5$ **B.** $5<S_{OAB}<15$ **C.** $15<S_{OAB}<30$ **D.** $S_{OAB}>30$

Lời giải

Thay $x=-2;x=2$ vào đề bài ta có: $\begin{cases}2f(3)+f(-1)=27\\2f(-1)+f(3)=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(3)=9\\f(-1)=9\end{cases}$

Đạo hàm 2 vế biểu thức: $2f(1-x)+f(1+x)=3(2x^2+1)$ ta được: $-2f(1-x)+f(1+x)=12x(*)$

Thay $x=-2; x=2$ vào (*) ta được: $\begin{cases}-2f'(3)+f'(-1)=-24\\-2f'(-1)+f'(3)=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(3)=8\\f'(-1)=-8\end{cases}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=3$ có phương trình là: $y=8(x-3)+9=8x-15$

Khi đó $S_{OAB}=\frac{1}{2}.15.\frac{15}{8}=14,0625$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho các hàm số $y=f(x), y=f\left[f(x)\right], y=f(x^2+4)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2),(C_3)$. Đường thẳng $x=1$ cắt $(C_1),(C_2),(C_3)$ lần lượt tại *M, N, P*. Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại *M* và của (C_2) tại *N* lần lượt là $y=3x+2$ và $y=12x-5$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại *P* bằng:

A. $y=8x-1$ **B.** $y=4x+3$ **C.** $y=2x+5$ **D.** $y=3x+4$

Lời giải

Ta có $y=3x+2\Leftrightarrow y=f(1)=f'(1).(x-1)\Leftrightarrow y=f'(1)x-f'(1)+f(1)\Rightarrow\begin{cases}f'(1)=3\\f(1)=5\end{cases}$

Tiếp tuyến của (C_2) tại *N* là $y-f\left[f(1)\right]=f'(1).f'\left[f(1)\right].(x-1)\Leftrightarrow y-f(5)=3f'(5).(x-1)$

$\Leftrightarrow y=3f'(x).x+f(5)-3.f'(5)$ mà $y=12x-5\longrightarrow\begin{cases}3f'(x)=12\\f(5)-3.f'(5)=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(5)=4\\f(5)=7\end{cases}$

Lại có $y=f(x^2+4)\Rightarrow y'=(x^2+4)'.f'(x^2+4)=2x.f'(x^2+4)\Rightarrow y(1)=2f'(5)$.

Do đó, tiếp tuyến của (C_3) tại *P* là $y=f(5)=2f'(5)(x-1)\Leftrightarrow y-7=8(x-1)\Leftrightarrow y=8x-1$.

Chọn A.

Dạng 6: Tìm điều kiện để 2 đồ thị tiếp xúc với nhau

Cho 2 hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Đồ thị 2 hàm số trên tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi

$\begin{cases}f(x)=g(x)\\f'(x)=g'(x)\end{cases}$ và nghiệm của hệ phương trình này chính là hoành độ của tiếp điểm.

Ví dụ 1: Biết rằng hai đường cong $y=x^3+\frac{5x}{4}-2$ và $y=x^2+x-2$ tiếp xúc với nhau tại một điểm duy nhất $M(x_0;y_0)$. Tính *OM*.

A. $OM=\frac{1}{2}$ **B.** $OM=\frac{\sqrt{29}}{2}$ **C.** $OM=\frac{\sqrt{29}}{4}$ **D.** $OM=\frac{\sqrt{29}}{3}$

Lời giải

Tọa độ tiếp điểm là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+\dfrac{5x}{4}-2=x^2+x-2 \\ 3x^2+\dfrac{5}{4}=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Khi đó $M\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{4}\right) \Rightarrow OM=\dfrac{\sqrt{29}}{4}$.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+m+1$ tiếp xúc với trục hoành.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành khi hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3mx+m+1=0 \\ 3x^2-3m=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^3-3mx+m+1=0\,(1) \\ m=x^2 \end{cases}$ có nghiệm.

Thế $m=x^2$ vào phương trình (1) ta có: $x^3-3x^3+x^2+1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow m=1$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Số các giá trị của tham số *m* để hai đồ thị $f(x)=x^3-3x+1$ và đường thẳng $d: y=m(x-1)-1$ tiếp xúc với nhau là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Hai đồ thị tiếp xúc với nhau khi hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x+1=m(x-1)-1 \\ 3x^2-3=m \end{cases}$ có nghiệm.

Suy ra $x^3-3x+1=(3x^2-3)(x-1)-1 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow m=-\dfrac{9}{4} \\ x=1 \Rightarrow m=0 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Gọi *S* là tập hợp các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $(C): y=x^3+mx^2-8x$ tiếp xúc với đường thẳng $y=x+9m$. Tổng các phần tử của tập hợp *S* là:

A. 0 **B.** 3 **C.** -3 **D.** 4

Lời giải

Hai đồ thị tiếp xúc với nhau khi hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+mx^2-8x=x+9m\,(1) \\ 3x^2+2mx-8-1\,(2) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^3+mx^2-9x-9m=0 \Leftrightarrow x^2(x+m)-9(x+m)=0 \Leftrightarrow (x^2-9)(x+m)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 3 \\ x=-m \end{array}\right.$

Với $x=3 \Rightarrow m=-3$

Với $x=-3 \Rightarrow m=3$

Với $x=-m$ ta có: $3m^2-2m^2=9 \Leftrightarrow m=\pm 3$.

Vậy $m=\pm 3$ là các giá trị cần tìm. Vậy tổng các phần tử của tập S là 0. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(m+3)x^2+18mx-8$ tiếp xúc với trục hoành. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

A. 9 **B.** $\frac{278}{27}$ **C.** 8 **D.** $\frac{208}{27}$

Lời giải

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành khi hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3-3(m+3)x^2+18mx-8=0 \\ 6x^2-6(m+3)x+18m=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-3(m+3)x^2+18mx-8=0(1) \\ x^2-(m+3)x+3m=0(2) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow x(x-m)-3(x-m)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=m \end{array}\right.$

Với $x=3$ thế vào (1) ta có: $54-27(m+3)+54m-8=0 \Leftrightarrow m=\frac{35}{27}$.

Với $x=m$ thế vào (1) ta có:

$2m^3-3m^2(m+3)+18m^2-8=0 \Leftrightarrow -m^3+9m^2-8=0 \Leftrightarrow (m-1)(m^2-8m-8)=0$

Ta được tổng các giá trị của tập hợp S là: $\frac{35}{27}+1+8=\frac{278}{27}$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Tính tổng S tất cả các giá trị tham số m để đồ thị $f(x)=x^3-3mx^2+3mx+m^2-2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.

A. $S=\frac{4}{3}$ **B.** $S=1$ **C.** $S=0$ **D.** $S=\frac{2}{3}$

Lời giải

Đồ thị đã cho tiếp xúc với trục hoành khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$\begin{cases} f(x)=x^3-3mx^2+3mx+m^2-2m^3=0 \\ f'(x)=3x^2-6mx+3m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3mx^2+3mx+m^2-2m^3=0 \\ g(x)=x^2-2mx+m=0(1) \end{cases}$

Lấy $\frac{f(x)}{g(x)}$ ta được $f(x)=g(x).(x-m)+(2m-2m^2)x+2m^2-2m^3$

Suy ra $(2m-2m^2)x+2m^2-2m^3=0 \Leftrightarrow (2m-2m^2)(x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ x=-m \end{array}\right.$

Với $x=-m \Rightarrow (1) \Leftrightarrow m^2+2m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy $m=0, m=1, m=-\dfrac{1}{3}$. **Chọn D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{-x+1}{x-2}$. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;-1)$ là

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Số tiếp tuyến của đồ thị (C) mà đi qua điểm $M(1;2)$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Câu 3: Biết trên đồ thị $(C): y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có hai điểm mà tiếp tuyến tại các điểm đó đều song song với đường thẳng $d: 3x-y+15=0$. Tìm tổng *S* các tung độ tiếp điểm.

A. $S=3$ **B.** $S=6$ **C.** $S=-4$ **D.** $S=2$

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) mà có hệ số góc lớn nhất là:

A. $y=3x+1$ **B.** $y=-3x-1$ **C.** $y=-3x+1$ **D.** $y=3x-1$

Câu 5: Đường thẳng $x+y=2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y=-x^3+3x+4$ khi *m* bằng

A. -3 hoặc 1 **B.** 1 hoặc 3 **C.** -1 hoặc 3 **D.** -3 hoặc -1

Câu 6: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-4x+6$ tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x)=0$ có hệ số góc bằng

A. -4 **B.** $\dfrac{47}{12}$ **C.** $\dfrac{-13}{4}$ **D.** $-\dfrac{17}{4}$

Câu 7: Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$.

A. Có hệ số góc dương. **B.** Song song với trục hoành.

C. Có hệ số góc bằng -1. **D.** Song song với đường thẳng $x=1$.

Câu 8: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

A. $y=3x+13$ **B.** $y=3x-5$ **C.** $y=-3x-5$ **D.** $y=-3x+13$

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị (C) với trục tung là:

A. $y=-x+2$ **B.** $y=-x+1$ **C.** $y=x-2$ **D.** $y=-x-2$

Câu 10: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{9}x$ là

A. $y=-\frac{1}{9}x+18, y=-\frac{1}{9}x+5$ **B.** $y=\frac{1}{9}x+18, y=\frac{1}{9}x-14$

C. $y=9x+18, y=9x-14$ **D.** $y=9x+18, y=9x+5$

Câu 11: Cho hàm số $y=\frac{2}{1-x}$ có đồ thị hàm số (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục tung.

A. $y=2x+2$ **B.** $y=x+2$ **C.** $y=-2x+2$ **D.** $y=2x-2$

Câu 12: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm $A(3;1)$ là:

A. $y=-9x-26$ **B.** $y=9x-26$ **C.** $y=-9x-3$ **D.** $y=9x+2$

Câu 13: Cho đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tiếp tuyến hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị trên.

A. $y=-x+\frac{8}{3}$ **B.** $y=x+\frac{8}{3}$ **C.** $y=-x-\frac{8}{3}$ **D.** $y=x-\frac{8}{3}$

Câu 14: Đường thẳng $y=m$ tiếp xúc với đồ thị $(C): y=-2x^4+4x^2-1$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tung độ tiếp điểm.

A. 1 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 15: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị là (C_m). Tìm *m* để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=3x+2018$.

A. $m=\frac{7}{3}$ **B.** $m=1$ **C.** $m=2$ **D.** $m=-\frac{1}{3}$

Câu 16: Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Một tiếp tuyến của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm *A, B* và $AB=2\sqrt{2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng.

A. $-\sqrt{2}$ **B.** -2 **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** -1

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left[f(1+2x)\right]^2=x-\left[f(1-x)\right]^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ **B.** $y=-\frac{1}{7}x-\frac{8}{7}$ **C.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{8}{7}$ **D.** $y=-x+\frac{6}{7}$

Câu 18: Gọi *S* là tập hợp các giá trị của hàm số *m* để đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+m-2$ có đúng một tiếp tuyến song song với trục *Ox*. Tính tổng các phần tử của *S*.

A. -2 **B.** 5 **C.** -5 **D.** 3

Câu 19: Gọi *S* là tập hợp các giá trị của hàm số *m* sao cho đường thẳng $d: y = mx - m - 3$ cắt đồ thị $(C): y = 2x^3 - 3x^2 - 2$ tại ba điểm phân biệt *A, B,* $I(1;-3)$ mà tiếp tuyến với (C) tại *A* và tại *B* vuông góc với nhau. Tính tổng các phần tử của *S*.

A. -1 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 5

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;1)$. Gọi *S* là tập các giá trị của *m* để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua *A*. Tính tổng bình phương các phần tử của tập *S*.

A. $\frac{13}{4}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{9}{4}$ **D.** $\frac{25}{4}$

Câu 21: Cho đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

A. 3 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** $2\sqrt{2}$

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với $x_A < x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại *A, B* song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$. Tính $S = 3x_A - 5x_B$.

A. $S = -16$ **B.** $S = 16$ **C.** $S = 15$ **D.** $S = -9$

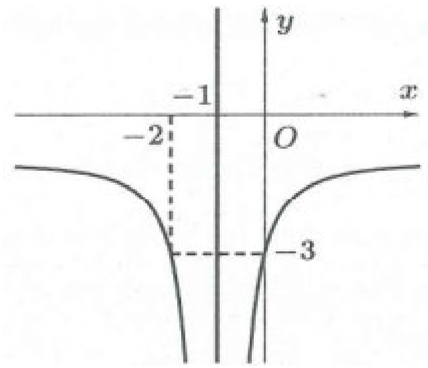
Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^x.f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = \ln 2$ là

A. $2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0$ **B.** $2x - 9y - 2\ln 2 + 3 = 0$ **C.** $2x - 9y + 2\ln 2 - 3 = 0$ **D.** $2x + 9y + 2\ln 2 - 3 = 0$

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$, có đồ thị (C) và điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = a$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của *a* để tiếp tuyến của (C) tại *M* cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác *M*.

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}(a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0)$ có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là:

A. $x+3y-2=0$ **B.** $x+3y+2=0$ **C.** $x-3y-2=0$ **D.** $x-3y+2=0$

Câu 26: Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm *A* thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại *A* cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ (*M, N* khác *A*) thỏa mãn $y_1-y_2=6(x_1-x_2)$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Câu 27: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^4-\frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm *A* thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại *A* cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ (*M, N* khác *A*) thỏa mãn $y_1-y_2=8(x_1-x_2)$?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 28: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ có đồ thị là (C) và điểm $A\left(-\frac{27}{16};-\frac{15}{4}\right)$. Biết có ba điểm $M_1(x_1;y_1),M_2(x_2;y_2),M_3(x_3;y_3)$ thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại mỗi điểm đó đều đi qua *A*. Tính $S=x_1+x_2+x_3$.

A. $S=-\frac{7}{4}$ **B.** $S=-3$ **C.** $S=-\frac{5}{4}$ **D.** $S=\frac{5}{4}$

Câu 29: Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+1}(C)$. Các điểm $M\in(C)$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại *M* cắt hai trục tọa độ tại *A, B* với diện tích tam giác *OAB* bằng $\frac{1}{4}$ có dạng $M_1(a;b),M_2(c;d)$. Khi đó tổng $a+b+c+d$ là

A. $-\frac{1}{5}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Câu 30: Cho hàm số $y=x^3+x^2+3x+1$ có đồ thị là (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để từ điểm $M(0;m)$ kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C) mà hoành độ tiếp điểm thuộc đoạn $[1;3]$.

A. Vô số **B.** 0 **C.** 61 **D.** 60

Câu 31: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $(d_m): y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau?

A. Vô số **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

Câu 32: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$, gọi *d* là tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng *d* cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1;y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2;y_2)$. Gọi *S* là tập hợp các số *m* sao cho $x_2+y_1=-5$. Tính tổng bình phương các phần tử của *S*.

A. 0 **B.** 4 **C.** 10 **D.** 9

Câu 33: Cho hàm số $y=x^3-2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2… tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại M_n khác M_{n-1} ($n=4;5;\ldots$), gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ điểm M_n. Tìm *n* để: $2009x_n+y_n+2^{2013}=0$.

A. $n=685$ **B.** $n=679$ **C.** $n=672$ **D.** $n=675$

Câu 34: Cho hàm số $y=x^3+3x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ bằng 1. Tiếp tuyến tại điểm M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1. Tiếp tuyến tại điểm M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2. Tiếp tuyến tại M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} $(n\geq 4, n\in\mathbb{N})$? Tìm số tự nhiên *n* thỏa mãn điều kiện $y_n-3x_n+2^{21}=0$.

A. $n=7$ **B.** $n=8$ **C.** $n=22$ **D.** $n=21$

Câu 35: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{8}x^4-\dfrac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm *A* thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại *A* cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)$ (*M, N* khác *A*) thỏa mãn $y_1-y_2=3(x_1-x_2)$.

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 36: Giả sử đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến chung của đồ thị hàm số $y=x^2-5x+6$ và $y=x^2+3x-10$. Tính $M=2a+b$.

A. $M=16$ **B.** $M=-4$ **C.** $M=4$ **D.** $M=7$

Câu 37: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+8(m-1)x+2$, (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m) tồn tại hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ sao cho mỗi tiếp tuyến của (C_m) tại *A, B* vuông góc với đường thẳng $\Delta: x-4y+4=0$ đồng thời $\sqrt{x_A}+\sqrt{x_B}\le 2\sqrt{2}$ là $S=[u;v)$. Tính $u+v$.

A. $\frac{3}{2}$ **B.** 5 **C.** 3 **D.** $\frac{5}{2}$

Câu 38: Qua điểm $A(1;-4)$ kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=\frac{1}{x+1}$ tại hai tiếp điểm $M(x_1;y_1)$ và $N(x_2;y_2)$. Khẳng định đúng là

A. $x_1x_2=1$ **B.** $x_1x_2=-1$ **C.** $x_1x_2=-5$ **D.** $x_1x_2=5$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Ta có $y'=\dfrac{1}{(x-2)^2}$. Giả sử $M\left(a;\dfrac{-a+1}{a-2}\right)$ là tọa độ tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y=\dfrac{1}{(a-2)^2}(x-a)+\dfrac{-a+1}{a-2}$

Mà tiếp tuyến qua $A(2;-1)$ nên $\dfrac{1}{(a-2)^2}(2-a)+\dfrac{-a+1}{a-2}=-1\Leftrightarrow\dfrac{-a}{a-2}=-1\Leftrightarrow -a=2-a$

Do đó không có giá trị a thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 2: Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$. Giả sử $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)$ là tọa độ tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y=\dfrac{-3}{(a-1)^2}(x-a)+\dfrac{2a+1}{a-1}$

Mà tiếp tuyến qua $M(1;2)$ nên $\dfrac{-3}{(a-1)^2}(1-a)+\dfrac{2a+1}{a-1}=2\Leftrightarrow\dfrac{2a+4}{a-1}=2\Leftrightarrow 2a+4=2a-2$

Do đó không có giá trị a thỏa mãn. **Chọn A.**

Câu 3: Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$. Giả sử $M\left(a;\dfrac{a-1}{a+2}\right)$ là tọa độ tiếp điểm

Hệ số góc là $\dfrac{3}{(a+2)^2}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\Rightarrow M(-1;-2)\\a=-3\Rightarrow M(-3;4)\end{array}\right.\Rightarrow S=-2+4=2$. **Chọn D.**

Câu 4: Ta có $y'=-3x^2+6x=-3(x-1)^2+3\le 3$ khi $x=1\Rightarrow y=4$

Do đó phương trình tiếp tuyến là $y=3(x-1)+4=3x+1$. **Chọn A.**

Câu 5: Ta có $y'=-3x^2+2$. Giả sử $M\left(a;-a^3+2a+4\right)$

Ta có $k=y'(a)=-3a^2+2=-1\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\Rightarrow M(1;5)\Rightarrow m=3\\a=-1\Rightarrow M(-1;3)\Rightarrow m=1\end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 6: Ta có $f'(x)=x^2-x-4\Rightarrow f''(x)=2x-1; f''(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Hệ số góc là $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{17}{4}$. **Chọn D.**

Câu 7: Ta có $y'=x^2-4x+3; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-\dfrac{11}{3}\\x=3\Rightarrow y=-5\end{array}\right.\Rightarrow$ cực tiểu là $(3;-5)$

Hệ số góc của cực tiểu là $y'(3)=0\Rightarrow$ song song trục hoành. **Chọn B.**

Câu 8: Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-2)^2}$. Tại $x=3\Rightarrow y=4$. Hệ số góc là $y'(3)=-3$

Phương trình tiếp tuyến là $y=-3(x-3)+4=-3x+13$. **Chọn D.**

Câu 9: Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$. Giao điểm với trục tung là $(0;2)$. Hệ số góc $y'(0)=-1$

Phương trình tiếp tuyến là $y=-x+2$. **Chọn A.**

Câu 10: Ta có $y'=3x^2-3$. Giả sử $M\left(a;a^3-3a+2\right)$ là tọa độ tiếp điểm

Hệ số góc là $k=y'(a)=3a^2-3=9\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2\Rightarrow M(2;4)\Rightarrow y=9x-14 \\ a=-2\Rightarrow M(-2;0)\Rightarrow y=9x+18\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 11: Ta có $y'=\dfrac{2}{(1-x)^2}$. Giao điểm với trục tung là $(0;2)$. Hệ số góc $y'(0)=2$

Phương trình tiếp tuyến là $y=2x+2$. **Chọn A.**

Câu 12: $y'=3x^2-6x$. Hệ số góc là $y'(3)=9\Rightarrow$ tiếp tuyến $y=9x-26$. **Chọn B.**

Câu 13: $y'=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\ge -1$ khi $x=2\Rightarrow y=\dfrac{2}{3}$

Phương trình tiếp tuyến là $y=-(x-2)+\dfrac{2}{3}=-x+\dfrac{8}{3}$. **Chọn A.**

Câu 14: $y'=-8x^3+8x; y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=-1 \\ x=\pm 1\Rightarrow y=1\end{array}\right.$

Do đó tung độ tiếp điểm là 1. **Chọn A.**

Câu 15: Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x=x_0$ là $k=y'(x_0)=3x_0^2-4x_0+m-1$

Ta có $3x_0^2-4x_0+1=3\left(x_0-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}\ge -\dfrac{1}{3}\Rightarrow k\ge m-\dfrac{4}{3}$. Do đó $k_{\min}=m-\dfrac{4}{3}$

Theo bài ra, ta có $3k_{\min}=-1\Leftrightarrow 3\left(m-\dfrac{4}{3}\right)=-1\Leftrightarrow m-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow m=1$. **Chọn B.**

Câu 16: Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\Rightarrow y'(x_0)=-\dfrac{1}{(x_0-2)^2}$ nên phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$y-y_0=y'(x_0).(x-x_0)\Leftrightarrow y-\frac{2x_0-3}{x_0-2}=-\frac{1}{(x_0-2)^2}.(x-x_0) \qquad (d)$$

• Tiếp tuyến d cắt TCĐ: $x=2$ tại $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)\Rightarrow \overline{IA}=\left(0;\dfrac{2}{x_0-2}\right)$

• Tiếp tuyến d cắt TCN: $y=2$ tại $B(2x_0-2;2)\Rightarrow \overline{IB}=(2x_0-4;0)$

Suy ra $IA.IB=\frac{2}{|x_0-2|}.|2x_0-4|=4$ mà $IA^2+IB^2=AB^2=8\Rightarrow IA=IB=2$

Do đó $|2x_0-4|=2\Leftrightarrow (x_0-2)^2=1\longrightarrow k=-1$. **Chọn D.**

Câu 17: Thay $x=0$ vào giả thiết, ta được $f^2(1)=-f^3(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)=-1 \end{array}\right.$

Đạo hàm 2 vế giả thiết, ta có $4f'(1+2x).f(1+2x)=1+3f'(1-x).f^2(1-x)$ (*)

Thay $x=0$ vào (*), ta được $4f'(1).f(1)=1+3f'(1).f^2(1)$ (I)

TH1. Với $f(1)=0$ thay vào (I), ta có $0=1$ (vô lý)

TH2. Với $f(1)=-1$ thay vào (I), ta có $-4f'(1)=1+3f'(1)\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{7}$ (vô lý)

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y+1=-\frac{1}{7}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$. **Chọn A.**

Câu 18: Tiếp tuyến song song với trục $Ox\Rightarrow k=y'(x_0)=0$

Giải phương trình $y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=m-2 \\ x=\pm1\Rightarrow y=m-3 \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(0;m-2)$ là: $y=m-2$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(\pm1;\mathrm{m}-3)$ là: $y=m-3$

Để có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox thì $\left[\begin{array}{l} m-2=0 \\ m-3=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Vậy $S=\{2;3\}\Rightarrow T=5$. **Chọn B.**

Câu 19: Phương trình hoành độ giao điểm là: $2x^3-3x^2-2=mx-m-3$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1-m(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-1)-m(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-1-m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=-3 \\ g(x)=2x^2-x-1-m=0 \end{array}\right.$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt thì $g(x)=0$ có 2 nghiệm khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=1+8(1+m)>0 \\ g(1)=-m\neq 0 \end{cases}$ (*)

Gọi $A(x_1;mx_1-m-3)$ và $B(x_2;mx_2-m-3)$ theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{1}{2} \\ x_1x_2=\frac{-1-m}{2} \end{cases}$

Để tiếp tuyến tại A và B của (C) vuông góc với nhau thì $y'(x_1).y'(x_2)=-1$

$\Leftrightarrow \left(6x_1^2-6x_1\right)\left(6x_2^2-6x_2\right)=-1 \Leftrightarrow x_1x_2\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)=-\frac{1}{36}$

$\Leftrightarrow x_1x_2\left(x_1x_2-x_1-x_2+1\right)=-\frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{-1-m}{2}\left(\frac{-1-m}{2}-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{1}{36}$

$\Leftrightarrow \frac{m^2+2m+1}{4}-\frac{1+m}{4}=-\frac{1}{36} \Leftrightarrow m^2+m+\frac{1}{9}=0 \Leftrightarrow m=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{6}\left(t/m(*)\right)$

Suy ra tổng các phần tử của *S* bằng -1. **Chọn A.**

Câu 20: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x_0;\frac{x_0-2}{-x_0+1}\right)$ là:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{x_0-2}{-x_0+1}=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-2}{-x_0+1}$

Do tiếp tuyến đi qua điểm $A(m;1)$ nên $1=\frac{x_0-a+(2-x_0)(x_0-1)}{(x_0-1)^2}$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=-x_0^2+4x_0-2-m \Leftrightarrow 2x_0^2-6x_0+3+m=0\,(*)$

Để có đúng một tiếp tuyến đi qua *A* thì (*) có nghiệm kép hoặc (*) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x_0=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta'=3-2m=0\\ \begin{cases}\Delta'=3-2m>0\\ 2.1-6+3+m=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\frac{3}{2}\\ m=1\end{array}\right.$.

Vậy $S=\left\{\frac{3}{2};1\right\} \Rightarrow$ Tổng bình phương trình tập hợp *S* bằng $\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$. **Chọn A.**

Câu 21: $(C): y=\frac{x-1}{2x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2x^2}$. Ta có: $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}$.

Gọi $A\left(a;\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}\right), B\left(b;\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)(a\neq b, ab\neq 0)$ là hai điểm thuộc đồ thị (C).

Gọi d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) tại *A* và *B* song song với nhau.

Theo giả thiết ta có: $y'(a)=y'(b) \Leftrightarrow \frac{1}{2a^2}=\frac{1}{2b^2} \Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)=0 \xrightarrow{a\neq b} a=-b$.

Suy ra $B\left(-a;\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\right)$

Phương trình tiếp tuyến tại *A* là: $d_1: y=\frac{1}{2a^2}(x-a)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}=\frac{x}{2a^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$

Khi đó $d(d_1;d_2)=d(B;d_1)=\frac{\left|\frac{-a}{2a^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4a^4}+1}}=\frac{\left|\frac{a}{2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4a^4}+1}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4a^2}+a^2}}$

Mặt khác $\frac{1}{4a^2}+a^2 \ge 2\sqrt{\frac{1}{4a^2}.a^2}=1 \Rightarrow d \le \frac{2}{1}=2 \Rightarrow d_{\max}=2$. **Chọn C.**

Câu 22: Gọi $A\left(a;a^3-3a+1\right), B\left(b;b^3-3b+1\right)$ với $a<b$.

Tiếp tuyến tại *A, B* song song với nhau $\Rightarrow y'(a)=y'(b) \Leftrightarrow 3a^2-3=3b^2-3 \Leftrightarrow a^2=b^2$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)=0 \xrightarrow{a\ne b} a=-b$.

Khi đó: $B\left(-a;-a^3+3a+1\right) \Rightarrow AB^2=4a^2+\left(2a^3-6a\right)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4a^6-24a^4+40a^2=32 \xrightarrow{t=a^2} 4t^3-24t^2+40t-32=0 \Leftrightarrow t=4 \Rightarrow a=\pm 2$.

Do $a<b \Rightarrow a=-2, b=2 \Rightarrow S=3.(-2)-5.2=-16$. **Chọn A.**

Câu 23: Ta có: $f'(x)=-e^x.f^2(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=-e^x \Rightarrow \left[\frac{-1}{f(x)}\right]'=\left(-e^x\right)' \Rightarrow \frac{1}{f(x)}=e^x+C$

Mặt khác $f(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{f(0)}=e^0+C \Rightarrow C=1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

Ta có: $\begin{cases} f'(\ln 2)=\frac{-2}{9} \\ f(\ln 2)=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0=\ln 2$ là:

$y=\frac{-2}{9}(x-\ln 2)+\frac{1}{3} \Leftrightarrow 9y=-2x+2\ln 2+3 \Leftrightarrow 2x+9y-2\ln 2-3=0$. **Chọn A.**

Câu 24: Gọi $M\left(a;\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}\right), y'=2x^3-6x$

Phương trình tiếp tuyến tại *M* là: $y=\left(2a^3-6a\right)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}(d)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của *d* và (C) là:

$\left(2a^3-6a\right)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(2a^3-6a\right)(x-a)+\frac{1}{2}\left(a^4-x^4\right)-3\left(a^2-x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-a)\left(2a^3-6a-\frac{1}{2}\left(a^2+x^2\right)(a+x)+3(x+a)\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-a)\left(2a^3-6a-\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{2}a^2x-\frac{1}{2}x^3+3x+3a\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-a)\left(3a^3-ax^2-a^2x-x^3+3x-3a\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-a)\left[(x-a)\left(-x^2-2ax-3a^2\right)+3(x-a)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2(x^2+2ax+3a^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \Rightarrow M(a;y_M) \\ g(x)=x^2+2ax+3a^2-3=0 \end{array}\right.$

Để *d* cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác *M* thì phương trình $g(x)=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác

$a \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = a^2-3a^2+3>0 \\ g(a)=6a^2-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2<3 \\ a^2 \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Kết hợp $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a=\{0;\pm 1\}$. Vậy có 3 giá trị của *a*. **Chọn B.**

Câu 25: (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $f(0)=2 \Rightarrow \dfrac{b}{d}=2 \Rightarrow b=2d$

Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}=-1 \Rightarrow c=d \Rightarrow c=d=\dfrac{b}{2}$.

Ta có: $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\dfrac{ac-2c^2}{(cx+c)^2}=\dfrac{c^2\left(\dfrac{a}{c}-2\right)}{c^2(x+1)}=\dfrac{\dfrac{a}{c}-2}{(x+1)^2}$

Lại có: $f'(-2)=f'(0)=-3 \Rightarrow \dfrac{a}{c}-2=-3 \Rightarrow a=-c$.

Vậy $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{-cx+2c}{cx+c}=\dfrac{-x+2}{x+1}, y'=\dfrac{-3}{(x+1)^2}, (C)\cap Ox = A(2;0)$.

Ta có: $y'(2)=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại *A* là: $y=-\dfrac{1}{3}(x-2)$ hay $x+3y-2=0$. **Chọn A.**

Câu 26: Gọi $A\left(a;\dfrac{1}{4}a^4-\dfrac{7}{2}a^2\right) \in (C)$ nên phương trình tiếp tuyến *d* của (C) tại *A* là

$$y-y_A=y'(x_A)(x-x_A) \Leftrightarrow y=(a^3-7a)(x-a)+\frac{1}{4}a^4-\frac{7}{2}a^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và *d* là $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{7}{2}x^2=(a^3-7a)(x-a)+\dfrac{1}{4}a^4-\dfrac{7}{2}a^2$

$\Leftrightarrow x^4-14x^2-(4a^3-28a)(x-a)-a^4+14a^2=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2(x^2+2ax+3a^2-14)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x^2+2ax+3a^2-14=0\,(1) \end{array}\right.$

Ta tìm điều kiện để (1) có 2 nghiệm phân biệt khác $a \Leftrightarrow \dfrac{7}{3} \neq a^2 < 7$

Theo bài ra, hệ số góc của tiếp tuyến là $k=6 \Rightarrow a^3-7a=6 \Rightarrow a=\{-2;-1;3\}$

Vậy có tất cả hai giá trị *a* cần tìm. **Chọn B.**

Câu 27: Gọi $A\left(a;\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2\right) \in (C)$ nên phương trình tiếp tuyến *d* của (C) tại *A* là

$$y-y_A=y'(x_A)(x-x_A)\Leftrightarrow y=\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)(x-a)+\frac{1}{3}a^4-\frac{14}{3}a^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$\frac{1}{3}x^4-\frac{14}{3}x^2=\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)(x-a)+\frac{1}{3}a^4-\frac{14}{3}a^2$

$\Leftrightarrow x^4-14x^2-\left(4a^3-28a\right)(x-a)-a^4+14a^2=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-14\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x^2+2ax+3a^2-14=0\,(1)\end{array}\right.$

Ta tìm điều kiện để (1) có 2 nghiệm phân biệt khác $a\Leftrightarrow \frac{7}{3}\neq a^2<7$

Theo bài ra, hệ số góc của tiếp tuyến là $k=8\Rightarrow \frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a=8\Rightarrow a=\{-2;-1;3\}$

Vậy có tất cả hai giá trị a cần tìm. **Chọn A.**

Câu 28: Gọi tiếp tuyến d đi qua A có phương trình là $y+\frac{15}{4}=k\left(x+\frac{27}{16}\right)\Leftrightarrow y=kx+\frac{27}{16}k-\frac{15}{4}$

Vì (C) và d tiếp xúc nhau $\Rightarrow \begin{cases} 2x^3-6x=k \\ \frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}=kx+\frac{27}{16}k-\frac{15}{4}\end{cases}$

Suy ra $\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}=\left(x+\frac{27}{16}\right)\left(2x^3-6x\right)-\frac{15}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2;x=-1 \\ x=\frac{7}{4}\end{array}\right.$. Vậy $S=-\frac{5}{4}$. **Chọn C.**

Câu 29: Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0}{x_0+1}\right)\Rightarrow y'(x_0)=\frac{2}{(x_0+1)^2}$ nên phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$y-\frac{2x_0}{x_0+1}=y'(x_0).(x-x_0)\Leftrightarrow y-\frac{2x_0}{x_0+1}=\frac{2}{(x_0+1)^2}.(x-x_0)\qquad (d)$$

- Tiếp tuyến d cắt Ox tại $A\left(-x_0^2;0\right)\Rightarrow OA=x_0^2$
- Tiếp tuyến d cắt Oy tại $B\left(0;\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)\Rightarrow OB=\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$.

Do đó $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.\text{OB}=\frac{x_0^4}{(x_0+1)^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\frac{1}{2}\Rightarrow y_0=-2 \\ x_0=1\Rightarrow y_0=1\end{array}\right.$

Vậy $a+b+c+d=-\frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 30: Phương trình tiếp tuyến d của (C) đi qua M là $y-m=k.(x-0)\Leftrightarrow y=kx+m$

Vì (C) tiếp xúc với d nên suy ra $\begin{cases} 3x^2+2x+3=k \\ x^3+x^2+3x+1=kx+m \end{cases} \Leftrightarrow m=-2x^3-x^2+1$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m=g(x)=-2x^3-x^2+1$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $[1;3]$

Xét hàm số $g(x)=-2x^3-x^2+1$ trên $[1;3]$, có $g'(x)=-6x^2-2x<0;\forall x\in[1;3]$

Suy ra $g(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(1;3)\Rightarrow g(3)\le m\le g(1)\Leftrightarrow -62\le m\le -2$.

Vậy có tất cả $-2-(-62)+1=61$ giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn C.**

Câu 31: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\frac{2x+3}{x-2}=2x+m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\neq 0 \\ 2x+3=(x-2)(2x+m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \underbrace{2x^2+(m-6)x-2m-3=0}_{f(x)} \end{cases}$

Để (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt khi $\Leftrightarrow f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2)\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-6)^2+8(2m+3)>0 \Leftrightarrow m^2+4m+60>0;\forall m$

Khi đó, gọi x_1,x_2 là hoành độ các giao điểm $\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=\frac{6-m}{2} \\ x_1x_2=-\frac{2m+3}{2} \end{cases}$ (1)

Theo bài ra, ta có $y'(x_1)-y'(x_2)\Leftrightarrow -\frac{7}{(x_1-2)^2}=-\frac{7}{(x_2-2)^2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2 \\ x_1+x_2=4 \end{array}\right.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{6-m}{2}=4\Leftrightarrow m=-2$. **Chọn B.**

Câu 32: Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0-1}{x_0+2}\right)\Rightarrow y'(x_0)=\frac{3}{(x_0+2)^2}$ nên phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$y-\frac{x_0-1}{x_0+2}=y'(x_0).(x-x_0)\Leftrightarrow y-\frac{x_0-1}{x_0+2}=\frac{3}{(x_0+2)^2}.(x-x_0) \quad (d)$$

• Tiếp tuyến d cắt TCĐ: $x=2$ tại $A\left(-2;\frac{x_0-4}{x_0+2}\right)\Rightarrow y_1=\frac{x_0-4}{x_0+2}$

• Tiếp tuyến d cắt TCN: $y=1$ tại $B(2x_0+2;2)\Rightarrow x_2=2x_0+2$

Theo bài ra, ta có $x_2+y_1=-5\Leftrightarrow 2x_0+2+\frac{x_0-4}{x_0+2}=-5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-5 \\ x_0=-1 \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 33: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_k(x_k;y_k)$ là $y-y_k=y'(x_k)(x-x_k)$

$\Leftrightarrow y=y'\left(x_k\right).\left(x-x_k\right)+y_k=\left(3x_k^2-2009\right)\left(x-x_k\right)+x_k^3-2009x_k \qquad (d)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^3-2009x=\left(3_k^2-2009\right)\left(x-x_k\right)+x_k^3-2009x_k \Leftrightarrow \left(x-x_k\right)^2\left(x+2x_k\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_k \\ x=-2x_k \end{array}\right.$$

Do đó $x_{k+1}=-2x_k$ suy ra $\left(x_n\right)$ là cấp số nhân với $x_1=1; q=-2 \Rightarrow x_n=(-2)^{n-1}$

Vậy $2009x_n+y_n+2^{2013}=0 \Leftrightarrow x_n^3+2^{2013}=0 \Leftrightarrow (-2)^{3n-3}+2^{2013}=0 \Leftrightarrow n=672$. **Chọn C.**

Câu 34: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_k\left(x_k; y_k\right)$ là $y-y_k=y'\left(x_k\right)\left(x-x_k\right)$

$\Leftrightarrow y=y'\left(x_k\right).\left(x-x_k\right)+y_k=\left(3x_k^2+3\right)\left(x-x_k\right)+x_k^3+3x_k \qquad (d)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^3+3x=\left(3x_k^2+3\right)\left(x-x_k\right)+x_k^3+3x_k \Leftrightarrow \left(x-x_k\right)^2\left(x+2x_k\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_k \\ x=-2x_k \end{array}\right.$$

Do đó $x_{k+1}=-2x_k$ suy ra $\left(x_n\right)$ là cấp số nhân với $x_1=1; q=-2 \Rightarrow x_n=(-2)^{n-1}$

Vậy $y_n-3x_n+2^{21}=0 \Leftrightarrow x_n^3+2^{21}=0 \Leftrightarrow (-2)^{3n-3}+2^{21}=0 \Leftrightarrow n=8$. **Chọn B.**

Câu 35: Từ giả thiết ta suy ra được đường thẳng MN có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;3)$.

Gọi $A\left(x_0; y_0\right)$ ta có: $f'\left(x_0\right)=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3-\frac{7}{2}x_0=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3 \Rightarrow y_0=\frac{-45}{8} \\ x_0=-1 \Rightarrow y_0=\frac{-13}{8} \\ x_0=-2 \Rightarrow y_0=-5 \end{array}\right.$

Ta được các phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y=3x-\frac{117}{8}, y=3x+\frac{11}{8}, y=3x+1$

Kiểm tra điều kiện cắt tại 3 điểm.

Ta xét phương trình $\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2=3x+m \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2-3x=m(*)$.

Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Ta được bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{14}{8}$	$\searrow$	$\frac{-117}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT suy ra $m=\frac{11}{8}, m=1$ thì phương trình (*) có ba nghiệm.

Vậy có hai điểm A thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Câu 36: Đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2-5x+6$ khi phương trình $x^2-5x+6=ax+b \Leftrightarrow x^2-(a+5)x+6-b$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta=(a+5)^2-4(6-b)=0$ (1).

Tương tự đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2+3x-10$ khi phương trình $x^2+3x-10=ax+b \Leftrightarrow x^2+(3-a)x-10-b=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow (a-3)^2+4(b+10)=0$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} a^2+10a+4b+1=0 \\ a^2-6a+4b+49=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a-48=0 \\ a^2-6a+4b+49=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-10 \end{cases}$

Vậy $M=2a+b=-4$. **Chọn B.**

Câu 37: Viết lại: $d: y=\frac{1}{4}x+1, y'=x^2-4mx+8(m-1)$.

Ta có: $y'(x_1).\frac{1}{4}=-1, y'(x_2).\frac{1}{4}=-1$ nên $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình: $y'(x)=-4$

$$\Leftrightarrow x^2-4mx+8m-4=0 \Leftrightarrow (x^2-4)-4m(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2-4m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4m-2 \end{array}\right. \quad (1)$$

Để tồn tại 2 điểm *A, B* thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m-2 \ge 0 \\ 4m-2 \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \frac{1}{2} \\ m \ne 1 \end{cases}.$$

Khi đó ta có: $\sqrt{x_A}+\sqrt{x_B} \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{4m-2}+\sqrt{2} \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4m-2 \le 2 \Leftrightarrow m \le 1$

Kết hợp điều kiện suy ra $S=\left[\frac{1}{2};1\right) \Rightarrow u+v=\frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 38: Gọi $K\left(a;\frac{1}{a+1}\right)(a \ne 1)$ thuộc (C).

Phương trình tiếp tuyến tại *K* là: $y=\frac{-1}{(a+1)^2}(x-a)+\frac{1}{a+1}$

Tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(1;-4\right) \Leftrightarrow -4 = \frac{-1}{\left(a+1\right)^2}\left(1-a\right) + \frac{1}{a+1} \Leftrightarrow -4 = \frac{a-1+a+1}{\left(a+1\right)^2}$

$\Leftrightarrow -2\left(a+1\right)^2 = a \Leftrightarrow 2a^2 + 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ a = -1 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 x_2 = a_1 a_2 = 1$. **Chọn A.**