

Câu 1. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = (m - 1)x - 2m - 3$ có đồ thị là đường thẳng d . Tìm m để đường thẳng d cắt trục Ox, Oy tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB cân.

Câu 2. (4,5 điểm)

1) Giải phương trình $\frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x - 1 - 2 \cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \cos 3x + 1} = 0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + xy^2 + x = 2y^3 + y \\ (x^3 + 3y + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3y^3 + 5x^2 + 2y + 5 \end{cases}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{(a+2)x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{(a+2)x}{4} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$.

2) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2019; u_2 = 2020; u_{n+1} = \frac{2u_n + u_{n-1}}{3}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Tính $\lim u_n$.

Câu 4. (2,5 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có tâm I . Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$.

Câu 5. (4,0 điểm)

1) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$ và $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC và H là hình chiếu vuông góc của K trên SA .

a) Tính độ dài đoạn HK theo a .

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK, SO . Mặt phẳng (α) đi động, luôn đi qua I và cắt các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = SA' \cdot SB' \cdot SC' \cdot SD'$.

2) Cho tứ diện đều $ABCD$ có đường cao AH . Mặt phẳng (P) chứa AH cắt ba cạnh BC, CD, BD lần lượt tại M, N, P ; gọi $\alpha; \beta; \gamma$ là góc hợp bởi $AM; AN; AP$ với mặt phẳng (BCD) . Chứng minh rằng $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12$.

Câu 6. (3,0 điểm)

1) Cho tam thức $f(x) = x^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt và $b^2 - 2b - 3 > 4c$ thì phương trình $f[f(x)] = x$ có bốn nghiệm phân biệt.

2) Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $(a + b - c)^2 = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{ab}}{a + b} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \left(\frac{c}{a + b - c}\right)^2$.

3) Lớp 11 Toán có 34 học sinh tham gia kiểm tra môn Toán để chọn đội tuyển dự thi học sinh giỏi cấp tỉnh. Đề kiểm tra gồm 5 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán thì có ít nhất 19 học sinh giải quyết được. Chứng minh rằng có 2 học sinh sao cho mỗi bài toán đều được một trong hai học sinh này giải quyết được.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh : Số báo danh

Câu	Lời giải sơ lược	Điểm
1. (2,0 điểm)		
	Ta có d cắt trục Ox tại điểm $A\left(\frac{2m+3}{m-1}; 0\right)$ (điều kiện $m \neq 1$) d cắt trục Oy tại điểm $B(0; -2m-3)$	0,5
	Khi đó $\triangle OAB$ vuông tại O nên $\triangle OAB$ cân tại $O \Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \left \frac{2m+3}{m-1}\right = 2m+3 $	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3=0 \\ m-1 =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{3}{2} \\ m=2 \\ m=0 \end{cases}$	0,5
	Với $m = -\frac{3}{2}$ ta có ba điểm A, B, O trùng nhau (Loại). Hai trường hợp còn lại thỏa mãn. Vậy $m = 0; m = 2$ là các giá trị cần tìm.	0,5
	Chú ý: + Học sinh thiếu điều kiện $m \neq 1$ trừ 0,25 điểm. + Nếu học sinh thiếu dấu trị tuyệt đối ở bước 2, mà làm đúng các bước trên và tìm ra được $m = 2$ cho 1,25 điểm. + Nếu học sinh thiếu dấu trị tuyệt đối ở bước 2, mà làm đúng các bước trên và tìm ra được $m = 2; m = -\frac{3}{2}$ cho 1,0 điểm. CÁCH 2: Học sinh có thể giải theo cách ngắn hơn như sau (vẫn cho điểm tối đa) Vì d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $\triangle OAB$ vuông cân tại O nên d có hệ số góc k , với $\begin{cases} k = \tan 45^\circ \\ k = \tan 135^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$ Mặt khác theo giả thiết d có hệ số góc $k = m - 1$. Do đó $\begin{cases} m-1=1 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=1 \end{cases}$	
2.1 (2,25 điểm)		
	Điều kiện: $\cos 3x > -\frac{1}{2}$	0,25
	Ta có: phương trình đã cho tương đương với $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ $\Leftrightarrow 2 - 2\cos x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 - \sin 2x \Leftrightarrow -2\cos x = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$	0,75
	$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	0,75

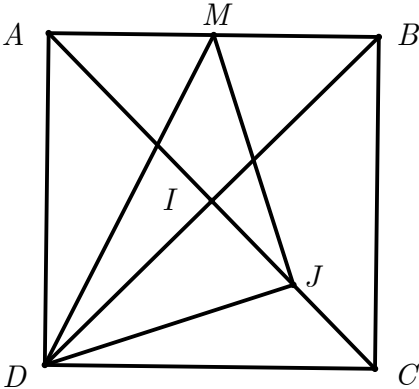
	Với $x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có $\cos 3x = 0 > -\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$) Với $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2}$ (không thỏa mãn điều kiện $(*)$) Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)	0,5
2.2 (2,25 điểm)		
	$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x = 2y^3 + y(1) \\ (x^3 + 3y + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3y^3 + 5x^2 + 2y + 5(2) \end{cases}$ Điều kiện: $2x^2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{5}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$ Ta có phương trình (1) $(x^3 - y^3) + (xy^2 - y^3) + x - y = 0$ $(x - y)(x^2 + xy + 2y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + 2y^2 + 1 = 0(*) \end{cases}$	0,5
	Mà $x^2 + xy + 2y^2 + 1 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} + 1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.	0,25
	Thay $y = x$ vào phương trình (2) ta có $(x^3 + 3x + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5$ $\Leftrightarrow (x^3 + 3x + 5)(\sqrt{2x^2 + 5x} - 1) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5 - (x^3 + 3x + 5)$ $\Leftrightarrow (x^3 + 3x + 5) \cdot \frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{2x^2 + 5x} + 1} = x \cdot (2x^2 + 5x - 1)$ $\Leftrightarrow (2x^2 + 5x - 1) \left(\frac{x^3 + 3x + 5}{\sqrt{2x^2 + 5x} + 1} - x \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 1 = 0 (3) \\ x^3 + 3x + 5 = x(\sqrt{2x^2 + 5x} + 1) (4) \end{cases}$ $(3) \Leftrightarrow x = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, \text{ thỏa mãn.}$	1,0
	$(4) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 5 = x\sqrt{2x^2 + 5x} \Rightarrow [x^3 + (2x + 5)]^2 = (x \cdot \sqrt{2x^2 + 5x})^2$ $\Leftrightarrow (x^3)^2 + 2x^3(2x + 5) + (2x + 5)^2 = x^3(2x + 5)$ $\Leftrightarrow (x^3)^2 + x^3(2x + 5) + (2x + 5)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{2x + 5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot (2x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 2x + 5 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}, \text{ không thỏa mãn.}$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{-5 + \sqrt{33}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}\right); \left(\frac{-5 - \sqrt{33}}{4}; \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}\right).$	0,5
3.1 (2,0 điểm)		

TXĐ: $\mathbb{R}$.	0,25
Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x + 1 - x - 3}{(x^2 - 1)(\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x + 1)(\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3})} = \frac{1}{4}$	0,75
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(a + 2)x}{4} = \frac{a + 2}{4} = f(1).$	0,5
Hàm số liên tục tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \frac{a + 2}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = -1$.	0,5

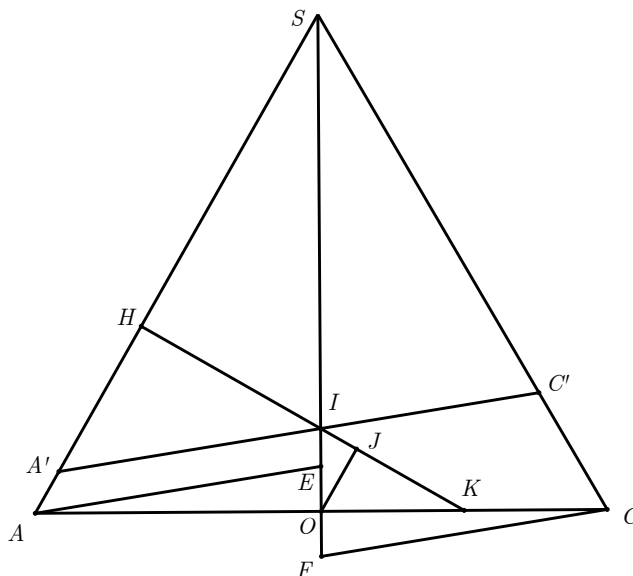
3.2 (2,0 điểm)

Với $\forall n \geq 2$ ta có $u_{n+1} = \frac{2u_n + u_{n-1}}{3} \Leftrightarrow 3u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1} \Leftrightarrow 3u_{n+1} - 3u_n = -u_n + u_{n-1}$ $\Leftrightarrow (u_{n+1} - u_n) = -\frac{1}{3}(u_n - u_{n-1}).$	0,5
Do đó, dãy (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$ là một cấp số nhân với $v_1 = 1$, công bội $q = -\frac{1}{3}$. Ta có $u_n = u_n - u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-3} + \dots + u_2 - u_1 + u_1 = v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_1 + u_1$ $u_n = v_1 \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + u_1 = 1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{3}} + 2019 = \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right] + 2019.$	1,0
Vậy $u_n = 2019 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \lim u_n = \frac{8079}{4}$.	0,5

4. (2,5 điểm)

 Gọi a là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$. Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow JD^2 = DI^2 + IJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{8}$ $JM^2 = JA^2 + AM^2 - 2JA \cdot AM \cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$ $DM^2 = AM^2 + AD^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM^2 = DJ^2 + JM^2 \Rightarrow \triangle DMJ \text{ vuông tại } J.$ Do đó JM vuông góc với JD (1) Chú ý: Học sinh có thể dùng cách vec tơ để chứng minh tính chất vuông góc	0,5
--	-----

$$\text{Mà } \frac{AH}{SH} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{OJ}{SH} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{OI}{SI} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{SO}{SI} = \frac{6}{5}.$$



Chú ý: Nếu dùng định lý Melenauxt (không chứng minh định lý) để tính tỉ số $\frac{SO}{SI} = \frac{6}{5}$ trừ 0,5 điểm.

Từ A, C lần lượt kẻ các đường thẳng song song với AC cắt SO lần lượt tại E, F .

$$\text{Khi đó } \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SE}{SI} + \frac{SF}{SI} = \frac{SO - OE + SO + OF}{SI} = 2\frac{SO}{SI} = \frac{12}{5}$$

Tương tự ta có $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{24}{5}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{24}{5} \geq 4\sqrt[4]{\frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} \cdot \frac{SD}{SD'}} \Rightarrow SA'.SB'.SC'.SD' \geq \frac{625}{81} a^4$$

Dấu bằng xảy ra khi $SA' = SB' = SC' = SD' = \frac{5a}{3}$

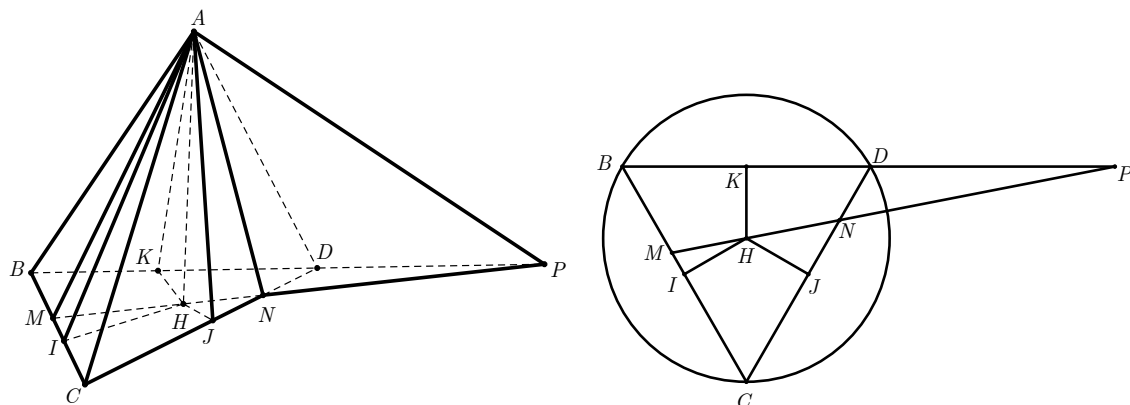
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $SA'.SB'.SC'.SD'$ bằng $\frac{625}{81}a^4$.

5.2 (1,0 điểm)

Gọi a là độ dài cạnh tứ diện $ABCD$ khi đó $AH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Đẳng thức cần chứng minh $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12$ (1)

Tương đương với $\frac{1}{MH^2} + \frac{1}{NH^2} + \frac{1}{PH^2} = \frac{18}{a^2}$ (2)



Xét tam giác BCD Từ H kẻ $HI; HJ; HK$ vuông góc với $BC; CD; BD$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử M thuộc đoạn BI và gọi $\phi_1; \phi_2; \phi_3$ lần lượt là ba góc hợp bởi $HM; HN; HP$ với ba cạnh $BC; CD; BD$.

Ta có tam giác HMI và HNJ vuông tại I và J nên tứ giác $HICJ$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IHJ} = 120^\circ \Rightarrow \phi_1 + \phi_3 = 120^\circ$$

Mặt khác tổng ba góc của tam giác BMP bằng 180° nên

$$\widehat{BMP} + \widehat{BPM} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow (180^\circ - \phi_1) + \phi_3 + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \phi_1 - \phi_3 = 60^\circ$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{MH^2} + \frac{1}{NH^2} + \frac{1}{PH^2} = \frac{12}{a^2} [\sin^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_2 + \sin^2 \phi_3]$$

$$= \frac{12}{a^2} [\sin^2 \phi_1 + \sin^2 (120^\circ - \phi_1) + \sin^2 (\phi_1 + 60^\circ)]$$

$$= \frac{6}{a^2} \left[1 - \cos 2\phi_1 + 1 - \cos 2(120^\circ - \phi_1) + 1 - \cos 2(\phi_1 + 60^\circ) \right]$$

$$= \frac{6}{a} \left[3 - \cos 2\phi_1 + \frac{1}{2} \cos 2\phi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\phi_1 + \frac{1}{2} \cos 2\phi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\phi_1 \right] = \frac{18}{a^2}$$

$$\text{Vậy } \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12$$

0,5

6.1. (1,0 điểm)

Đặt $a = xc, b = yc$ từ điều kiện ta có $(x + y - 1)^2 = xy$ và $P = \frac{\sqrt{xy}}{x + y} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}$.

$$\text{Ta c6 } (x+y-1)^2 = xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow (x+y)^2 - 4[(x+y)^2 - 2(x+y) + 1] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 8(x+y) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x+y \leq 2.$$

Đặt $t = x + y, \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 2\right)$ thay $xy = (t-1)^2$ vào biểu thức P ta được

$$P = \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{t^2 - 2(t-1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{-t^2 + 4t - 2} + \frac{1}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{2(t-1)^2} + \frac{1}{-t^2 + 4t - 2} + \frac{1}{2(t-1)^2}$$

0,5

0,5

	$\geq \sqrt{\frac{2}{t t-1 }} + \frac{4}{-t^2 + 4t - 2 + 2(t-1)^2} = \sqrt{\frac{2}{t t-1 }} + \frac{4}{t^2} \geq 2, \forall t \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$ Vậy $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.	
6.2. (1,0 điểm)		
	Ta có $f(f(x)) - x = f^2(x) + bf(x) + c - x$ $= f(x)[f(x) - x] + x[f(x) - x] + b[f(x) - x] + x^2 + bx + c - x$ $= [f(x) - x][f(x) + x + b + 1].$ Do đó, $f(f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x & (1) \\ x^2 + (b+1)x + b + c + 1 = 0 & (2) \end{cases}$	0,5
	Theo giả thiết, (1) có hai nghiệm phân biệt; do $b^2 - 2b - 3 > 4c$ nên (2) cũng có hai nghiệm phân biệt. Gọi x_0 là nghiệm của (1) ta có $x_0^2 + bx_0 + c = x_0$. Khi đó nếu x_0 là nghiệm của (2) thì $x_0^2 + (b+1)x_0 + b + c + 1 = 0 \Rightarrow 2x_0 + b + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b+1}{2}.$ $\Rightarrow \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 - \frac{b(b+1)}{2} + c = -\frac{b+1}{2} \Rightarrow 4c = b^2 - 2b - 3, \text{ trái giả thiết.}$ Do đó, x_0 không là nghiệm của (2). Vậy phương trình $f(f(x)) = x$ có bốn nghiệm phân biệt.	0,5
6.3. (1,0 điểm)		
	Giả sử ngược lại, tức là với hai học sinh bất kỳ tồn tại ít nhất một bài toán mà cả hai học sinh đó đều không giải được. Bây giờ ta sẽ đếm các bộ ba (x, a, y) trong đó x, y là hai học sinh và a là bài toán mà cả hai học sinh x, y đều không giải quyết được. Gọi k là số tất cả các bộ ba như vậy. Ta có C_{34}^2 cách chọn hai học sinh từ 34 học sinh. Vì hai học sinh bất kỳ thì có ít nhất một bài toán mà cả hai học sinh đều không giải quyết được nên $k \geq C_{34}^2 = 561$ (1)	0,5
	Mặt khác, vì mỗi bài toán a có ít nhất là 19 học sinh giải được nên mỗi bài toán có nhiều nhất là 15 học sinh không giải được. Như vậy, đối với mỗi bài toán a có nhiều nhất C_{15}^2 cặp học sinh không giải được bài toán a. Do đó $k \leq 5 \cdot C_{15}^2 = 525$ (2) Từ (1) và (2) dẫn đến mâu thuẫn. Điều giả sử sai, tức là bài toán được chứng minh.	0,5

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được tính điểm tối đa.
- Với các cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.
- Điểm toàn bài là tổng số điểm của các phần đã chấm, không làm tròn điểm