

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 5 câu)

Môn thi: **TOÁN LỚP 10**

Thời gian làm bài: **180** phút

Câu 1. (6 điểm)

a) Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{5-2x}}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3x + 8 \\ x^2 + 3y\sqrt{x+1} = 4x + 9 \end{cases}$.

Câu 2. (6 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm không âm

$$mx^4 + x^3 + (8m-1)x^2 + 4x + 16m = 0.$$

b) Một hộ nông dân dự định trồng đậu và cà trên diện tích $800m^2$. Biết rằng cứ $100m^2$ trồng đậu cần 10 công và lãi 7 triệu đồng còn $100m^2$ trồng cà cần 15 công và lãi 9 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được tiền lãi cao nhất khi tổng số công không vượt quá 90.

Câu 3. (3 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;2), B(2;7)$. Biết độ dài đường cao kẻ từ A bằng 1 và đỉnh C thuộc đường thẳng $y-3=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có $\frac{\sin B + 2018\sin C}{2018\cos B + \cos C} = \sin A$ và độ dài các cạnh là các số tự nhiên.

Gọi M là trung điểm cạnh BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh tam giác MBG có diện tích là một số tự nhiên.

Câu 5. (2 điểm)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} + 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{x}{2}(x-y) + \frac{y}{2}(y-x) + \frac{2(1+xy\sqrt{x+y})}{\sqrt{x+y}}$.

-----Hết-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Điều kiện: $-2 \leq x < \frac{5}{2}$; $x \neq \frac{1}{2}$

*) Với $-2 \leq x < \frac{1}{2}$ thì VT(1) < 0 nên (1) luôn thỏa mãn

*) Với $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$ thì hai vế của BPT đều dương nên

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} \geq \sqrt{5-2x} \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{(x+2)(3-x)} \geq 5 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(3-x)} \leq x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Kết hợp khoảng đang xét ta được $2 \leq x < \frac{5}{2}$

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $S = \left[-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left[2; \frac{5}{2}\right)$

Điều kiện $x \geq -1$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$2y^2 - 3y\sqrt{x+1} + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{x+1} \end{cases}$$

*) Với $y = \sqrt{x+1}$, thay vào pt(2) được

$$x^2 + 2(x+1) = 3x + 8 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (KTM)} \\ x = 3 \end{cases} \text{ . Suy ra } y = 2$$

*) Với $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$, thay vào pt(2) được $x^2 + \frac{1}{2}(x+1) = 3x + 8$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{145}}{4} \text{ (KTM)} \\ x = \frac{5 + \sqrt{145}}{4} \end{cases} \text{ . Suy ra } y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9 + \sqrt{145}}{4}}$$

Kết luận: Hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(3; 2)$ và $\left(\frac{5 + \sqrt{145}}{4}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9 + \sqrt{145}}{4}}\right)$

Ta có (1) $\Leftrightarrow mx^4 + x^3 + 8mx^2 - x^2 + 4x + 16m = 0$

$$\Leftrightarrow m(x^2 + 4)^2 = x^2 - x^3 - 4x \Leftrightarrow m = \left(\frac{x}{x^2 + 4} \right)^2 - \frac{x}{x^2 + 4}$$

Đặt $t = \frac{x}{x^2 + 4} \left(0 \leq t \leq \frac{1}{4} \right)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - t = m$ (2)

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{4} \right]$, ta có bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{4}$
f(t)	0	$-\frac{3}{16}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-\frac{3}{16} \leq m \leq 0$

Lưu ý: Có thể chia hai vế cho x^2 và sử dụng ẩn phụ $t = x + \frac{4}{x}$

Gọi x, y lần lượt là diện tích trồng đậu và trồng cà (đơn vị là $100m^2$). Ta có $x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 8$

Do tổng số công không vượt quá 90 nên $10x + 15y \leq 90 \Leftrightarrow 2x + 3y \leq 18$

Tổng số tiền lãi là $T = 7x + 9y$ (triệu đồng)

Ta có $T = 7x + 9y = 3(x + y) + 2(2x + 3y) \leq 3.8 + 2.18 = 60$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy cần trồng đậu trên diện tích $600m^2$ và trồng cà trên diện tích $200m^2$ thì tổng số tiền lãi cao nhất.

Lưu ý: Có thể dùng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải bài này

Kẻ đường cao AK và CH của tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 5), AB = \sqrt{26}$

Phương trình đường thẳng AB: $5x - y - 3 = 0$

Gọi $C(c; 3)$ suy ra $CH = d(C; AB) = \frac{|5c - 6|}{\sqrt{26}}$

$$BC = \sqrt{(c - 2)^2 + 4} = \sqrt{c^2 - 4c + 20}$$

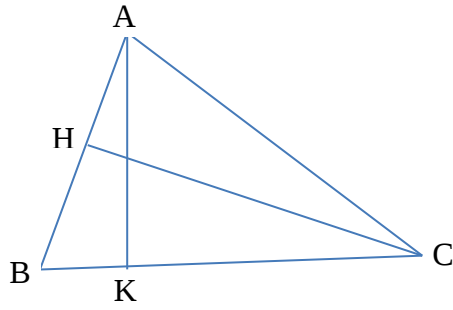
Ta có $AK \cdot BC = AB \cdot CH \Leftrightarrow \sqrt{c^2 - 4c + 20} = |5c - 6|$

$$\Leftrightarrow c^2 - 4c + 20 = 25c^2 - 60c + 36$$

$$\Leftrightarrow 24c^2 - 56c + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn bài toán là

$$C(2; 3), C\left(\frac{1}{3}; 3\right)$$



Đặt $m = 2018$, ta có $\frac{\sin B + m \sin C}{m \cos B + \cos C} = \sin A \Leftrightarrow b + mc = a(m \cos B + \cos C)$

$$\Leftrightarrow b + mc = \frac{m(a^2 + c^2 - b^2)}{2c} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$$

$$\Leftrightarrow 2bc(b + mc) = mb(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow 2b^2c + 2mbc^2 = mba^2 + mbc^2 - mb^3 + ca^2 + cb^2 - c^3$$

$$\Leftrightarrow (c + mb)(b^2 + c^2 - a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Dễ dàng chứng minh được $S_{ABC} = 6.S_{MBG}$ suy ra $bc = 12.S_{MBG}$. Do đó ta cần chứng minh bc chia hết cho 12.

Để giải quyết bài toán, chúng ta cần sử dụng một số tính chất của số chính phương:

- Số chính phương chia 3 chỉ dư 0 hoặc 1.
- Số chính phương chia 4 chỉ dư 0 hoặc 1.
- Số chính phương lẻ chia 8 chỉ dư 1.

*) Trước hết ta thấy trong hai số b^2, c^2 có ít nhất một số chia hết cho 3. Thật vậy, giả sử không có số nào trong hai số đó chia hết cho 3. Khi đó mỗi số đều chia 3 dư 1. Do đó a^2 chia 3 dư 2, trái với tính chất của số chính phương.

Do 3 là số nguyên tố nên trong hai số b, c có ít nhất một số chia hết cho 3 (1).

*) Ta chứng minh trong hai số b, c có ít nhất một số chia hết cho 4. Thật vậy, giả sử không có số nào trong hai số đó chia hết cho 4. Khi đó $b = 4m + r, c = 4n + q$,

$$r, q \in \{1; 2; -1\}.$$

- Nếu $r, q \in \{-1; 1\}$ thì a^2 chia 4 dư 2, vô lí.

- Nếu $r \in \{-1; 1\}, q = 2$ hoặc ngược lại thì a^2 là số lẻ và a^2 chia 8 dư 5, vô lí.

- Nếu $r = q = 2$ thì $a^2 = 4(2m+1)^2 + 4(2n+1)^2 \Rightarrow a$ là số chẵn. Đặt $a = 2p$, suy ra

$$p^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \Rightarrow p^2 \text{ chia 4 dư 2, vô lí.}$$

Vậy trong hai số b, c có ít nhất một số chia hết cho 4 (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Điều kiện: $x \geq 2; y \geq -1$.

Ta có $\left(2\sqrt{x-2} + 1\sqrt{y+1}\right)^2 \leq (2^2 + 1^2)(x-2+y+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} \leq \sqrt{5(x+y-1)}$.

Do đó, từ $x+y = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} + 1 \Rightarrow x+y \leq \sqrt{5(x+y-1)} + 1$

Đặt $t = x+y$, ta có: $t-1 \leq \sqrt{5(t-1)} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 6$

Khi đó: $F = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{2}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{t}}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{t}}$, với $t \in [1; 6]$

*) Ta có $f'(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{5}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $t = 1$.

Vậy $\min F = 1$ khi $x = 2, y = -1$

*) Ta có $f(t) - f(6) = \frac{1}{2}(t^2 - 36) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2}(t+6)(t-6) - \frac{2(t-6)}{\sqrt{6t}(\sqrt{t} + \sqrt{6})} =$

$$\frac{1}{2}(t-6) \left[t+6 - \frac{4}{\sqrt{6t}(\sqrt{t} + \sqrt{6})} \right] \leq 0, \forall t \in [1; 6]$$

Vậy $\max F = 18 + \frac{2}{\sqrt{6}}$ khi $x = 6, y = 0$