

TOÁN 11	ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG
1H3-3	

Contents

A. CÂU HỎI	1
DẠNG 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT.....	1
DẠNG 2. XÁC ĐỊNH QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG.....	3
Dạng 2.1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.....	3
Dạng 2.2 Đường thẳng vuông góc với đường thẳng	4
DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG	4
Dạng 3.1 Góc của cạnh bên với mặt phẳng đáy	4
Dạng 3.2 Góc giữa cạnh bên với mặt phẳng bên.....	10
Dạng 3.3 Góc giữa đường thẳng khác với mặt phẳng.....	14
DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN KHÁC.....	17
B. LỜI GIẢI	19
DẠNG 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT.....	19
DẠNG 2. XÁC ĐỊNH QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG.....	19
Dạng 2.1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.....	19
Dạng 2.2 Đường thẳng vuông góc với đường thẳng	24
DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG	26
Dạng 3.1 Góc của cạnh bên với mặt phẳng đáy	26
Dạng 3.2 Góc giữa cạnh bên với mặt phẳng bên.....	40
Dạng 3.3 Góc giữa đường thẳng khác với mặt phẳng.....	52
DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN KHÁC.....	60

A. CÂU HỎI

DẠNG 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

Câu 1. (CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 1 - 2018) Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. Nếu $b // a$ thì $b // (P)$.

B. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

D. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

- Câu 2. (THPT QUẢNG YÊN - QUẢNG NINH - 2018)** Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?
A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.
- Câu 3. (THPT QUẢNG YÊN - QUẢNG NINH - 2018)** Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì d vuông góc với hai đường thẳng trong mặt phẳng (α) .
B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) thì d vuông góc với mặt phẳng (α) .
C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) thì d vuông góc với bất kỳ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α) .
D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.
- Câu 4. (SỞ GD&ĐT BÌNH THUẬN - 2018)** Trong không gian, khẳng định nào sau đây **sai**?
A. Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.
- Câu 5. (SGD&ĐT BẮC NINH - 2018)** Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây?
A. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Q) .
B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song với đường thẳng b .
C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song hoặc trùng với đường thẳng b .
D. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.
- Câu 6. (THPT TRẦN NHÂN TÔNG - QN - LẦN 1 - 2018)** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:
A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.
C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.
- Câu 7. (THPT BÌNH GIANG - HẢI DƯƠNG - 2018)** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) . Chọn khẳng định đúng?
A. Nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$. **B.** Nếu $a // (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$. **D.** Nếu $a // (P)$ và $b // (P)$ thì $b // a$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Dạng 2.1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

- Câu 8.** (SỞ GD ĐỒNG NAI HKI KHỐI 12-2018-2019) Cho tứ diện $MNPQ$ có hai tam giác MNP và QNP là hai tam giác cân lần lượt tại M và Q . Góc giữa hai đường thẳng MQ và NP bằng
 A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 9.** (TRƯỜNG THPT THANH THỦY 2018 -2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?
 A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SO \perp (ABCD)$. C. $SC \perp (ABCD)$. D. $SB \perp (ABCD)$.
- Câu 10.** (LƯƠNG TÀI 2 BẮC NINH LẦN 1-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$.
 Khẳng định nào sau đây sai?
 A. $CD \perp (SBC)$. B. $SA \perp (ABC)$. C. $BC \perp (SAB)$. D. $BD \perp (SAC)$.
- Câu 11.** (THPT NGUYỄN TẤT THÀNH - YÊN BÁI - 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?
 A. $CM \perp (ABD)$. B. $AB \perp (MCD)$.
 C. $AB \perp (BCD)$. D. $DM \perp (ABC)$.
- Câu 12.** (SGD&ĐT HÀ NỘI - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào sau đây sai?
 A. $BC \perp (SAB)$. B. $AC \perp (SBD)$. C. $BD \perp (SAC)$. D. $CD \perp (SAD)$.
- Câu 13.** (THPT XUÂN HÒA - VP - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Khẳng định nào sau đây đúng?
 A. $AH \perp (SCD)$. B. $BD \perp (SAC)$. C. $AK \perp (SCD)$. D. $BC \perp (SAC)$.
- Câu 14.** (THPT NGUYỄN TRÃI-THANH HOÁ - Lần 1.Năm 2018&2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A trên SB . Khẳng định nào sau đây là đúng?
 A. $AM \perp SD$. B. $AM \perp (SCD)$. C. $AM \perp CD$. D. $AM \perp (SBC)$.
- Câu 15.** (ĐỀ THI THỬ ĐỒNG ĐẬU-VĨNH PHÚC LẦN 01 - 2018 – 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?
 A. $BA \perp (SAD)$. B. $BA \perp (SAC)$. C. $BA \perp (SBC)$. D. $BA \perp (SCD)$.
- Câu 16.** (LÊ QUÝ ĐÔN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng 2, cạnh bên SA bằng 3 và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh bên SB và N là hình chiếu vuông góc của A trên SO . Mệnh đề nào sau đây đúng?
 A. $AC \perp (SDO)$. B. $AM \perp (SDO)$. C. $SA \perp (SDO)$. D. $AN \perp (SDO)$.
- Câu 17.** (THPT HÀ HUY TẬP - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC . Mệnh đề nào sai trong các mệnh đề sau?
 A. $BC \perp (SAH)$. B. $HK \perp (SBC)$.

C. $BC \perp (SAB)$. D. SH , AK và BC đồng quy.

Dạng 2.2 Đường thẳng vuông góc với đường thẳng

Câu 18. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp AD$. B. $AC \perp BD$. C. $AB \perp (BCD)$. D. $DC \perp (ABC)$.

Câu 19. (THPT CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. $CM \perp SB$. B. $CM \perp AN$. C. $MN \perp MC$. D. $AN \perp BC$.

Câu 20. (CHUYÊN LONG AN - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $BC \perp SC$. B. $BC \perp AH$. C. $BC \perp AB$. D. $BC \perp AC$.

Câu 21. (THPT TRẦN PHÚ - ĐÀ NẴNG - 2018) Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $AM \perp SC$. B. $AM \perp MN$. C. $AN \perp SB$. D. $SA \perp BC$.

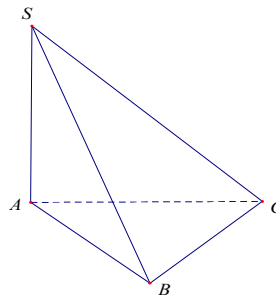
Câu 22. (SGD&ĐT HÀ NỘI - 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $MN \perp AB$. B. $MN \perp BD$. C. $MN \perp CD$. D. $AB \perp CD$.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Dạng 3.1 Góc của cạnh bên với mặt phẳng đáy

Câu 23. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 4 - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tìm góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) .



A. 60° . B. 45° . C. 135° . D. 90° .

Câu 24. (Trường THPT Thăng Long Lần 1 năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là góc giữa hai đường thẳng nào dưới đây?

A. SB và AB . B. SB và SC . C. SA và SB . D. SB và BC .

Câu 25. (THPT NGUYỄN TRÃI-THANH HOÁ - Lần 1.Năm 2018&2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:

A. $\arcsin \frac{3}{5}$.

B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Câu 26. (THPT YÊN KHÁNH A - LẦN 2 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 27. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = \sqrt{3}$ và $AA' = 1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và (ABC) bằng

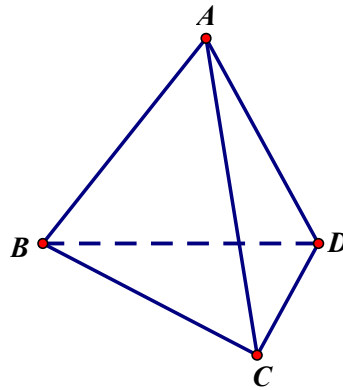
A. 45° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 75° .

Câu 28. (SGD - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) . Tính $\cos \varphi$.



A. $\cos \varphi = 0$.

B. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$.

C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 29. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương thi thử lần 1 (2018-2019)) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\sqrt{2}a$. Độ lớn của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

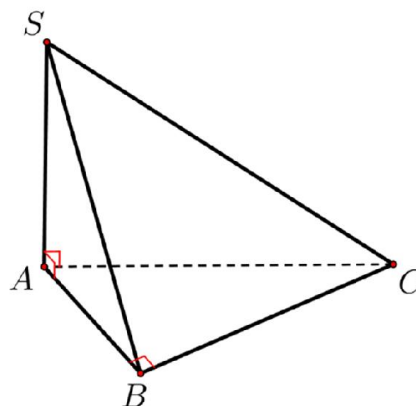
A. 45° .

B. 75° .

C. 30° .

D. 60° .

Câu 30. (101 - THPT 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



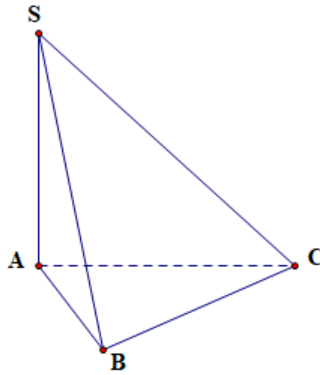
A. 90° .

B. 45° .

C. 30° .

D. 60° .

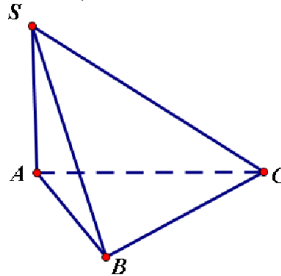
Câu 31. (102 - THPT 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$ và $BC = \sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

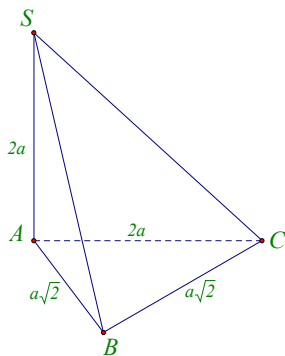
Câu 32. (103 - THPT 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . $SA = \sqrt{2}a$. Tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 33. (104 - THPT 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình vẽ bên).



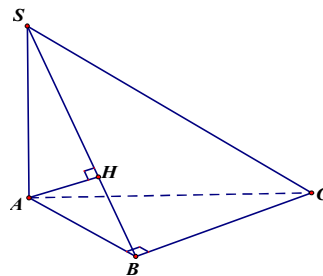
Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

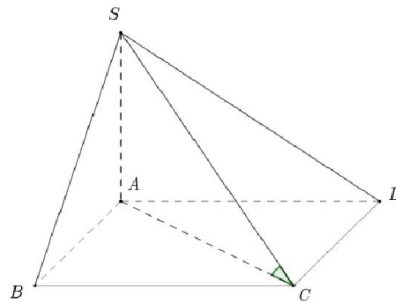
Câu 34. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

- Câu 35.** (Mã đề 103 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng
- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .
- Câu 36.** (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng.
- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .
- Câu 37.** (THPT QUỐC GIA 2018 - MÃ ĐỀ 102) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng
- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .
- Câu 38.** (THPT Cộng Hiền - Lần 1 - 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ tam giác ABC vuông tại B cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Mệnh đề nào sau đây SAI?



- A. Các mặt bên của hình chóp các tam giác vuông
 B. $\triangle SBC$ vuông.
 C. $AH \perp SC$
 D. Góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCB}$
- Câu 39.** (Thi thử lần 4-chuyên Bắc Giang_18-19) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$), $SA = 3a$. Gọi φ là góc giữa SC và ($ABCD$) (tham khảo hình vẽ bên). Khi đó $\tan \varphi$ bằng



- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.
- Câu 40.** (Nho Quan A - Ninh Bình - lần 2 - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Gọi α là số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC). Tính $\tan \alpha$.
- A. 1. B. $\sqrt{3}$. C. 0. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

- Câu 41.** (Thi thử hội 8 trường chuyên lần 3 - 23 - 5 - 2019) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng
- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .
- Câu 42.** (Bạch Đằng-Quảng Ninh- Lần 1-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot \varphi$?
- A. $\cot \varphi = 2$. B. $\cot \varphi = \frac{1}{2}$. C. $\cot \varphi = 2\sqrt{2}$. D. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
- Câu 43.** (Yên Định 1 - Thanh Hóa - 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SB vuông góc (ABC) . Góc giữa SC với (ABC) là góc giữa
- A. SC và AC . B. SC và AB . C. SC và BC . D. SC và SB .
- Câu 44.** (Gia Bình I Bắc Ninh - L3 - 2018) Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD = 4a$, $AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Tính số đo góc giữa SC và $(ABCD)$.
- A. 60° . B. 75° . C. 30° . D. 45° .
- Câu 45.** (SỞ GD ĐỒNG NAI HKI KHỐI 12-2018-2019) Cho hình chóp $S.MNP$ có đáy là tam giác đều, $MN = a$, SM vuông góc với mặt phẳng đáy, $SP = 2a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$. Tính góc giữa đường thẳng SN và mặt phẳng đáy.
- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .
- Câu 46.** (ĐỀ THI THỬ ĐỒNG ĐẬU-VĨNH PHÚC LẦN 01 - 2018 - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SB = 5a$. Tính $\sin$ của góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$. D. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.
- Câu 47.** (THPT LỤC NGẠN - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa SC và mặt đáy bằng:
- A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.
- Câu 48.** (CHUYÊN HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
- A. 60° . B. 75° . C. 30° . D. 45° .
- Câu 49.** (THPT NGHEN - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là:
- A. 45° . B. 30° . C. 75° . D. 60° .
- Câu 50.** (THPT NGUYỄN TRÃI - ĐÀ NẴNG - 2018) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là

- A. 120° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 51. (THPT CHUYÊN BIÊN HÒA - HÀ NAM - 2018) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{\frac{3}{7}}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 52. (THPT NGUYỄN ĐỨC THUẬN - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .

- A. 30° . B. 75° . C. 60° . D. 45° .

Câu 53. (THPT NGÔ QUYỀN - HẢI PHÒNG - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC đều cạnh a . Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là:

- A. $\arctan 2$ B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Câu 54. (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH - HKI I - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) .

- A. 75° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

Câu 55. (SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $ABCD$ là α . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. C. 2 . D. $2\sqrt{2}$.

Câu 56. (SỞ GD&ĐT LÀO CAI - 2018) Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, H là hình chiếu của S lên AB , tam giác SAB vuông cân tại S , SH vuông góc với (ABC) . Góc giữa cạnh SC và mặt đáy bằng:

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Câu 57. (THI THỬ L4-CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ-HÒA BÌNH-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng:

- A. 45° . B. 30° . C. 75° . D. 60° .

Câu 58. (HỒNG LĨNH - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. $\sin$ của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Câu 59. (THPT CHUYÊN NGUYỄN ĐÌNH TRIỀU - ĐỒNG THÁP - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB và SD , O là giao điểm của AC và BD . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $SO \perp (ABCD)$. B. $(SAC) \perp (SBD)$.
 C. $EF \parallel (ABCD)$. D. $\left(\widehat{SA, (ABCD)}\right) = 60^\circ$.

Câu 60. (THPT HOÀNG MAI - NGHỆ AN - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Biết ΔSBC đều, tính góc giữa SA và (ABC)

- A. 45° B. 90° C. 30° D. 60°

Câu 61. (Thi thử Lâmônôxốp - Hà Nội lần V 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. M là trung điểm AC . Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BM . Khoảng cách từ C' đến mặt phẳng (BMB') bằng $\frac{3a}{4}$. Tính số đo góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy của hình lăng trụ.

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Dạng 3.2 Góc giữa cạnh bên với mặt phẳng bên

Câu 62. (THPT Minh Khai - lần 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc

- A. $\widehat{ASO}$. B. $\widehat{SAO}$. C. $\widehat{SAC}$. D. $\widehat{ASB}$.

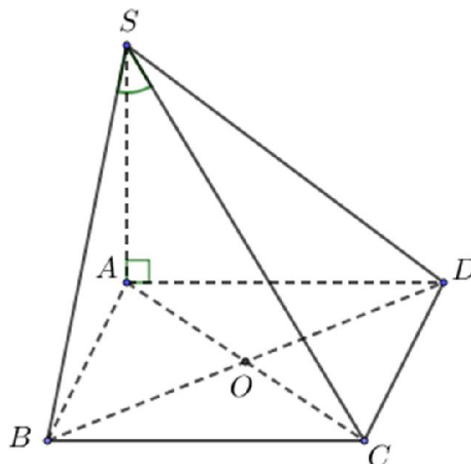
Câu 63. (THPT CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 64. (THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc tạo bởi giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) , khi đó α thỏa mãn hệ thức nào sau đây:

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 65. (THPT CHUYÊN LAM SƠN - THANH HÓA - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$ (hình vẽ). Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) . Tính $\sin \alpha$ ta được kết quả là:



- A. $\frac{1}{\sqrt{14}}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 66. (THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng:

- A. 75° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

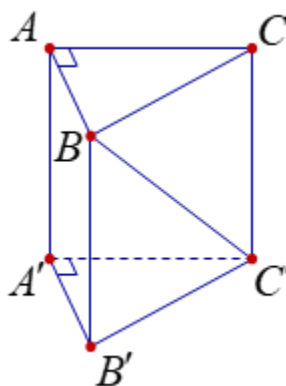
Câu 67. (THPT KIẾN AN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 68. (Cụm liên trường Hải Phòng-L1-2019) Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) .

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 69. (CHUYÊN VINH - LẦN 1 - 2018) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AA' = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 70. (Chuyên ĐH Vinh-lần 2-2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = 2$, $BC = 1$, $AA' = 1$. Tính góc giữa AB' và $(BCC'B')$.

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Câu 71. (Thi thử chuyên Hà Tĩnh lần 1 (13/4/2019)) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Câu 72. (Kinh Môn - Hải Dương L2 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là

- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

Câu 73. (HKI-Chuyên Vinh 18-19) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là

- A. 30° . B. 75° . C. 60° . D. 45° .

Câu 74. (QUẢNG XƯƠNG - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) .

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

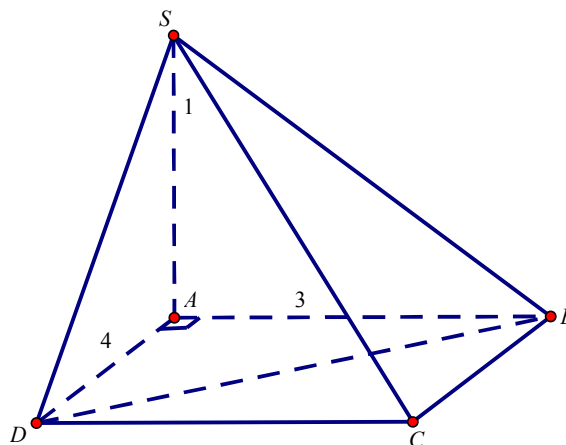
Câu 75. (THPT YÊN LẠC - LẦN 3 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc giữa SC và (SAB) .

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 76. (THPT MỘ ĐỨC - QUẢNG NGÃI - 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình bên). Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$.

- A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .

Câu 77. (THPT CHUYÊN NGUYỄN THỊ MINH KHAI - SÓC TRĂNG - 2018) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với $(ABCD)$, $AB = 3$, $BC = 4$, $SA = 1$ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Sin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD) bằng



- A. $\frac{11\sqrt{26}}{328}$. B. $\frac{12\sqrt{26}}{338}$. C. $\frac{13\sqrt{26}}{338}$. D. $\frac{12}{65}$.

Câu 78. (THPT CHUYÊN THĂNG LONG - ĐÀ LẠT - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2AD = 2a$ cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{15}$. Tính $\tan$ của góc giữa SC và mặt phẳng (SAD) .

- A. $\sqrt{3}$. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 79. (Chuyên Phan Bội Châu-lần 1-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Giá trị $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 80. (Thi thử chuyên Hùng Vương Gia Lai lần -2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC) . Giá trị $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

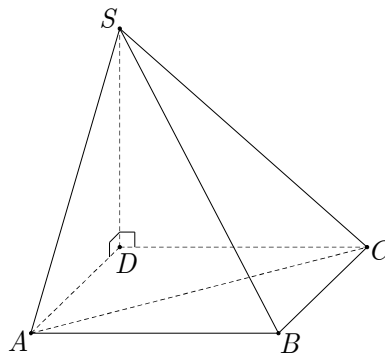
Câu 81. (Bình Minh - Ninh Bình - Lần 4 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (SCD) . Tính $\tan \alpha$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 82. (CHUYÊN ĐHSPTN - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 83. (CHUYÊN VINH - LẦN 2 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ bên). Tính $\sin$ của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC)



- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

Câu 84. (LÊ QUÝ ĐÔN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh

bằng a , gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 85. (SỞ GD&ĐT LÀO CAI - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

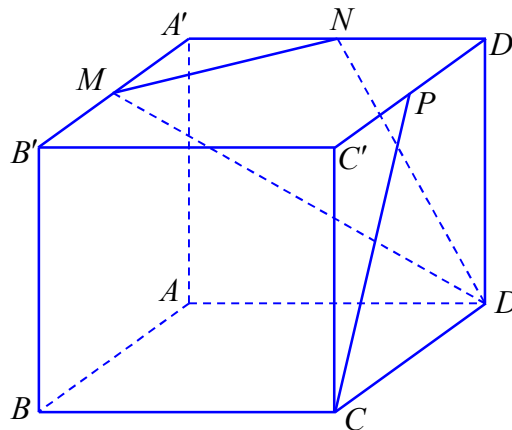
- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Dạng 3.3 Góc giữa đường thẳng khác với mặt phẳng

Câu 86. (SGD&ĐT HÀ NỘI - 2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SA , α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{3}$. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Câu 87. (SGD&ĐT BẮC GIANG - LẦN 1 - 2018) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'D', C'D'$. Góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN) bằng?

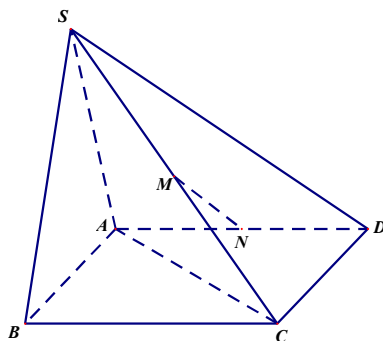


- A. 0° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Câu 88. (PHAN ĐĂNG LƯU - HUẾ - LẦN 1 - 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a , AB vuông góc với $mp(BCD)$, $AB = 2a$. M là trung điểm đoạn AD , gọi φ là góc giữa CM với $mp(BCD)$, khi đó:

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\tan \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 89. (THPT THUẬN THÀNH - BẮC NINH - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và AD (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa MN và mặt đáy $(ABCD)$ bằng

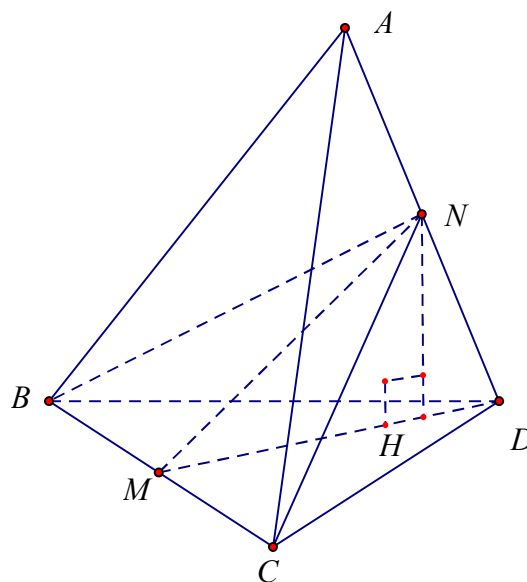
A. 90° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Câu 90. (THPT NGUYỄN HUỆ - TT HUỆ - 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD (tham khảo hình vẽ). Gọi φ là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (BCD) . Tính $\tan \varphi$.



A. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\tan \varphi = \sqrt{3}$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 91. (THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh lần 1 năm 18-19) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a\sqrt{3}$, $AB = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B . Gọi M là trung điểm của SB . Góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB) bằng:

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Câu 92. (Hội 8 trường chuyên ĐBSH - Lần 1 - Năm học 2018 - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD . Tính $\sin$ của góc tạo bởi hai đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK) .

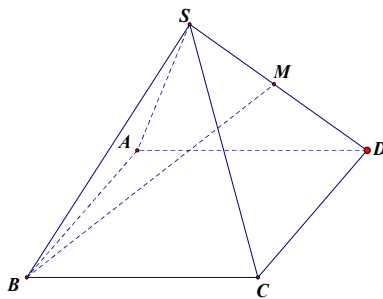
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Câu 93. (Tham khảo 2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 94. [THPT THĂNG LONG-HÀ NỘI-LẦN 2-2018-2019] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA = \sqrt{5}a$, $AB = a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính cosin của góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MQP) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Câu 95. (Thi thử SGD Cần Thơ mã 121 – 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Đặt α là góc giữa đường thẳng BD và (SBC) . Giá trị của $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 96. (HKI CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG 2018-2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SA và α là góc tạo bởi đường thẳng MN với (SBD) . Tính $\tan \alpha$.

- A. $\sqrt{3}$. B. 1. C. 2. D. $\sqrt{2}$.

Câu 97. (CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

- A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

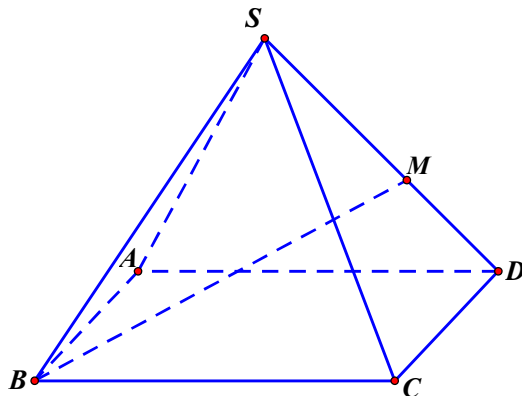
Câu 98. (THPT LÊ XOAY - LẦN 3 - 2018) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Cạnh bên hợp với (ABC) góc 60° . Sin của góc giữa AB và mặt phẳng $(BCC'B')$.

- A. $\frac{3}{\sqrt{13}}$. B. $\frac{3}{2\sqrt{13}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{13}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Câu 99. (TRẦN PHÚ - HÀ TĨNH - LẦN 2 - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $SA \perp AB$, $SC \perp BC$, $SB = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC . Gọi α là góc giữa MN với (ABC) . Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{11}}{11}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 100. (THPT PHAN CHU TRINH - ĐẮC LẮC - 2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $SM = 2MD$.



Tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{1}{5}$.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN KHÁC

Câu 101. (CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 2 - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại C . Gọi H là hình chiếu vuông góc S lên mặt phẳng (ABC) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. H là trung điểm của cạnh AB . B. H là trọng tâm tam giác ABC .
C. H là trực tâm tam giác ABC . D. H là trung điểm của cạnh AC .

Câu 102. (Độ Cẩn Vĩnh Phúc-lần 1-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O ; Gọi I là trung điểm của SC ; Xét các khẳng định sau:

- $OI \perp (ABCD)$.
- $BD \perp SC$.
- (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD .
- $SB = SC = SD$.

Trong bốn khẳng định trên, số khẳng định **sai** là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 103. (TH&TT LẦN 1 – THÁNG 12) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a . Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD . Khi đó, tỉ số $\frac{SM}{SB}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 104. (THPT THẮNG LONG - HÀ NỘI - 2018) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 105. (THPT HẬU LỘC 2 - TH - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45° . Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 106. (THPT HAI BÀ TRUNG - HUẾ - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . SA vuông góc với đáy, M là một điểm trên cạnh AB . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA, AD . Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) là

A. Hình bình hành.

B. Hình vuông.

C. Hình thang vuông.

D. Hình chữ nhật.

Câu 107. (THPT NGUYỄN TẮT THÀNH - YÊN BÁI - 2018) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA' = 3a$. Mặt phẳng qua A vuông góc với $A'C$ cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại I, J, K . Tính diện tích thiết diện $A'IJK$

A. $\frac{2a^2\sqrt{11}}{3}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{11}}{3}$.

D. $\frac{3a^2\sqrt{11}}{2}$.

Câu 108. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, các mặt bên là các tam giác vuông cân tại S . Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, (α) là mặt phẳng qua G vuông góc với SC . Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) bằng

A. $\frac{4}{9}a^2$.

B. $\frac{2}{3}a^2$.

C. $\frac{4}{3}a^2$.

D. $\frac{2}{9}a^2$.

Câu 109. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB . Diện tích thiết diện cắt lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là

A. $\frac{7\sqrt{2}}{16}a^2$.

B. $\frac{3\sqrt{35}}{16}a^2$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$.

D. $\frac{9}{8}a^2$.

Câu 110. (CHUYÊN TRẦN PHÚ - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A , đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$. SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm của AB . (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng:

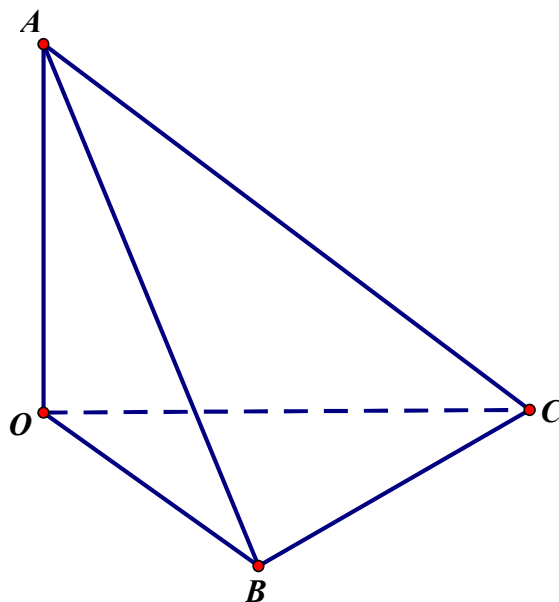
A. 20.

B. 15.

C. 30.

D. 16.

Câu 111. (THPT CHUYÊN LAM SƠN - THANH HÓA - 2018) Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma)$ là

- A. Số khác. B. $48\sqrt{3}$. C. 48. D. 125.

B. LỜI GIẢI

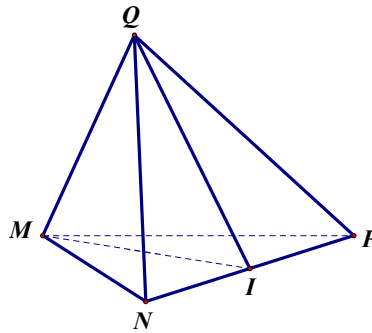
DẠNG 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

- Câu 1.** Nếu $a \perp (P)$ và $b // a$ thì $b \perp (P)$.
- Câu 2.** Theo tính chất 1 SGK Hình học 11 trang 100.
- Câu 3.** Khẳng định B **sai** vì: đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) mà hai đường thẳng đó song song thì d không vuông góc với mặt phẳng (α) .
- Câu 4.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- Câu 5.** Phát biểu D đúng theo định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.
- Câu 6.** Hiển nhiên B đúng.
 Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Do đó, A sai.
 Nếu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau và cắt nhau thì mặt phẳng chứa cả a và b không thể vuông góc với b . Do đó, C sai.
 Qua một đường thẳng có vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác. Do đó, D sai.
- Câu 7.** Chọn B

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG

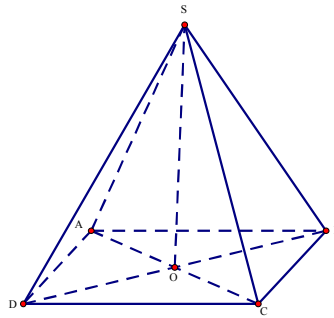
Dạng 2.1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

- Câu 8.** Chọn D



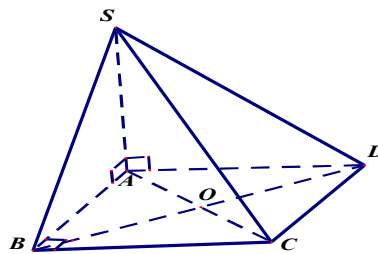
Gọi I là trung điểm của NP , ta có:
$$\begin{cases} NP \perp MI \\ NP \perp QI \end{cases} \rightarrow NP \perp (QIM) \rightarrow NP \perp QM.$$

Câu 9. Chọn B



Ta có O là trung điểm của AC, BD
 Mà $SA = SC, SB = SD \Rightarrow SO \perp AC, SO \perp BD$
 $\Rightarrow SO \perp (ABCD).$

Câu 10. Chọn A



Từ giả thiết, ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ B đúng.

Ta có:
$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow$$
 C đúng.

Ta có:
$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow$$
 D đúng.

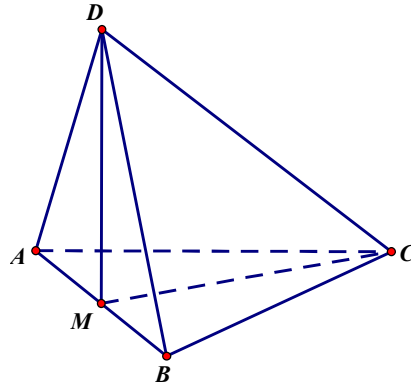
Do đó: A sai. Chọn **A**.

Nhận xét: Ta có cũng có thể giải như sau:

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$$

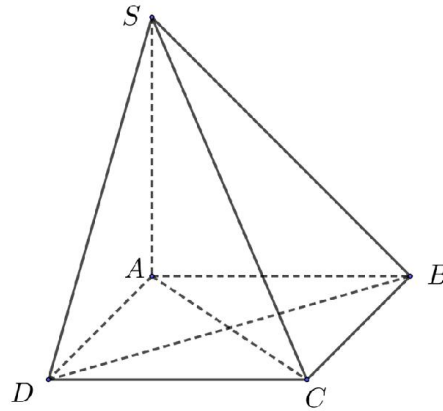
Mà (SCD) và (SAD) không song song hay

Trùng nhau nên $CD \perp (SCD)$ là sai. Chọn **A**.



Câu 11.

$$\left. \begin{array}{l} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (CDM).$$



Câu 12.

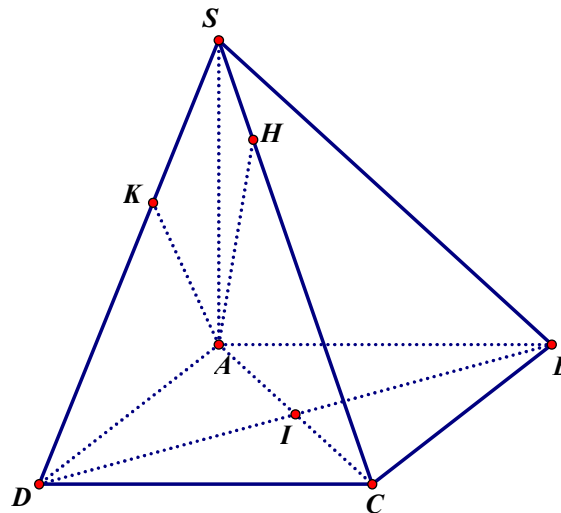
Ta có:

$$+ \left\{ \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

Suy ra: đáp án B sai.

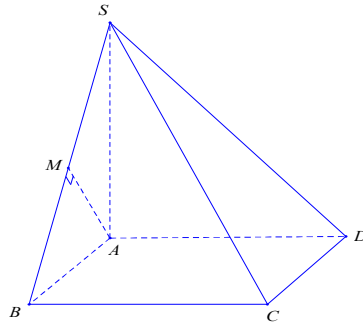


Câu 13.

$$\text{Có } \left. \begin{array}{l} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK.$$

$$\text{Có } \left. \begin{array}{l} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow AK \perp (SCD).$$

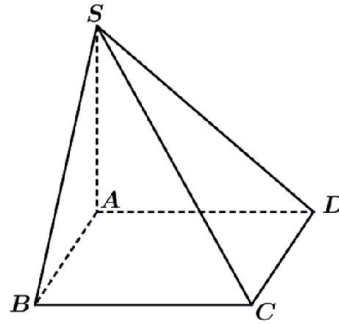
Câu 14. Chọn D



$$\text{Do } SA \perp (ABCD) \text{ và } ABCD \text{ là hình vuông nên } \left\{ \begin{array}{l} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} BC \perp (SAB) \\ AM \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp BC ; \left\{ \begin{array}{l} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (SBC)$$

Câu 15. Chọn A

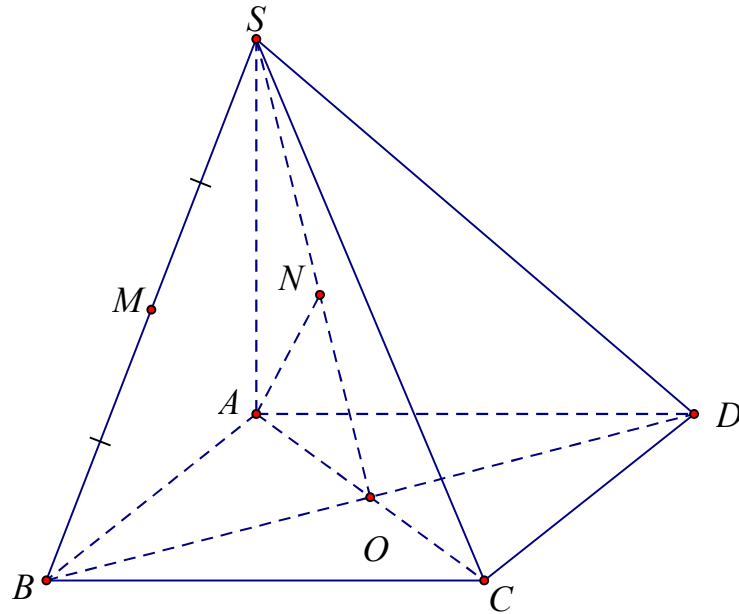


Ta có:

$$BA \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD))$$

$$BA \perp AD \text{ (do } ABCD \text{ là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow BA \perp (SAD).$$

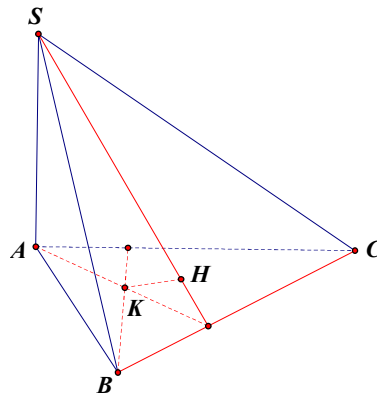


Câu 16.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \supset AN \Rightarrow AN \perp BC.$

Theo giả thiết: $AN \perp SO$.

Vậy $AD \perp (SDO)$.



Câu 17.

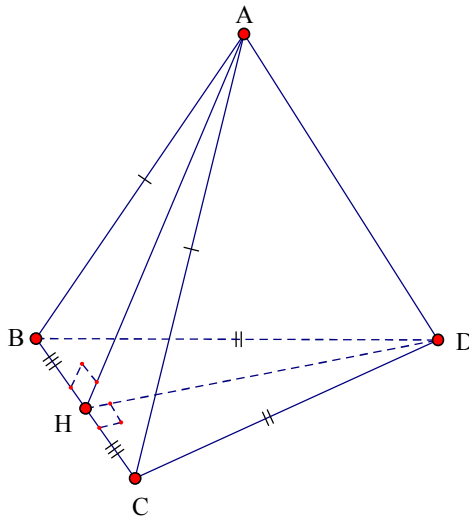
Cách 1:

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$ nên A đúng suy ra C sai vì mặt phẳng (SAH) và mặt phẳng (SAB) là hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với BC suy ra $(SAH) \parallel (SAB)$. Điều này không thể vì hai mặt phẳng này có SA chung.

Cách 2:

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BA$ nên tam giác ABC vuông tại B , điều này giả thiết không cho suy ra C sai.

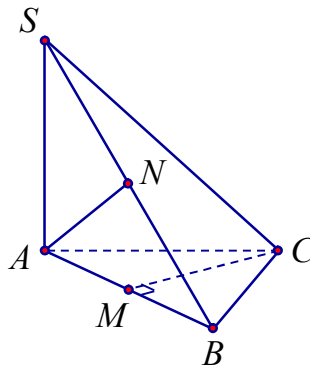
Dạng 2.2 Đường thẳng vuông góc với đường thẳng



Câu 18.

Theo đề bài ta có: $\triangle ABC$, $\triangle DBC$ lần lượt cân tại A , D . Gọi H là trung điểm của BC .

$$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ DH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD \subset (ADH) \\ BC \perp (ADH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD.$$



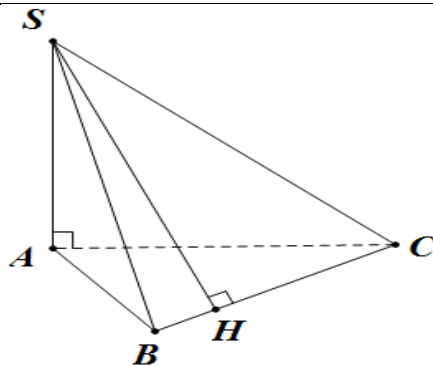
Câu 19.

$$\text{Ta có } \begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \\ SA, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB$$

$$\text{Mà } AN \subset (SAB) \Rightarrow CM \perp AN$$

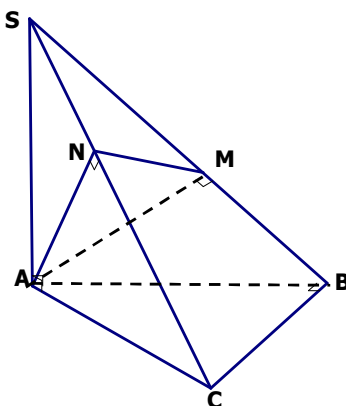
$$\text{Mặt khác } \begin{cases} MN \parallel SA \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABC)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} MN \subset (SAB) \\ CM \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \perp CM.$$



Câu 20.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$.



Câu 21.

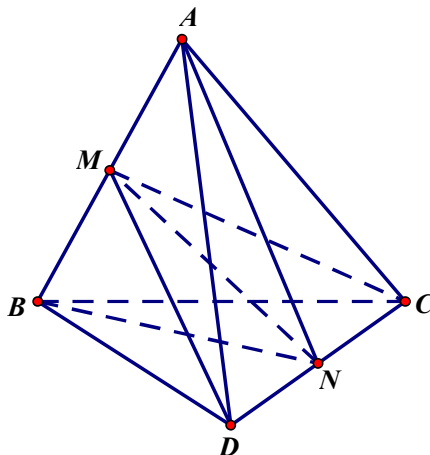
Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$, $AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Vậy $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC \Rightarrow$ Đáp án $AM \perp SC$ đúng.

Vì $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ MN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AM \perp MN \Rightarrow$ Đáp án $AM \perp MN$ đúng.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow$ Đáp án $SA \perp BC$ đúng.

Vậy $AN \perp SB$ sai.



Câu 22.

- $\triangle NAB$ cân tại N nên $MN \perp AB$.
- $\triangle MCD$ cân tại M nên $MN \perp CD$.
- $CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp AB$.
- Giả sử $MN \perp BD$

mà $MN \perp AB$. Suy ra $MN \perp (ABD)$ (Vô lí vì $ABCD$ là tứ diện đều)

Vậy phương án B sai.

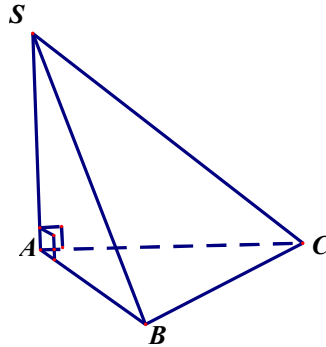
DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Dạng 3.1 Góc của cạnh bên với mặt phẳng đáy

Câu 23. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.

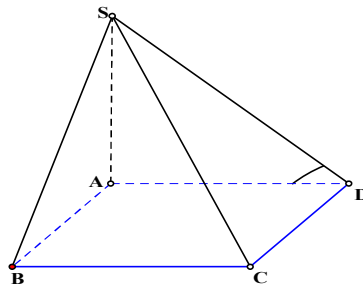
Tam giác SAC vuông cân tại A nên góc $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Câu 24. Chọn A



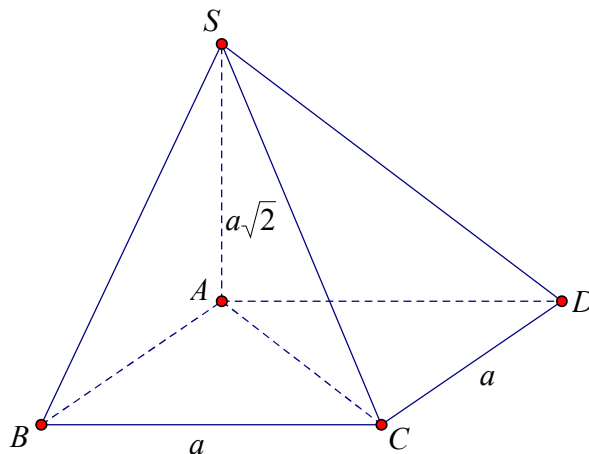
Ta có: Hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) là AB nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là góc giữa hai đường thẳng SB và AB .

Câu 25. Chọn C



Vì $SA \perp ABCD$ nên góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

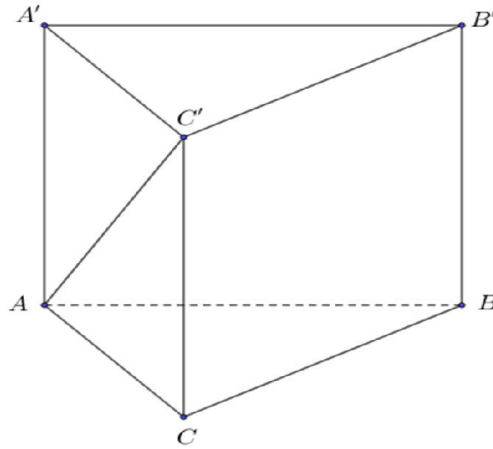
Trong tam giác vuông SDA ta có: $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ$.



Câu 26.

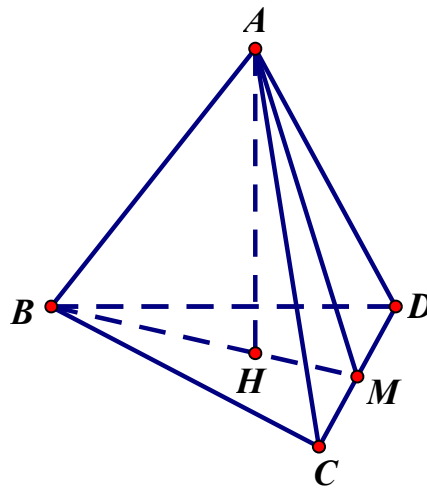
$(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác vuông SAC có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.



Câu 27.

Ta có $\widehat{(AC', (ABC))} = \widehat{(AC', AC)} = \widehat{CAC'}$, $\tan \widehat{C'AC} = \frac{CC'}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{C'AC} = 30^\circ$.



Câu 28.

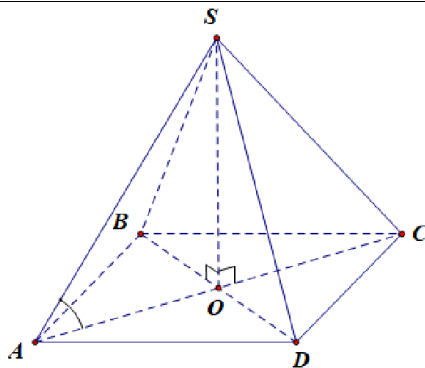
Gọi M là trung điểm của CD . Ta có $BM = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) thì $H \in BM$ và $BH = \frac{2}{3}BM = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$.

Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) là $\widehat{ABM}$.

Ta có $\cos \varphi = \cos \widehat{ABM} = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{AB\sqrt{3}}{3}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29. Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$.

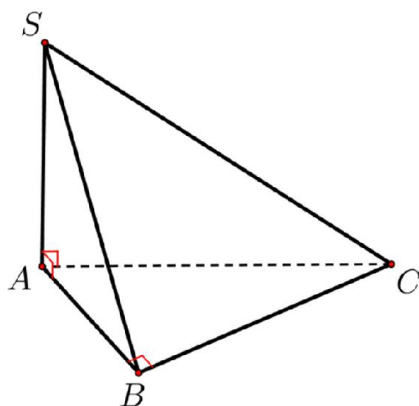
$$\widehat{(SA, (ABCD))} = \widehat{(SA, AO)} = \widehat{SAO} = \alpha.$$

$$\text{Ta có } OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Delta SAO \text{ vuông tại } O \text{ có } \cos \alpha = \frac{OA}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \text{ suy ra } \alpha = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa SA và $(ABCD)$ bằng 60° .

Câu 30. Chọn B



Ta thấy hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) là AC nên $\widehat{(SC, (ABC))} = \widehat{SCA}$.

$$\text{Mà } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \text{ nên } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1.$$

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

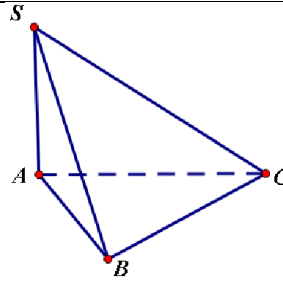
Câu 31. Chọn D

Vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA}$.

$$\text{Mà } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = 1.$$

Vậy $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Câu 32. Chọn A

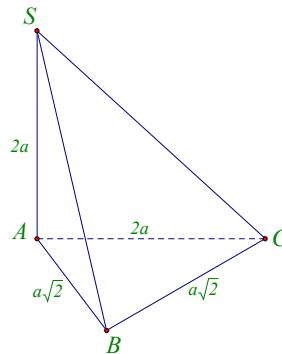


Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) .

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA} = \varphi$.

Ta có $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Câu 33. Chọn B



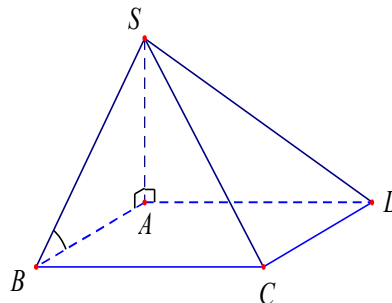
Ta có $SA \perp (ABC)$ nên đường thẳng AC là hình chiếu vuông góc của đường thẳng SC lên mặt phẳng (ABC) .

Do đó, $\alpha = (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$ (tam giác SAC vuông tại A).

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = AB\sqrt{2} = 2a$.

Suy ra $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1$ nên $\alpha = 45^\circ$.

Câu 34. Chọn A

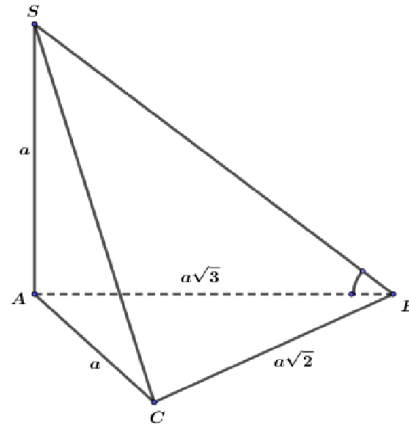


Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SBA}$.

Ta có $\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60° .

Câu 35. Chọn C



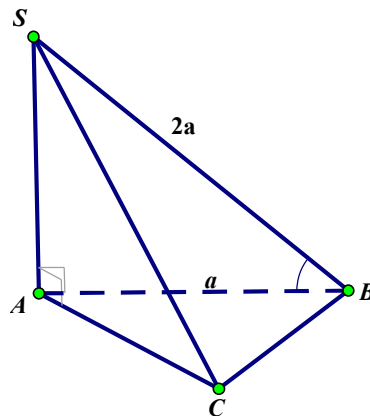
Có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) .

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}.$$

Mặt khác có $\triangle ABC$ vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

Khi đó $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $(\widehat{SB, (ABC)}) = 30^\circ$.

Câu 36. Chọn A

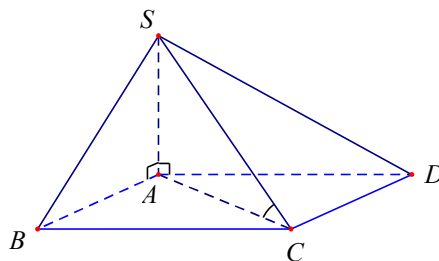


Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng đáy.

Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là $\widehat{SBA}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 37. Chọn A



Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SCA}$.

Ta có $SA = \sqrt{2}a$, $AC = \sqrt{2}a \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° .

Câu 38. Chọn D

Ta có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) .

Nên hình chiếu của SC trên mặt phẳng đáy (ABC) là AC

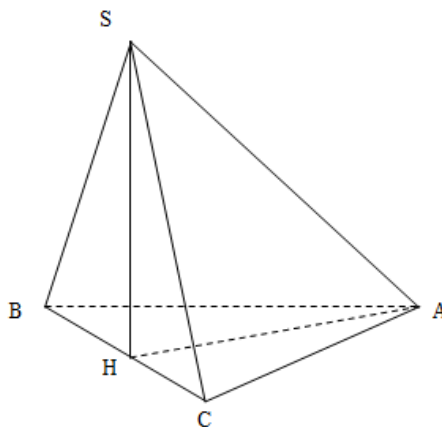
Vậy góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCA}$

Câu 39. Chọn D

+) AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \angle SCA = \varphi$

Ta có: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a$.

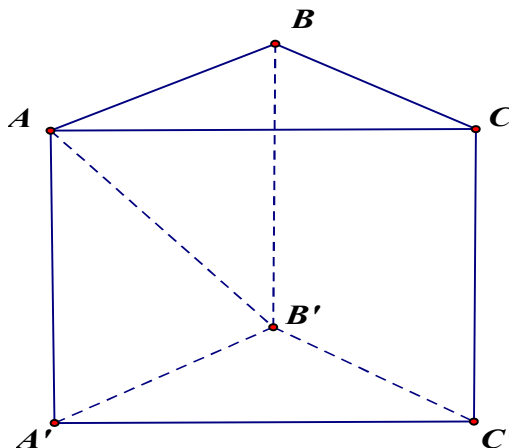
Tam giác SAC vuông tại A nên $\tan \varphi = \frac{SA}{AC} = \frac{3a}{\sqrt{5}a} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 40. Chọn A

AH là hình chiếu của SA trên $(ABC) \Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH} = \alpha$.

$\triangle SBC = \triangle ABC \Rightarrow SH = AH \Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân tại $H \Rightarrow \alpha = \widehat{SAH} = 45^\circ$.

Vậy $\tan \alpha = 1$.

Câu 41. Chọn B

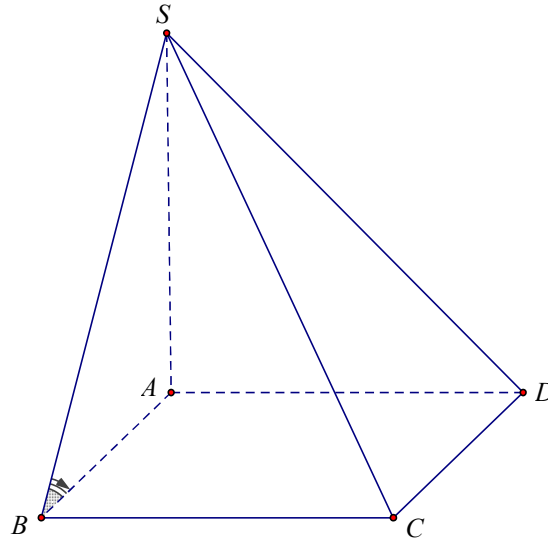
Từ giả thiết của bài toán suy ra: $A'B'$ là hình chiếu vuông góc của AB' trên $(A'B'C')$.

Do đó, $(\widehat{AB', (A'B'C')}) = (\widehat{AB', A'B'}) = \widehat{AB'A'}$.

Tam giác $AB'A'$ vuông tại A' có $AA' = A'B' = a \Rightarrow \triangle AA'B'$ vuông cân tại A' .

Suy ra $(\widehat{AB', (A'B'C')}) = (\widehat{AB', A'B'}) = \widehat{AB'A'} = 45^\circ$.

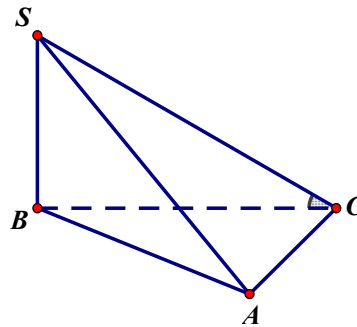
Câu 42. Chọn A



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, BA}) = \widehat{SBA}$

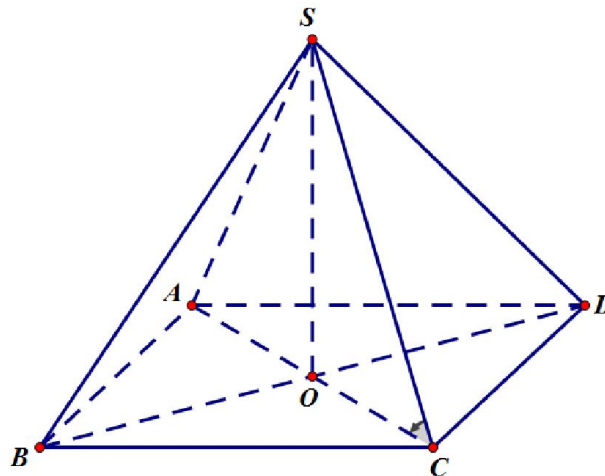
$$\Rightarrow \cot \varphi = \frac{AB}{SA} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Câu 43. Chọn C



* Hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) là BC nên góc giữa SC với (ABC) là góc giữa SC và BC .

Câu 44. Chọn D



Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCO}$.

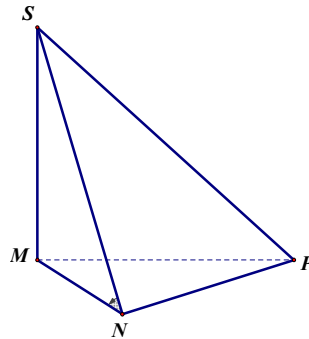
$$BD = 4a \Rightarrow BO = 2a$$

$$SO = BO \cdot \tan \widehat{SBO} = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$$

$$AC = 2a \Rightarrow OC = a$$

$$\text{Vậy } \widehat{SCO} = 45^\circ.$$

Câu 45. Chọn C

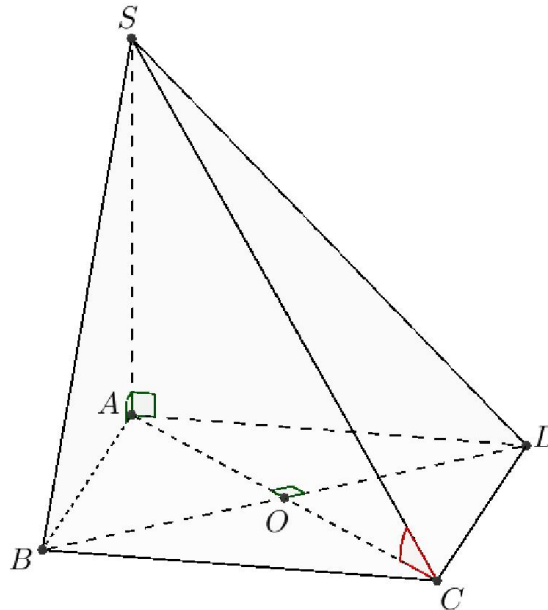


$$\text{Ta có: } SN = SP = 2a$$

$$\text{Vì } SM \perp (MNP) \rightarrow (\widehat{SN, (MNP)}) = \widehat{SNM}$$

$$\cos \widehat{SNM} = \frac{MN}{SN} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{SNM} = 60^\circ$$

Câu 46. Chọn D



$$ABCD \text{ là hình vuông cạnh } 3a \text{ nên } AC = 3a\sqrt{2}$$

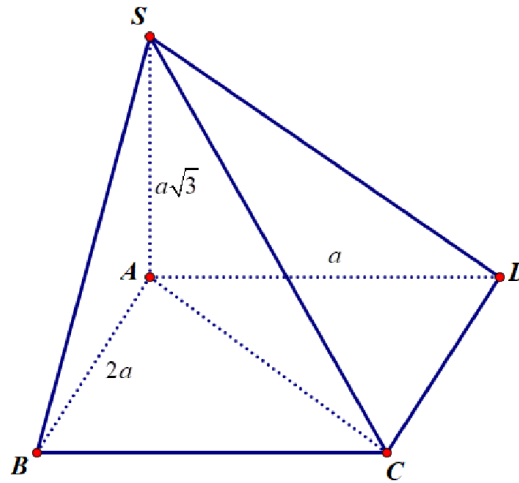
$$\text{Xét tam giác } SAB \text{ vuông tại } A: SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCA}$$

$$\text{Xét tam giác } SAC \text{ vuông tại } A:$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{34}$$

$$\sin \widehat{SCA} = \frac{SA}{SC} = \frac{2\sqrt{34}}{17}.$$



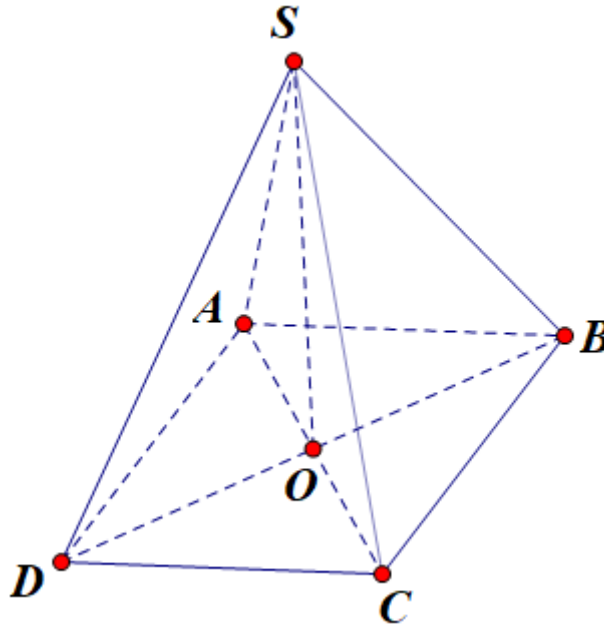
Câu 47.

Hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là AC

Do đó $[\widehat{SC, (ABCD)}] = \widehat{SCA}$

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SAC: \cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{5}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

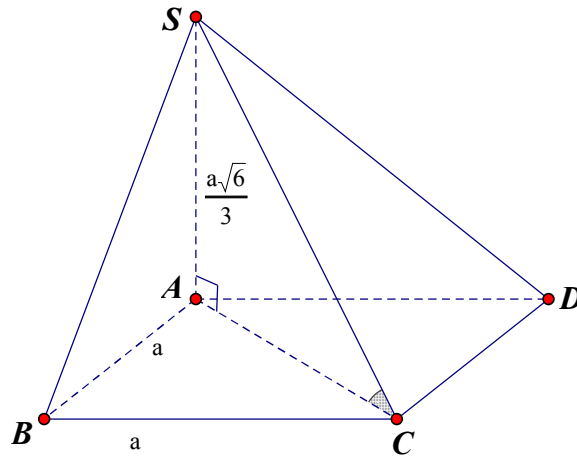


Câu 48.

Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\widehat{ADC} = 60^\circ$ nên $\triangle ACD$ đều và $OD = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$ và $\tan \widehat{SDO} = \frac{SO}{DO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra

$$\widehat{SDO} = 30^\circ.$$

**Câu 49.**

Ta có: $SA \perp (ABCD)$.

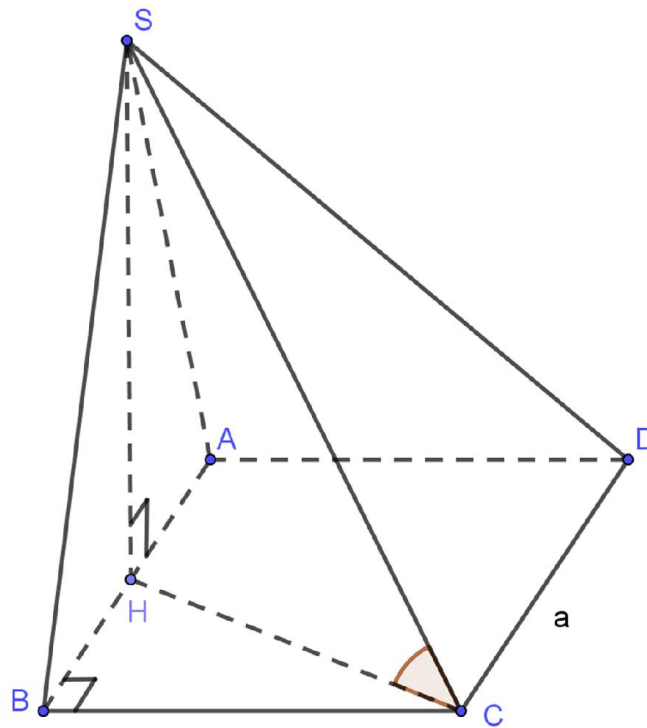
Do đó AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$.

$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}.$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là 30° .

**Câu 50.**

Gọi H là trung điểm AB . Ta có $SH \perp (ABCD)$.

$$S_{ABCD} = a^2.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH \Rightarrow SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$CH = \sqrt{AC^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

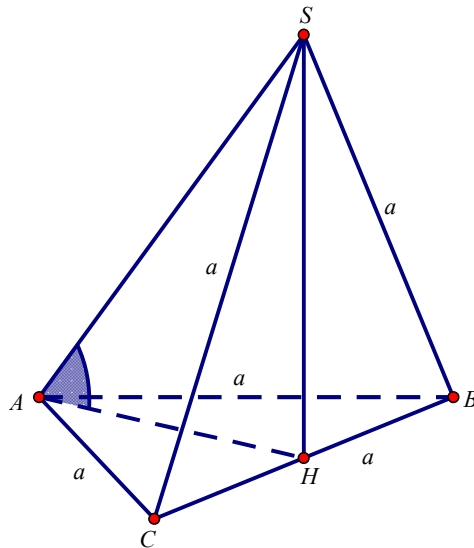
$$\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, CH)}.$$

$$\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{CH} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{(SC, (ABCD))} = 60^\circ$$

Câu 51. Ta có MC là hình chiếu của MC' lên (ABC) . Suy ra $\alpha = \widehat{C'CM}$.

$$\text{Xét tam giác } MCC' \text{ vuông tại } C \text{ có: } \tan \alpha = \frac{CC'}{CM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



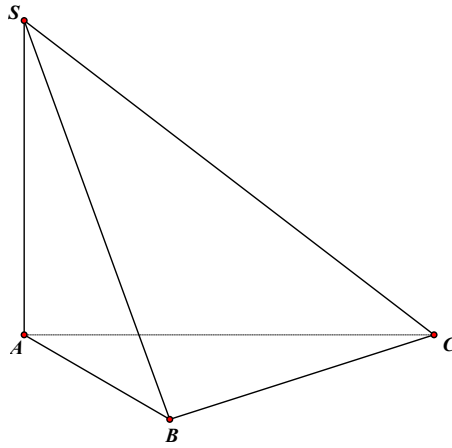
Câu 52.

Dễ thấy AH là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng đáy.

Do đó góc tạo bởi SA và (ABC) là $\widehat{SAH}$.

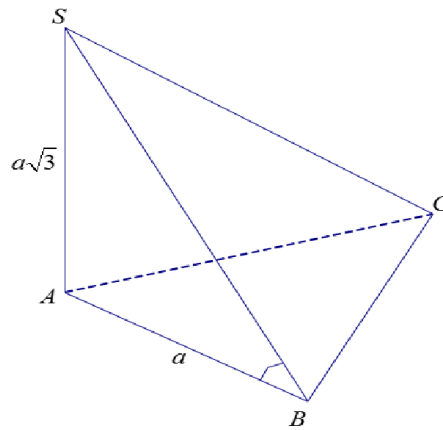
Mặt khác, $\triangle ABC = \triangle SBC \Rightarrow SH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy tam giác SAH là tam giác vuông cân đỉnh H

hay $\widehat{SAH} = 45^\circ$.



Câu 53.

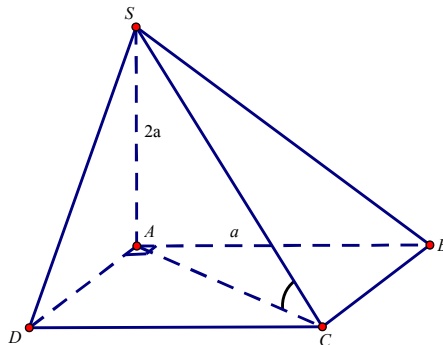
- Nhận thấy AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SC và (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.
- Do $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$.



Câu 54.

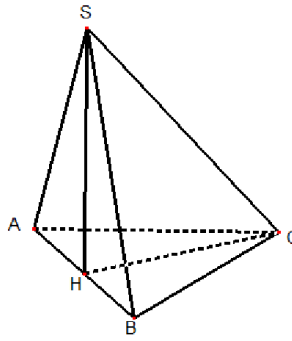
Vì $SA \perp (ABC)$ nên $\left(\widehat{SB, (ABC)}\right) = \widehat{SBA}$

Suy ra $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.



Câu 55.

$$\tan \alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



Câu 56.

Do tam giác SAB vuông cân tại S nên H là trung điểm của AB và ta có $SH = \frac{1}{2} AB = a$.

Góc giữa cạnh SC và mặt đáy là góc $\widehat{SCH}$.

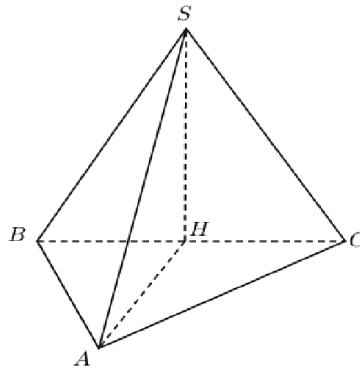
Xét tam giác vuông HSC có $HC = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $SH = a$ nên $\tan \widehat{SCH} = \frac{HS}{HC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{SCH} = 30^\circ$.

Câu 57. Chọn D

Gọi H là trung điểm cạnh $BC \Rightarrow SH \perp BC$; $SH = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$ (ΔSBC đều)

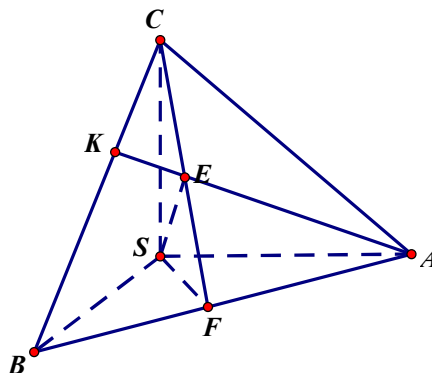
$$\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \\ SH \perp AB; SH \in (SBC) \end{cases}$$



$$\Rightarrow \left(\widehat{SA; (ABC)} \right) = \left(\widehat{SA; AH} \right) = \widehat{SAH}$$

ΔABC vuông tại A ; H là trung điểm $BC \Rightarrow AH = \frac{BC}{2}$

$$\Delta SAH \text{ vuông tại } H \Rightarrow \tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \frac{\frac{BC\sqrt{3}}{2}}{\frac{BC}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^\circ.$$

**Câu 58.**

Trong tam giác ABC kẻ đường cao AK và CF và $AK \cap CF = \{E\}$ nên E là trực tâm tam giác ABC .

$$\begin{cases} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{cases} \Rightarrow SC \perp (SAB) \text{ hay } SC \perp AB$$

Mà $CF \perp AB$ nên $AB \perp (SCF) \Rightarrow AB \perp SE$. Chứng minh tương tự ta được $BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp SE$. Vậy $SE \perp (ABC)$.

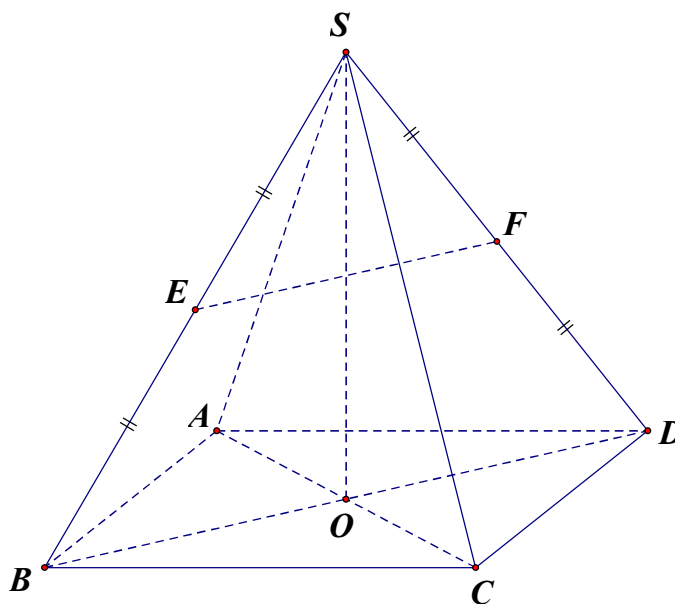
Ta có CE là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC) .

$$(SC, (ABC)) = (SC, CE) = \widehat{SCE}$$

Ta có tam giác SCF vuông tại S nên $\frac{1}{SE^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SF^2}$. Mặt khác tam giác SAB vuông tại S

$$\text{nên } \frac{1}{SF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2}. \text{ Suy ra } \frac{1}{SE^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SE^2} = \frac{3}{a^2} \Leftrightarrow SE = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\sin \widehat{SCE} = \frac{SE}{SC} = \frac{a}{\sqrt{3}} : a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Câu 59.**

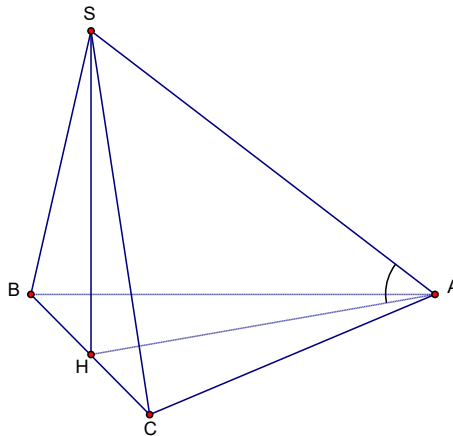
Ta có:

+ $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$$+ \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC).$$

$$+ EF \parallel BD \Rightarrow EF \parallel (ABCD).$$

$$+ \left(\widehat{SA, (ABCD)} \right) = \left(\widehat{SA, AO} \right) = \widehat{SAO} = 45^\circ.$$



Câu 60.

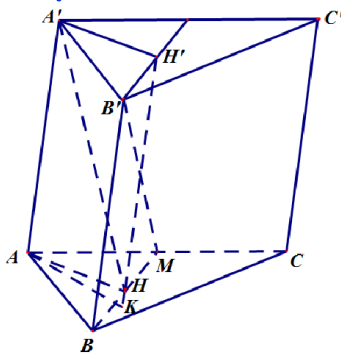
Gọi H là trung điểm của BC suy ra $SH \perp (ABC)$

Do đó hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC) là AH

Do $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$ đều cạnh a nên $SH = AH \Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân tại H

$$\Rightarrow \left(\widehat{SA, (ABC)} \right) = \widehat{SAH} = 45^\circ.$$

Câu 61. Chọn A



$$\text{Ta có: } d(C', (BMB')) = d(C, (BMB')) = d(A, (BMB')) = \frac{3a}{4},$$

Trong tam giác ABC có: $AC = 2a, BM = a, AM = a$ suy ra tam giác ABM là tam giác đều cạnh a . Dựng hình bình hành $AA'H'H$ suy ra $H' \in (BMB')$, K là hình chiếu của A lên $H'H$.

$$\begin{cases} BM \perp AH \\ BM \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BM \perp (AA'H'H) \Rightarrow BM \perp AK.$$

$$\begin{cases} AK \perp BM \\ AK \perp HH' \end{cases} \Rightarrow AK \perp (BMB') \Rightarrow d(A, (BMB')) = AK = \frac{3a}{4}.$$

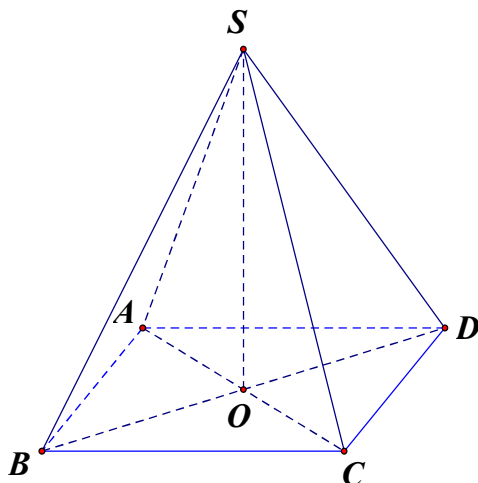
$$\text{Trong hình bình hành } AA'H'H \text{ ta có } AK.HH' = A'H.AH \Rightarrow \frac{A'H}{HH'} = \frac{AK}{AH} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \left(\widehat{AA', (ABC)} \right) = \left(\widehat{AA', AH} \right) = \widehat{AA'H}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } AA'H \text{ có } \sin \widehat{AA'H} = \frac{A'H}{AA'} = \frac{A'H}{HH'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{AA'H} = 60^\circ.$$

Dạng 3.2 Góc giữa cạnh bên với mặt phẳng bên

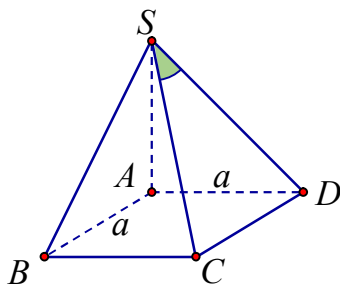
Câu 62. Chọn A



Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AO \perp BD$.

Mà $AO \perp SO$ do $SO \perp (ABCD)$. Suy ra $AO \perp (SBD)$ hay O là hình chiếu của A lên (SBD) .

Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc $\widehat{ASO}$ ($\widehat{ASO} < 90^\circ$ do $\triangle SAO$ vuông ở O).



Câu 63.

Dễ thấy $CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB) .

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB}$.

Tam giác CSB có $\widehat{B} = 90^\circ$; $CB = a$; $SB = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan \widehat{CSB} = \frac{CB}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

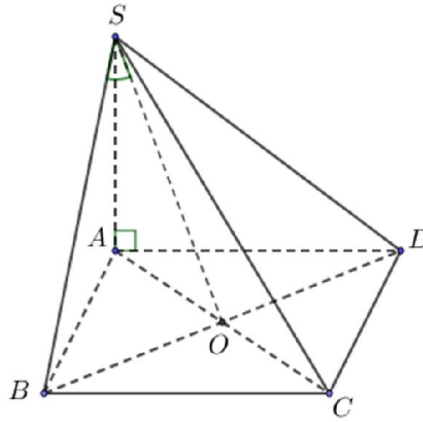
Vậy $\widehat{CSB} = 30^\circ$.

Câu 64. Gọi O là tâm của đáy $ABCD$.

Ta có $BO \perp AC$ và $BO \perp SA$ nên SO là hình chiếu của SB trên (SAC) .

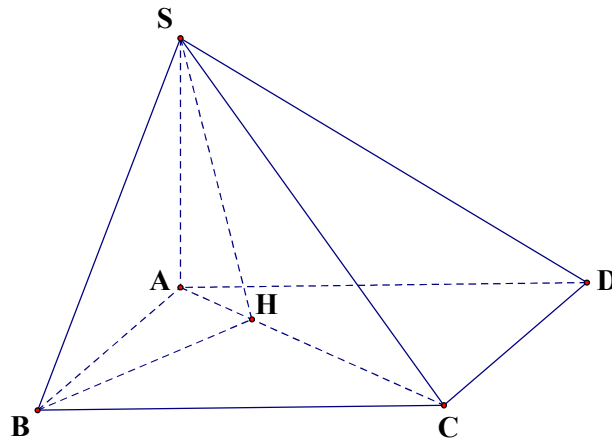
Suy ra $\alpha = \widehat{BSO}$.

Lại có $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{BO}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

**Câu 65.**

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $BO \perp (SAC) \Rightarrow \alpha = (\widehat{SB, (SAC)}) = \widehat{BSO}$.

$$\text{Ta có } SB = a\sqrt{7}, \sin \alpha = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

**Câu 66.**

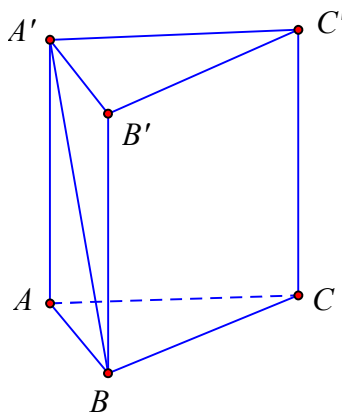
Kẻ $BH \perp AC$ và $H \in AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

SH là hình chiếu của BH trên mặt phẳng (SAC) .

Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{BSH}$.

$$\text{Ta có } BH = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SBH \text{ ta có } \sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSH} = 30^\circ.$$

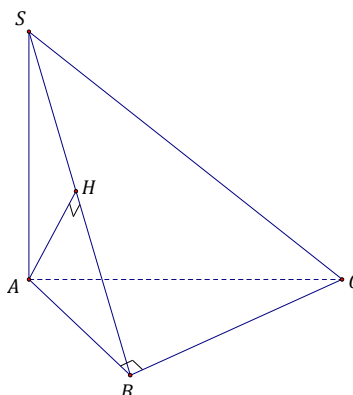
**Câu 67.**

Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ nên $BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow BB' \perp A'B' \Rightarrow A'B' \perp BB'$ (1)

Bài ra có $AB \perp BC \Rightarrow A'B' \perp B'C'$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow A'B' \perp (BCC'B') \Rightarrow \widehat{(A'B'; (BCC'B'))} = \widehat{A'BB'}$

$$\Rightarrow \tan \widehat{(A'B'; (BCC'B'))} = \tan \widehat{A'BB'} = \frac{A'B'}{BB'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{(A'B'; (BCC'B'))} = 30^\circ.$$

Câu 68. Chọn B

Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$).

$$\text{Vì } \begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$$

Mà $SB \perp AH$ do cách dựng nên $AH \perp (SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay góc $\widehat{ASB}$.

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông ở } B \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ vuông ở } A \Rightarrow \sin \widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASB} = 30^\circ$$

Câu 69. ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AC = a$.

$$\Delta ABA' \text{ vuông tại } A \Rightarrow A'B = a\sqrt{2}.$$

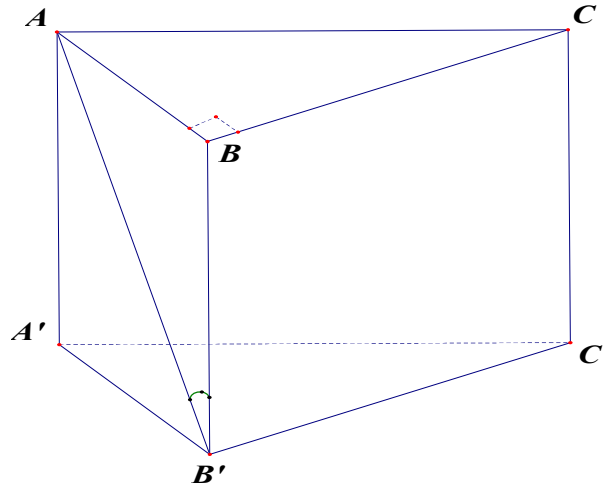
$$\text{Ta có } \begin{cases} C'A' \perp A'B' \\ C'A' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow C'A' \perp (ABB'A').$$

$\Rightarrow BA'$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ABB'A')$.

$\Rightarrow (BC'; (ABB'A')) = (BC'; BA')$.

$\Delta A'BC'$ vuông tại $A' \Rightarrow \tan \widehat{A'BC'} = \frac{A'C'}{A'B} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 70. Chọn D



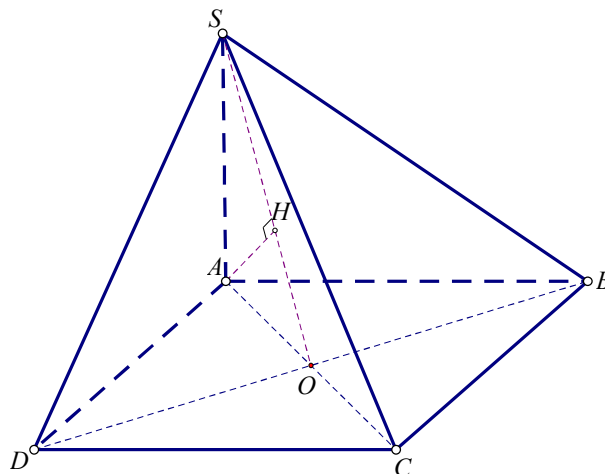
Ta có: $\left. \begin{array}{l} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (BCC'B')$, suy ra BB' là hình chiếu vuông góc của AB' trên mặt phẳng $(BCC'B')$.

Vậy góc giữa đường AB' và $(BCC'B')$ chính là góc $\widehat{AB'B}$.

Xét tam giác ABB' vuông tại B có $BB' = AA' = 1$, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3}$

Suy ra $\tan \widehat{AB'B} = \frac{AB}{BB'} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AB'B} = 60^\circ$.

Câu 71. Chọn C



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SO , ta có:

$\left\{ \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array} \right. \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AH$.

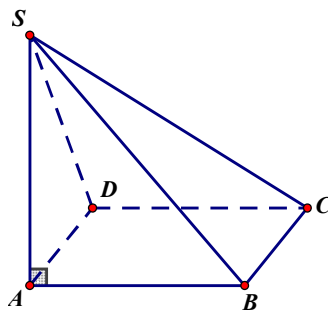
Từ $AH \perp SO, AH \perp BD$ suy ra $AH \perp (SBD)$, hay SH là hình chiếu vuông góc của SA lên (SBD) ,

Suy ra $\widehat{(SA, (SBD))} = \widehat{(SA, SO)} = \widehat{ASO}$.

Ta có $\triangle ABC$ đều cạnh $2a$ nên $OA = a$.

$\triangle SAO$ vuông tại A nên $\tan \widehat{ASO} = \frac{OA}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$.

Câu 72. Chọn C



Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB) là SB .

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là góc $\widehat{BSC}$.

Xét tam giác $\triangle SBC$ vuông tại B có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

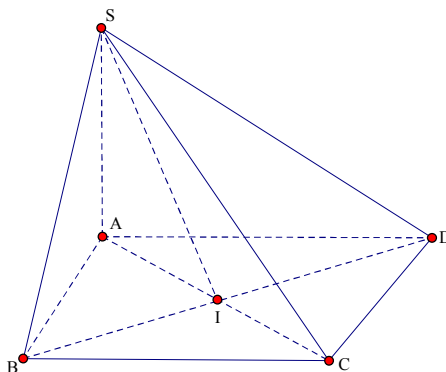
$BC = AD = a\sqrt{3}$.

Suy ra tam giác $\triangle SBC$ vuông cân tại B .

Suy ra $\widehat{BSC} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 45° .

Câu 73. Chọn A

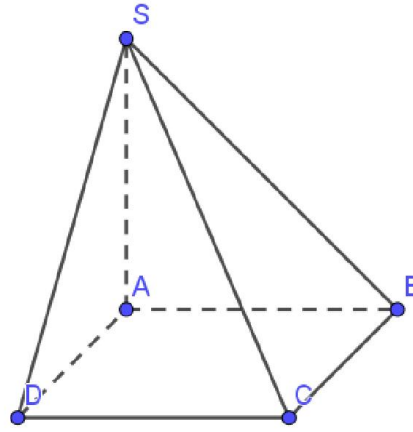


Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$; Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$

Suy ra $BD \perp (SAC)$, do đó góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là góc $\widehat{BSI}$

Ta có: $SB = a\sqrt{2}$; $BI = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \widehat{BSI} = \frac{BI}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSI} = 30^\circ$.

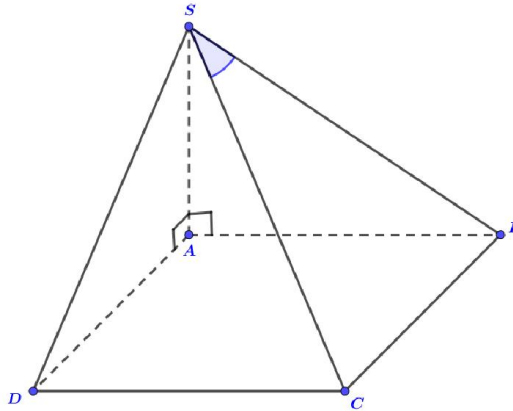


Câu 74.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

$$\text{Mà } \begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \\ AD \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD).$$

$$\cos(\widehat{SB, (SAD)}) = \cos \widehat{BSA} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$



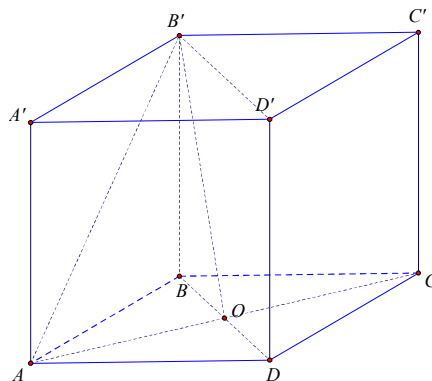
Câu 75.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SAB) \Rightarrow SB \text{ là hình chiếu vuông góc của } SC \text{ lên } (SAB)$$

$$\Rightarrow \widehat{SC, (SAB)} = \widehat{CSB}.$$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ vuông tại } A \text{ có: } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Tam giác } SBC \text{ vuông tại } B \text{ có: } \tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^\circ.$$



Câu 76.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó ta có $AO \perp BD$ (1).

Mặt khác ta lại có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AO$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AO \perp (BDD'B') \Rightarrow (AB', (ABCD)) = (AB', B'O) = \widehat{AB'O}$.

Xét tam giác vuông $AB'O$ có $\sin \widehat{AB'O} = \frac{AO}{AB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AB'O} = 30^\circ$.

Vậy $(AB', (ABCD)) = 30^\circ$.

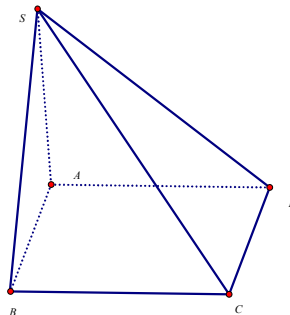
Câu 77. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, gốc tọa độ trùng với điểm A , trục Ox nằm trên đường thẳng AD , chiều dương từ $A \Rightarrow D$, trục Oy nằm trên đường thẳng AB , chiều dương từ $A \Rightarrow B$, trục Oz nằm trên đường thẳng AS , chiều dương từ $A \Rightarrow S$.

Vậy $A(0,0,0), D(4,0,0), B(0,3,0), C(4,3,0), S(0,0,1)$.

Ta có mặt phẳng $(SBD): \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1 \Rightarrow 3x + 4y + 12z - 12 = 0$, $\overrightarrow{SC} = (4, 3, -1)$.

Gọi α là góc tạo bởi SC và (SBD) .

$$\sin \alpha = \frac{12\sqrt{26}}{338}.$$

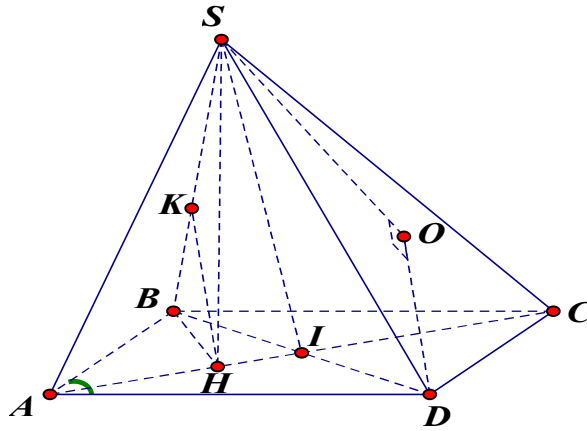


Câu 78.

Ta có $\left. \begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$. Do đó góc giữa SC và mặt phẳng (SAD) là góc $\widehat{CSD}$.

$$\tan \widehat{CSD} = \frac{CD}{SD} = \frac{CD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{15a^2 + a^2}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 79. Chọn C



Theo giả thiết, ABD là tam giác đều.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD . Do $SA = SB = SD$ nên S nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD suy ra $SH \perp (ABD)$ hay $SH \perp (ABCD)$.

Do $(SBC) \perp (SBH)$ nên từ H kẻ $HK \perp SB$ tại K thì $HK = d(H, (SBC))$ và

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{15}}{9}.$$

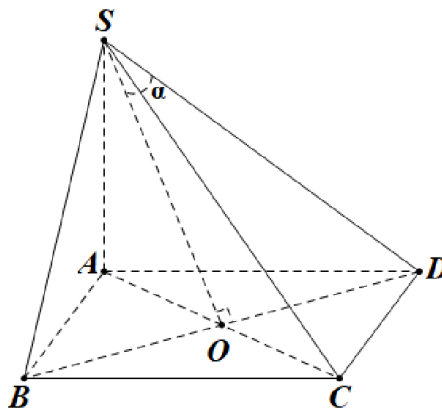
$$\text{Mặt khác, } d(H, (SBC)) = \frac{2}{3} d(A, (SBC)) = \frac{2}{3} d(D, (SBC)) \Rightarrow d(D, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm D trên (SBC) . Khi đó: $\alpha = (SD, SO) = \widehat{DSO}$ và

$$DO = d(D, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

$$\text{Xét tam giác } SDO \text{ vuông tại } O \text{ có: } \sin \alpha = \frac{DO}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 80. Chọn A



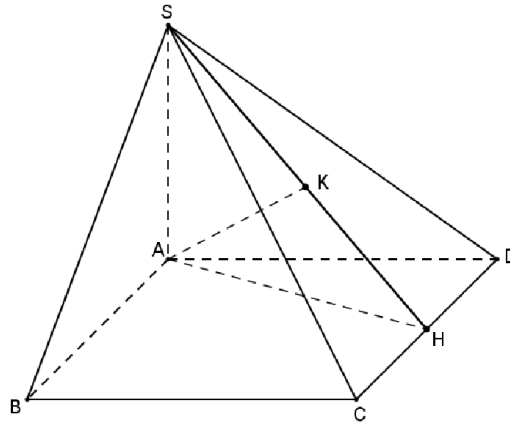
$$\text{Gọi } O = AC \cap BD. \text{ Ta có: } \begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow DO \perp (ABCD).$$

$$\Rightarrow SO \text{ là hình chiếu của } SD \text{ lên mặt phẳng } (SAC) \Rightarrow (SD; (SAC)) = (SD; SO) = \widehat{DSO} = \alpha.$$

$$\text{Xét } \triangle SAD \text{ vuông tại } A: SD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O : có $SD = 2a$, $OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \widehat{DSO} = \frac{DO}{SD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 81. Chọn A

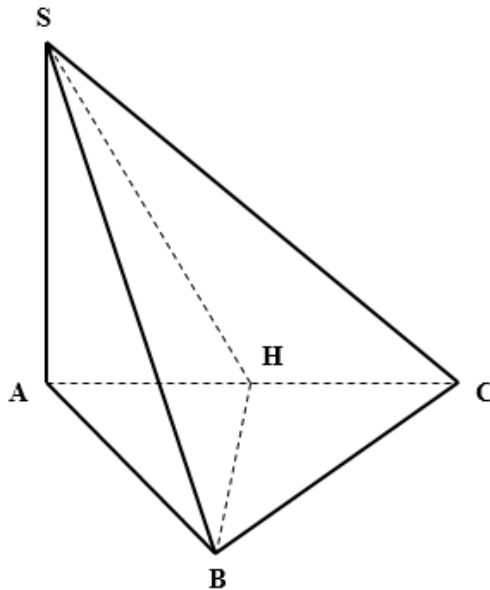


Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $AH \perp CD$ tại H .

Trong mặt phẳng (SAH) kẻ $AK \perp SH$ tại K . Khi đó $AK \perp (SCD)$ nên góc giữa SA mặt phẳng (SCD) là $\widehat{ASH} = \alpha$.

Tam giác ADC đều nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông ASH có $\tan \widehat{ASH} = \frac{AH}{AS} = \frac{1}{2}$.



Câu 82.

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BH \perp AC$

Mà $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\widehat{BSH}$.

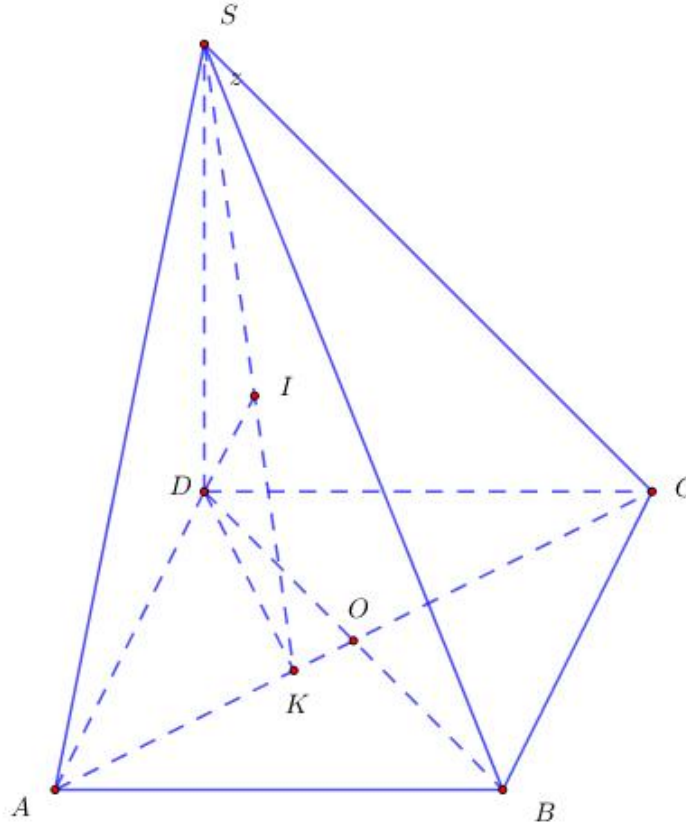
Xét tam giác ABH vuông tại H , $BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$$AH = AB \cdot \cos 60^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = a.$$

$$\text{Xét tam giác } SAH \text{ vuông tại } S, SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

Xét tam giác SBH vuông tại H có $SH = HB = a\sqrt{3}$ suy ra tam giác SBH vuông tại H .

Vậy $\widehat{BSH} = 45^\circ$.



Câu 83.

$$\text{Ta có } \sin(\widehat{SB; (SAC)}) = \frac{d(B; (SAC))}{SB} = \frac{d(D; SAC)}{SB}.$$

$$\text{Xét tam giác } ABC \text{ ta có } AC = \sqrt{BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}} = a\sqrt{7}.$$

$$BO = \sqrt{\frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 + a^2}{2} - \frac{7a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BD = a\sqrt{3} \text{ và } SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Xét tam giác } ADC \text{ ta có } \frac{AD}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC}{\sin \widehat{D}} \Rightarrow \sin \widehat{C} = \frac{AD \cdot \sin \widehat{D}}{AC} = \frac{a \cdot \sin 120^\circ}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Gọi K là hình chiếu của D lên AC , và I là hình chiếu của D lên SK . Ta có

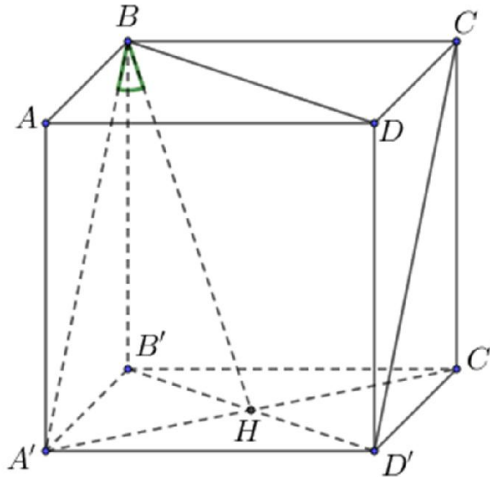
$$\begin{cases} AC \perp DK \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp DI. \text{ Do đó } \begin{cases} DI \perp SK \\ DI \perp AC \end{cases} \Rightarrow d(D; (SAC)) = DI.$$

$$\text{Mặt khác } \sin \widehat{C} = \frac{DK}{DC} \Rightarrow DK = DC \cdot \sin \widehat{C} = 2a \cdot \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Xét tam giác } SDK \text{ ta có } DI = \frac{SD \cdot DK}{\sqrt{SD^2 + DK^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{7}}{\sqrt{3a^2 + \frac{21}{49}a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

$$\text{Vậy } \sin(\widehat{SB; (SAC)}) = \frac{d(D; SAC)}{SB} = \frac{DI}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{4}.$$

Trong mặt phẳng (SDK) kẻ $DI \perp SK$ suy ra $d(D; (SAC)) = DI$.

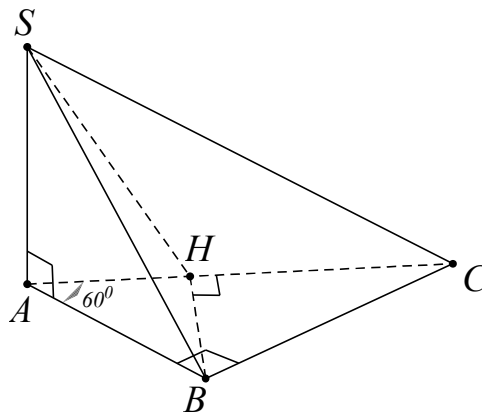


Câu 84.

Gọi H là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có $A'H \perp B'D'$, $A'H \perp BB' \Rightarrow A'H \perp (BB'D'D)$. BH là hình chiếu của $A'B$ trên $(BB'D'D)$

$$\Rightarrow (\widehat{A'H, (BB'D'D)}) = \widehat{A'BH} = \alpha. \sin \alpha = \frac{A'H}{A'B} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$



Câu 85.

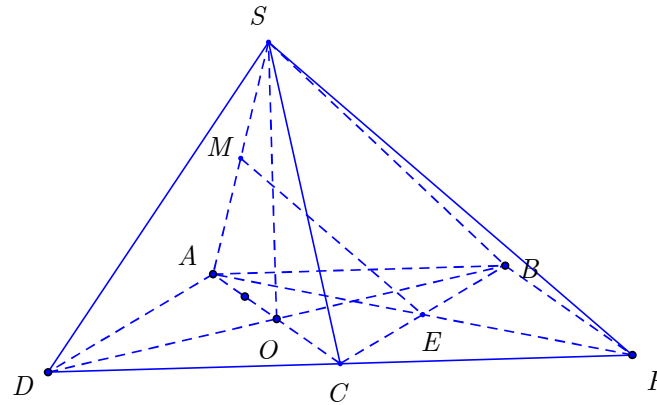
Kẻ $BH \perp AC (H \in AC)$ và theo giả thiết $BH \perp SA$ nên $BH \perp (SAC)$

Do đó, SH là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (SAC)

Suy ra, $(\widehat{SB, (SAC)}) = (\widehat{SB, SH}) = \widehat{BSH}$.

$$\text{Mà ta có: } SB = a\sqrt{6}, HB = AB \sin 60^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow \sin(\widehat{BSH}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BSH} = 45^\circ.$$

Dạng 3.3 Góc giữa đường thẳng khác với mặt phẳng



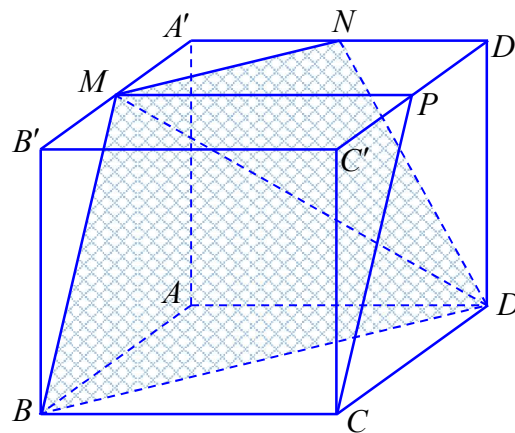
Câu 86.

Dựng hình bình hành $ABFC$.

Ta có $EM \parallel SF$ nên góc giữa EM và (SBD) bằng góc giữa SF và (SBD) .

$FB \parallel AC \Rightarrow FB \perp (SBD)$ do đó góc giữa SF và (SBD) bằng góc $\widehat{FSB}$.

Ta có $\tan \widehat{FSB} = \frac{BF}{SB} = \frac{AC}{SB} = \sqrt{2}$. Vậy chọn **D**.

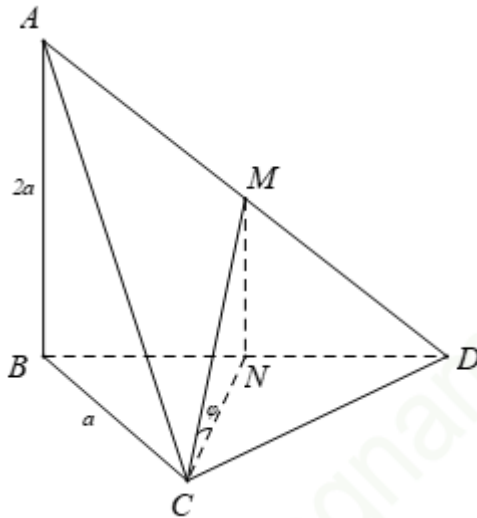


Câu 87.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel B'D' \\ BD \parallel B'D' \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow$ bốn điểm M, N, B, D đồng phẳng.

Lại có tứ giác $BCPM$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} CP \parallel BM \\ BM \subset (DMN) \end{cases} \Rightarrow CP \parallel (DMN)$

$\Rightarrow \widehat{(CP, (DMN))} = 0^\circ$.

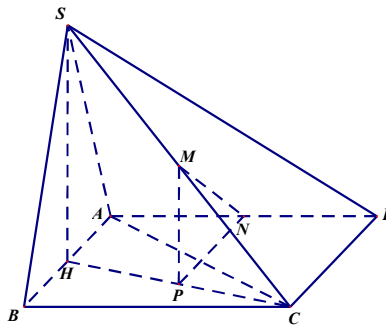
**Câu 88.**

Gọi N là trung điểm BC . Ta có góc giữa CM với $mp(BCD)$ bằng góc MCN .

$$+ MN = \frac{AB}{2} = a.$$

$$+ CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan \varphi = \frac{MN}{CN} = a \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Câu 89.**

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi P là trung điểm $CH \Rightarrow MP \parallel SH \Rightarrow MP \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa MN với mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{MNP}$ (do $\widehat{MPN} = 90^\circ$)

$$\text{Có } MP = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}, \quad PN = \frac{AH + CD}{2} = \frac{\frac{a}{2} + a}{2} = \frac{3a}{4}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{MNP} = \frac{MP}{PN} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{MNP} = 30^\circ.$$

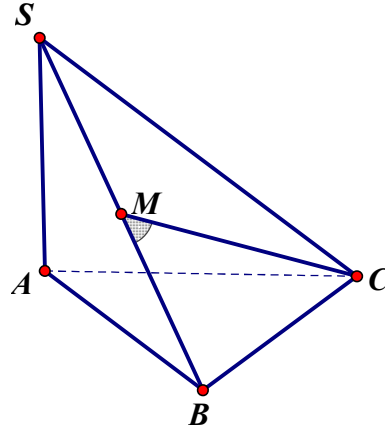
Câu 90. Trong $\triangle AMD$, kẻ $NH \perp MD$, suy ra $NH \perp (BCD)$.

Nên MD là hình chiếu vuông góc của MN lên mặt phẳng BCD .

Khi đó $(\widehat{MN, (BCD)}) = (\widehat{MN, MD}) = \widehat{NMD}$.

Ta có $\triangle NMD$ vuông tại N do đó $\tan \varphi = \frac{ND}{MN} = \frac{\frac{a}{2}}{a \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 91. Chọn C



Có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

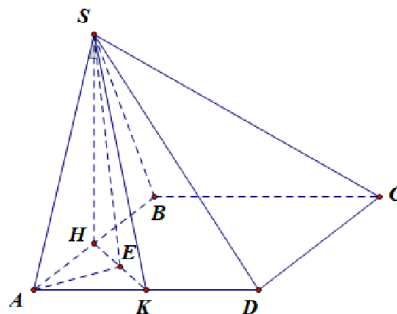
Có BM là hình chiếu của CM lên mặt phẳng (SAB) . Suy ra $(CM; (SAB)) = \widehat{CMB}$

Ta có $\tan \widehat{CMB} = \frac{BC}{MB} = \frac{2AB}{SB} = \frac{2AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2.2a}{\sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + (2a)^2}} = 1$

$\Rightarrow \widehat{CMB} = 45^\circ$

Vậy $(CM; (SAB)) = 45^\circ$

Câu 92. Chọn B



Gọi E là trung điểm của đoạn KH , ta có $\triangle AHK$ vuông cân tại A vì $AH = AK = \frac{1}{2}a$ nên

$AE \perp KH$ do đó

$\begin{cases} AE \perp SH \\ AE \perp HK \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHK)$, suy ra

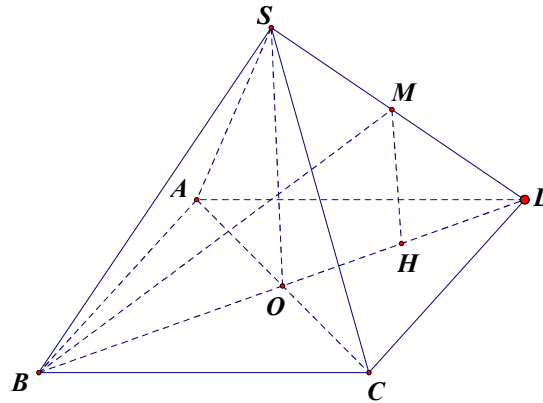
$(SA, (SHK)) = (SA, SE) = \widehat{ASE} = \alpha$.

Mà $AE = \frac{1}{2}KH = \frac{1}{2}\sqrt{AH^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$$\triangle SEA \text{ vuông tại } E \text{ có } \sin \alpha = \frac{AE}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 93. Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông. Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi M là trung điểm của OD ta có $MH \parallel SO$ nên H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$

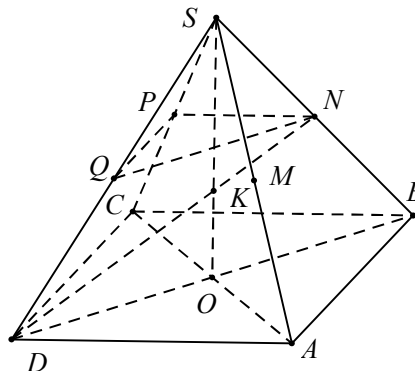
$$\text{và } MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Do đó góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

$$\text{Khi đó ta có } \tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 94. Chọn A



Do M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD nên mặt phẳng $(ABCD)$ song song mặt phẳng (MPQ) suy ra góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MPQ) cũng là góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng $(ABCD)$.

Có $K = SO \cap DN$. Do $S.ABCD$ hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra hình chiếu vuông góc của đường thẳng DN trên mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng DO nên

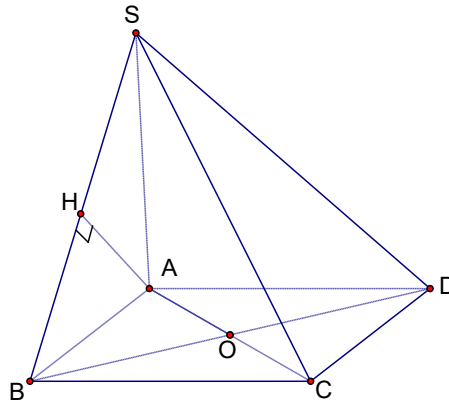
$$\widehat{(DN, (ABCD))} = \widehat{(DN, DO)}.$$

Xét tam giác vuông SOA có $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; $SA = \sqrt{5}a \Rightarrow SO = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Mà K là trọng tâm tam giác

$$SBD \Rightarrow OK = \frac{1}{3}SO = \frac{\sqrt{2}a}{2} = OD \Rightarrow \Delta OKD \text{ vuông cân tại } O \text{ hay } \widehat{KDO} = 45^\circ.$$

$$\text{Hay } \widehat{(DN, (MPQ))} = 45^\circ \Rightarrow \cos \widehat{(DN, (MPQ))} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 95. Chọn A



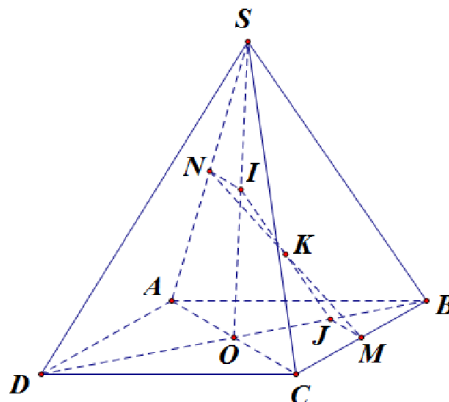
$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{d(D, (SBC))}{BD} = \frac{d(A, (SBC))}{BD}.$$

$$\begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \end{cases}. \text{ Kẻ } AH \perp SB \text{ thì } AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A, (SBC)).$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ và } BD = \sqrt{BA^2 + AD^2} = 2a.$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha = \frac{d(A, (SBC))}{BD} = \frac{AH}{BD} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cdot 2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 96. Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$, I, J lần lượt là trung điểm của OS, OB .

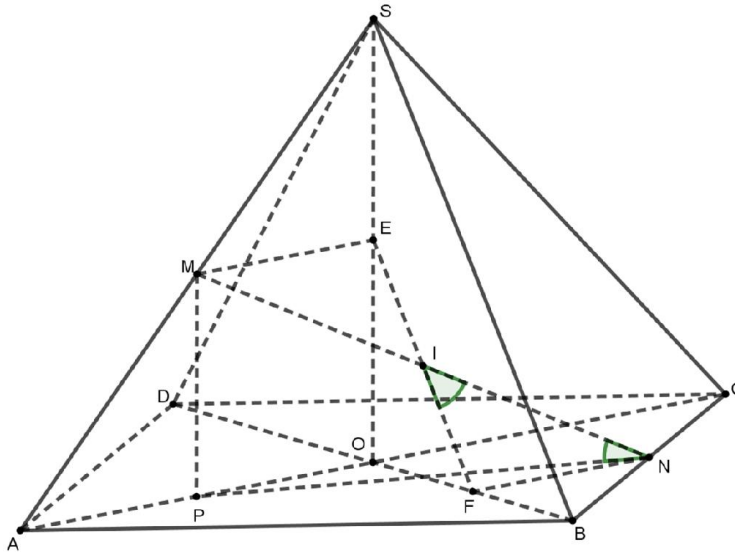
$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} OA \perp (SBD) \\ NI \parallel AC \parallel MJ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} NI \perp (SBD) \\ MJ \perp (SBD) \end{array} \right.$$

Suy ra $(MN, (SBD)) = (MN, IJ)$

$$\text{Có: } \left. \begin{array}{l} NI \parallel AC \parallel MJ \\ NI = \frac{1}{4} AC = MJ \end{array} \right\} \Rightarrow MJNI \text{ là hình bình hành. Gọi } K = MN \cap IJ \text{ suy ra } K \text{ là trung điểm}$$

của IJ và MN đồng thời $NI \perp IK$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \tan \widehat{NKI} = \frac{NI}{IK} = \frac{OA}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2} \text{ trong đó } a \text{ là cạnh của hình vuông } ABCD.$$



Câu 97.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm SO, OB thì EF là hình chiếu của MN trên (SBD) .

Gọi P là trung điểm OA thì PN là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

Theo bài ra: $\widehat{MNP} = 60^\circ$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNP ta được:

$$NP^2 = CP^2 + CN^2 - 2CP \cdot CN \cdot \cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

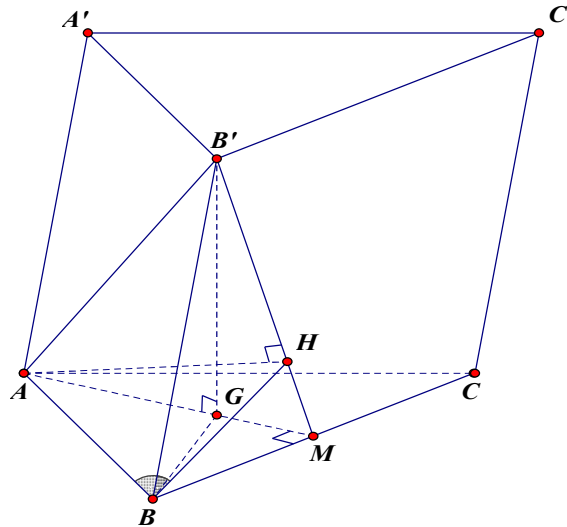
$$\text{Suy ra: } NP = \frac{a\sqrt{10}}{4}, MP = NP \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}; SO = 2MP = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow EF = a\sqrt{2}.$$

Ta lại có: $MENF$ là hình bình hành (vì ME và NF song song và cùng bằng $\frac{1}{2}OA$).

Gọi I là giao điểm của MN và EF , khi đó góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{NIF}$.

$$\cos \widehat{NIF} = \frac{IK}{IN} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{a\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



Câu 98.

Ta có $B'G \perp (ABC)$ nên BG là hình chiếu của BB' lên mặt phẳng (ABC) .

$$\Rightarrow (BB', (ABC)) = (BB', BG) = \widehat{B'BG} = 60^\circ.$$

Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu của A lên $B'M$, ta có

$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp B'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AB'M) \Rightarrow BC \perp AH.$$

Mà $AH \perp B'M$ nên $AH \perp (BCC'B')$.

Do đó HB là hình chiếu của AB lên mặt phẳng $(BCC'B')$.

$$\Rightarrow (AB, (BCC'B')) = (AB, HB) = \widehat{ABH}.$$

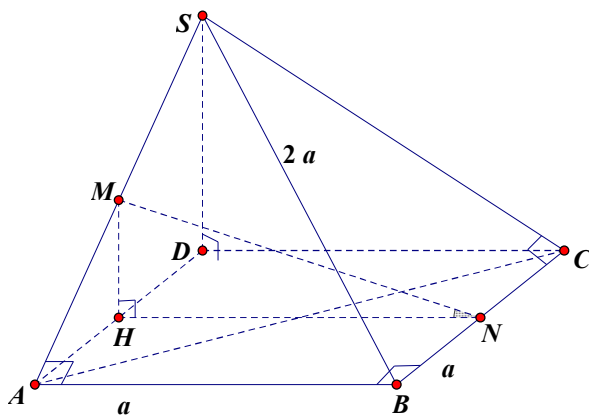
Xét tam giác ABH vuông tại H có $\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB}$.

$$B'G = BG \cdot \tan 60^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = a.$$

$$B'M = \sqrt{B'G^2 + GM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

$$\text{Ta có } \triangle AHM \sim \triangle B'GM \Rightarrow AH = \frac{AM \cdot B'G}{B'M} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{39}}{6}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Vậy } \sin \widehat{ABH} = \frac{\frac{3a}{\sqrt{13}}}{a} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

**Câu 99.**

Gọi D là hình chiếu của S lên (ABC) , ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp CD \text{ và } \begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp AD.$$

Mà ABC là tam giác vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.

Gọi H là trung điểm của AD , ta có $MH \parallel SD$ mà $\Rightarrow MH \perp (ABCD)$.

Do đó HN là hình chiếu của MN lên (ABC) .

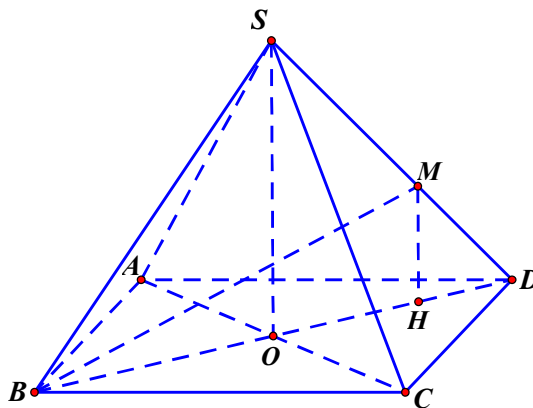
$$\Rightarrow \alpha = (MN, (ABC)) = (MN, NH) = \widehat{MNH}.$$

$$SC = \sqrt{SB^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$SD = \sqrt{SC^2 - DC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\tan \alpha = \frac{MH}{NH} = \frac{\frac{1}{2}SD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

**Câu 100.**

$$\text{Ta có } BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SOD \text{ vuông tại } O \text{ có: } SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Kẻ } MH \perp BD \text{ tại } H \text{ nên } (BM; (ABCD)) = \widehat{MBH}$$

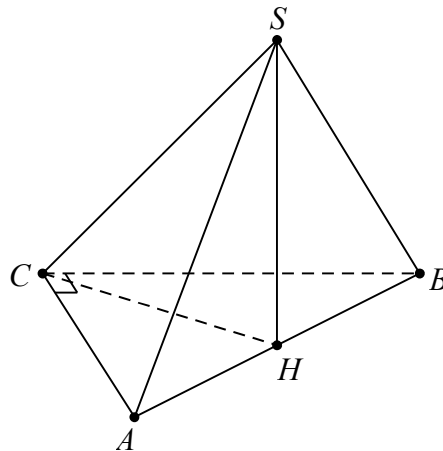
Do $MH \perp BD \Rightarrow MH \parallel SO$. Ta có $\frac{MH}{SO} = \frac{MD}{SD} = \frac{HD}{OD} = \frac{1}{3}$.

$$\Rightarrow MH = \frac{SO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \text{ và } HD = \frac{1}{3}OD = \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow BH = BD - HD = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}.$$

Xét tam giác BHM vuông tại H có:

$$\tan(BM; (ABCD)) = \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} \Rightarrow \tan(BM; (ABCD)) = \frac{1}{5}.$$

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN KHÁC

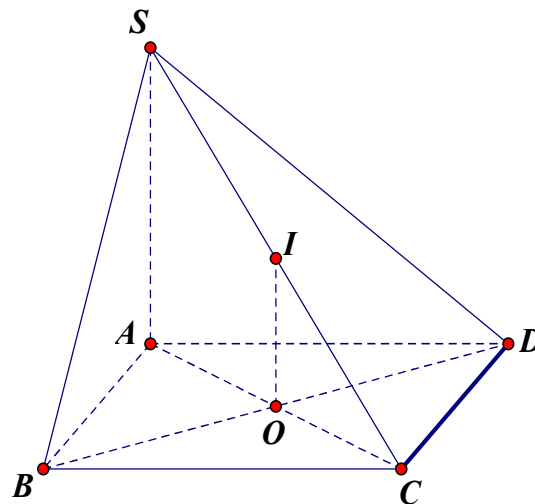


Câu 101.

Do $SA = SB = SC$ nên hình chiếu vuông góc của điểm S trên (ABC) trùng với tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Mặt khác tam giác ABC vuông tại C nên H là trung điểm của AB .

Câu 102. Chọn A



Xét khẳng định 1, Ta có: OI là đường trung bình trong tam giác SAC nên $OI \parallel SA$, mà $SA \perp (ABCD)$ suy ra $OI \perp (ABCD)$. Khẳng định 1 đúng.

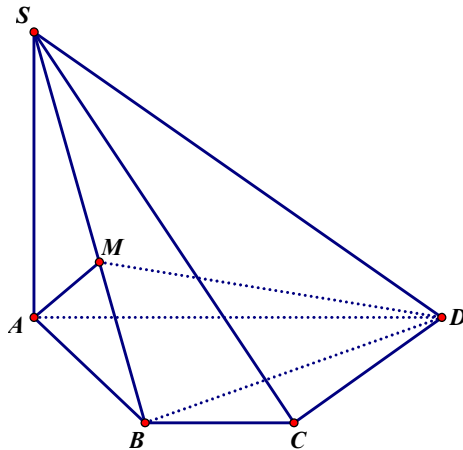
Xét khẳng định 2, Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp SC$. Khẳng định 2 đúng.

Xét khẳng định 3, Ta có: $\begin{cases} BD \cap (SAC) = O \\ BD \perp (SAC) \end{cases}$, O là trung điểm của BD . Khẳng định 3 đúng.

Xét khẳng định 4, Ta có:
$$\begin{cases} SB^2 = SA^2 + AB^2 \\ SC^2 = SA^2 + AC^2 \\ SD^2 = SA^2 + AD^2 \\ AB \neq AC \end{cases} \Rightarrow SB = SD \neq SC. \text{ Khẳng định 4 sai.}$$

Vậy trong các khẳng định trên số khẳng định sai là 1.

Câu 103. Chọn A



Áp dụng tính chất nửa lục giác đều, ta có $BD \perp AB$.

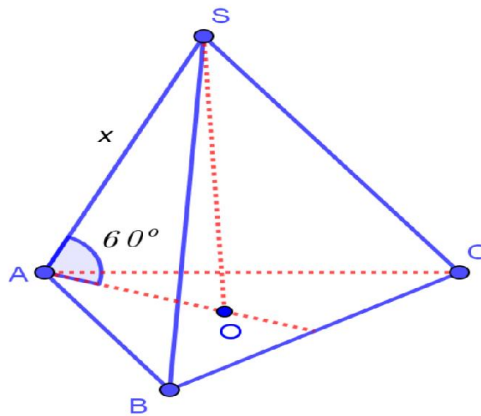
Mặt khác, $BD \perp SA$. Suy ra $BD \perp (SAB)$, ta được $BD \perp AM$.

Kết hợp $AM \perp MD$, ta được $AM \perp (SBD)$. Suy ra $AM \perp SB$.

Khi đó $\frac{SM}{SB} = \frac{SM \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4}$.

O trên mặt phẳng (ABC) .

$AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC .



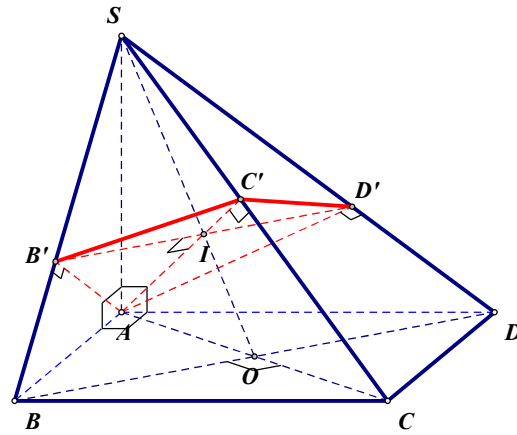
Câu 104.

Đặt $SA = x$.

Gọi O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (BCD) là $AO \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy là góc $\angle SAO = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông SAO : $\cos 60^\circ = \frac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \frac{AO}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.



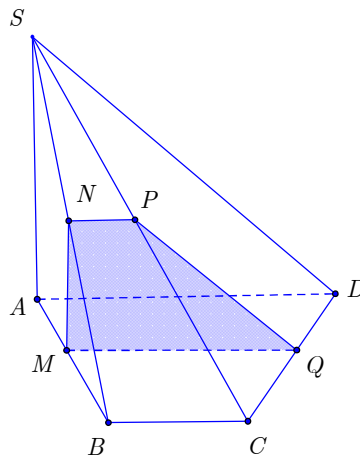
Câu 105.

Để thấy $\widehat{SBA} = 45^\circ$. Ta có $B'D' \perp SC$ và $BD \perp SC$ và SC không vuông góc với mặt phẳng (SBD) , suy ra $BD \parallel B'D'$. Nên từ $I = SO \cap AC'$ nên từ I kẻ $B'D' \parallel BD$ cắt SB , SD lần lượt tại B' , D' .

Từ trên suy ra $B'D' \perp AC'$ và $\begin{cases} AB' \perp SC \\ AB' \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp SB$.

Suy ra $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} AC' \cdot B'D'$. Mà $AC' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và $\frac{B'D'}{BD} = \frac{SB'}{SB} = \frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'D' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2} AC' \cdot B'D' = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2$.



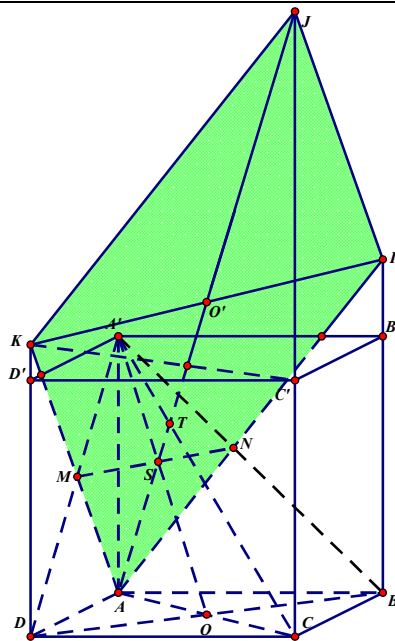
Câu 106.

Do $(P) \parallel SA$ và $M \in (SAB) \cap (P)$ nên $(P) \cap (SAB) = MN$ (với $N \in SB$; $MN \parallel SA$).

Do $(P) \parallel AD$ và $M \in (ABCD) \cap (P)$ nên $(P) \cap (ABCD) = MQ$ (với $Q \in BC$; $MQ \parallel AD$).

Do $(P) \parallel AD$ và $N \in (SBC) \cap (P)$ nên $(P) \cap (SBC) = NP$ (với $P \in SC$; $NP \parallel AD \parallel BC$).

Vậy thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$.

**Câu 107.**

Dựng $AM \perp A'D$ ta có $AM \perp (A'DC) \Rightarrow AM \perp A'C$,

Tương tự, dựng $AN \perp A'B$ ta có $AN \perp (A'BC) \Rightarrow AN \perp A'C$.

Vậy mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là mặt phẳng (AMN) .

Kéo dài $AM \cap DD' = \{K\}$, $AN \cap BB' = \{I\}$, và $AS \cap CC' = \{J\}$ với $\{S\} = MN \cap A'C$.

Thiết diện $AIJK$ là thiết diện cần tìm.

Dễ thấy $ABCD$ là hình chiếu vuông góc của $AIJK$ lên mặt phẳng $(ABCD)$.

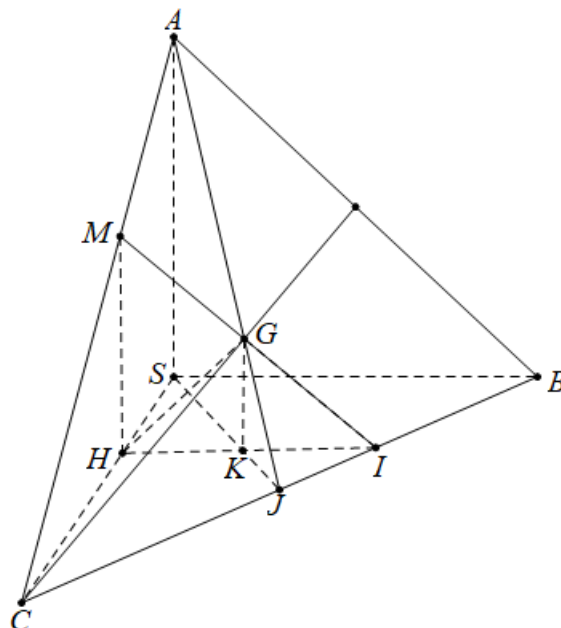
Ta có $S_{ABCD} = S_{AIJK} \cdot \cos((ABCD), (AIJK))$.

Dễ thấy góc giữa hai mặt $(AIJK)$ và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường $A'A$ & $A'C$ và là góc $\widehat{AA'C}$.

Xét tam giác vuông $A'AC$ ($\widehat{A} = 1v$) có $\cos \widehat{AA'C} = \frac{A'A}{A'C} = \frac{3a}{a\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$.

$$\text{Vậy } S_{AIJK} = \frac{S_{ABCD}}{\cos((ABCD), (AIJK))} \Rightarrow S_{AIJK} = \frac{a^2 \sqrt{11}}{3}.$$

Câu 108. Chọn A



Xét $\triangle SBC$ vuông cân tại S , $BC = 2a$ ta có:

$$SB^2 + SC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2SB^2 = 4a^2 \Leftrightarrow SB^2 = 2a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{2} = SA = SC.$$

Gọi J là trung điểm của BC , trong (SJA) kẻ $GK \parallel SA$ cắt SJ tại K .

Trong (SBC) kẻ đường thẳng qua K song song với SB cắt SC và CB lần lượt tại H và I .

Trong (SAC) kẻ $HM \parallel SA$ cắt SC tại M .

Do các mặt bên của hình chóp $S.ABC$ là các tam giác vuông tại S nên ta có:

$$\begin{cases} SA \perp SC \\ SA \perp SB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \text{ mà } GK \parallel SA \Rightarrow GK \perp (SBC) \Rightarrow GK \perp SC \quad (1).$$

$$\text{Do } \begin{cases} SB \perp SC \\ IH \parallel SB \end{cases} \Rightarrow IH \perp SC \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp (HMI)$. Vậy thiết diện là $\triangle HMI$.

$$\text{Ta có: } KG \parallel SA; KJ \parallel SB \text{ và do } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên } \frac{JG}{JA} = \frac{JK}{JS} = \frac{JI}{JB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{2}{3}.$$

Mặt khác: $HI \parallel SB; HM \parallel SA$ nên ta có:

$$\frac{2}{3} = \frac{CI}{CB} = \frac{HI}{SB} \Rightarrow HI = \frac{2}{3}SB = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

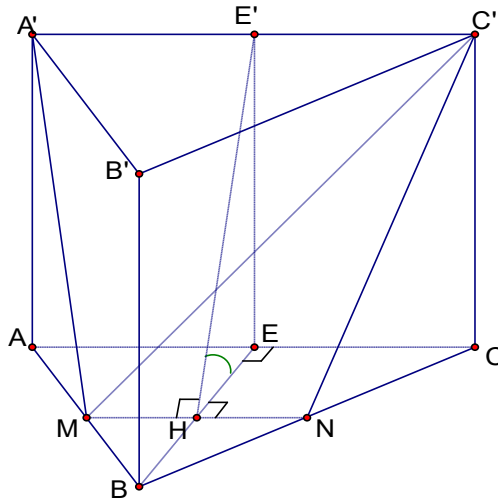
$$\frac{2}{3} = \frac{CI}{CB} = \frac{CH}{CS} = \frac{HM}{SA} \Rightarrow HM = \frac{2}{3}SA = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Do $SB \perp (SAC); HI \parallel SB \Rightarrow HI \perp (SAC) \Rightarrow HI \perp MH \Rightarrow \triangle HMI$ vuông tại H .

$$\text{Diện tích } \triangle HIM \text{ là: } S_{\triangle HIM} = \frac{1}{2}HM.HI = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}a}{3} \right)^2 = \frac{4a^2}{9}.$$

Câu 109. Chọn B

Hình vẽ minh họa



Gọi N là trung điểm BC . Kê $MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel A'C'$

Mặt phẳng $(A'C'NM)$ cắt lăng trụ theo thiết diện là hình thang $A'C'NM$.

Gọi E, E' lần lượt là trung điểm AC và $A'C'$. Gọi H là giao điểm của MN và BE

Ta dễ dàng chứng minh $MN \perp (E'HE)$.

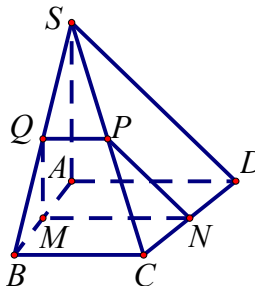
$$\text{Ta có } \begin{cases} (A'C'NM) \cap (ABC) = MN \\ EH \perp MN \\ E'H \perp MN \end{cases} \Rightarrow ((A'C'NM), (ACNM)) = (\widehat{HE, HE'}) = \widehat{E'HE} = \varphi$$

$$\text{Ta có } BE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{3}}{4}. E'H = \sqrt{E'E^2 + EH^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{35}}{4}$$

$$\text{Từ đó } \cos \varphi = \frac{HE}{HE'} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{a\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$$

$$\text{Diện tích hình thang cân } S_{ACNM} = \frac{(MN + AC) \cdot HE}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2} + a\right) \frac{a\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{Ta có } S_{ACNM} = S_{A'C'NM} \cdot \cos \varphi, \Rightarrow S_{A'C'NM} = \frac{S_{ACNM}}{\cos \varphi} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}} = \frac{3a^2\sqrt{35}}{16}.$$



Câu 110.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD). \text{ Mà } (P) \text{ qua } M \text{ và vuông góc với } AB \text{ nên } (P) \parallel (SAD)$$

$$\Rightarrow (P) \parallel SA, (P) \parallel AD \text{ và } (P) \parallel SD.$$

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $MQ \parallel SA$ với $Q \in SB$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $MN \parallel AD$ với $N \in CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $NP \parallel SD$ với $P \in SC$.

Vì M là trung điểm của AB nên N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, SC, SB .

Do đó thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại Q và M .

$$\text{Ta có } MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(8 + 6) = 7 \quad MQ = \frac{1}{2}SA = 3 \quad PQ = \frac{1}{2}BC = 3$$

$$S_{MNPQ} = \frac{(MN + PQ) \cdot MQ}{2} = \frac{(7 + 3) \cdot 3}{2} = 15$$

Vậy diện tích của thiết diện là :

Câu 111. Gọi H là trực tâm tam giác ABC , vì tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta

$$\text{có } OH \perp (ABC) \text{ và } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

$$\text{Ta có } \alpha = (\widehat{OA; (ABC)}) = \widehat{OAH}, \beta = (\widehat{OB; (ABC)}) = \widehat{OBH}, \gamma = (\widehat{OC; (ABC)}) = \widehat{OCH}.$$

$$\text{Nên } \sin \alpha = \frac{OH}{OA}, \sin \beta = \frac{OH}{OB}, \sin \gamma = \frac{OH}{OC}.$$

$$\text{Đặt } a = OA, b = OB, c = OC, h = OH \text{ thì } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ và}$$

$$\begin{aligned} M &= (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma) = \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \beta}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) \\ &= \left(2 + \frac{a^2}{h^2}\right) \cdot \left(2 + \frac{b^2}{h^2}\right) \cdot \left(2 + \frac{c^2}{h^2}\right) = 8 + 4(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{1}{h^2} + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \cdot \frac{1}{h^4} + a^2b^2c^2 \cdot \frac{1}{h^6}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{1}{h^2} = (a^2 + b^2 + c^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2} \cdot 3\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} = 9.$$

$$\begin{aligned} (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \cdot \frac{1}{h^4} &= (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2 \\ &\geq 3\sqrt{a^2b^2 \cdot b^2c^2 \cdot c^2a^2} \cdot \left(3\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}\right)}\right)^2 = 3\sqrt{a^4b^4c^4} \cdot 9\sqrt{\frac{1}{a^4b^4c^4}} = 27. \end{aligned}$$

$$a^2b^2c^2 \cdot \frac{1}{h^6} = a^2b^2c^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^3 \geq a^2b^2c^2 \cdot \left(3\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}\right)}\right)^3 = 27.$$

Do đó:

$$M = 8 + 4(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{1}{h^2} + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \cdot \frac{1}{h^4} + a^2b^2c^2 \cdot \frac{1}{h^6}$$

$$\geq 8 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 27 + 27 = 125.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay $OA = OB = OC$.

Vậy min $M = 125$.

