

BÀI 4. CỰC TRỊ SỐ PHỨC

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Các bất đẳng thức thường dùng

a. Cho các số phức z_1, z_2 ta có:

$$+) |z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0, z_2 = kz_1 \end{cases}$.

$$+) |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0, z_2 = kz_1 \end{cases}$.

b. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Cho các số thực a, b, x, y ta có: $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

2. Một số kết quả đã biết

a. Cho hai điểm A, B cố định. Với điểm M bất kỳ luôn có bất đẳng thức tam giác:

$+) MA + MB \geq AB$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa hai điểm A, B .

$+) |MA - MB| \leq AB$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa hai điểm A, B .

b. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng d và M là điểm di động trên d . Ta có:

$+) |MA - MB| \leq AB$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A, M, B thẳng hàng.

$+) G$ ọi A' là điểm đối xứng với A qua d , khi đó ta có

$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A', M, B thẳng hàng.

c. Cho hai điểm A, B nằm khác phía đối với đường thẳng d và M là điểm di động trên d . Ta có:

$+) MA + MB \geq AB$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa hai điểm A, B .

$+) G$ ọi A' là điểm đối xứng với A qua d , khi đó ta có

$|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A', M, B thẳng hàng.

d. Cho đoạn thẳng PQ và điểm A không thuộc PQ , M là điểm di động trên đoạn thẳng PQ , khi đó

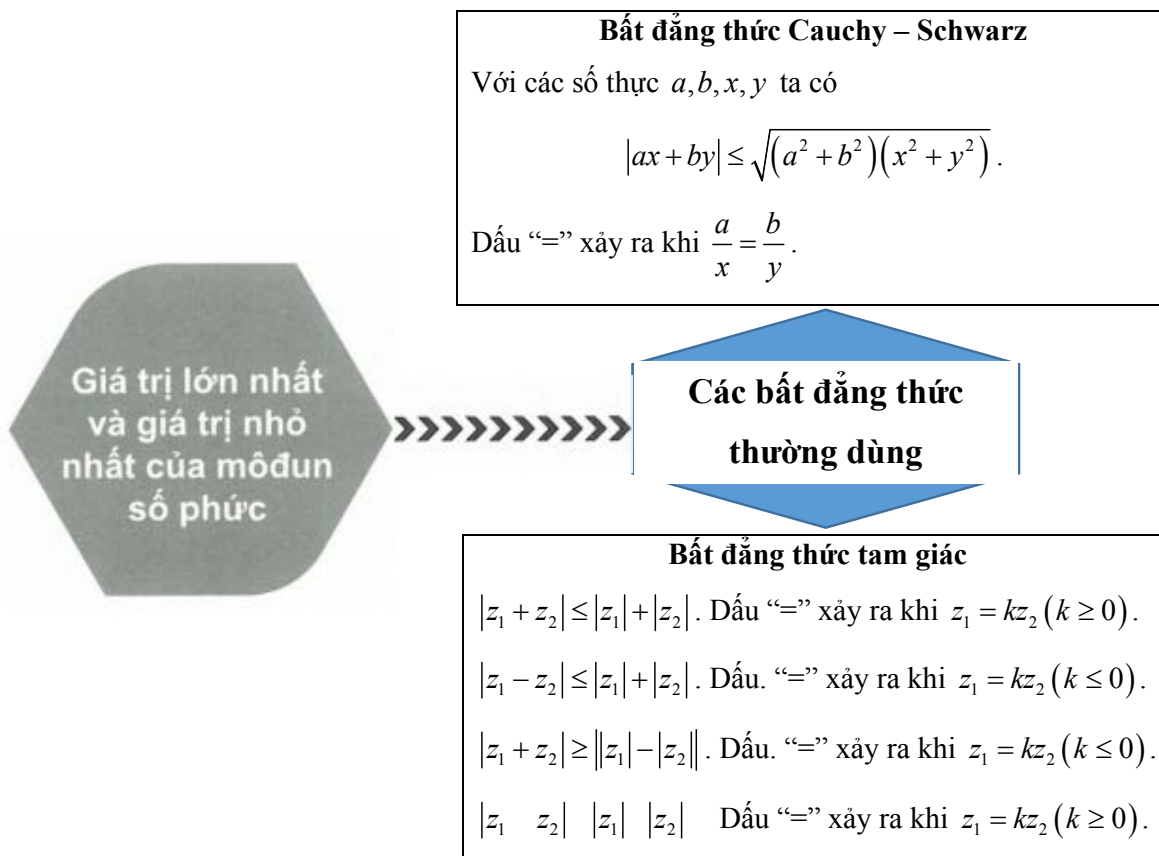
$\max AM = \max \{AP, AQ\}$. Để tìm giá trị nhỏ nhất của AM ta xét các trường hợp sau:

$+) N$ ếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = AH$.

$+) N$ ếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ không nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = \min \{AP, AQ\}$.

- e. Cho đường thẳng Δ và điểm A không nằm trên Δ . Điểm M trên Δ có khoảng cách đến A nhỏ nhất chính là hình chiếu vuông góc của A trên Δ .
- f. Cho x, y là các tọa độ của các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2...A_n$. Khi đó giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $F = ax + by$ (a, b là hai số thực đã cho không đồng thời bằng 0) đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp hình học

1. Phương pháp giải

Vi dụ: Cho số phức z thỏa mãn

$2(z - \bar{z}) = i(z + \bar{z})^2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 3i|$ bằng

- A. 3. B. $\sqrt{3}$.
 C. $2\sqrt{3}$. D. 2.

Hướng dẫn giải

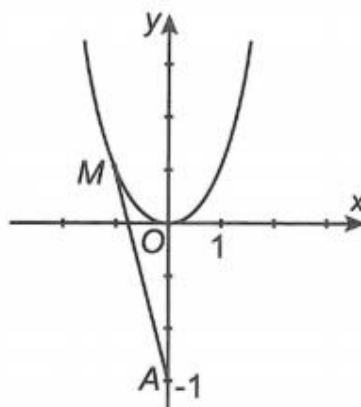
Bước 1: Chuyển đổi ngôn ngữ bài toán số phức Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Khi đó

sang ngôn ngữ hình học.

$$2(z - \bar{z}) = i(z + \bar{z})^2 \Leftrightarrow 2(2yi) = 4x^2i \Leftrightarrow y = x^2.$$

Gọi $M(x; y)$; $A(0; -3)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z ; $-3i$ thì $|z + 3i| = MA$.

Bước 2: Sử dụng một số kết quả đã biết để giải bài toán hình học.



Parabol $y = x^2$ có đỉnh tại điểm $O(0;0)$, trục đối xứng là đường thẳng $x = 0$. Hơn nữa, điểm A thuộc trục đối xứng của parabol, nên ta có:

$MA \geq OA = 3$. Suy ra, $\min MA = 3$ khi $M \equiv O$.

Bước 3: Kết luận cho bài toán số phức.

Vậy $\min |z + 3i| = 3$, khi $z = 0$. **Chọn A.**

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = 1$. Môđun lớn nhất của số phức z bằng

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$, $I(3; 4)$ là các điểm biểu diễn lần lượt cho các số phức z ; $3 + 4i$. Từ giả thiết $|z - 3 - 4i| = 1 \Rightarrow MI = 1$.

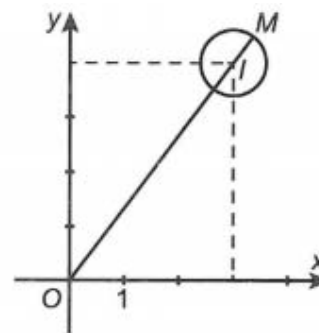
Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán kính $r = 1$.

Mặt khác $|z| = OM$. Mà OM đạt giá trị lớn nhất bằng $OI + r$, khi

M là giao điểm của đường thẳng OM với đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán

Nhận xét:

$$OI - r \leq OM = |z| \leq OI + r$$



kính $r = 1$. Hay $M\left(\frac{18}{5}; \frac{24}{5}\right)$.

Do đó, $\max|z| = OI + r = 5 + 1 = 6$, khi $z = \frac{18}{5} + \frac{24}{5}i$.

Bài tập 2: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, số phức z có môđun nhỏ nhất là

- A. $z = 2 - 2i$. B. $z = 1 + i$.
C. $z = 2 + 2i$. D. $z = 1 - i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó $|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$ (d).

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng d .

Do đó $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên d .

Suy ra $M(2; 2)$ hay $z = 2 + 2i$.

Bài tập 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3| + |z - 3| = 10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

- A. 3. B. 4.
C. 5. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1:

Gọi $F_1(-3; 0), F_2(3; 0)$, có trung điểm là $O(0; 0)$. Điểm M biểu diễn số phức z .

Theo công thức trung tuyến thì $|z|^2 = OM^2 = \frac{MF_1^2 + MF_2^2}{2} - \frac{F_1F_2^2}{4}$.

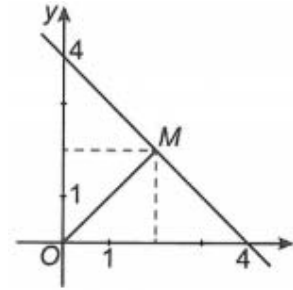
Ta có $MF_1^2 + MF_2^2 \geq \frac{(MF_1^2 + MF_2^2)^2}{2} = 50$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} MF_1 = MF_2 \\ MF_1 + MF_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-4; 0) \\ M(4; 0) \end{cases} \Rightarrow \min|z| = \sqrt{\frac{50}{2} - \frac{36}{4}} = 4,$$

Khi $z = 4i$ hoặc $z = -4i$.

Nhận xét: Trong tất cả các đoạn thẳng kẻ từ điểm O đến đường thẳng d , đoạn vuông góc OM ngắn nhất.



Với mọi số thực a, b ta có bất

đẳng thức: $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$

Cách 2:.

Gọi $F_1(-3;0), F_2(3;0), M(x,y); (x,y \in \mathbb{R})$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $-3; 3; z$.

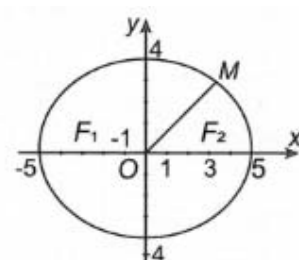
Ta có $F_1F_2 = 2c = 6 \Rightarrow c = 3$. Theo giả thiết ta có $MF_1 + MF_2 = 10$, tập hợp điểm M là đường elip có trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$; trục bé

$$2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{25 - 9} = 8.$$

Mặt khác $OM = |z|$ nhỏ nhất bằng 4 khi $z = 4i$ hoặc $z = -4i$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng 4.

Với mọi điểm M nằm trên elip, đoạn OM ngắn nhất là đoạn nối O với giao điểm của trục bé với elip.



Bài tập 4: Xét số phức z thỏa mãn $4|z+i|+3|z-i|=10$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. $\frac{60}{49}$.

B. $\frac{58}{49}$.

C. $\frac{18}{7}$.

D. $\frac{16}{7}$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Gọi $A(0;-1), B(0;1)$, đoạn thẳng AB có trung điểm $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z .

Theo công thức trung tuyến $|z|^2 = OM^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$.

Theo giả thiết $4MA + 3MB = 10$. Đặt $MA = a \Rightarrow MB = \frac{10-4a}{3}$.

Khi đó

$$|MA - MB| = \frac{|10-7a|}{3} \leq AB = 2 \Rightarrow -6 \leq 10-7a \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{7} \leq a \leq \frac{16}{7}.$$

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 = a^2 + \left(\frac{10-4a}{3}\right)^2 = \frac{(5a-8)^2 + 36}{9}.$$

$$\text{Do } -\frac{36}{7} \leq 5a-8 \leq \frac{24}{7} \Rightarrow 0 \leq (5a-8)^2 \leq \frac{576}{49} \text{ nên}$$

$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 \geq 4 \\ MA^2 + MB^2 \leq \frac{260}{49} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| \geq 1 \\ |z|^2 \leq \frac{81}{49} \Rightarrow |z| \leq \frac{9}{7} \end{cases}.$$

Đẳng thức $|z| = 1$ khi $z = \pm \frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$. Đẳng thức $|z| = \frac{9}{7}$ khi $z = \frac{9}{7}i$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\frac{16}{7}$.

Bài tập 5: Cho z là số phức thay đổi thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 4\sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng tọa độ gọi M, N là điểm biểu diễn số phức z và $\bar{z}$.

Giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN là

- A. 1. B. $\sqrt{2}$.
C. $4\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Gọi $F_1(-2; 0), F_2(2; 0), M(x; y), N(x; -y)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $-2; 2; z; \bar{z}$.

Do M, N là điểm biểu diễn số phức z và $\bar{z}$ nên suy ra M, N đối xứng nhau qua Ox .

Khi đó $S_{\triangle OMN} = |xy|$.

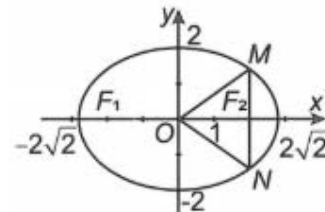
Ta có $F_1F_2 = 2c = 4 \Rightarrow c = 2$. Theo giả thiết ta có $MF_1 + MF_2 = 4\sqrt{2}$, tập hợp điểm M thỏa điều kiện trên là elip có trục lớn

$$2a = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}; \text{ trục bé } 2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{8 - 4} = 4 \Rightarrow b = 2.$$

Nên elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

$$\text{Do đó } 1 = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{8} \cdot \frac{y^2}{4}} = \frac{|xy|}{2\sqrt{2}} \Rightarrow S_{\triangle OMN} = |xy| \leq 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}.$$



Bài tập 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z+i| = |\bar{z}+2+i|$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |(i-1)z+4-2i|$ là

- A. 1. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
C. 3. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$); $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z+i| &= |\bar{z}+2+i| \Leftrightarrow |x+(y+1)i| = |x+2-(y-1)i| \\ \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 &= (x+2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \quad (\Delta). \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } P = |(i-1)z+4-2i| = |(i-1)| \left| z + \frac{4-2i}{(i-1)} \right| = \sqrt{2} |z-3-i|$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2} MA, \text{ với } A = (3; 1).$$

$$\Rightarrow P_{\min} = \sqrt{2} MA_{\min} = \sqrt{2} d(A, \Delta) = \sqrt{2} \frac{|3-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi M là hình chiếu vuông góc của A trên đường

$$\text{thẳng } \Delta \text{ hay } M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i.$$

Bài tập 7: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 2$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z_1| + |z_2|. \text{ Khi đó môđun của số phức } M + mi \text{ là}$$

- A. $\sqrt{76}$. B. 76.
C. $2\sqrt{10}$. D. $2\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải

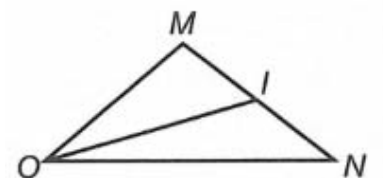
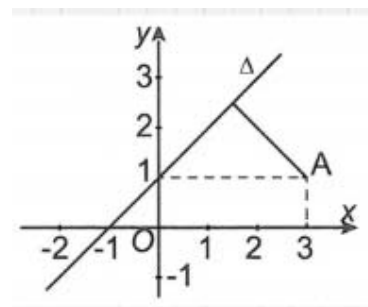
Chọn A

Ta gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 .

$$\text{Từ giả thiết } |z_1 + z_2| = 6 \Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 6 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OI}| = 3 \text{ với } I \text{ là trung}$$

điểm của đoạn thẳng AB .

$$|z_1 - z_2| = 2 \Rightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2 \Leftrightarrow AB = 2.$$



Dạng 2: Phương pháp đại số

1. Phương pháp giải

Các bất đẳng thức thường dùng:

1. Cho các số phức z_1, z_2 ta có:

a. $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0, z_2 = kz_1 \end{cases}$

b. $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ (2)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0, z_2 = kz_1 \end{cases}$

2. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Cho các số thực a, b, x, y ta có $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho số phức $z = a + (a - 3)i, (a \in \mathbb{R})$. Giá trị của a để khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức z đến gốc tọa độ là nhỏ nhất bằng

A. $a = \frac{3}{2}$.

B. $a = \frac{1}{2}$.

C. $a = 1$.

D. $a = 2$.

Nhận xét: Lời giải có sử dụng đánh giá

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$|z| = \sqrt{a^2 + (a - 3)^2} = \sqrt{2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{3}{2}$. Hay $z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$.

Bài tập 2: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z = 1 + 2i$.

B. $z = -1 - i$.

C. $z = 2 + 2i$.

D. $z = -1 + i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |(a - 2) + (b - 4)i| = |a + (b - 2)i| \Leftrightarrow -a - b + 4 = 0.$$

$$\Rightarrow z = (4 - b) + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{(4 - b)^2 + b^2} = \sqrt{2(b - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } \min |z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow z = 2 + 2i.$$

Bài tập 3: Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-2i} \right| = 1$, biết $\left| z + \frac{3}{2} - 5i \right|$ đạt giá

trị nhỏ nhất. Giá trị của $|z|$ bằng

A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Gọi $z = a + bi$ ($z \neq 2i$) ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\left| \frac{z-1}{z-2i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-2i| \Leftrightarrow 2a - 4b + 3 = 0 \Rightarrow 2a + 3 = 4b$$

$$\Rightarrow \left| z + \frac{3}{2} - 5i \right| = \sqrt{(2b)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{5(b-1)^2 + 20} \geq 2\sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra } \min \left| z + \frac{3}{2} - 5i \right| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2} + i$$

$$\text{Vậy } |z| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bài tập 4: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 - z_2 = 3 + 4i$ và

$|z_1 + z_2| = 5$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ là

A. 5. B. $5\sqrt{3}$.

C. $12\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

$$\text{Ta có } 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 5^2 + 3^2 + 4^2 = 50.$$

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$|z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Gọi $z_1 = x + yi, z_2 = a + bi; a, b, x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z_1 - z_2 = 3 + 4i \\ |z_1 + z_2| = 5 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 25 \\ |z_1| = |z_2| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{7}{2} \end{cases}. \text{ Hay } z_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i; z_2 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i.$$

Thay z_1, z_2 vào giả thiết thỏa mãn.

Vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng $5\sqrt{2}$.

Bài tập 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$ bằng

- A. $2\sqrt{10}$. B. $6\sqrt{5}$.
C. $3\sqrt{15}$. D. $2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } P \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)(|1 + z|^2 + |1 - z|^2)} = \sqrt{20(|1|^2 + |z|^2)} = 2\sqrt{10}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |1 + z| = \frac{|1 - z|}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 1 + \frac{5x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = \pm \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i.$$

$$\text{Vậy } \max P = 2\sqrt{10}.$$

Bài tập 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z + 3 - i|$ bằng

- A. 6. B. 7.
C. 8. D. 9.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $|z+3-i| = |(z-1+2i)+(4-3i)| \leq |z-1+2i| + |4-3i| = 7$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} z-1+2i = k(4-3i), k > 0 \\ |z-1+2i| = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{13}{5} - \frac{16}{5}i$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z+3-i|$ bằng 7.

Bài tập 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i| = 4$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của môđun số phức z . Giá trị của $M.m$ bằng

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $|z| = |(z-3+4i)+(3-4i)| \leq |z-3+4i| + |3-4i| = 4+5=9=M$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} z-3+4i = k(3-4i), (k > 0) \\ |z-3+4i| = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{5} \\ z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i \end{cases}$.

Mặt khác

$|z| = |(z-3+4i)+(3-4i)| \geq ||z-3+4i| - |3-4i|| = |4-5| = 1 = m$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} z-3+4i = k(3-4i), (k < 0) \\ |z-3+4i| = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{4}{5} \\ z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \end{cases}$

Bài tập 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+4| = |z(z+2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $|z^2+4| = |z(z+2i)| \Leftrightarrow |(z+2i)(z-2i)| = |z(z+2i)|$

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \text{ và}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Chú ý: Với mọi số phức z_1, z_2 :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

$$\Leftrightarrow |z+2i| \cdot |z-2i| = |z| \cdot |z+2i|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z+2i|=0 \\ |z|=|z-2i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2i \\ |z|=|z-2i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2i \\ z=a+i, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} |z+i| = |-2i+i| = 1 \\ |z+i| = |(a+i)+i| = \sqrt{a^2+4} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \min |z+1| = 1.$$

Bài tập 9: Tìm số phức z thỏa mãn $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } z = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i. & \text{B. } z = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i. \\ \text{C. } z = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i. & \text{D. } z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i. \end{array}$$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $z = a+bi; a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } (z-1)(\bar{z}+2i) = [(a-1)a-b(2-b)] + (2a+b-2)i$$

$$\text{Do đó } (z-1)(\bar{z}+2i) \text{ là số thực} \Leftrightarrow 2a+b-2=0 \Leftrightarrow b=2-2a$$

$$\text{Khi đó } |z| = \sqrt{a^2 + (2-2a)^2} = \sqrt{5\left(a-\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\min |z| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}. \text{ Vậy } z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Bài tập 10: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+i| + |z-2-i|$.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \max T = 8\sqrt{2}. & \text{B. } \max T = 4. \\ \text{C. } \max T = 4\sqrt{2}. & \text{D. } \max T = 8. \end{array}$$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

$$\begin{aligned}|z-1| = \sqrt{2} &\Leftrightarrow |x-1+yi| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \\&\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x+1 \quad (*).\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}T &= |z+i| + |z-2-i| = |x+(y+1)i| + |x-2+(y-1)i| \\&= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y+1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}\end{aligned}$$

Kết hợp với (*) ta được

$$T = \sqrt{2x+2y+2} + \sqrt{6-2x-2y} = \sqrt{2(x+y)+2} + \sqrt{6-2(x+y)}$$

Đặt $T = x + y$, khi đó $T = f(t) = \sqrt{2t+2} + \sqrt{6-2t}$ với $t \in [-1; 3]$.

Cách 1: Sử dụng phương pháp hàm số

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+2}} - \frac{1}{\sqrt{6-2t}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Mà $f(1) = 4, f(-1) = 2\sqrt{2}, f(3) = 2\sqrt{2}$. Vậy $\max f(t) = f(1) = 4$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$T = \sqrt{2t+2} + \sqrt{6-2t} \leq \sqrt{(1+1) \cdot 8} = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = 1$.

Bài tập 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là

giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+1| + |z^2+z+1|$. Khi đó giá trị

của $M+m$ bằng

A. 5.

B. 6.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $t = |z+1|$. Khi đó

$$t^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = |z|^2 + 1 + z + \bar{z} = 2 + 2a \Rightarrow a = \frac{t^2-2}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
|z^2 + z + 1| &= |a^2 - b^2 + 2abi + a + bi + 1| = |a^2 + (1 - b^2) + a + b(2a + 1)i| \\
&= \sqrt{(2a^2 + a)^2 + b^2(2a + 1)^2} = \sqrt{a^2(2a + 1)^2 + (1 - a^2)(2a + 1)^2} \\
&= |2a + 1| = |t^2 - 1| \\
\Rightarrow |z + 1| + |z^2 + z + 1| &= t + |t^2 - 1| \text{ (với } 0 \leq t \leq 2, \text{ do } a^2 \leq 1).
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2 - 1|$ với $t \in [0; 2]$.

Trường hợp 1: $t \in [0; 1] \Rightarrow f(t) = t + 1 - t^2 = -t^2 + t + 1 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$

và có $f(0) = f(1) = 1$ nên $\begin{cases} \max_{[0;1]} f(t) = \frac{5}{4} \\ \min_{[0;1]} f(t) = 1 \end{cases}$.

Trường hợp 2:

$$t \in [1; 2] \Rightarrow f(t) = t + t^2 - 1 = t^2 + t - 1, f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1; 2]$$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên $[1; 2] \Rightarrow \begin{cases} \max_{[1;2]} f(t) = f(2) = 5 \\ \min_{[1;2]} f(t) = f(1) = 1 \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} M = \max_{[0;2]} f(t) = 5 \\ m = \min_{[0;2]} f(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 6$.
