



CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

Dạng 1: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = a$, $f(u(x)) = a$.

Dạng 2: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = g(m)$, $f(u(x)) = g(m)$.

Dạng 3: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = f(m)$, $f(u(x)) = f(m)$.

Dạng 4: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|) = a$; $|f(x)| = a$; $f(|u(x)|) = a$; $|f(u(x))| = a \dots$.

Dạng 5: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|) = g(m)$; $|f(x)| = g(m)$; $f(|u(x)|) = g(m)$; $|f(u(x))| = g(m) \dots$.

Dạng 6: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = g(x)$; $f(u(x)) = g(v(x))$.

Dạng 7: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình, bất phương trình chứa $f'(x)$; $f''(x) \dots$.

Dạng 8: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = 0$; $f(u(x)) = 0$; $f(x) = g(x)$; $f(u(x)) = g(v(x)) \dots$.

Dạng 9: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = m$; $f(u(x)) = m$; $f(x) = g(m)$; $f(u(x)) = g(m) \dots$.

Dạng 10: Biết số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có chứa $f'(x)$; $f''(x) \dots$.

Dạng 11: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x) \geq g(x)$; $f(u(x)) \geq g(x)$ ($>$, $<$, $\leq$)... có thể có tham số.

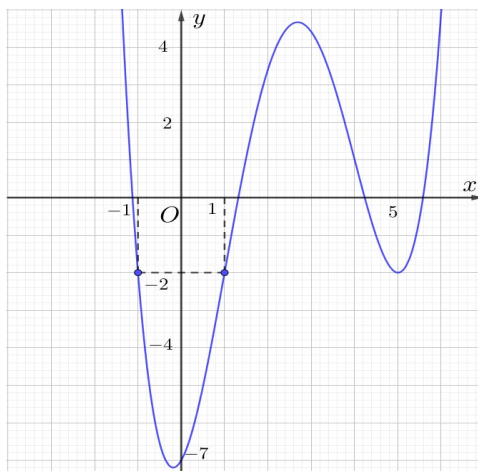
Dạng 12: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x) \geq g(x)$; $f(u(x)) \geq g(x)$ ($>$, $<$, $\leq$)... có thể có tham số.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN

XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ (PHẦN 1. Từ dạng 1 đến dạng 4)

Dạng 1: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = a$, $f(u(x)) = a$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình $f(\sin x) = -4$ là

A. 0.

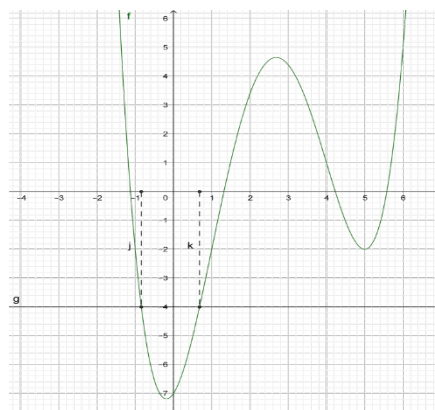
B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Xét phương trình: } f(\sin x) = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \alpha \in (-1; 0) \\ \sin x = \beta \in (0; 1) \end{cases}$$

Vì $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x \in (0; 1]$. Suy ra với $x \in (0; \pi)$ thì $f(\sin x) = -4 \Leftrightarrow \sin x = \beta \in (0; 1)$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x \in (0; \pi)$ (thỏa mãn).

Vậy chọn **C.**

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-8	5	13	$-\infty$

Phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \cos x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ trở thành $f(t) = \frac{13}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có phương trình $f(t) = \frac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t \in (0; 1)$

Với một nghiệm $t \in (0; 1)$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x = t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-2	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(3x-5) - 7 = 0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

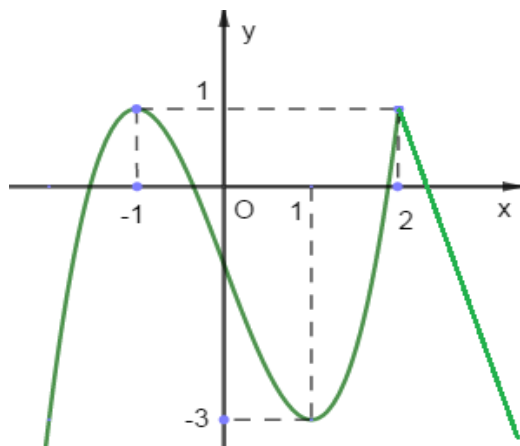
$2f(3x-5) - 7 = 0 \Leftrightarrow f(3x-5) = \frac{7}{2}$.

Đặt $t = 3x-5$, phương trình trở thành $f(t) = \frac{7}{2}$.

Với mỗi nghiệm t thì có một nghiệm $x = \frac{t+5}{3}$ nên số nghiệm t của phương trình $f(t) = \frac{7}{2}$ bằng số nghiệm của phương trình $2f(3x-5) - 7 = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(t) = \frac{7}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $2f(3x-5) - 7 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình $f(1 - \sqrt{x^3 + x}) = a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m + n$ bằng

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Để thấy điều kiện của phương trình đã cho là $x \geq 0$.

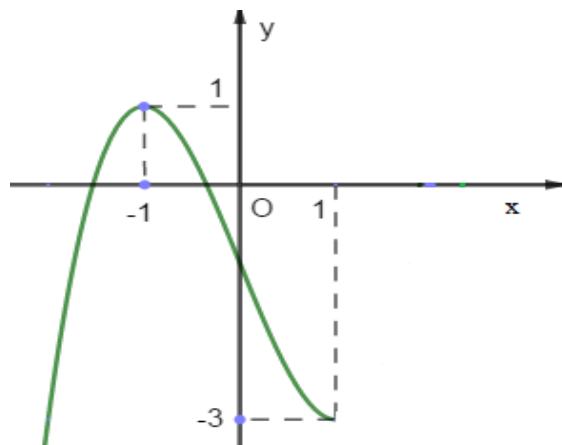
Đặt $t = 1 - \sqrt{x^3 + x}$ (1) $\Rightarrow t \in (-\infty; 1]$.

Để thấy phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất $\forall t \in (-\infty; 1]$.

Phương trình đã cho có dạng: $f(t) = a$ (2), $t \leq 1$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số nghiệm của (2).

Đồ thị hàm số $y = f(t)$, $t \leq 1$ có dạng:



Do đó:

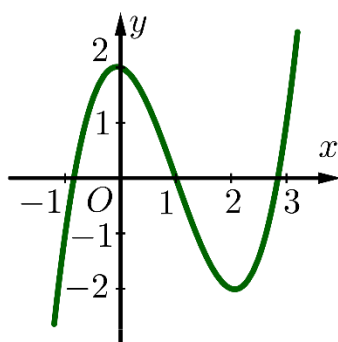
(2) vô nghiệm khi $a > 1$.

(2) có hai nghiệm khi $-3 \leq a < 1$.

(2) có nghiệm duy nhất khi $a = 1$ hoặc $a < -3$.

Vậy $m = 2, n = 1 \Rightarrow m + n = 3$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $m = 6$.

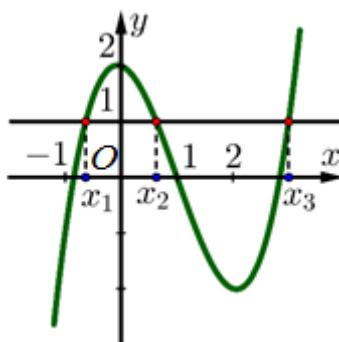
B. $m = 7$.

C. $m = 5$.

D. $m = 9$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có: } f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-1; 0) \\ x = x_2 \in (0; 1) \\ x = x_3 > 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1(1) \\ f(x) = x_2(2) \\ f(x) = x_3(3) \end{cases}.$$

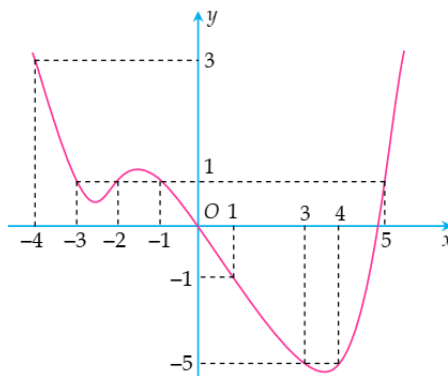
+) Xét (1): $f(x) = x_1 \in (-1; 0)$, ta có đường thẳng $y = x_1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Xét (2): $f(x) = x_2 \in (0; 1)$, ta có đường thẳng $y = x_2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Xét (3): $f(x) = x_3 > 2$, ta có đường thẳng $y = x_3$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm nên phương trình (3) có 1 nghiệm.

Do các nghiệm không trùng nhau nên tổng số nghiệm là: $m = 3 + 3 + 1 = 7$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $f(2 \sin x) = 1$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2 \sin x$, $t \in [-2; 2]$.

Xét phương trình $f(t) = 1$, dựa vào đồ thị ta thấy

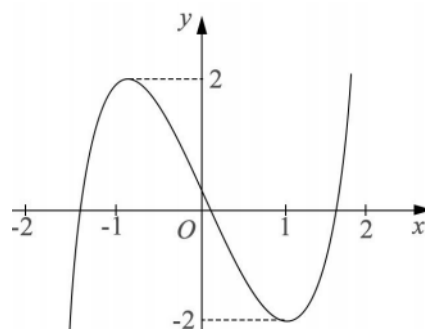
$$f(t) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 & (l) \\ t = -2 & (n) \\ t = -1 & (n) \\ t = 5 & (l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x = -2 \\ 2 \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$.

Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 6.

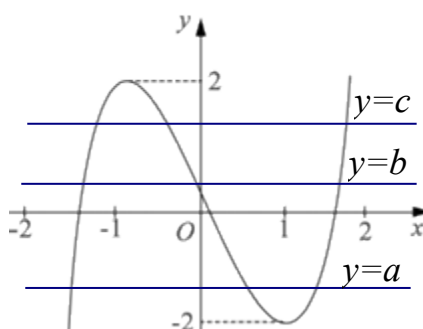
B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải.

Chọn D

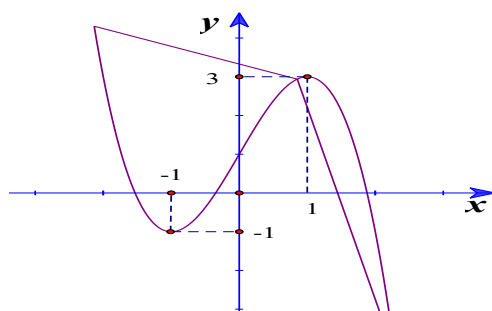


Phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là: $\begin{cases} x = a & (a \in (-2; -1)) \\ x = b & (b \in (0; 1)) \\ x = c & (c \in (1; 2)) \end{cases}$

Các phương trình $f(x) = a, f(x) = b, f(x) = c$ đều có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

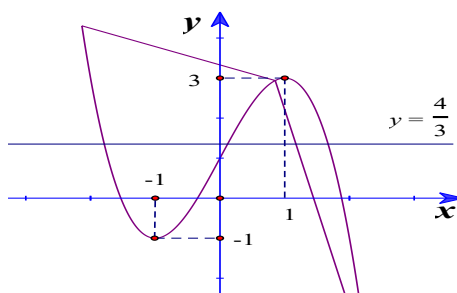
D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$ (1).

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{4}{3}$. Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của hai đồ thị hàm số.



Dựa vào đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$, $y = \frac{4}{3}$ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-3	1	-3	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

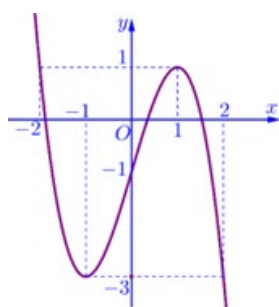
Lời giải

Phương trình $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên suy ra số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là 2.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Phương trình $f(2 - f(x)) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.



A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Theo đồ thị:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a & (-2 < a < -1) \\ x = b & (0 < b < 1) \\ x = c & (1 < c < 2) \end{cases} \Rightarrow f(2 - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - f(x) = a \\ 2 - f(x) = b \\ 2 - f(x) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 - a & (1) \\ f(x) = 2 - b & (2) \\ f(x) = 2 - c & (3) \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình (1); (2); (3) là giao điểm của đường thẳng $y = 2 - a$; $y = 2 - b$; $y = 2 - c$ với đồ thị hàm số $f(x)$.

- ☐ $a \in (-2; 1) \Rightarrow 2 - a \in (3; 4)$ suy ra phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.
- ☐ $b \in (0; 1) \Rightarrow 2 - b \in (1; 2)$ suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.
- ☐ $c \in (1; 2) \Rightarrow 2 - c \in (0; 1)$ suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Có tất cả 5 nghiệm phân biệt.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	-2	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $2f(x) + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

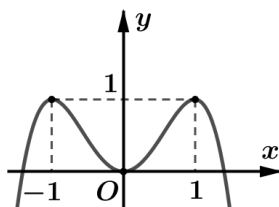
Ta có: $2f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-m}{2}$ (*).

Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $(d): y = \frac{-m}{2}$ cắt đồ thị hàm số

$y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < \frac{-m}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < m < 4$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. **Chọn B.**

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f[f(\cos 2x)] = 0$?

A. 1 điểm.

B. 3 điểm.

C. 4 điểm.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x \in [-1; 1]$ thì $y \in [0; 1]$.

Do đó nếu đặt $t = \cos 2x$ thì $t \in [-1; 1]$, khi đó $f(\cos 2x) \in [0; 1]$.

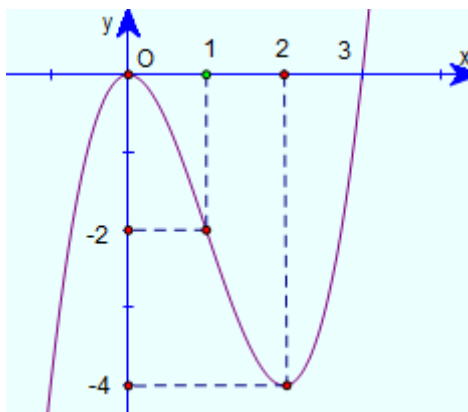
Dựa vào đồ thị, ta có $f[f(\cos 2x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos 2x) = 0 \\ f(\cos 2x) = a \ (a < -1) \text{ (loại)} \\ f(\cos 2x) = b \ (b > 1) \text{ (loại)} \end{cases}$

Phương trình $f(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = a \ (a < -1) \text{ (loại)} \\ \cos 2x = b \ (b > 1) \text{ (loại)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm số nghiệm thực của phương trình $f(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}) = -2$.

A. 1

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ xác định khi $1 \leq x \leq 3$.

Từ đồ thị của hàm số, ta có

$$f(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = a < 0 \text{ (loại)} \\ \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 1 \\ \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = b \in (2; 3) \end{cases}.$$

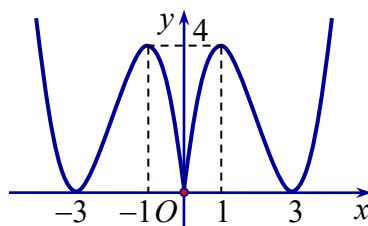
$$\bullet \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\bullet \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = b \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + b^2 = 0$$

$$\Delta' = 4 - (3 + b^2) = 1 - b^2 < 0, \forall b \in (2; 3).$$

Vậy phương trình $f(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}) = -2$ có đúng 1 nghiệm.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(2|\sin x| + 1) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



A. $[0; 4)$.

B. $(0; 4)$.

C. $(1; 3)$.

D. $[0; 8)$.

Lời giải

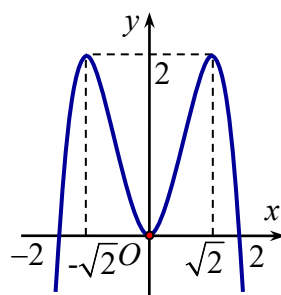
Chọn D

Đặt $t = 2|\sin x| + 1$. Với $x \in (0; \pi)$ thì $t \in (1; 3]$.

Do đó phương trình $2f(2|\sin x| + 1) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = \frac{m}{2}$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(1; 3]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $\frac{m}{2} \in [0; 4) \Leftrightarrow m \in [0; 8)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{2-x^2}) = m$ có nghiệm là:



A. $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-2; 2)$.

D. $[0; 2]$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện của phương trình: $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Đặt $t = \sqrt{2-x^2}$. Với $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ thì $t \in [0; \sqrt{2}]$.

Do đó phương trình $f(\sqrt{2-x^2}) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; \sqrt{2}]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [0; 2]$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			2			$+\infty$		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			-1		-1				

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là

A. 4.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

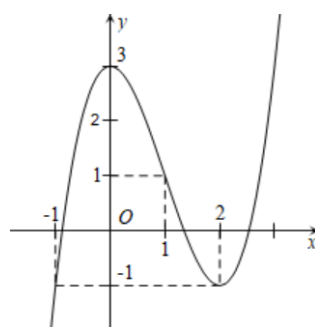
Ta có $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow 3f(x) = 5 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{5}{3}$.

Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y = \frac{5}{3}$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $[f(x^2 + 1)]^2 - f(x^2 + 1) - 2 = 0$ là:

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow t \geq 1$.

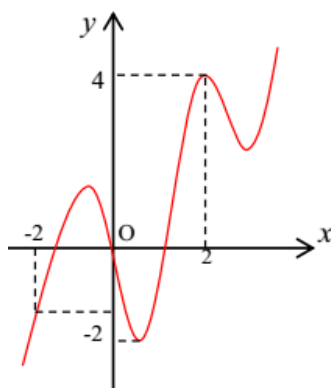
Ta thấy ứng với $t = 1$ cho ta một giá trị của x và ứng với mỗi giá trị $t > 1$ cho ta hai giá trị của x .

Phương trình đã cho trở thành: $[f(t)]^2 - f(t) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = -1 \\ f(t) = 2 \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên $[1; +\infty)$ suy ra phương trình $f(t) = -1$ có 1 nghiệm $t = 2$ và phương trình $f(t) = 2$ có 1 nghiệm $t > 2$ do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1; 3)$.



A. 21.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 2$.

Vì $1 \leq x < 3 \Rightarrow -2 \leq t < 2$.

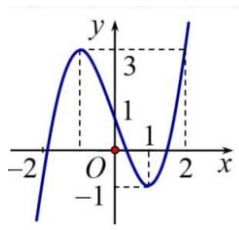
Phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m \Leftrightarrow f(t) = m^2 - 3m$ với $t \in [-2; 2)$.

Phương trình có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1; 3) \Leftrightarrow -2 \leq m^2 - 3m < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 \geq 0 \\ m^2 - 3m - 4 < 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m \leq 1 \\ 2 \leq m < 4 \end{cases}$$

Vậy trên đoạn $[-10; 10]$ có 4 giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x) = 2$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

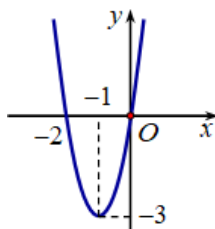
Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào đồ thị ta thấy số giao điểm là 3.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = -3$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3

Lời giải

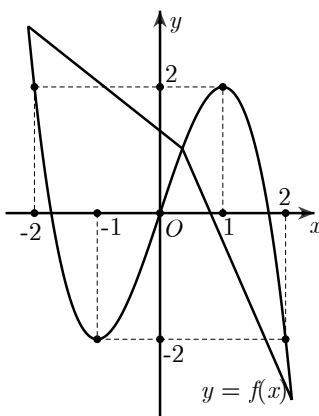
Chọn C

Từ đồ thị ta có $f(f(x)) = -3 \Leftrightarrow f(x) = -1$.

Cũng từ đồ thị ta thấy ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -1$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = -1$ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 21. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f(f(x)) = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có:

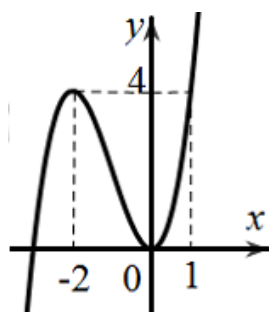
$$f(f(x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -2 \\ f(x) = 1 \end{cases}.$$

Số nghiệm của các phương trình $f(x) = -2$ và $f(x) = 1$ lần lượt là số giao điểm đồ thị hàm số $y = f(x)$ và các đường thẳng $y = -2, y = 1$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) = -2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1; x_2 = 2$ và $f(x) = 1$ có ba nghiệm $x_3 = a; x_4 = b; x_5 = c$ sao cho $-2 < a < -1 < b < 1 < c < 2$.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 2$ có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0; 1]$.



A. $[0; 4]$.

B. $[-1; 0]$.

C. $[0; 1]$.

D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t = x^2 + 2x - 2$. Với $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-2; 1]$.

Phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi phương trình

$$f(t) = 3m + 1 \text{ có nghiệm thuộc } [-2; 1] \Leftrightarrow 0 \leq 3m + 1 \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1.$$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm phương trình $f(x) - 2020 = 0$ là

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3

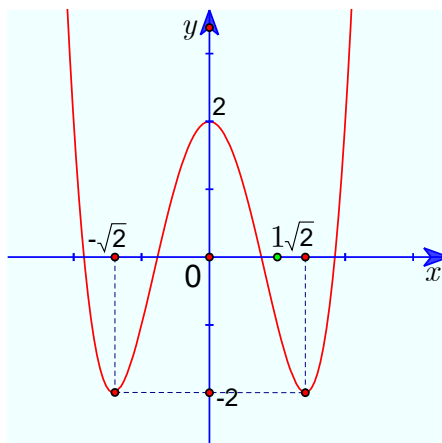
Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) - 2020 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2020$.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2020$ tại 1 điểm nên phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 7 = 0$ là:

A. 4.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$2f(x) - 7 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{7}{2}.$$

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{7}{2}$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Vậy phương trình $2f(x) - 7 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là?

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Phương trình } f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình vô nghiệm

Chọn C

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	-3	$+\infty$	

Phương trình $f(1-3x) = 6$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Xét } g(x) = f(1-3x) \Rightarrow g'(x) = -3f'(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x = -1 \\ 1-3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

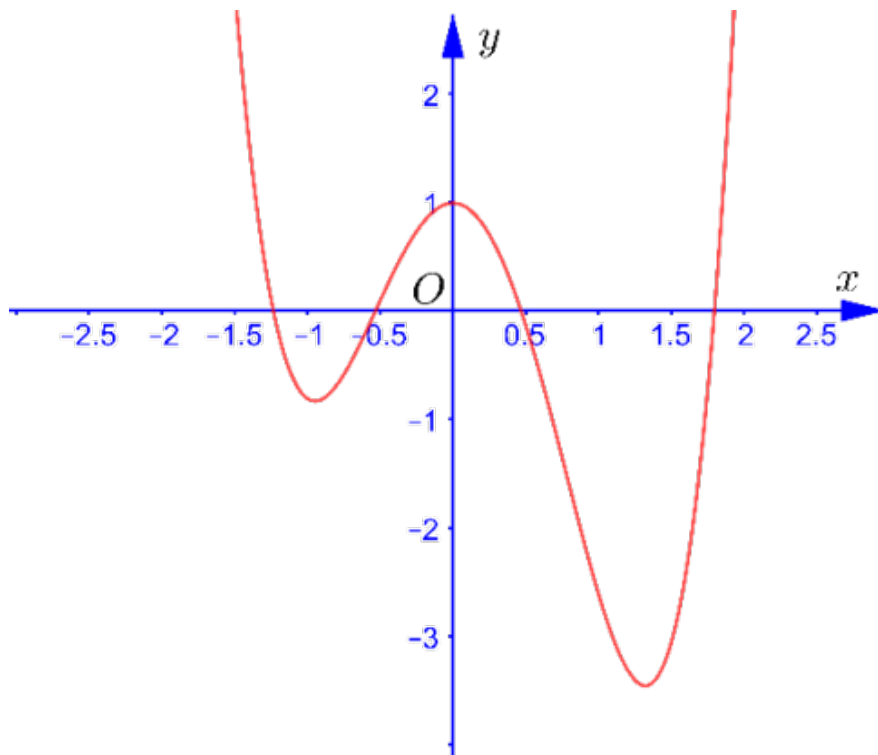
Bảng biến thiên

x	$+\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(1-3x) = 6$ có một nghiệm âm.

Chọn **A.**

Câu 27. Đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có dạng như hình vẽ sau.



Phương trình $a(f(x))^4 + b(f(x))^3 + c(f(x))^2 + df(x) + e = 0$ (*) có số nghiệm là

A. 2.

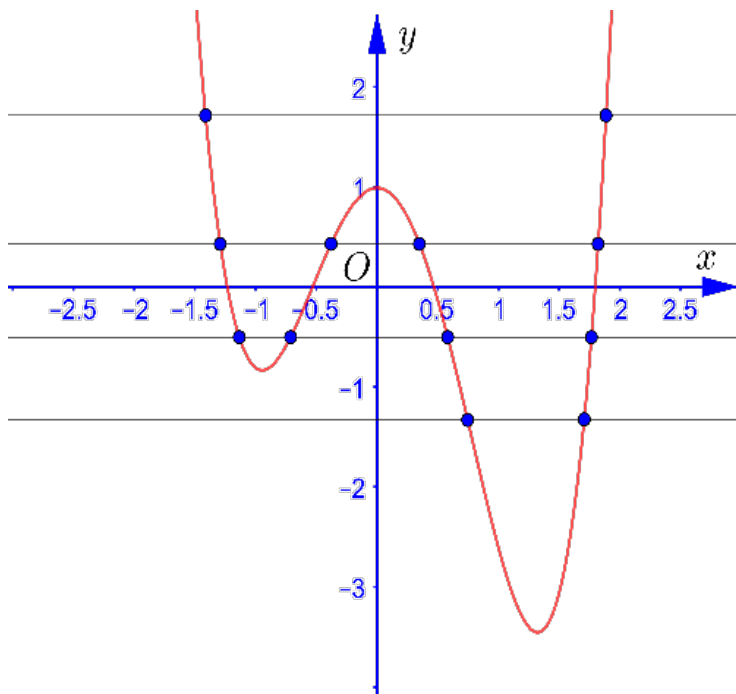
B. 6.

C. 12.

D. 16.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**



Ta thấy đồ thị $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-1,5; -1)$, $x_2 \in (-1; -0,5)$, $x_3 \in (0; 0,5)$, $x_4 \in (1,5; 2)$.

Kẻ đường thẳng $y = m$.

Với $m = x_1 \in (-1, 5; -1)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_1$ có 2 nghiệm.

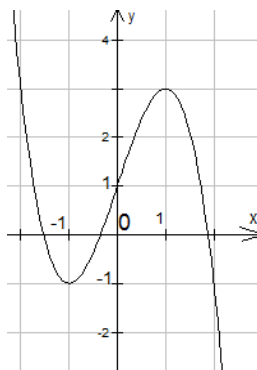
Với $m = x_2 \in (-1; -0, 5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_2$ có 4 nghiệm.

Với $m = x_3 \in (0; 0, 5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_3$ có 4 nghiệm.

Với $m = x_4 \in (1, 5; 2)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_4$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình (*) có 12 nghiệm.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Chọn A.

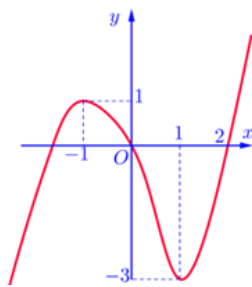
$$\text{Đặt } f(x) = t, \text{ khi đó } f(t) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a & (-2 < a < -1) \\ t = 0 & \\ t = b & (1 < b < 2) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} f(x) = a & (-2 < a < -1) \\ f(x) = 0 & \\ f(x) = b & (1 < b < 2) \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(x) = a$ có 1 nghiệm, phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm, phương trình $f(x) = b$ có 3 nghiệm. Và các nghiệm này không trùng nhau.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 1$ có 7 nghiệm.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là



A. 1.

B. 2.

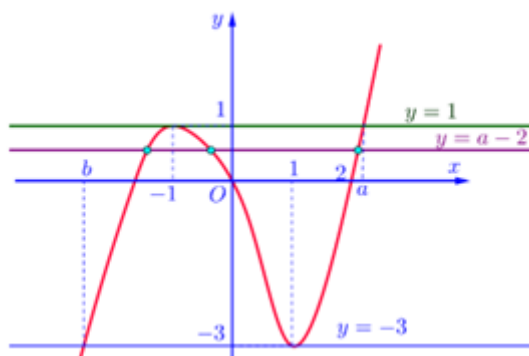
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:



Theo đồ thị :

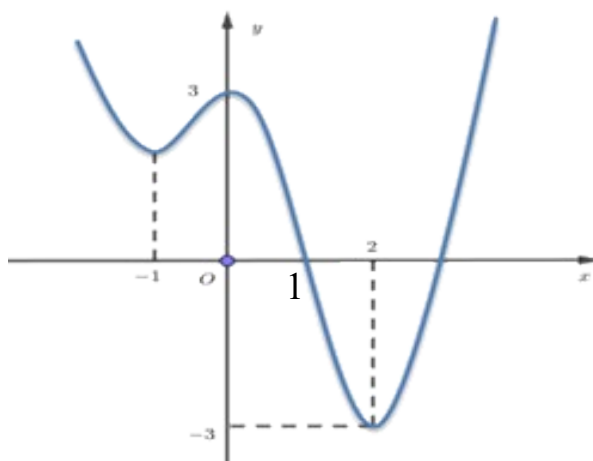
$$f(2 + f(e^x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + f(e^x) = -1 \\ 2 + f(e^x) = a, (2 < a < 3) \end{cases}$$

$$2 + f(e^x) = -1 \Leftrightarrow f(e^x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = b < -1(L) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$$2 + f(e^x) = a \Leftrightarrow f(e^x) = a - 2, (0 < a - 2 < 1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = c < -1(L) \\ e^x = d < 0(L) \\ e^x = t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \ln t$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 2)$.



A. $(-3; 0)$.

B. $(-3; 3)$.

C. $(0; 3)$.

D. $[-3; 0]$

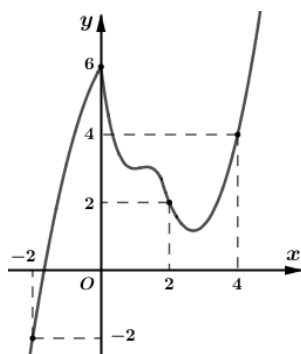
Lời giải

Chọn A

Đặt $t = e^x$. Với $x \in (0; \ln 2) \Rightarrow t \in (1; 2)$

Phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 2)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow -3 < m < 0$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2 \log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$.



A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 4

Lời giải

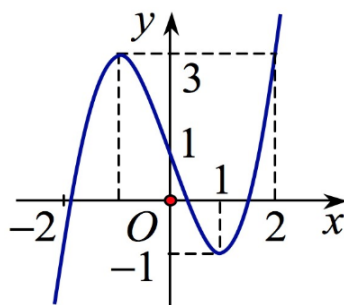
Chọn B

Đặt $t = 2 \log_2 x$, $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow t \in [-2; 2)$. Với mỗi $t \in [-2; 2)$ thì phương trình $2 \log_2 x = t$ có một nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$.

Phương trình $f(2\log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm duy nhất thuộc $[-2; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8f(e^x) = m^2 - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt là

A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = e^x (t > 0)$ phương trình trở thành $8f(t) = m^2 - 1 \Leftrightarrow f(t) = \frac{m^2 - 1}{8} \quad (1)$.

với $t > 0$ cho ta duy nhất một nghiệm $x = \ln t$. Vậy phương trình có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi (1) có đúng hai nghiệm $t > 0$.

Từ đồ thị ta suy ra phương trình (1) có đúng hai nghiệm $t > 0$ khi và chỉ khi:

$$-1 < \frac{m^2 - 1}{8} < 1 \Leftrightarrow -3 < m < 3.$$

Vậy có 5 số nguyên thỏa mãn.

Dạng 2: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = g(m), f(u(x)) = g(m)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		1	2	1		$+\infty$	

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

A. $m \in (1; 2]$.

B. $m \in [1; 2)$.

C. $m \in (1; 2)$.

D. $m \in [1; 2]$.

Face: Chính Nguyễn

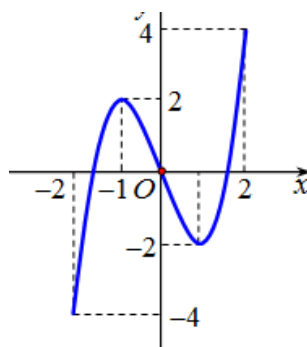
Lời giải

Chọn C.

Phương trình $f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ (*).

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau.



Tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$ là

A. $m \in (2; +\infty)$.

B. $m \in [-2; 2]$.

C. $m \in (-2; 3)$.

D. $m \in (-2; 2)$.

Face: Hà Dũng

Lời giải

Chọn D.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số điểm chung của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (hình vẽ) và đường thẳng $y = m$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (-2; 2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	+	+	+	
y	-2	$+\infty$	-1	$+\infty$	2

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

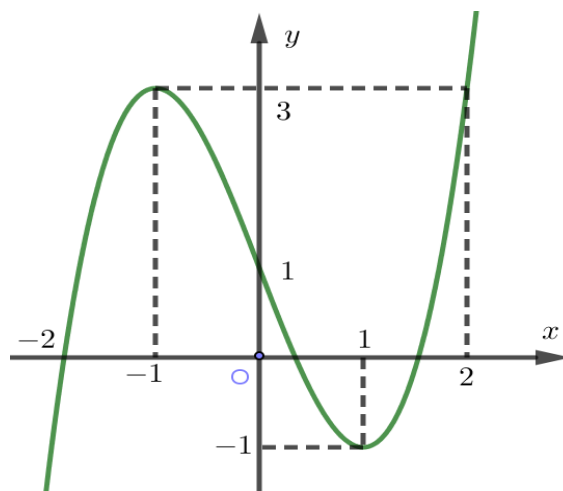
Chọn D

Căn cứ bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi $-2 < m < 2$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn ycbt.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 6.

Fece: Chính Nguyễn

Lời giải

Chọn A

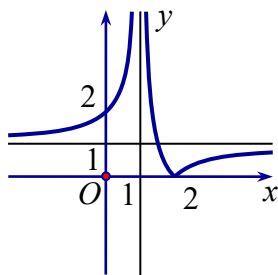
$$f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = \pi^x$. Điều kiện $t > 0$. (1) trở thành $f(t) = \frac{m^2 - 1}{8} \quad (2).$

Vì với mỗi nghiệm $t > 0$ của phương trình (2) cho đúng một nghiệm $x = \log_{\pi} t$ của phương trình (1) nên (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có đúng hai nghiệm phân biệt trên $(0; +\infty)$. Dựa vào đồ thị ta thấy điều này xảy ra khi và chỉ khi $-1 < \frac{m^2 - 1}{8} < 1$.

$$\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \leq 5 \\ -1 < \frac{m^2 - 1}{8} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \leq 5 \\ -3 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\log_2 x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $(1; +\infty)$.

B. $(0; 1)$.

C. $[0; +\infty)$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Face: **Điểm Đam**

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \log_2 x$. Với $x \in (1; +\infty)$ thì $t \in (0; +\infty)$.

Do đó phương trình $f(\log_2 x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [0; +\infty)$.

Câu 6. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Số các giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^3 + 1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. 15.

B. 7.

C. 17.

D. 8.

Face: **Nguyễn Văn Sang**

Lời giải

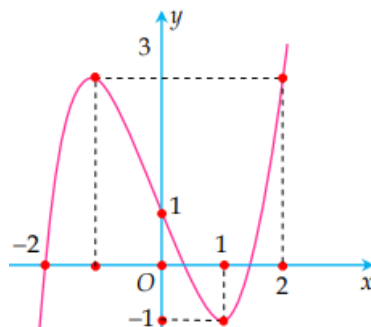
Chọn A

Đặt $t = x^3 + 1$, phương trình $f(x^3 + 1) = m$ trở thành $f(t) = m$. Do $y = x^3 + 1$ là hàm số đồng biến nên ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(t)$ cũng là

t	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$				
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
f	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $f(x^3 + 1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thì $-9 < m < 7$. Do đó có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m nhỏ hơn 100 để phương trình $f(x^2) - m^2 + 2020 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là

A. 55.

B. 56.

C. 54.

D. 99.

Face : Hoàng Ngọc Hùng

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $f(t) = m^2 - 2020$ (1)

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm dương.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $m^2 - 2020 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 \geq 2021 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{2021} \\ m \leq -\sqrt{2021} \end{cases}$.

Do m nguyên dương và nhỏ hơn 100 nên $m \in \{45; 46; 47; \dots; 99\}$. Vậy có 55 số thỏa mãn.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của y' như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
y'	$-\infty$	7	-5	-1	$-\infty$

Tìm m để phương trình $f(x+2) = m+x$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$.

A. $f(4) - 2 < m < f(1) + 1$.

B. $f(4) - 2 \leq m \leq f(1) + 1$.

C. $m \leq f(1) + 1$.

D. $-5 \leq m \leq -1$.

Face : Hoàng Ngọc Hùng

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x+2) = m+x \Leftrightarrow m = f(x+2) - x$

Với $x \in [-1; 2]$ thì $x+2 \in [1; 4]$

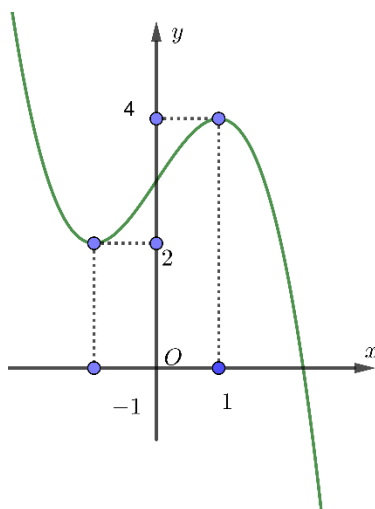
Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x+2) \in [-5; -1]$ nên $f'(x+2) < 0 \forall x \in [-1; 2]$ suy ra hàm số $y = f(x+2)$ nghịch biến trên $(-1; 2) \Rightarrow f(4) \leq f(x+2) \leq f(1), \forall x \in [-1; 2]$.

Mặt khác ta có $\Rightarrow -2 \leq -x \leq 1, \forall x \in [-1; 2]$.

Từ đó $f(4) - 2 \leq f(x+2) - x \leq f(1) + 1 \forall x \in [-1; 2]$.

Để phương trình $f(x+2) = m + x$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$ điều kiện m là $f(4) - 2 \leq m \leq f(1) + 1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m$ có nghiệm?



A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. Vô số.

Face: Trần Quốc Đại

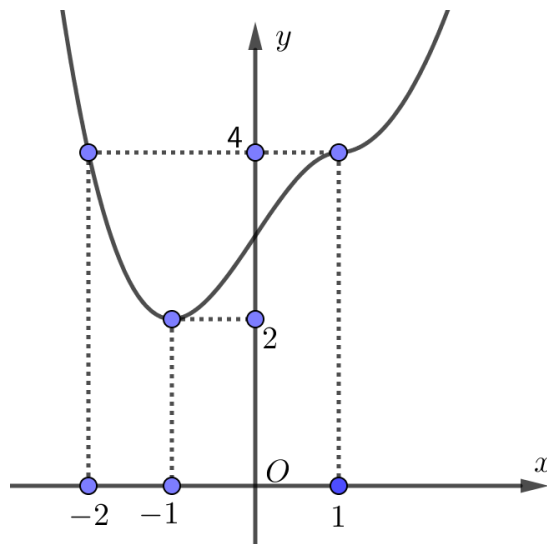
Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^2 - 4x + 5$ suy ra $t \geq 1$, ta có phương trình $f(t) = m - 1$

Dựa vào đồ thị phương trình $f(t) = m - 1$ có nghiệm $t \geq 1$ khi và chỉ khi $m - 1 \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 5$ Suy ra có 5 giá trị nguyên của m .

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để phương trình $f(x^2 - 4x + 5) = f(m)$ có nghiệm?



A. 17.

B. 16.

C. 18.

D. Vô số.

Face: Trần Quốc Đại

Lời giải

Chọn A

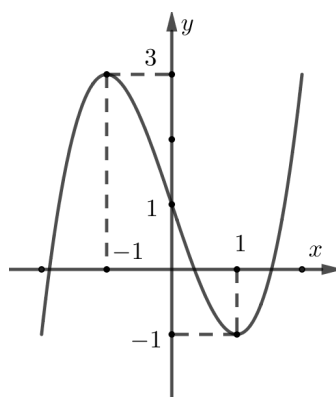
Đặt $t = x^2 - 4x + 5$ suy ra $t \geq 1$, ta có phương trình $f(t) = f(m)$

Dựa vào đồ thị phương trình $f(t) = f(m)$ có nghiệm $t \geq 1$ khi và chỉ khi

$$f(m) \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases}. \text{ Suy ra các giá trị nguyên của } m \in (-10; 10) \text{ là } -9 \leq m \leq -2 \vee 1 \leq m \leq 9$$

Vậy có 17 số nguyên

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm các giá trị thực của m để phương trình $f(\cos x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$:

A. $m \in [-1; 3)$.

B. $m \in (-1; 1)$.

C. $m \in [-1; 1)$.

D. $m \in (-1; 3)$.

Face: Bích Nguyễn

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \cos x$, do $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1]$. Phương trình trở thành $f(t) = m$

Phương trình $f(\cos x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in (0; 1] \Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ có điểm chung với đồ thị hàm số $f(t)$ trên nửa khoảng $(0; 1]$.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có giá trị cần tìm của m là $m \in [-1; 1)$.

Câu 12. Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	0	$\searrow$	$+\infty$	1	$\searrow$	$+\infty$	1

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = m$ có nghiệm.

A. $[-2; 1]$.

B. $[-2; 1]$.

C. $(-\infty; +\infty)$.

D. $(-2; +\infty)$.

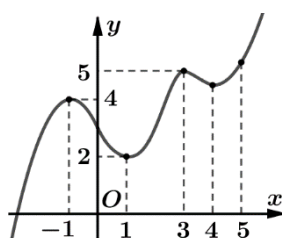
Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ Khi đó: $\begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$. Căn cứ bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi $-2 \leq m < 1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 - 2x$, với $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ thì $t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$.

x	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{2}$
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	$\frac{21}{4}$	-1	$\frac{21}{4}$

Dựa vào BBT ta thấy: với mỗi $t \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$ sẽ cho hai nghiệm x và với $t = -1$ sẽ cho một nghiệm x .

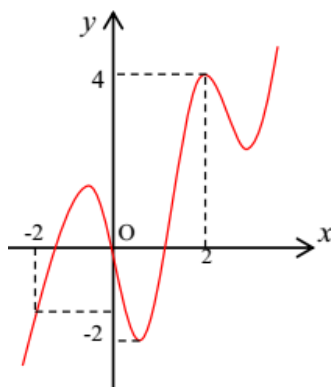
Do đó phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$

$\Leftrightarrow f(t) = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-1; \frac{21}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(t) = m$ với $t \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$ có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 4 \\ m = 5 \\ m = f(4) \end{cases}$.

Vì m nguyên nên $m = 3, m = 5$. Vậy chọn đáp án **B**.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1; 3)$ là



A. $[-1; 1) \cup (2; 4]$. **B.** $(1; 2) \cup [4; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -1] \cup (2; 4)$. **D.** $(-1; 1] \cup [2; 4)$.

Lời giải

Chọn D

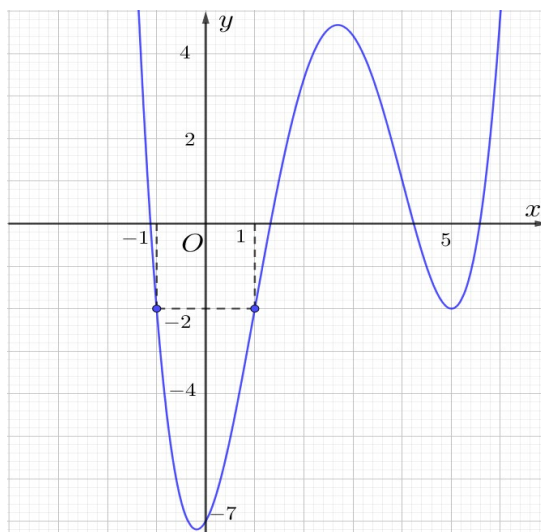
Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 2$.

Vì $1 \leq x < 3 \Rightarrow -2 \leq t < 2$.

Phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m \Leftrightarrow f(t) = m^2 - 3m$ với $t \in [-2; 2)$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq m^2 - 3m < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 \geq 0 \\ m^2 - 3m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m \leq 1 \\ 2 \leq m < 4 \end{cases}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x (x \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < t \leq 1)$.

Nhận xét: với mỗi giá trị t thỏa mãn $0 < t < 1$ cho tương ứng hai giá trị x_0 và $(\pi - x_0)$ thuộc khoảng $(0; \pi)$.

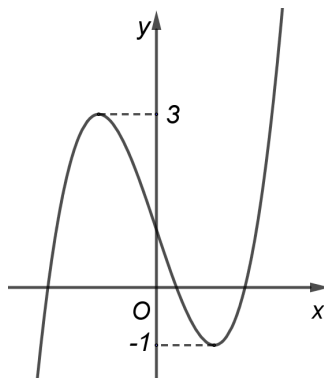
Phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(t) = m$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$

$\Leftrightarrow -7 < m < -2$. Mà: $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -4; -5; -6\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có đúng 2 nghiệm?

A. 4.

B. 3.

C. 3.

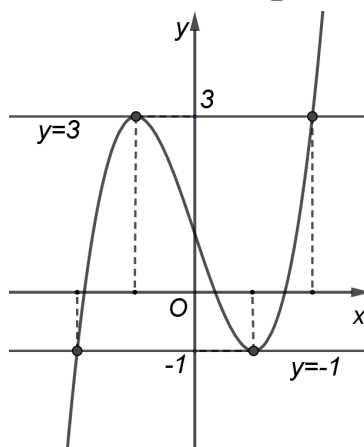
D. 1.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số thì phương trình $f(x) = f(m)$ có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = -1 \\ f(m) = 3 \end{cases} \quad (1).$

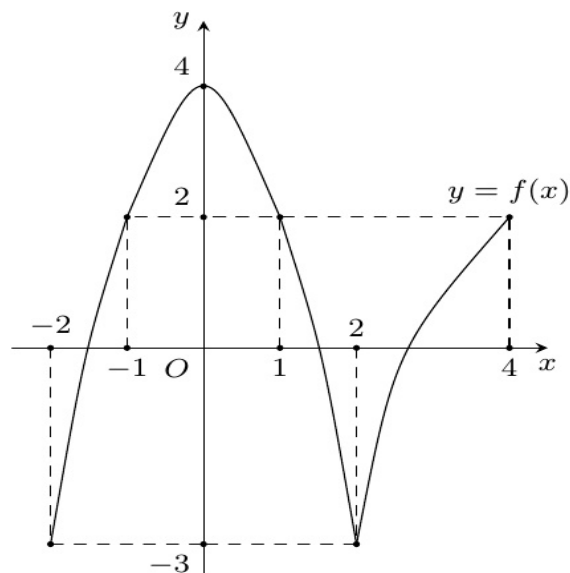
Số giá trị m thỏa mãn (1) chính là số nghiệm x của hệ $\begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 3 \end{cases} \quad (2).$



Lại dựa vào đồ thị thì đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt, đường thẳng $y=-1$ cũng cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt, 4 điểm này có hoành độ khác nhau nên hệ (2) có 4 giá trị x thỏa mãn. Vậy có 4 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Dạng 3: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = f(m)$, $f(u(x)) = f(m)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình sau



Tìm tất cả các số nguyên m để phương trình $f(3-x) = f(m)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[-1; 5]$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3 - x$. Với $x \in [-1; 5]$ ta suy ra $t \in [-2; 4]$.

Khi đó, mỗi $t \in [-2; 4]$ cho ta một $x \in [-1; 5]$.

Do đó phương trình $f(3-x) = f(m)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[-1; 5]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = f(m)$ (*) có hai nghiệm thuộc đoạn $[-2; 4]$.

Từ đồ thị của hàm số $f(x)$, ta suy ra phương trình (*) có hai nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f(m) = -3 & (1) \\ 2 < f(m) < 4 & (2) \end{cases}$$

Mặt khác, từ đồ thị của hàm số $f(x)$, ta suy ra $f(-1) = f(1) = f(4) = 2$ và

$$f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Trên khoảng $(-2; 0)$ hàm số $f(x)$ đồng biến, suy ra

$$2 < f(m) < 4 \Leftrightarrow f(-1) < f(m) < f(0) \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Trên khoảng $(0; 2)$ hàm số $f(x)$ nghịch biến, suy ra

$$2 < f(m) < 4 \Leftrightarrow f(1) < f(m) < f(0) \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

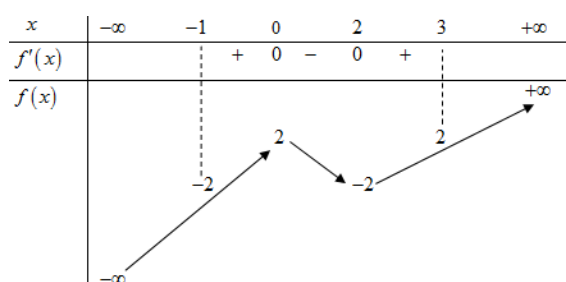
$$\text{Do đó (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ 0 < m < 1 \end{cases}.$$

Suy ra tập hợp các giá trị m cần tìm là $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup \{-2; 2\}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; 2\}$.

Vậy có hai số nguyên thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(1 - 2 \sin x) = f(|m|)$ có nghiệm thực?

A. 6.

B. 7.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

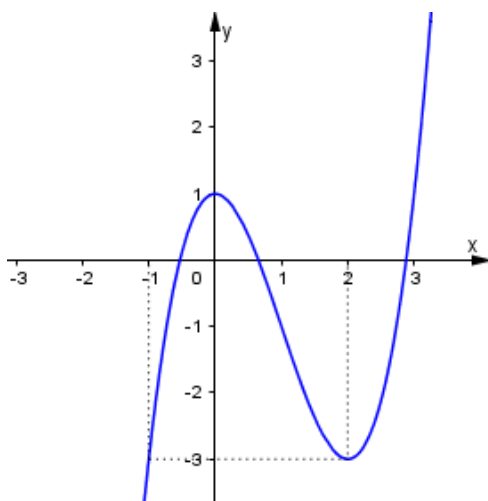
Chọn B

Ta có: $-1 \leq 1 - 2 \sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $f(1 - 2 \sin x) = f(|m|)$ có nghiệm $-2 \leq f(|m|) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq |m| \leq 3 \Leftrightarrow |m| \leq 3$
 $\Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(1 + \sin x) = f(m)$ có nghiệm

A. $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

B. $m \in \{0; 1; 2\}$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $m \in \{0; 1\}$.

Lời giải.

Chọn A.

Xét phương trình $f(1 + \sin x) = f(m)$ (*).

* Với $m = -1$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(-1) = -3$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(1 + \sin x) = -3 \Leftrightarrow 1 + \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Suy ra $m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

* Với $m \neq -1$:

Đặt $t = 1 + \sin x$, $0 \leq t \leq 2$.

(*) $\Leftrightarrow f(t) = f(m)$.

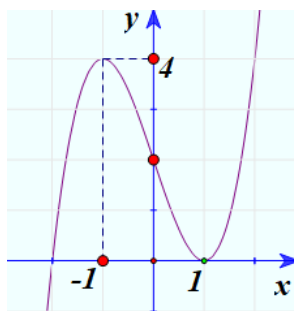
Dựa vào đồ thị hàm số thì hàm số $f(t)$ nghịch biến với $t \in [0; 2]$.

Do đó $f(t) = f(m) \Leftrightarrow t = m \Leftrightarrow m \in [0; 2]$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Để phương trình $f(\sqrt[6]{1-x^2}) = f(m)$ có nghiệm thì điều kiện của tham số m là $m \in [a; b]$. Hỏi điểm $A(a; b)$ thuộc đường tròn nào sau đây?



A. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$.

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

D. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 20$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt[6]{1-x^2}$. Vì $x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Khi đó $f(\sqrt{1-x^2}) = f(m) \Rightarrow f(t) = f(m) (*)$

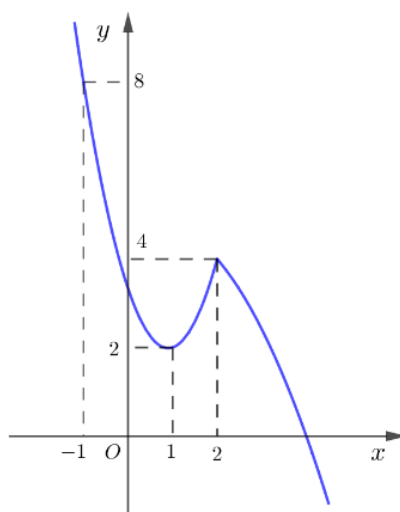
Dựa vào đồ thị thấy hàm số $f(t)$ nghịch biến với $t \in [0;1]$.

Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow t = m \Rightarrow 0 \leq m \leq 1$ vì $t \in [0;1]$.

Để phương trình $f(\sqrt{1-x^2}) = f(m)$ có nghiệm thì điều kiện của tham số m là $m \in [0;1]$.

Tọa độ điểm $A(0;1)$, ta có: $(0-1)^2 + (1-1)^2 = 1 \Rightarrow A \in (C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{8+4x-4x^2}-1) = f(m)$ có nghiệm thuộc $(-1;1)$?

A. 5.

B. 7.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Xét trên $(-1;1)$, hàm số $y = f(x)$ nghịch biến nên phương trình

$$f(\sqrt{8+4x-4x^2}-1) = f(m) \Leftrightarrow \sqrt{8+4x-4x^2} = m+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ 8+4x-4x^2 = (m+1)^2 \end{cases}$$

Để yêu cầu bài toán được thỏa, ta tìm các giá trị thực $m \geq -1$ sao cho đồ thị hàm số

$y = 8+4x-4x^2$ cắt đường thẳng $y = (m+1)^2$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $-1 < x < 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 8+4x-4x^2$ trên $(-1;1)$

x	$-1 \quad \frac{1}{2} \quad 1$
y'	$+ \quad 0 \quad -$
$y = 8 + 4x - 4x^2$	

Như vậy ta phải có $\begin{cases} m \geq -1 \\ 0 < (m+1)^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2, m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$
y	5	-2	2	-1	

Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(|x-1|+2) = f(\sqrt{3-m}+2)$ có nghiệm.

A. -2.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

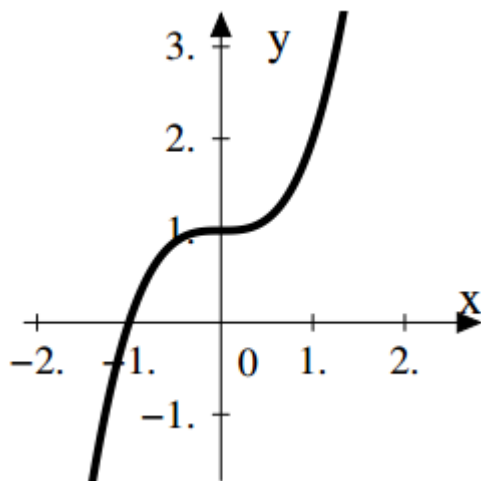
Chọn B

Đặt $t = |x-1|+2 \geq 2$ thì phương trình $f(|x-1|+2) = f(\sqrt{3-m}+2)$ (1) trở thành $f(t) = f(\sqrt{3-m}+2)$ (2) với $t \geq 2$.

Để phương trình (2) có nghiệm thì đường thẳng có phương trình $y = f(\sqrt{3-m}+2)$ phải cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại ít nhất một điểm với mọi $t \geq 2 \Leftrightarrow -1 < f(\sqrt{3-m}+2) \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow$ tổng các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn bài toán là $1+2+3=6$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(6\sin x + 8\cos x) = f(m(m+1))$ có nghiệm thực.

A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy hàm số $y = f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$f(6\sin x + 8\cos x) = f(m(m+1)) \Leftrightarrow 6\sin x + 8\cos x = m(m+1).$$

Đặt $y = 6\sin x + 8\cos x$.

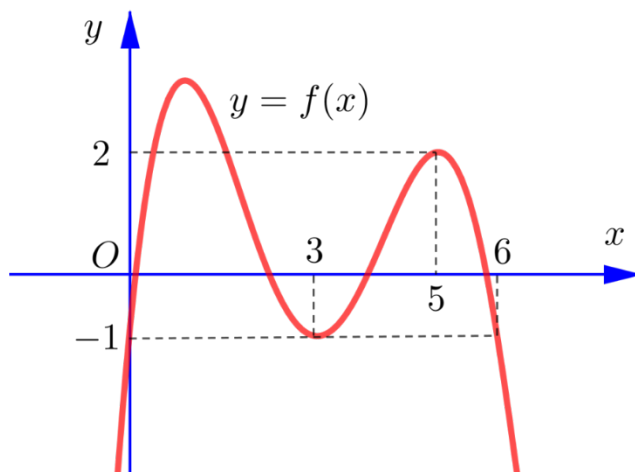
$$\text{Có: } 6^2 + 8^2 \geq y^2 \Leftrightarrow -10 \leq y \leq 10.$$

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -10 \leq m(m+1) \leq 10$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 10 \leq 0 \\ m^2 + m + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} \leq m \leq \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -1; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 6 số nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc 4 có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để phương trình

$$f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) = f(m^2 + 1) \text{ có hai nghiệm phân biệt?}$$

A. 8.

B. 6.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 2x + 10} \Rightarrow t = \sqrt{(x+1)^2 + 9} \Rightarrow t \geq 3.$$

$$\text{Với } t = 3 \text{ thì } x = -1. \text{ Ta có } f(m^2 + 1) = f(3) \Rightarrow m^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2} \text{ (loại).}$$

Với $t > 3$ mỗi giá trị t sẽ có 2 giá trị x tương ứng.

$$\text{Do đó } f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) = f(m^2 + 1) \Leftrightarrow f(t) = f(m^2 + 1) \text{ với } t \geq 3$$

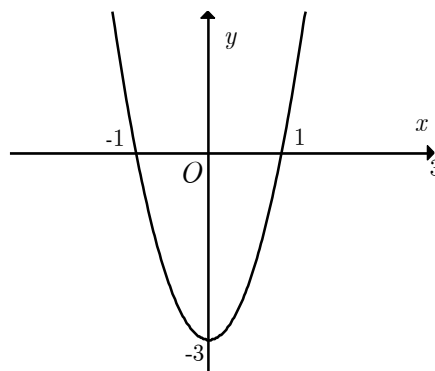
Để phương trình $f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) = f(m^2 + 1)$ có 2 nghiệm phân biệt thì đường thẳng

$f(m^2 + 1)$ cắt đồ thị $y = f(t)$ tại 1 điểm duy nhất có hoành độ $t > 3$.

$$\text{Từ đồ thị } y = f(x) \text{ ta có } \begin{cases} f(m^2 + 1) = 2 \\ f(m^2 + 1) < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 1 = 5 \\ m^2 + 1 > 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m > \sqrt{5} \\ m < -\sqrt{5} \end{cases}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-5; 5] \Rightarrow m = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$. Có 6 giá trị m thỏa mãn.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình: $f(\sqrt{(4-x)(x-2)}) = f(m)$ có nghiệm?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $[-1; 1]$.

C. $[0; 1]$.

D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

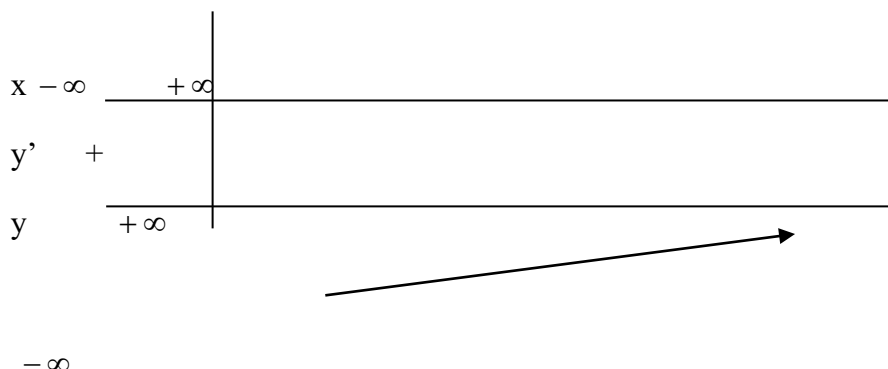
$$\text{Đặt } t = \sqrt{(4-x)(x-2)} \Rightarrow t \geq 0.$$

$$\text{Với } \forall x \in [2; 4] \text{ theo bất đẳng thức Côsi ta có: } \sqrt{(4-x)(x-2)} \leq \frac{(4-x) + (x-2)}{2} = 1.$$

$$\Rightarrow t \in [0;1], \forall x \in [2;4] \Rightarrow -3 \leq f(t) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq f\left(\sqrt{(4-x)(x-2)}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{(4-x)(x-2)}\right) = f(m) \text{ có nghiệm khi và chỉ khi: } -3 \leq f(m) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2 \sin x - \cos x) = f(m)$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.



A. 3.

B. 4.

C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(2 \sin x - \cos x) = f(m) \Leftrightarrow 2 \sin x - \cos x = m$

Phương trình $2 \sin x - \cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2 + (-1)^2 \geq m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$.

Vậy $m \in \{\pm 2; \pm 1; 0\}$.

Câu 11. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1) = f(2) = f(9) = 3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2	0	6	9
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	-4	6	-4	3

Tìm m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m \in (-2;9] \setminus ((-1;2) \cup \{6\})$.

B. $m \in [-2;9] \setminus ((-1;2) \cup \{6\})$.

C. $m \in (-2;9] \setminus \{6\}$. **D.** $m \in [-2;9] \setminus \{-2;6\}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$ khi $-4 < f(m) \leq 3$.

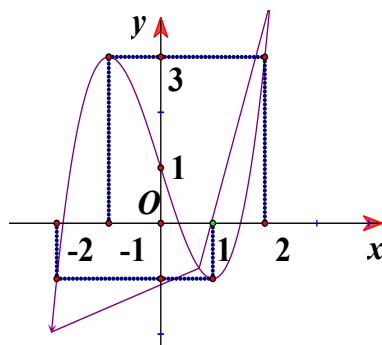
Trên $(-2;0)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(-1) = 3$ nên $-4 < f(m) \leq 3 \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$.

Trên $(0;6)$, hàm số $f(x)$ nghịch biến và $f(2) = 3$ nên $-4 < f(m) \leq 3 \Leftrightarrow 6 > m \geq 2$.

Trên $(6;9)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(9)=3$ nên $-4 < f(m) \leq 3 \Leftrightarrow 6 < m \leq 9$.

Vậy điều kiện của m là: $m \in (-2; -1] \cup [2; 6) \cup (6; 9] \Leftrightarrow m \in (-2; 9] \setminus ((-1; 2) \cup \{6\})$.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x - \sqrt{x^2 + 1}) = f(m)$ có nghiệm là :

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $u(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$

Ta có $u'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$,

Bảng biến thiên

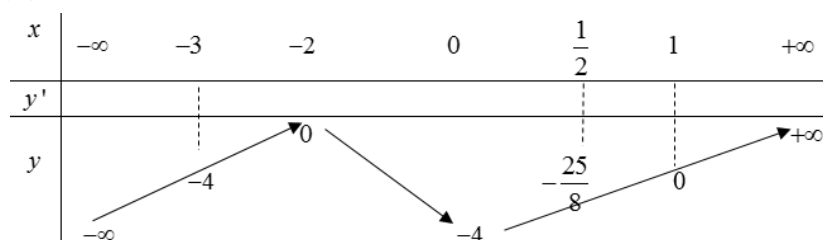
x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$	+	
$u(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Do đó $f(x - \sqrt{x^2 + 1}) \leq 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

YCBT $\Leftrightarrow f(m) \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Tập hợp các giá trị dương của tham số m để phương trình $f\left(2f(x) + \frac{1}{2}\right) = f(m)$ có 9 nghiệm là:

- A. $(0;1)$. B. $\left(\frac{1}{2};0\right)$. **C. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.** D. $(0;1]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2f(x) + \frac{1}{2}$, suy ra $f(x) = \frac{t - \frac{1}{2}}{2} = \frac{2t - 1}{4}$

Phương trình viết lại: $f(t) = f(m) \quad (1)$

Số nghiệm phương trình (1) bằng số giao điểm của đường đồ thị hàm số $f(t)$ và đường thẳng $y = f(m)$

Xét phương trình $f(x) = \frac{2t - 1}{4}$

Nếu $\begin{cases} \frac{2t - 1}{4} < 0 \\ \frac{2t - 1}{4} > -4 \end{cases}$ thì phương trình $f(x) = \frac{2t - 1}{4}$ có một nghiệm.

Nếu $\begin{cases} \frac{2t - 1}{4} = 0 \\ \frac{2t - 1}{4} = -4 \end{cases}$ thì phương trình $f(x) = \frac{2t - 1}{4}$ có hai nghiệm

Nếu $-4 < \frac{2t - 1}{4} < 0$ thì phương trình $f(x) = \frac{2t - 1}{4}$ có ba nghiệm

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta suy ra phương trình $f(t) = f(m)$ có nhiều nhất ba nghiệm.

Suy ra phương trình $f\left(2f(x) + \frac{1}{2}\right) = f(m)$ có 9 nghiệm

$$\Leftrightarrow f(t) = f(m) \text{ có ba nghiệm thỏa } -4 < \frac{2t - 1}{4} < 0$$

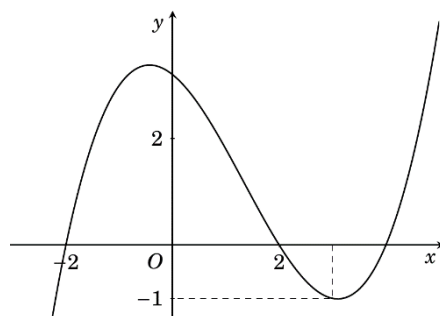
$$\Leftrightarrow f(t) = f(m) \text{ có ba nghiệm thỏa } -\frac{15}{2} < t < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -4 < f(m) < -\frac{25}{8}$$

Do $m > 0$ nên ta cho chọn $\Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$.

Dạng 4: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|) = a; |f(x)| = a; f(|u(x)|) = a; |f(u(x))| = a \dots$.

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{3}{2}$ là



A. 8.

B. 4.

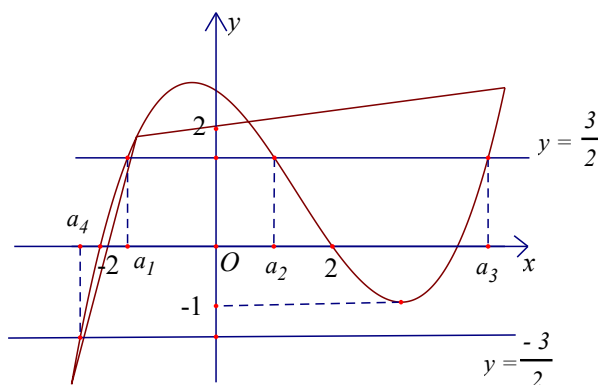
C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

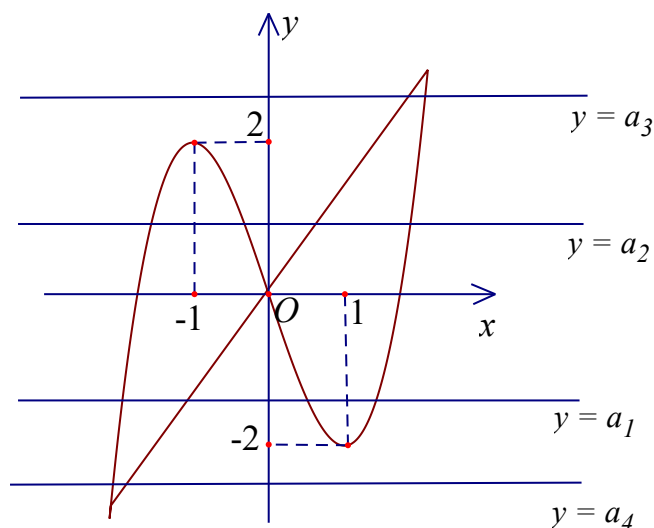
$$\text{Phương trình } |f(x^3 - 3x)| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x) = \frac{3}{2} \\ f(x^3 - 3x) = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$



$$\text{* Phương trình } f(x^3 - 3x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = a_1, (-2 < a_1 < 0) \\ x^3 - 3x = a_2, (0 < a_2 < 2) \\ x^3 - 3x = a_3, (a_3 > 2) \end{cases}.$$

$$\text{* Phương trình } f(x^3 - 3x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^3 - 3x = a_4, (a_4 < -2).$$

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ có dạng như hình vẽ sau:

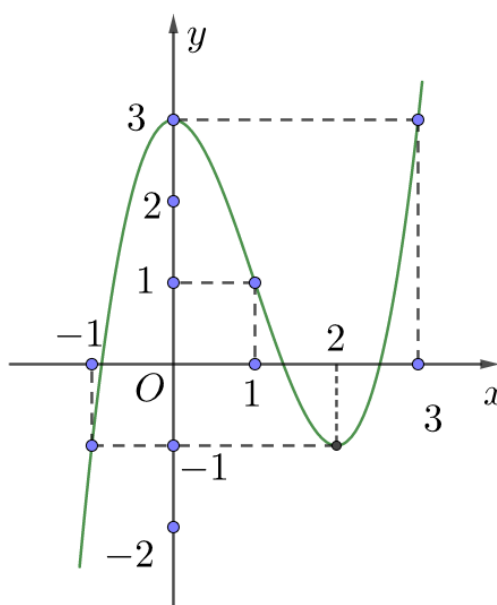


Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Phương trình $x^3 - 3x = a_1$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^3 - 3x = a_2$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^3 - 3x = a_3$ có 1 nghiệm.
- Phương trình $x^3 - 3x = a_4$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{3}{2}$ có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^4 - 2x^2)| = 2$ là



A. 8.

B. 9.

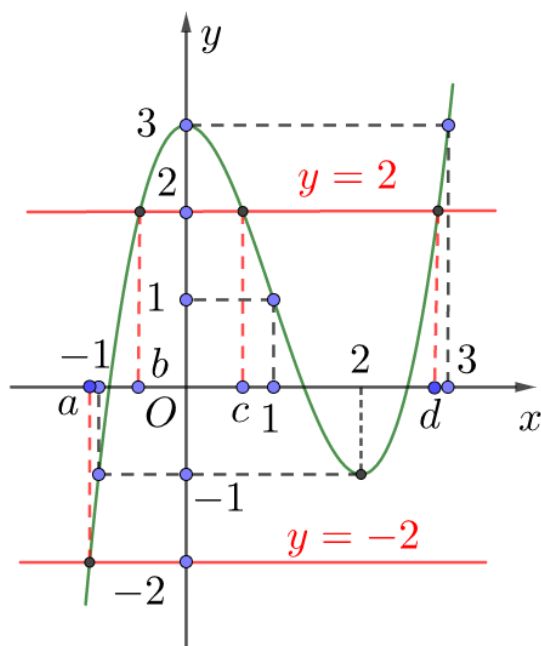
C. 7.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

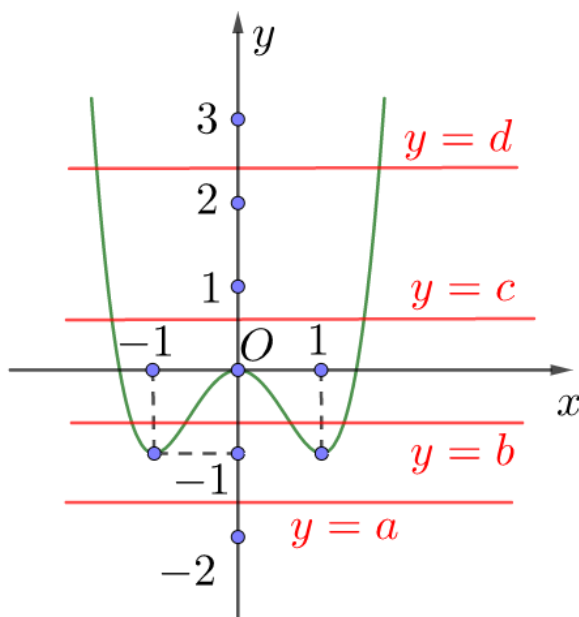
Phương trình $|f(x^4 - 2x^2)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^4 - 2x^2) = 2 \\ f(x^4 - 2x^2) = -2 \end{cases}$.



* Phương trình $f(x^4 - 2x^2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 = b, (-1 < b < 0) \\ x^4 - 2x^2 = c, (0 < c < 1) \\ x^4 - 2x^2 = d, (2 < d < 3) \end{cases}$.

* Phương trình $f(x^4 - 2x^2) = -2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = a, (-2 < a < -1)$.

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Phương trình $x^4 - 2x^2 = a, (-2 < a < -1)$ không có nghiệm thực.
- Phương trình $x^4 - 2x^2 = b, (-1 < b < 0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4 - 2x^2 = c, (0 < c < 1)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4 - 2x^2 = d, (2 < d < 3)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $|f(x^4 - 2x^2)| = 2$ có 8 nghiệm thực phân biệt.

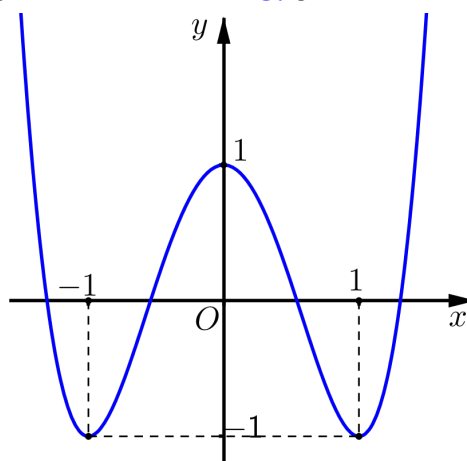
Câu 3. Cho hàm số trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thuộc $[0; 2\pi)$ của phương trình $|f(\cos 2x)| = 1$ bằng

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.



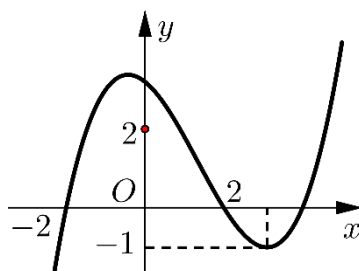
Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } |f(\cos 2x)| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos 2x) = 1 \\ f(\cos 2x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = a > 1 \text{ (VN)} \\ \cos 2x = b < -1 \text{ (VN)} \\ \cos 2x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x = 0$$

Phương trình $\sin 4x = 0$ có 8 nghiệm thuộc $[0; 2\pi)$.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3 - 3x)\right| = \frac{4}{3}$ là

A. 3.

B. 8.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $\left|f(x^3 - 3x)\right| = \frac{4}{3}$ (1).

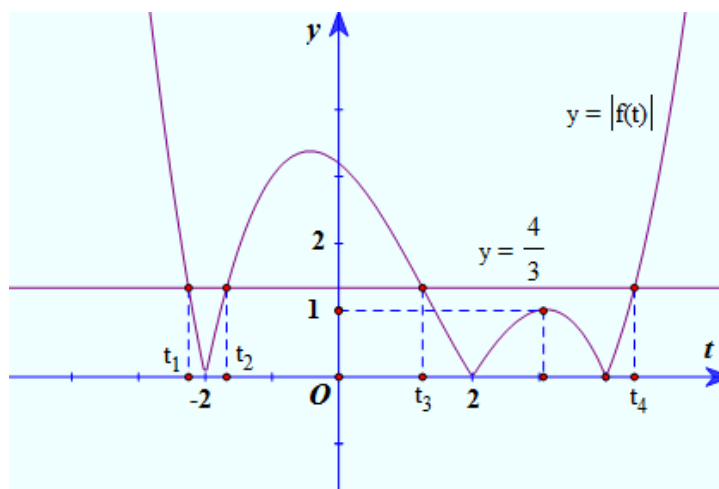
Đặt $t = x^3 - 3x$, ta có: $t' = 3x^2 - 3$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		+	0	-	0	+	
t	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Phương trình (1) trở thành $\left|f(t)\right| = \frac{4}{3}$ với $t \in \mathbb{R}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ban đầu, ta suy ra đồ thị hàm số $y = \left|f(t)\right|$ như sau:



Suy ra phương trình $\left|f(t)\right| = \frac{4}{3}$ có các nghiệm $t_1 < -2 < t_2 < t_3 < 2 < t_4$.

Từ bảng biến thiên ban đầu ta có:

+) $x^3 - 3x = t_1$ có 1 nghiệm x_1 .

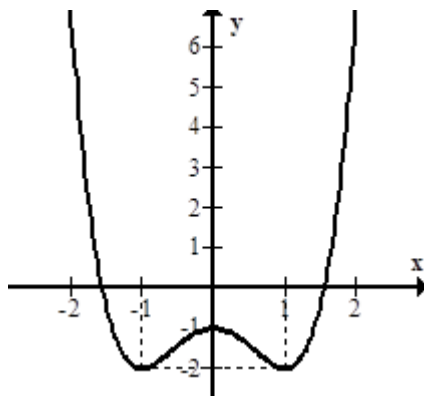
+) $x^3 - 3x = t_4$ có 1 nghiệm x_2 .

+) $x^3 - 3x = t_2$ có 3 nghiệm x_3, x_4, x_5 .

+) $x^3 - 3x = t_3$ có 3 nghiệm x_6, x_7, x_8 .

Vậy phương trình $\left|f(x^3 - 3x)\right| = \frac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

Câu 5. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ:



Tìm số nghiệm phương trình $|f(x)| = \frac{3}{2}$.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

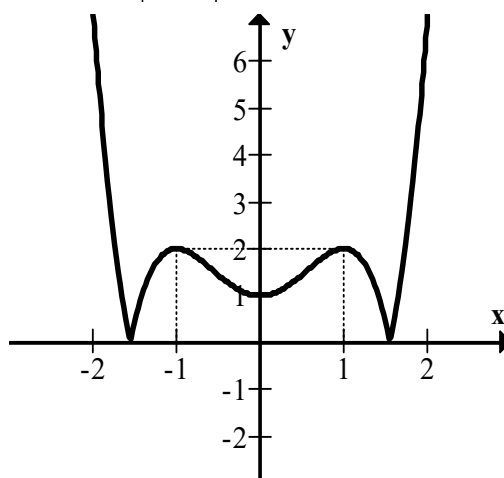
Cách 1:

Đồ thị hàm $y = |f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

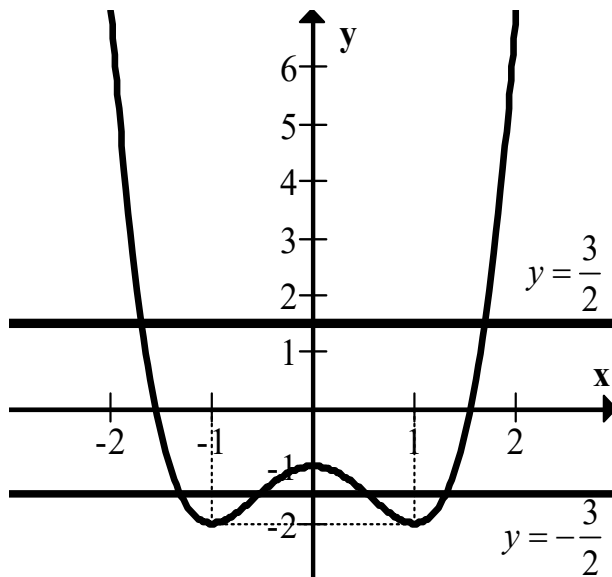
Từ đó ta có đồ thị của của hàm số $y = |f(x)|$.



Từ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ nên $|f(x)| = \frac{3}{2}$ có 6 nghiệm.

Cách 2:

$$|f(x)| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -\frac{3}{2} (*) \\ f(x) = \frac{3}{2} (**) \end{cases}$$



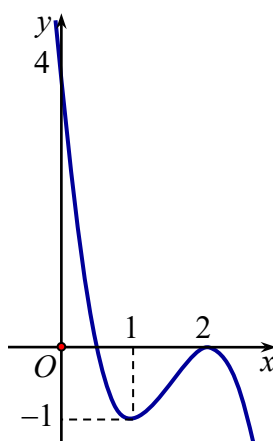
Dựa vào đồ thị trên:

-Phương trình $f(x) = -\frac{3}{2}$: có 4 nghiệm

-Phương trình $f(x) = \frac{3}{2}$: có 2 nghiệm

Vậy $|f(x)| = \frac{3}{2}$ có 6 nghiệm.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 4$ như hình vẽ. Phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - \frac{9}{2} = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

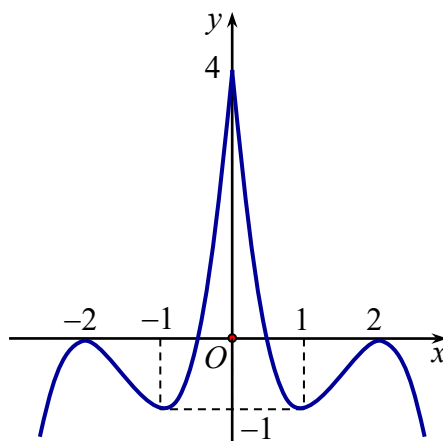
Xét phương trình

$$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2|x|^3 + 9x^2 - 12x + 4 = \frac{17}{2} (*)$$

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2|x|^3 + 9x^2 - 2x + 4$ và đường thẳng $y = \frac{17}{2}$

Hình vẽ dưới là đồ thị hàm số $y = -2|x|^3 + 9x^2 - 2x + 4$ (C). Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = \frac{17}{2}$ cắt đồ thị (C) tại 6 nghiệm phân biệt.



Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$						
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$					
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x^2 - 2x - 1)| = 4$ là

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 - 2x - 1$, $t \geq -2$. Khi đó, phương trình thành $|f(t)| = 4$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm

x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2 < 0 < x_3 < 2 < x_4$. Ta có bảng biến thiên hàm số $y = |f(x)|$ là:

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	3	$\searrow$	5	$\searrow$	$+\infty$
		0		0		0		0	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(t) = 4$ có 6 nghiệm phân biệt $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ thỏa mãn $t_1 < x_1 < t_2 < -2 < t_3 < x_2 < 0 < x_3 < t_4 < 2 < t_5 < x_4 < t_6$.

Xét hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ có $y' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên

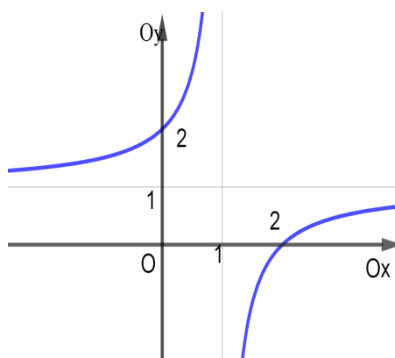
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên có phương trình $x^2 - 2x - 1 = t_1$ và $x^2 - 2x - 1 = t_2$ vô nghiệm.

Mỗi phương trình $x^2 - 2x - 1 = t$ với $t \in \{t_3, t_4, t_5, t_6\}$ có hai nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều phân biệt.

Vậy phương trình $|f(x^2 - 2x - 1)| = 4$ có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của m để phương trình $f(|x|) = m$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $0 < m < 1$ và $m > 1$. **B.** $m \geq 2$ và $m \leq 1$. **C.** $m > 2$ và $m < 1$. **D.** $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

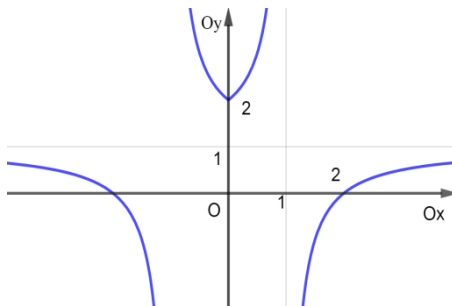
Số nghiệm của phương trình $f(|x|) = m$ (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = m$.

Hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên nhận Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ gồm 2 phần:

+ Phần 1: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \geq 0$.

+ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \geq 0$ qua trục Oy .



Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $y = f(|x|)$ tại 2 điểm phân biệt. Từ đồ thị ta có $m > 2$; $m < 1$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Phương trình $|f(x)| = 3$ có bao nhiêu nghiệm dương phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

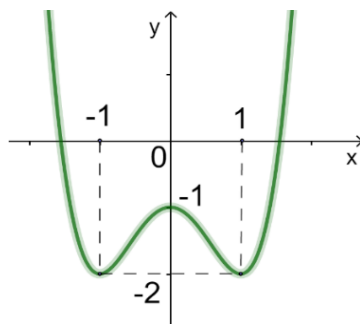
Ta có: $y(0) = \frac{y(-1) + y(1)}{2} = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là:

x	$-\infty$	x_0	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	4	2	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: Phương trình $|f(x)| = 3$ có duy nhất 1 nghiệm dương.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Phương trình $|f(x+1)| = \frac{3}{2}$ có bao nhiêu nghiệm âm phân biệt?



A. 3.

B. 4.

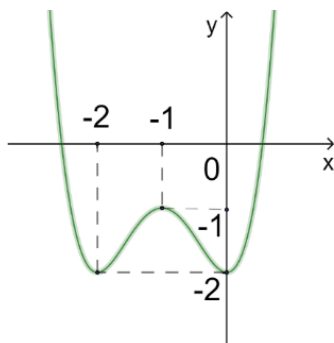
C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị (C_1) của hàm số $y = f(x+1)$ vẽ được bằng cách tịnh tuyến đồ thị (C) sang trái 1 đơn vị ta được đồ thị như hình vẽ bên dưới

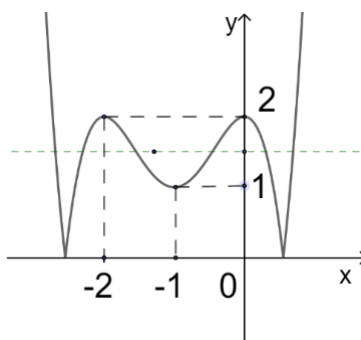


Đồ thị (C_2) của hàm số $y = |f(x+1)|$ vẽ được bằng cách

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) nằm phía trên trục hoành và những điểm trên trục hoành ta được đồ thị (C_3) .

+ Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C_1) nằm phía dưới trục hoành ta được đồ thị (C_4) .

+ Khi đó $(C_2) = (C_3) \cup (C_4)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C_2) dễ thấy phương trình $|f(x+1)| = \frac{3}{2}$ có 4 nghiệm âm phân biệt.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		5		-3		$+\infty$

Phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4.

B. 3.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dựa vào BBT của đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có số nghiệm của phương trình $f(x) = m$, m là tham số như sau:

+/- Nếu $\begin{cases} m < -3 \\ m > 5 \end{cases}$ phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

+/- Nếu $\begin{cases} m = -3 \\ m = 5 \end{cases}$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

+/- Nếu $-3 < m < 5$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có phương trình $|f(1-3x)+1|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1-3x)+1=3 \\ f(1-3x)+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1-3x)=2 \\ f(1-3x)=-4 \end{cases}$.

Từ kết quả trên ta suy ra $\begin{cases} 1-3x=a_1 \\ 1-3x=a_2 \\ 1-3x=a_3 \\ 1-3x=a_4 \end{cases} \quad (a_4 < f(\alpha) < a_1 < -1 < a_2 < 3 < a_3; f(\alpha) = f(3) = -3)$

Vậy phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có 4 nghiệm phân biệt

Cách 2 : Dựa vào BBT ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = 5 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = -3 \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = f(1-3x)+1$. Ta có:

$g'(x) = -3f'(1-3x)$. Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x = -1 \\ 1-3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = f(-1) + 1 = 6; \quad g\left(-\frac{2}{3}\right) = f(3) + 1 = -2.$$

Mặt khác $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Do đó

$$f'(1-3x) < 0 \Leftrightarrow -1 < 1-3x < 3 \Leftrightarrow -2 < -3x < 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$$

Suy ra: $g'(x) = -3f'(1-3x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$									
$g'(x)$		-	0	+	0	-							
$g(x)$	$+\infty$		-2		6		$-\infty$						
$ g(x) $	$+\infty$		0		2		0		6		0		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có 4 nghiệm.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+\infty$		2018		$-\infty$

Hỏi phương trình $|f(x+2017)-2018|=2019$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét đồ thị hàm số $y = f(x+2017)-2018$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ song song với trục Ox sang trái 2017 đơn vị, rồi sau đó tịnh tiến song song với trục Oy xuống dưới 2018 đơn vị.

Ta được bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(x+2017)-2018$ như sau

x	$-\infty$	-2017	-2016	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	-4036	0	$-\infty$

Khi đó đồ thị hàm số $y = |f(x+2017) - 2018|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y = g(x) = f(x+2017) - 2018$ nằm phía trên trục hoành.

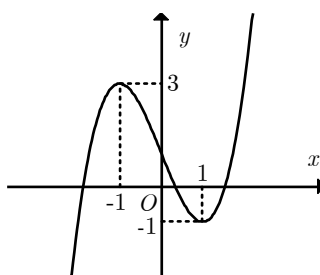
+ Và phần đối xứng của đồ thị $y = g(x) = f(x+2017) - 2018$ nằm phía dưới trục hoành.

Do đó ta có được bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$ như sau

x	$-\infty$	x_0	-2017	-2016	$+\infty$
$ g(x) $	$+\infty$	0	4036	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình $|f(x+2017) - 2018| = 2019$ có 4 nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4.

B. 0.

C. 6.

D. 2.

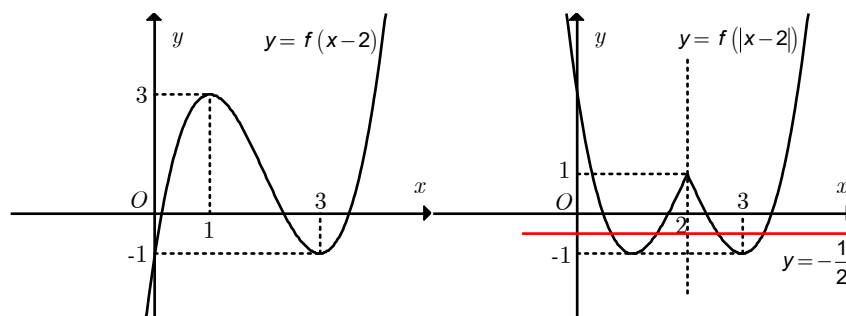
Lời giải

Chọn A

+ Trước tiên tịnh tiến đồ thị sang phải 2 đơn vị để được đồ thị hàm số $y = f(x-2)$. (C_1)

+ Tiếp theo xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái đường thẳng $x = 2$.

+ Cuối cùng lấy đối xứng phần đồ thị còn lại ở trên qua đường thẳng $x = 2$. Ta được toàn bộ phần đồ thị của hàm số $y = f(|x-2|)$. (hình vẽ bên dưới) (C_2)



+ Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x-2|)$, ta thấy đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(|x-2|)$ tại 4 điểm phân biệt $\rightarrow$ phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$-\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$			1		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm của phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 3$ là

- A. 3. B. 4. **C. 2.** D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |f(x^2 - 2x)| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2 - 2x) = 3 \\ f(x^2 - 2x) = -3 \end{cases}$$

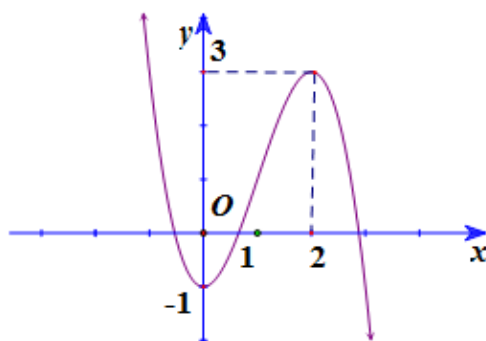
Dựa vào đồ thị ta thấy:

+ Phương trình $f(x^2 - 2x) = 3$ (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x = a$ ($a > 1$) $\Leftrightarrow x^2 - 2x - a = 0$. Vì $\Delta = 1 + a > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

+ Phương trình $f(x^2 - 2x) = -3$ (2) $\Leftrightarrow x^2 - 2x = b$ ($b < -1$) $\Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0$. Vì $\Delta = 1 + b < 0$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 3$ là 2.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(|x|) + m = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.



A. $-3 < m < 1$.

B. $-1 < m < 3$.

C. $-2 < m < 6$.

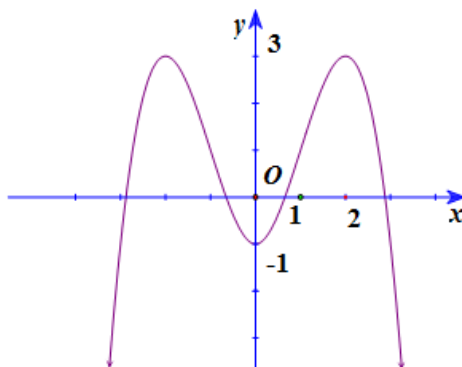
D. $-6 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2f(|x|) + m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = \frac{-m}{2}$.

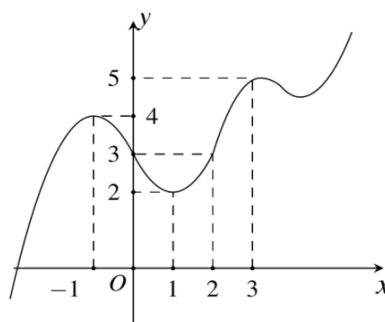
$f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị như hình bên:



Từ đồ thị ta có phương trình $2f(|x|) + m = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi:

$$-1 < \frac{-m}{2} < 3 \Leftrightarrow -6 < m < 2.$$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x-2|) = m$ có nghiệm trên đoạn $[-1, 5]$ là.

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq |x-2| \leq 3$

Do đó $\forall x \in [-1; 5], 0 \leq |x-2| \leq 3$.

Đặt $t = |x-2|$ với $t \in [0; 3]$. Xét hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[0; 3]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max_{[0;3]} f(t) = 5, \min_{[0;3]} f(t) = 2 \Rightarrow \max_{[-1;5]} f(|x-2|) = 5, \min_{[-1;5]} f(|x-2|) = 2$

Suy ra pt $f(|x-2|) = m$ có nghiệm trên đoạn $[-1, 5]$ khi $2 \leq m \leq 5$.

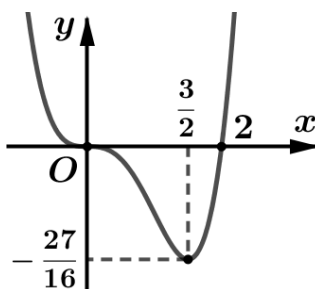
(CÒN TIẾP PHẦN 2)

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN

XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ (PHẦN 2: DẠNG 5-8)

Dạng 5: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|) = g(m)$; $|f(x)| = g(m)$; $f(|u(x)|) = g(m)$; $|f(u(x))| = g(m) \dots$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$?

A. 3.

B. 4.

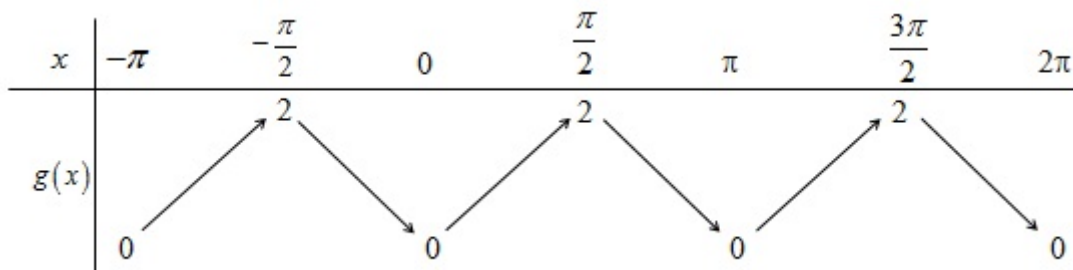
C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = 2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$



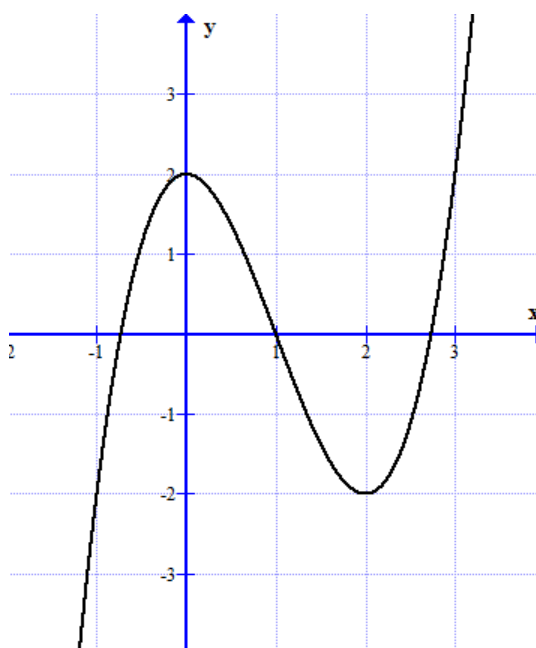
Phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in (0; 2)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$t \in (0; 2) \text{ khi và chỉ khi } -\frac{27}{16} < f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{m}{2} < 2 \\ \frac{m}{2} \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $|f(|x|)| = m$ có hai nghiệm dương phân biệt.



A. 0.

B. 1.

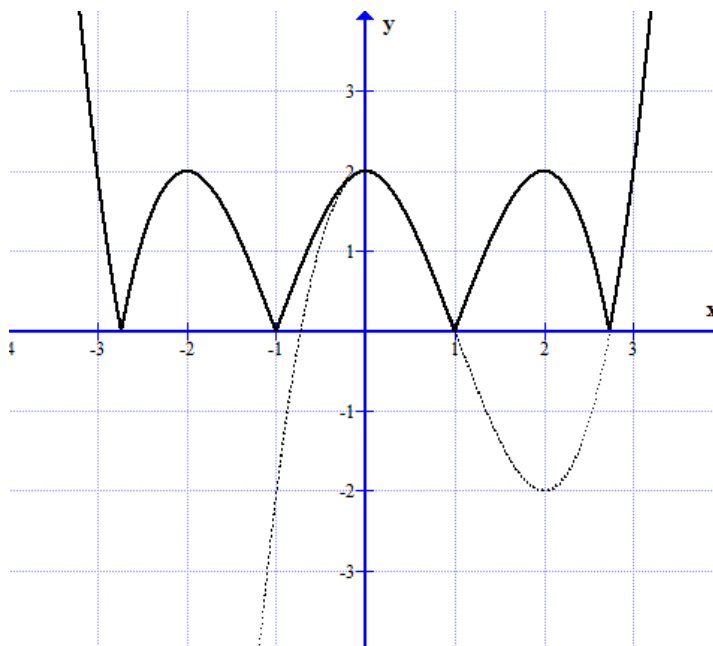
C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$



Dựa vào đồ thị, phương trình $|f(|x|)| = m$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	0 -	
$f(x)$	$+\infty$	-3	10	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x^2 + 1)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

A. 12.

B. 198.

C. 6.

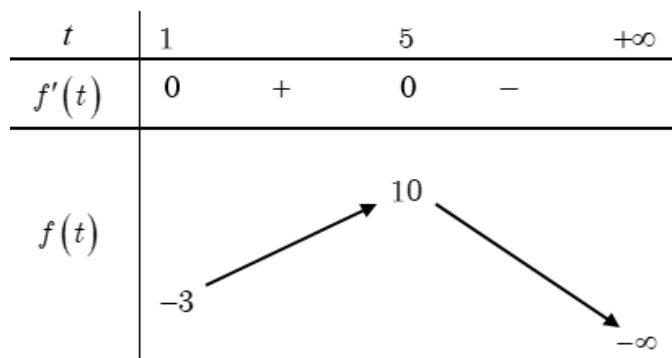
D. 190.

Lời giải

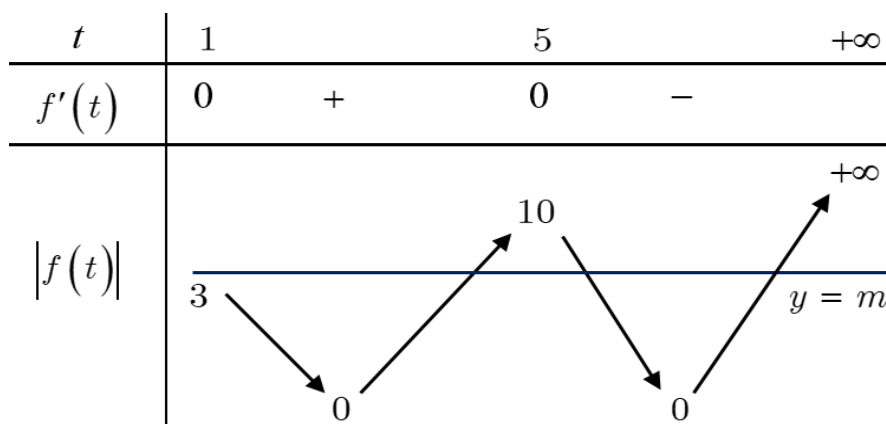
Chọn C

Đặt $t = x^2 + 1$, điều kiện $t \geq 1$, từ đó phương trình trở thành $|f(t)| = m, t \geq 1$.

Do $t \geq 1$ nên ta xét bảng biến thiên của hàm $y = f(t)$ trên $[1; +\infty)$ như sau:



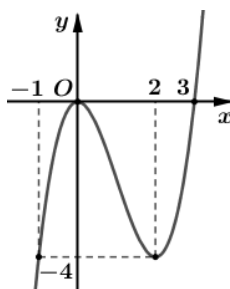
Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(t)|$ trên $[1; +\infty)$ là



Cứ mỗi nghiệm $t > 1$ cho được hai nghiệm x , do vậy để phương trình $|f(x^2 + 1)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $|f(t)| = m$ cần có 3 nghiệm $t > 1$. Dựa bảng biến thiên của hàm $y = |f(t)|$ ở trên ta có điều kiện $3 < m < 10$, mặt khác m nguyên nên $m \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Phương trình $|f(x) + 4| = m^2 - 3m + 2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi tham số m thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?



A. $0 \leq m \leq 4$.

B. $0 < m < 4$.

C. $m \in \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)$.

D. $m \in \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)$.

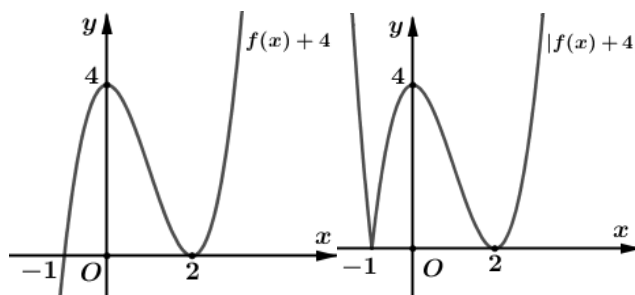
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$.

Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ có được bằng cách:

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x) + 4$.
- Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số $f(x) + 4$ qua Ox , ta được đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$.



Phương trình $|f(x) + 4| = m^2 - 3m + 2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m^2 - 3m + 2$ cắt đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ tại 4 điểm phân biệt. Từ đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$, ta suy ra phương trình $|f(x) + 4| = m^2 - 3m + 2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m^2 - 3m + 2 < 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \\ m \in \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right).$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2018	2018	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x + 2017) - 2018| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 4034.

B. 4035.

C. 4036.

D.

4037.

Chọn B

Xét hàm số $y = f(x+2017) - 2018$ có đồ thị bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 2017 đơn vị, sau đó tịnh xuống dưới 2018 đơn vị. Ta được bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(x+2017) - 2018$ như sau:

x	$-\infty$	-2017	-2016	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	-4036	0	$-\infty$

Khi đó đồ thị hàm số $y = |f(x+2017) - 2018|$ gồm hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên toàn bộ phần đồ thị hàm số $y = g(x)$ nằm phía trên trục hoành.

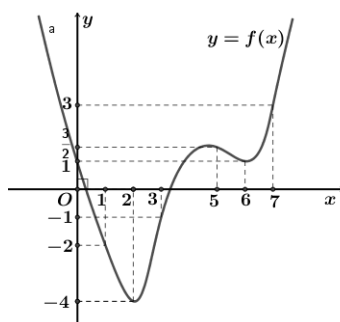
+ Phần 2: Lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của đồ thị hàm số $y = g(x)$ qua $0x$.

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	x_0	-2017	-2016	$+\infty$
$ g(x) $	$+\infty$	0	4036	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình $|f(x+2017) - 2018| = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 4036$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 4035 giá trị m cần tìm. Chọn đáp án **B**

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = m$ có nghiệm.

A. $-4 \leq m \leq -2$

B. $m > -4$

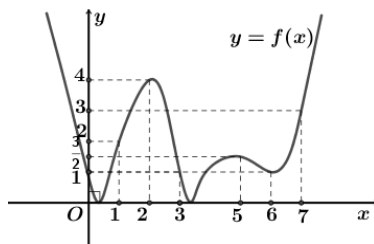
C. $2 < m < 4$

D. $2 \leq m \leq 4$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm $y = |f(x)|$ là



$$\text{Đặt } t = \frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2} \Rightarrow t' = \frac{-4x^2 + 4}{(2x^2 + 2)^2}; t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
t'		$-$	0	$+$	0	$-$
t	$\frac{3}{2}$		1	2		$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in [1; 2]$.

Vậy phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|f(t)| = m$ có nghiệm $t \in [1; 2] \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		$-$	$+$	
y	2	3	-2	$+\infty$

Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'		$-$	$+$	$-$	$+$
y	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

Suy ra phương trình $f(|x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < m < 3$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số giá trị nguyên của m để phương trình $|f(2x-3)| - m = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt là

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
y'	-			- 0 +	
y	$+\infty$			$+\infty$	$+\infty$
					
		$-\infty$		3	

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $2x-3 = t$ phương trình đã cho trở thành $|f(t)| - m = 0 \Leftrightarrow |f(t)| = m$. (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ và đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng với trục hoành.

Từ bảng biến thiên đã cho ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số $y = |f(t)|$.

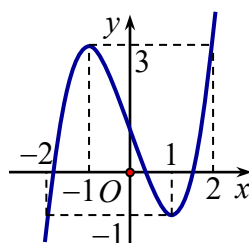
t	$-\infty$	t_n	0	1	$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	0	$+\infty$	3	$+\infty$
$ f(t) $	$+\infty$	0	$+\infty$	3	$+\infty$

Do hàm số $t = 2x-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên số nghiệm t của phương trình (*) bằng số nghiệm x của phương trình đã cho.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình (*) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Với $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{1; 2\}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $\left| f\left(|x^2 - 2x|\right) \right| = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?



A. 9.

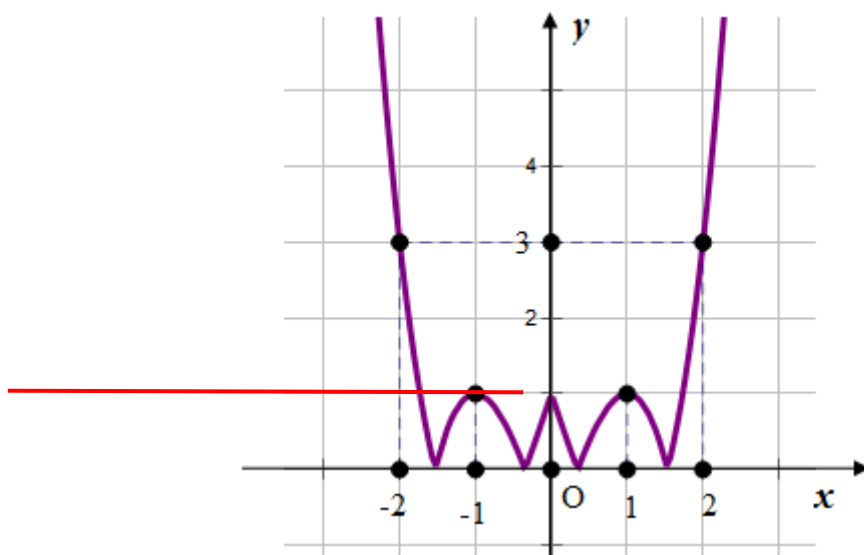
B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



+ Ta có đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm

$y = f(x)$ nằm bên phải trục Ox và đối xứng của chính phần đồ thị này qua Ox . Sau đó giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox và lấy đối xứng của phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox . Như vậy đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ như hình vẽ.

Từ phương trình $\left| f\left(|x^2 - 2x|\right) \right| = 1$ Đặt $t = x^2 - 2x$ ta được $|f(t)| = 1$

Khi đó dựa vào đồ thị ta nhận thấy đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại 5 điểm là $t_1 = a \in (-2; 1)$, $t_2 = -1$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = b \in (1; 2)$

Với $t = x^2 - 2x$

Ta có $t' = 2x - 2 \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

$$t_1 = a \in (-2; 1), t_2 = -1, t_3 = 0, t_4 = 1, t_5 = b \in (1; 2)$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$x^2 - 2x = a \in (-2; -1) \text{ vô nghiệm.}$$

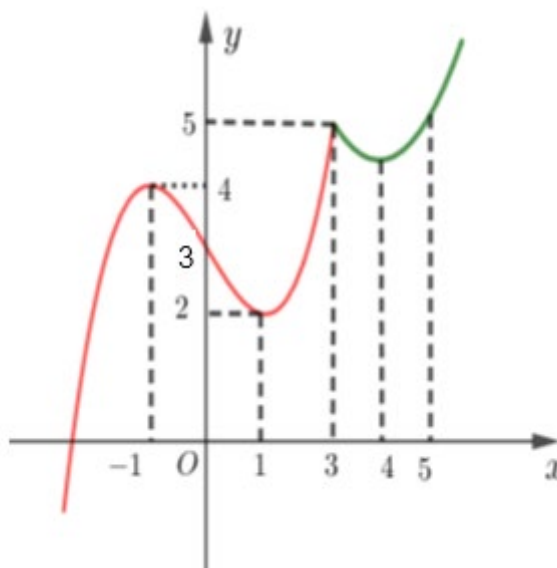
$$x^2 - 2x = -1 \text{ có đúng 1 nghiệm } x.$$

$$x^2 - 2x = 0 \text{ có đúng 2 nghiệm } x.$$

$$x^2 - 2x = 1 \text{ có đúng 2 nghiệm } x.$$

$$x^2 - 2x = b \text{ có đúng 2 nghiệm } x.$$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn

$$\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]?$$

A. $2 < m < 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

B. $2 < m \leq 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

C. $2 \leq m < 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

D. $2 < m < 3$ hoặc $f(4) < m \leq 5$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = |x^2 - 2x|, \text{ với } x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right].$$

Ta thấy hàm số $u(x) = x^2 - 2x$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ và $u' = 2x - 2$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$	0	1	2	$\frac{7}{2}$
$u'(x)$		-	0	+	
$u(x)$	$\frac{21}{4}$				$\frac{21}{4}$
			-1		
$t = u(x) $	$\frac{21}{4}$		1		$\frac{21}{4}$
		0		0	

Nhận xét rằng với $t = 0$ hoặc $1 < t \leq \frac{21}{4}$ thì phương trình $t = |x^2 - 2x|$ có 2 nghiệm phân biệt; với $t = 1$ thì phương trình $t = |x^2 - 2x|$ có 3 nghiệm phân biệt; với mỗi $t \in (0; 1)$ thì phương trình $t = |x^2 - 2x|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Với $t = |x^2 - 2x|$ phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ thành $f(t) = m, \left(t \in \left[0; \frac{21}{4}\right]\right)$

Dựa vào đồ thị f ta biện luận số nghiệm của phương trình $f(t) = m, \left(t \in \left[0; \frac{21}{4}\right]\right)$ trong các trường hợp sau

TH1: $m = 2$

$f(t) = 2 \Leftrightarrow t = 1$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

TH2: $2 < m < 3$

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (0; 1) \\ t = b \in (1; 3) \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH3: $m = 3$

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = b \in (1; 3) \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH4: $3 < m < f(4)$

$f(t) = m \Leftrightarrow t = a \in (1; 4)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

TH5: $m = f(4)$

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = b \in (1; 4) \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH6: $f(4) < m < 5$

$f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(1; 5)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH7: $m = 5$

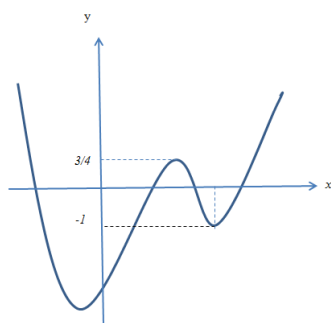
$f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(1; 5)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH8: $5 < m < f\left(\frac{21}{4}\right)$

$f(t) = m$ có 1 nghiệm thuộc $\left(1; \frac{21}{4}\right)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ khi và chỉ khi $2 < m < 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

Câu 11. Cho đồ thị hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x + m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là?



A. 0.

B. Vô số.

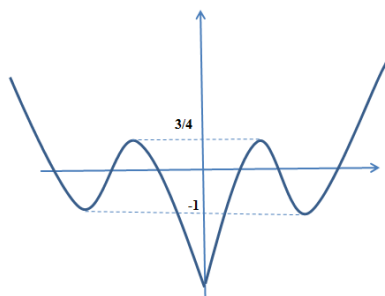
C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như sau:



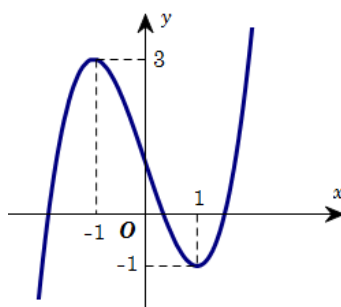
Đồ thị hàm số $y = f(|x+m|)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ dọc theo trục Ox nên số nghiệm của phương trình $f(|x+m|) = m$ bằng số nghiệm của phương trình $f(|x|) = m$.

Do đó, phương trình $f(|x+m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị của hàm số

$$y = f(|x|) \text{ cắt đường thẳng } y = m \text{ tại 4 điểm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = -1 \end{cases}.$$

Vì m nguyên nên $m = -1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị hàm số như hình bên. Sử dụng đồ thị hàm số đã cho, tìm số-giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8|x|^3 - 6|x|(x^2 + 1)^2 = (m-1)(x^2 + 1)^3$ có nghiệm.



A. 2

B. 0

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } 8\left|\frac{x}{x^2+1}\right|^3 - 6\left|\frac{x}{x^2+1}\right| = m-1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{x^2+1}\right|^3 - 3\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| + 1 = m.$$

$$\text{Đặt } t = \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \geq 0. \text{ Ta có } x^2+1 \geq 2x \text{ suy ra } 0 \leq \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1. \text{ Do đó } 0 \leq t \leq 1.$$

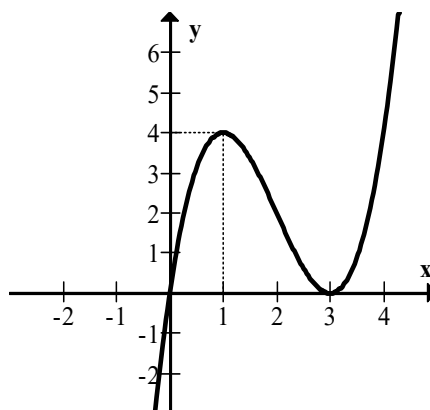
$$\text{Phương trình trở thành } t^3 - 3t + 1 = m \quad (*).$$

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (chỉ xét với $x \in [0; 1]$) và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán đã cho.

Câu 13. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ:



Tìm các giá trị của m để phương trình $f(|x|) = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

A. $m \in \emptyset$.

B. $0 < m < 1$ hoặc $m > 4$.

C. $m = 0$.

D.

$0 < m < 4$.

Lời giải

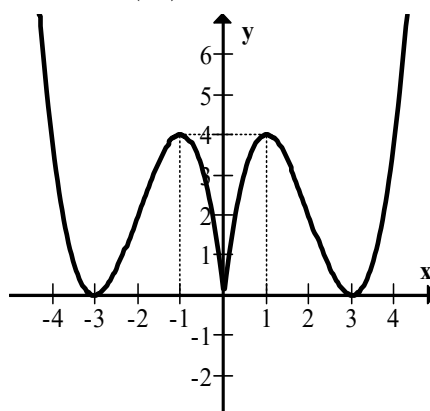
Chọn D

Đồ thị hàm $y = f(|x|)$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm bên phải trục tung (Kể cả giao điểm trên trục tung), bỏ phần bên trái trục tung.

+ Lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

Từ đó ta có đồ thị của của hàm số $y = f(|x|)$



Từ đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ nên $f(|x|) = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 4$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Phương trình $f(|x| - 2) = m^2 - 4m$ có 4 nghiệm phân biệt khi nào?

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	0	$+\infty$	

- A. $m > 5$ hoặc $m < 0$. B. $-1 < m < 0$ hoặc $4 < m < 5$.
C. $-2 < m < 1$. D. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $f(|x|-2)$ được suy từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f(x-2)$.
- Giữ nguyên phần bên phải trục tung. Bỏ phần bên trái trục tung, lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

Ta có bảng biến thiên hàm số $f(|x|-2)$:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f(x -2)$	$+\infty$	0	5	0	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(|x|-2) = m^2 - 4m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(|x|-2)$ và đường thẳng $y = m^2 - 4m$. Do đó phương trình $f(|x|-2) = m^2 - 4m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m^2 - 4m < 5$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m > 0 \\ m^2 - 4m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ 4 < m < 5 \end{cases}.$$

Vậy $-1 < m < 0$ hoặc $4 < m < 5$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| + m = 0$ có 5 nghiệm phân biệt là

A. $(-2; -1]$.

B. $[-1; 2)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(-2; 1)$.

Lời giải:

Chọn A

Gọi $x_1; x_2; x_3$ lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành. Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	2	x_3	$+\infty$
$y'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$	$+$
$y(x)$	$+\infty$	0	1	0	2	0	$+\infty$

Khi đó phương trình $|f(x)| + m = 0$ có 5 nghiệm khi phương trình $|f(x)| = -m$ có 5 nghiệm hay đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và $y = -m$ cắt nhau tại 5 điểm phân biệt

Do vậy $1 \leq -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$. **Chọn đáp án A**

Dạng 6: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = g(x); f(u(x)) = g(v(x))$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[0; +\infty)$ và có BBT như hình vẽ

x	0	$+\infty$
y'		$+$
y	$2\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi phương trình $f(x) = f(3)(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0 \leq x \leq 4$

Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}} = f(3)$. Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}$

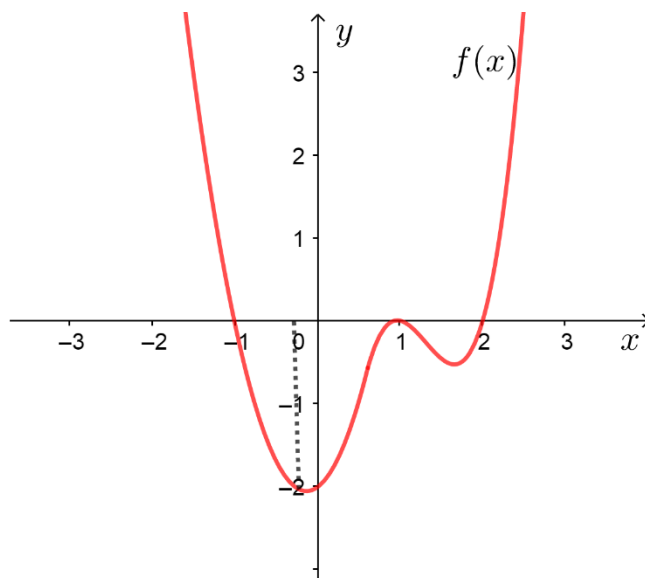
Ta có $g'(x) = \frac{f'(x)(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}) + f(x) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}\right)}{(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})^2} > 0, \forall x \in (0; 4)$

Sau đây là BBT của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[0; 4]$

x	0	4
$g'(x)$		+
$g(x)$		$f(4)$
	$2(\sqrt{15}-\sqrt{12})$	

Vậy phương trình $g(x) = f(3)$ có đúng một nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x)-1)$. Tìm số nghiệm của $g'(x) = 0$.



A. 6

B. 8

C. 9

D. 10

Lời giải

Chọn C

Xét $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)-1)$

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)-1) = 0 & (2) \end{cases}$

$$\text{Từ (1): } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, & a \in (-1, 0) \\ x = 1 \\ x = b, & b \in (1, 2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2): } f'(f(x)-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)-1 = a, & a \in (-1, 0) \\ f(x)-1 = 1 \\ f(x)-1 = b, & b \in (1, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a+1, & a+1 > 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x) = b+1, & 1 < b+1 < 3 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị suy ra: (1) có 3 nghiệm phân biệt

(2) Ta xét lần lượt đường thẳng: $y = a+1$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt

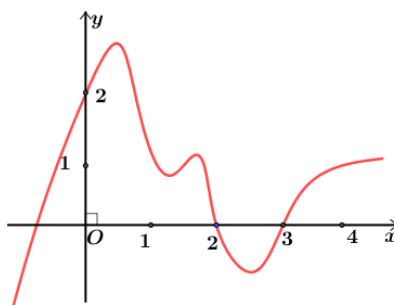
$y = 2$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt

$y = b+1$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt

Nên (2) có 6 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x^3 - 3x) + 3x^3 - 3x - 13 = (x^2 - 2)^3 - 3(x-1)^2$.



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

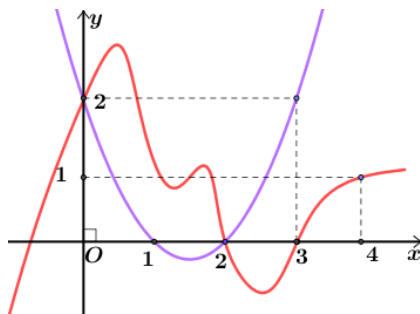
Chọn C

$$f(x^3 - 3x) + 3x^3 - 3x - 13 = (x^2 - 2)^3 - 3(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3x^3 + 9x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = (x^3 - 3x)^2 - 3(x^3 - 3x) + 2$$

Đặt $t = x^3 - 3x$ ta có phương trình $f(t) = t^2 - 3t + 2$



Dựa vào đồ thị thì $f(t) = t^2 - 3t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = 0 \\ x^3 - 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=2 \\ x=-1 \end{cases}$

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như hình dưới

x	1	2	3
f'	+	0	-
f	-5	-1	-2

Hỏi phương trình $f(x-1) = \frac{-5}{x^2 - 6x + 12}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[2;4]$?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Do $x^2 - 6x + 12 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x-1) = \frac{-5}{x^2 - 6x + 12} \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 12)f(x-1) = -5$.

Đặt $g(x) = (x^2 - 6x + 12)f(x-1) \Rightarrow g'(x) = (2x-6)f(x-1) + (x^2 - 6x + 12)f'(x)$.

Xét trên $[2;4]$ ta có:

Với $x \in [2;3]$ thì $\begin{cases} 1 \leq x-1 \leq 2 \\ 2x-6 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x-1) < 0 \\ 2x-6 \leq 0 \\ f'(x-1) > 0 \\ x^2 - 6x + 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in [2;3].$

$$\text{Với } x \in (3;4] \text{ thì } \begin{cases} 2 < x-1 \leq 3 \\ 2x-6 > 0 \\ x^2-6x+12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x-1) < 0 \\ 2x-6 > 0 \\ f'(x-1) < 0 \\ x^2-6x+12 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (3;4].$$

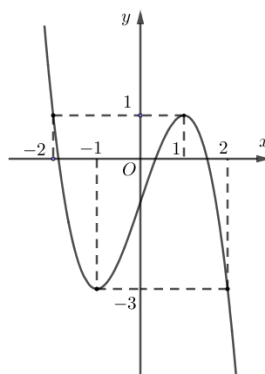
Tính: $g(2) = (4-12+12)f(1) = -20$, $g(3) = (9-18+12)f(2) = -3$,
 $g(4) = (16-24+12)f(3) = -8$.

Lập bảng biến thiên của $y = g(x)$ trên $[2;4]$:

x	2	3	4
g'	+	0	-
g	-20	-3	-8

Dựa vào BBT trên suy ra trên $[2;4]$ phương trình $(x^2 - 6x + 12)f(x-1) = -5$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(1-f(x)) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

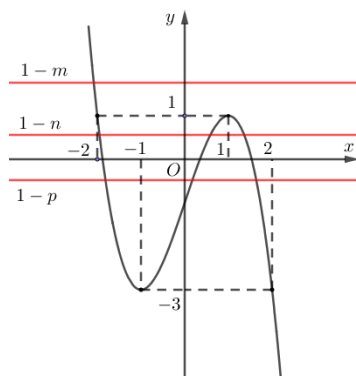
Chọn C

$$\text{Từ đồ thị hàm số ta có } f(1-f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-f(x) = m & (-2 < m < -1) \\ 1-f(x) = n & (0 < n < 1) \\ 1-f(x) = p & (1 < p < 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1-m \\ f(x) = 1-n \\ f(x) = 1-p \end{cases}.$$

+) Do $-2 < m < -1 \Rightarrow 2 < 1-m < 3 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 1-m$ có 1 nghiệm x_1 .

+) Do $0 < n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - n < 1 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 1 - n$ có 3 nghiệm x_2, x_3, x_4 .

+) Do $1 < p < 2 \Rightarrow -1 < 1 - p < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 1 - p$ có 3 nghiệm x_5, x_6, x_7 .



Để thấy 7 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	-1

Số nghiệm của phương trình $f(x) - x^2 + 2x - 1 = 0$ là

A. vô số.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x-1)^2.$$

Với $x > 1$ thì $f(x) < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $x < 1$ ta có $g(x) = f(x) - x^2 + 2x - 1$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 > 0$ nên hàm số $g(x)$ đồng biến và liên tục trên $(-\infty; 1)$.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ nên phương trình có 1 nghiệm duy nhất trên $(-\infty; 1)$.

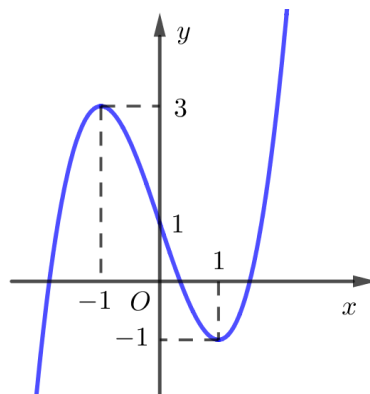
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m để cho phương trình $f(\sin x) = 3 \sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng :

A. - 5.

B. - 8.

C. -10.

D. -6.



Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, do $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x \in (0; 1] \Rightarrow t \in (0; 1]$. PT đã cho trở thành $f(t) = 3t + m$

$$\Leftrightarrow f(t) - 3t = m \quad (*)$$

Đặt $g(t) = f(t) - 3t$. Ta có: $g'(t) = f'(t) - 3$ (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có: $\forall t \in (0; 1]: f'(t) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\forall t \in (0; 1]: g'(t) < 0$.

Do đó hàm số $g(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

PT (*) có nghiệm $t \in (0; 1] \Leftrightarrow \min_{[0; 1]} g(t) \leq m < \max_{[0; 1]} g(t) \Leftrightarrow g(1) \leq m < g(0)$

$$\Leftrightarrow f(1) - 3 \leq m < f(0) \Leftrightarrow -4 \leq m < 1.$$

Vậy m nguyên là: $m = -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow S = -10$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y					
	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f(x^2) = 0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$).

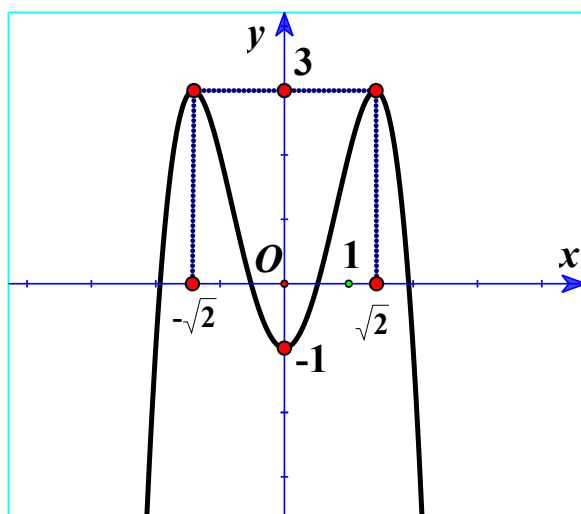
Phương trình $f(x^2) = 0$ trở thành $f(t) = 0$ ($t \geq 0$)

Dựa vào đồ thị hàm số f ta thấy phương trình $f(t) = 0$ ($t \geq 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = a > 1 \end{cases}$

Từ đó ta có $\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{a} \end{cases}$

Vậy phương trình $f(x^2) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm số nghiệm của phương trình $2f(x) - x^2 - 2x = 0$.

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

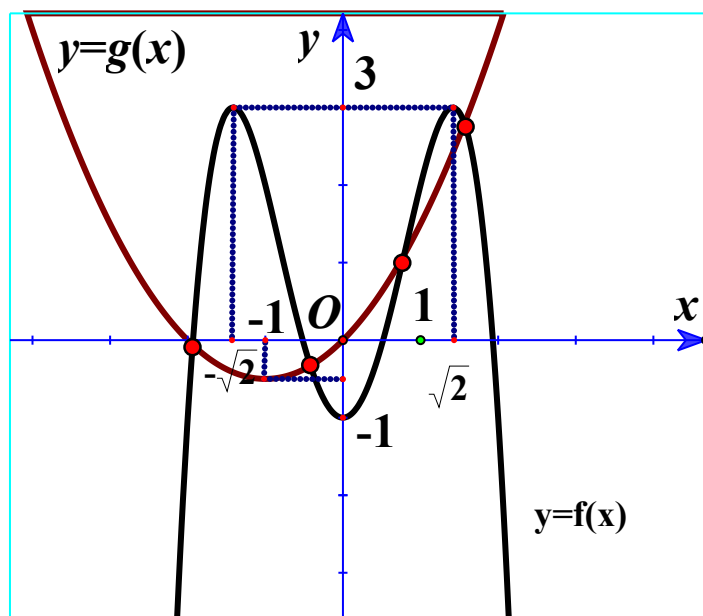
Lời giải

Chọn A

$$+ 2f(x) - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

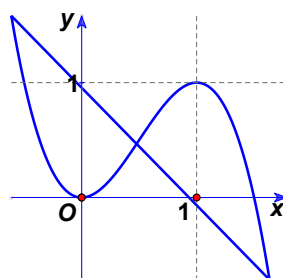
$$+ \text{Xét hàm số } g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

+ Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = \frac{x^2}{2} + x$ trên cùng hệ trục tọa độ ta có:



+ Dựa vào đồ thị ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = x$.



A. 0

B. 1

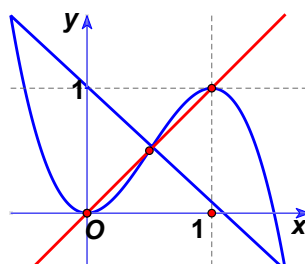
C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình $f(x) = x$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = x$.



Dựa vào hình vẽ suy ra phương trình $f(x) = x$ có 3 nghiệm.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	1	2	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	4	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+1) = \frac{m}{x^2 - 4x + 5}$ có nghiệm trên khoảng $(1; 2)$.

A. 10.

B. 4.

C. 5.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Vì $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0 \quad \forall x$ nên $f(x+1) = \frac{m}{x^2 - 4x + 5} \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 5)f(x+1) = m$.

Đặt $h(x) = (x^2 - 4x + 5)f(x+1)$, với $x \in (1; 2)$.

Ta có $h'(x) = (x^2 - 4x + 5)f'(x+1) + (2x-4)f(x+1)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có $\forall x \in (1; 2) \Rightarrow x+1 \in (2; 3) \Rightarrow f'(x+1) \leq 0$

và $2x-4 < 0, \forall x \in (1; 2); f(x+1) \geq 3 > 0, x+1 \in (2; 3)$. Do đó $h'(x) < 0, \forall x \in (1; 2)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ trên khoảng $(1; 2)$.

x	1	2
$h'(x)$		-
$h(x)$	$h(1)$	$h(2)$

Khi đó phương trình $h(x) = m$ có nghiệm $x \in (1; 2)$ khi và chỉ khi $h(2) < m < h(1)$

$\Leftrightarrow 1.f(3) < m < 2f(2) \Leftrightarrow 3 < m < 8$. Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 7: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình, bất phương trình chứa $f'(x); f''(x) \dots$.

- Câu 1.** Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$) cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số $g(x) = (f'(x))^2 - f''(x) \cdot f(x)$ cắt trục hoành Ox tại bao nhiêu giao điểm?
- A. 6. B. 0. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x) = (f'(x))^2 - f''(x) \cdot f(x)$

Đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, với $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ là các nghiệm.

Suy ra

$$f'(x) = a[(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)]$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \frac{1}{x-x_4} \Rightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \left(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \frac{1}{x-x_4} \right)'$$

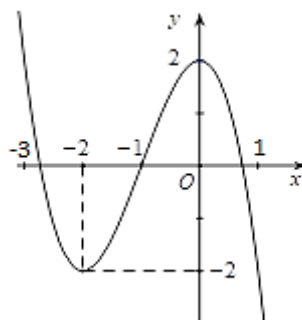
$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = - \left(\left(\frac{1}{x-x_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{x-x_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{x-x_3} \right)^2 + \left(\frac{1}{x-x_4} \right)^2 \right)$$

Nếu $x = x_i$ với $i = 1, 2, 3, 4$ thì $f(x) = 0$, $f'(x) \neq 0 \Rightarrow f''(x)f(x) < (f'(x))^2$.

Nếu $x \neq x_i (\forall i = 1, 2, 3, 4)$ thì $\frac{1}{(x-x_i)^2} > 0$, $f^2(x) > 0$. Suy ra $f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 < 0$

$\Leftrightarrow f''(x) \cdot f(x) < (f'(x))^2$. Vậy phương trình $(f'(x))^2 - f''(x) \cdot f(x) = 0$ vô nghiệm hay phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm. Do đó, số giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là 0.

- Câu 2.** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-2020; 2020)$ để bất phương trình $f'(x)\sqrt{-2x-x^2} < m$ có nghiệm?

- A. 2020. B. 2019. C. 2022. D. 2018.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f'(x)\sqrt{-2x-x^2}$ Ta có tập xác định của hàm số $y = g(x)$ là $D = [-2; 0]$

Từ đồ thị ta thấy trên khoảng $(-2; 0)$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến và hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = -2$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2; 0] \\ f'(-2) = f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2; 0] \\ g(-2) = g(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \min_{[-2; 0]} g(x) = 0$$

Vậy bất phương trình $f'(x)\sqrt{-2x-x^2} < m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m > \min_{[-2; 0]} g(x) \Leftrightarrow m > 0$

Kết hợp $m \in (-2020; 2020)$ suy ra có 2019 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đáp án B

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			2		-3		2		$-\infty$

Đặt $g(x) = f\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Bất phương trình $g'(x) < 0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$ **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) f'\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \\ f'\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x + \frac{1}{x} \in \{-2; 0; 2\} \end{cases}$$

Với $x + \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (nghiệm bội chẵn).

Với $x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nghiệm bội chẵn).

Với $x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm. $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$

Nhận xét với $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow f'\left(x + \frac{1}{x}\right) < 0$.

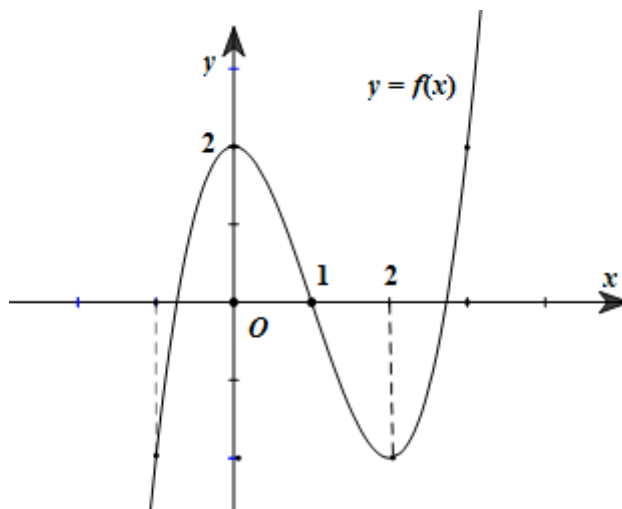
Với $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \Rightarrow f'\left(x + \frac{1}{x}\right) > 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra bất phương trình $g'(x) < 0$ có tập nghiệm là $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm tối đa của phương trình $|f'(x)| = m$ với m là tham số thực.

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

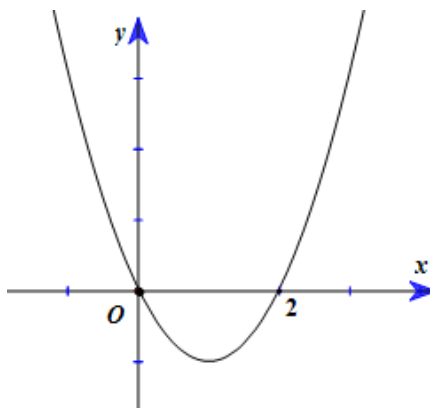
Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra:

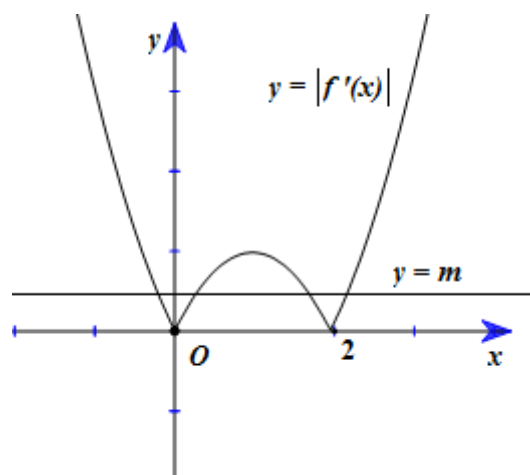
+ $f'(x) = 0$ có hai nghiệm là $x = 0; x = 2$

+ Hệ số của x^3 trong biểu thức của hàm số $y = f(x)$ mang dấu dương

Do đó đồ thị hàm số $y = f'(x)$ phải có dạng:

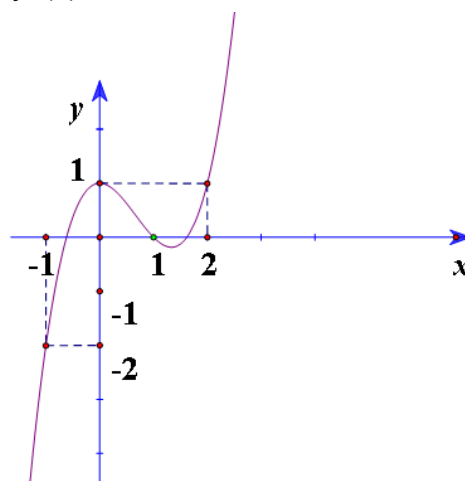


Suy ra đồ thị hàm số $y = |f'(x)|$ có dạng:



Từ đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = m$ có tối đa 4 điểm chung với đồ thị hàm số $y = |f'(x)|$ nên phương trình có tối đa 4 nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Cho hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$, phương trình $g'(x) = 0$ có số nghiệm là?

A. 1

B. 2

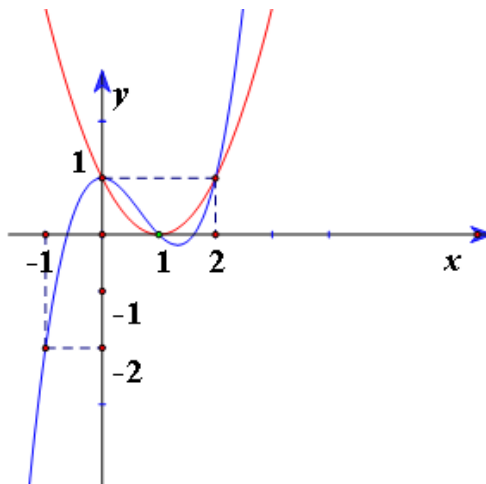
C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn C

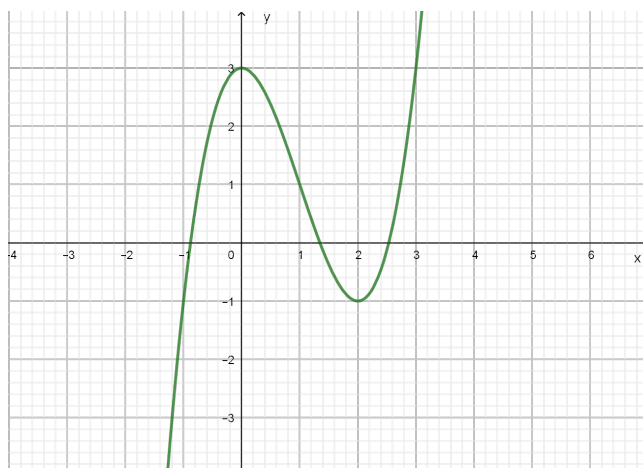
Ta có hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x) = f'(x) - (x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x)$ và $y = (x-1)^2$.



Từ đồ thị suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm. Đáp án

C.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(f(x))$. Xác định số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 5.

B. 6.

C. 8.

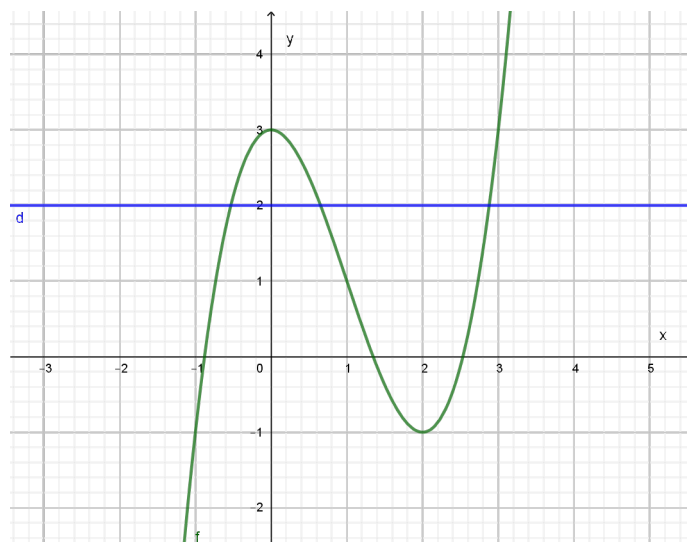
D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (f(f(x)))' = f'(x) \cdot f'(f(x))$ nên:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = 2 \text{ (2)} \end{cases}$$

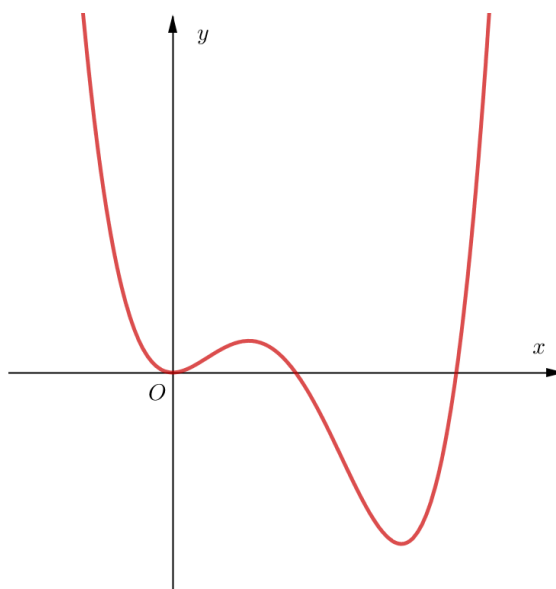


PT (1) có ba nghiệm khác 0 và 2

PT (2) có ba nghiệm khác 0 và 2

Vậy số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là 8 nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $-2 < f''\left(-\frac{b}{4a}\right) < -1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-8; 2019]$ để phương trình $f''(x)[f''(x) - m] = 0$ có bốn nghiệm phân biệt?



A. 2022.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2021.

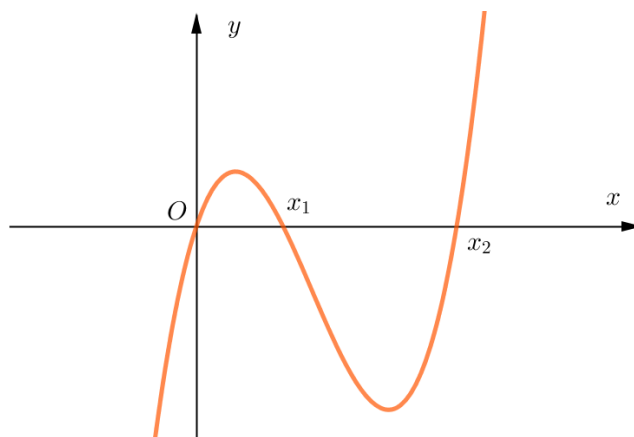
Lời giải

Chọn B

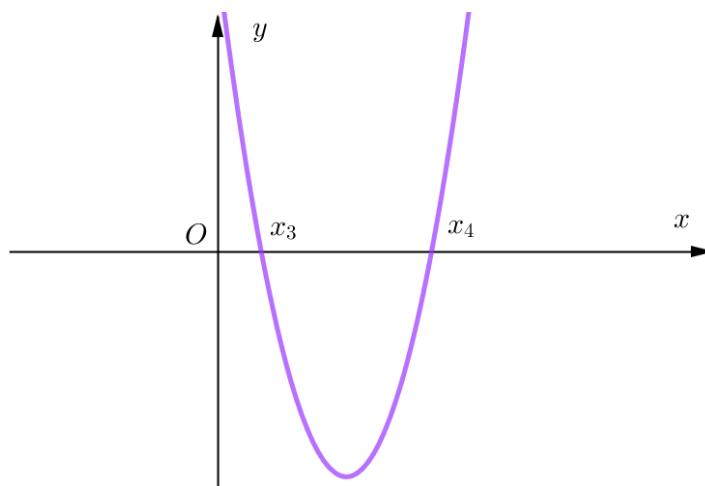
Từ đồ thị suy ra $a > 0$ và hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị là $0, x_1, x_2$. Do vậy, phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $0, x_1, x_2$.

Ta có $y' = f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Rightarrow y'' = f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$.

Đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ có dạng sau:



Từ đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ suy ra phương trình $f''(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 nên đồ thị hàm số $y'' = f''(x)$ là một parabol có dạng sau:



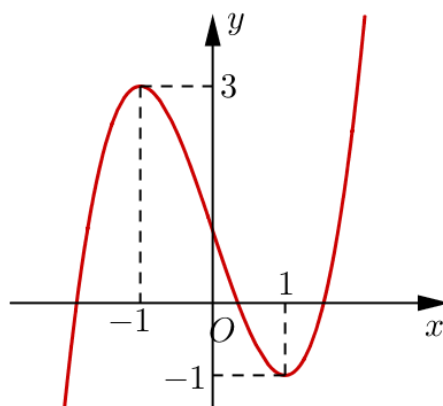
Ta có $f''(x)[f''(x) - m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f''(x) = m \end{cases}$.

Phương trình $f''(x)[f''(x) - m] = 0$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $f''(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_3, x_4 \Leftrightarrow$ parabol $y'' = f''(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ khác x_3, x_4 .

Tung độ đỉnh của parabol $y'' = f''(x)$ là $f''\left(-\frac{b}{4a}\right)$ nên phương trình $f''(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > f''\left(-\frac{b}{4a}\right), (m \neq 0)$ mà $-2 < f''\left(-\frac{b}{4a}\right) < -1$ và m nguyên thuộc $[-8; 2019]$ nên $-1 \leq m \leq 2019, (m \neq 0)$

Vậy có 2020 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 8. Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi phương trình $f'(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

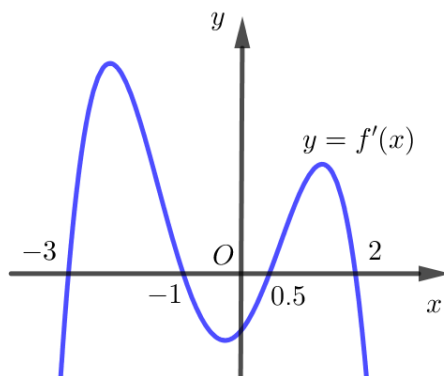
Ta có

$$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = -1 & (1) \\ x^3 - 3x + 1 = 1 & (2) \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm và phương trình (2) có 3 nghiệm. Các nghiệm của 2 phương trình này không trùng nhau. Do đó phương trình $f'(f(x)) = 0$ có 5 nghiệm.

Dạng 8: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = 0; f(u(x)) = 0; f(x) = g(x); f(u(x)) = g(v(x)) \dots$.

- Câu 1.** Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex - m$ với $a, b, c, d, e, m \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đồ thị của $y = f'(x)$ cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ -3 ; -1 ; $0,5$ và 2). Hỏi phương trình $f(x) = -m$ có mấy nghiệm phân biệt.



- A. 3. B. 1. **C. 5.** D. 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có

$$f'(x) = a(x+3)(x+1)(2x-1)(x-2) = a(2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6).$$

$$\Rightarrow f(x) = \int a(2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6) dx = a\left(\frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x\right) - m.$$

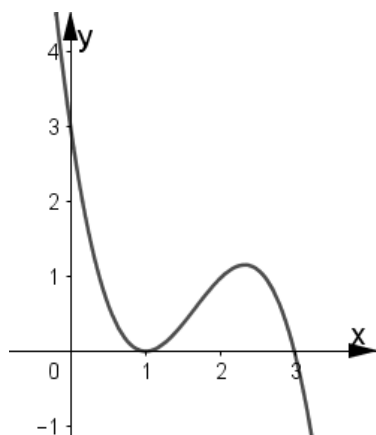
Giải phương trình :

$$f(x) = -m \Leftrightarrow \frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{2}{5}x^4 + \frac{3}{4}x^3 - 4x^2 - \frac{7}{2}x + 6 = 0 \quad (1) \end{cases}.$$

Ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt.

- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(3) < 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới



Phương trình $f(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

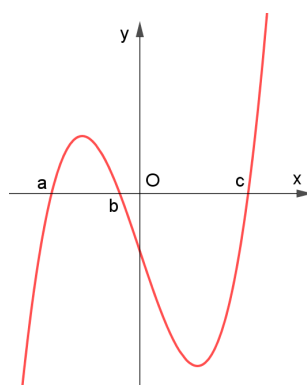
Chọn A

Từ đồ thị hàm số đã cho, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	+	0	-	
y	$-\infty$				$y(3)$		$-\infty$

Qua BBT và $f(3) < 0$ ta thấy phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ, biết $f(a) = 0$. Phương trình $f(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } S_1 = \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

$$S_2 = -\int_b^c f'(x) dx = -f(x) \Big|_b^c = f(b) - f(c).$$

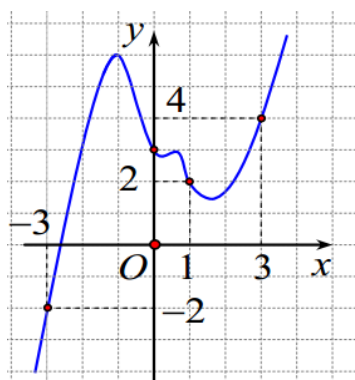
$$\text{Vì } S_1 < S_2 \Rightarrow f(b) - f(a) < f(b) - f(c) \Rightarrow f(a) > f(c).$$

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$ như sau:

x	a		b		c		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$							

Vì $f(a) = 0$ do đó từ bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(1) = 6$ và $g(x) = f(x) - \frac{(x+1)^2}{2}$. Kết luận nào sau đây là đúng?



- A. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3; 3]$.
 B. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3; 3]$.
 C. Phương trình $g(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $[-3; 3]$.
 D. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = f'(x) - (x+1)$.

Ta thấy đường thẳng $y = x+1$ là đường thẳng đi qua các điểm $(-3; -2), (1; 2), (3; 4)$.

Do $f(1) = 6 \Rightarrow g(1) = 4$.

Từ hình vẽ ta thấy:

$$\int_{-3}^1 f'(x) dx > 6 \Rightarrow f(1) - f(-3) > 6 \Rightarrow f(-3) < 0 \Rightarrow g(-3) = f(-3) - 2 < 0.$$

$$\int_1^3 f'(x) dx > 2 \Rightarrow f(3) - f(1) > 6 \Rightarrow f(3) > 8 \Rightarrow g(3) = f(3) - 8 > 0.$$

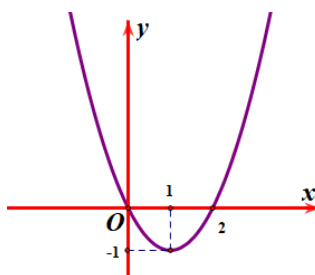
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x+1$ cùng với các kết quả trên ta có bảng biến

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$g'(x)$			+	-	
$g(x)$			4		

thiên sau:

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, có đồ thị $y = f'(x)$ như hình dưới đây



Biết $f(0) = 0$. Khi đó số nghiệm của phương trình $f(x^2 - x) = 0$ là:

- A. 2. **B. 4.**
C. 3. D. 6.

Lời giải:

Chọn B

***Cách 1:** Từ đồ thị ta có BBT sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			0		$f(2)$		$+\infty$

Từ BBT ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a > 2 \end{cases}$

Do đó $f(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \quad (1) \\ x^2 - x = a \quad (2) \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x - a = 0$, có $\Delta = 1 + 4a > 0, \forall a > 2$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và 1

Vậy PT $f(x^2 - x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

***Cách 2:** Từ đồ thị ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Đặt $g(x) = f(x^2 - x)$

Ta có $g'(x) = [f(x^2 - x)]' = (2x - 1)f'(x^2 - x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-1; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$

BBT:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-1)$	0	$g(\frac{1}{2})$	0	$g(2)$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy phương trình $g(x) = f(x^2 - x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

***Cách 3:** Từ GT ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ đồ thị ta có $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$;

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad (1)$$

Lại có $f'(1) = -1$ nên $3a + 2b = -1 \quad (2)$ Từ (1), (2) ta có $a = \frac{1}{3}; b = -1$

$$\text{Do đó } f'(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f(x) = \int (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$$

$$\text{Lại có } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \text{ do đó } f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$\text{Ta có } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } f(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ có 4 nghiệm.}$$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$					
		-3		5		$-\infty$

Phương trình $f(4x - x^2) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ có bao nhiêu nghiệm thực trên khoảng $(0; 4)$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$$

$$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x].$$

Với $x \in (0; 4)$ thì $4 - x > 0$; $0 < 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) \geq 0$.

Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0$, $\forall x \in (0; 4)$.

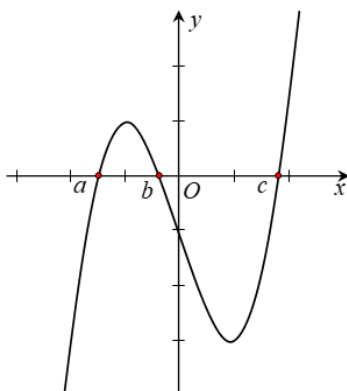
Bảng biến thiên

x	0	2	4
g'	+	0	-
g	$g(0)$	$g(2)$	$g(4)$

$$g(2) = f(4) + \frac{11}{3} = \frac{26}{3}; \quad g(0) = f(0) - 3 = -6; \quad g(4) = f(0) + \frac{7}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Suy ra phương trình $f(4x - x^2) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ có hai nghiệm thực trên khoảng $(0; 4)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a) > 0$, hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có thể cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 4 điểm.

B. 2 điểm.

C. 1 điểm.

D. 3 điểm.

Lời giải

Chọn B

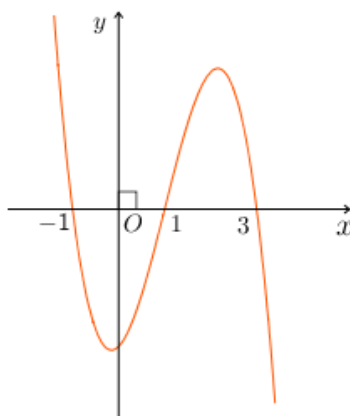
Theo hình vẽ ta có: $\int_a^c f'(x) dx = f(c) - f(a) < 0 \Leftrightarrow f(c) < f(a)$.

Từ đó, ta có thể lập được bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
y'	-	0	0	0	+
y	$+\infty$	$f(a) > 0$	$f(b) > 0$	$f(c)$	$+\infty$

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có thể cắt trục hoành tại nhiều nhất 2 điểm.

Câu 8. Cho hàm số bậc $y = f(x)$ thỏa mãn $f(-1) = f(3) = 0$, $f(1) = -1$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình dưới đây. Phương trình $(f(x))^3 = f(1)$ có bao nhiêu nghiệm thực



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

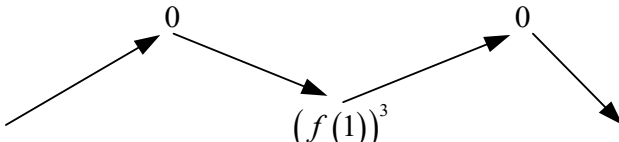
Chọn C

Từ đồ thị và giả thiết, ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	0	-
$f(x)$		0	$f(1)$	0	

Xét hàm số $y = (f(x))^3$ ta có $y' = ((f(x))^3)' = 3[f(x)]^2 \cdot f'(x)$.

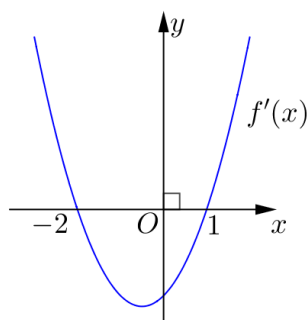
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = (f(x))^3$:

$\mathcal{X}$	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$
$2.[f(x)]^2.f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$
$y = (f(x))^3$							

Do $(f(1))^3 = f(1) = -1$

Vậy phương trình $(f(x))^3 = f(1)$ có 3 nghiệm phân biệt

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị hàm số $f'(x)$ như sau:



và $2018f(1) = 2019f(0)$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $f(x) = f'(x)$ có số phần tử là?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = 3a(x+2)(x-1) = 3a(x^2 + x - 2)$ và $a \neq 0$

Suy ra $f(x) = a\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x\right) + d$

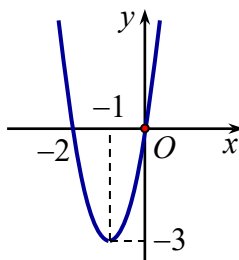
Theo đề bài $2018f(1) = 2019f(0) \Leftrightarrow 2018\left(-\frac{7a}{2} + d\right) = 2019d \Leftrightarrow d = -7063a$.

Vậy ta có $f(x) = f'(x)$

$\Leftrightarrow a\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x\right) - 7063a = 3a(x^2 + x - 2)$

$$\Leftrightarrow x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 9x - 7057 = 0. \text{ Vậy phương trình có 1 nghiệm.}$$

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ sau đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Hỏi phương trình $f(|x| - 3) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Dựa vào dữ kiện của bài toán ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
			0			$+\infty$
	$-\infty$				$f(0)$	

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x = -2$ và $x = x_0$ với $x_0 \in (0; +\infty)$.

$$\text{Do đó } f(|x| - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| - 3 = -2 \\ |x| - 3 = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ |x| = 3 + x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm(3 + x_0) \end{cases}.$$

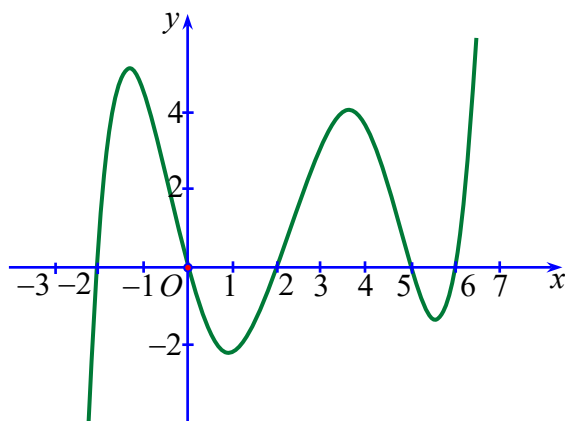
Vậy phương trình $f(|x| - 3) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(CÒN TIẾP PHẦN CUỐI)

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ (PHẦN CUỐI: TỪ DẠNG 9-12)

Dạng 9: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = m$; $f(u(x)) = m$; $f(x) = g(m)$; $f(u(x)) = g(m) \dots$

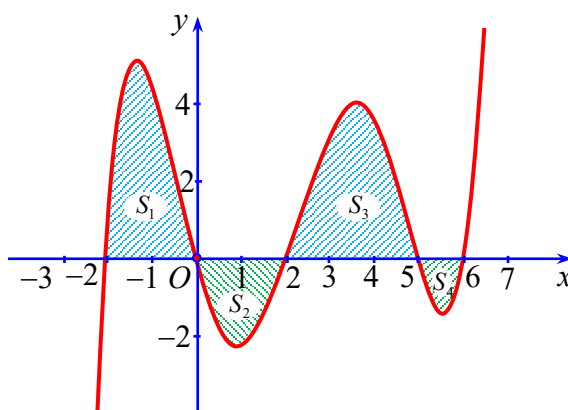
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in [-2; 6]$?



- A. $f(-2) \leq m \leq f(0)$. B. $f(-2) \leq m \leq f(5)$.
C. $f(5) \leq m \leq f(6)$. D. $f(0) \leq m \leq f(2)$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

$$\begin{aligned} \diamond \int_{-2}^0 f'(x) dx &> \int_0^2 -f'(x) dx \Leftrightarrow f(x) \Big|_{-2}^0 > f(x) \Big|_2^0 \\ \Leftrightarrow f(0) - f(-2) &> f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2) \\ \diamond \int_0^2 -f'(x) dx &< \int_2^5 f'(x) dx \Leftrightarrow f(x) \Big|_2^0 < f(x) \Big|_2^5 \\ \Leftrightarrow f(0) - f(2) &< f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5) \\ \diamond \int_2^5 f'(x) dx &> \int_5^6 -f'(x) dx \Leftrightarrow f(x) \Big|_2^5 > f(x) \Big|_6^5 \\ \Leftrightarrow f(5) - f(2) &> f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6) \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên

x	-2	0	2	5	6				
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0

The graph shows a function $f(x)$ plotted against x . The x-axis is marked with values -2, 0, 2, 5, and 6. The y-axis is labeled $f(x)$. The function starts at $f(-2)$, increases to a local maximum at $f(0)$, decreases to a local minimum at $f(2)$, increases to a local maximum at $f(5)$, and finally decreases to $f(6)$. Arrows indicate the direction of the function between these points.

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(-2) \leq m \leq f(5)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	4	$-\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Phương trình $f(x) - \cos \pi x - 2m = 0$ có nghiệm $x_0 \in (2; 3)$ khi và chỉ khi

A. $\frac{1}{2} f(2) \leq m \leq \frac{1}{2} f(3)$.

B. $\frac{1}{2} f(3) < m < \frac{1}{2} f(2)$.

C. $\frac{1}{2} f(2) < m < \frac{1}{2} f(3)$.

D. $\frac{1}{2} f(3) \leq m \leq \frac{1}{2} f(2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2m = f(x) - \cos \pi x$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \cos \pi x, \forall x \in (2; 3)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + \pi \sin \pi x$.

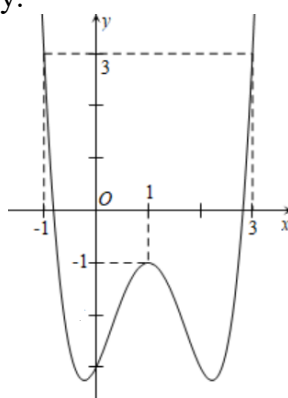
Do $(2; 3) \subset (1; 4)$ nên từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x) > 0, \forall x \in (2; 3)$.

Mặt khác $x \in (2; 3) \Rightarrow \pi x \in (2\pi; 3\pi) \Rightarrow \sin \pi x > 0$.

Vậy $g'(x) = f'(x) + \pi \sin \pi x > 0, \forall x \in (2; 3)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

Câu 3. Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc 5, có $f(1) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đối xứng qua đường thẳng $x = 1$ như hình dưới đây.



Biết phương trình $f(x+1) = m$ có nghiệm $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi $m \in [a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng

A. $-\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị (C) đã cho của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra được đồ thị (C') của hàm số $y = f'(x+1)$ bằng cách tịnh tiến (C) sang trái 1 đơn vị. Khi đó (C') đối xứng qua trục Oy và do nó là đồ thị hàm đa thức bậc 4, nên (C') là đồ thị hàm số trùng phương dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$. Ta có (C') lần

lượt đi qua các điểm $(0; -1); (2; 3); (-1; -3)$ nên lập hệ giải ra ta được $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

Suy ra $f'(x+1) = x^4 - 3x^2 - 1$ từ đó $f(x+1) = \frac{x^5}{5} - x^3 - x + C$. Lại có $f(1) = 0$ nên $C = 0$.

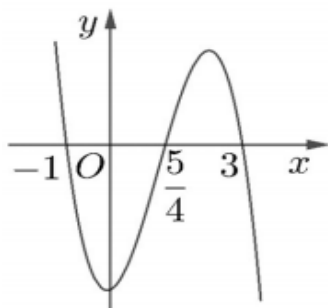
Vậy $f(x+1) = \frac{x^5}{5} - x^3 - x$.

Ta thấy $f'(x+1) = x^4 - 3x^2 - 1 < 0 \forall x \in [-1; 1]$ nên hàm số $f(x+1) = g(x) = \frac{x^5}{5} - x^3 - x$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$. Do đó phương trình $f(x+1) = m$ có nghiệm $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi $m \in [g(1); g(-1)]$ hay $m \in \left[-\frac{9}{5}; \frac{9}{5}\right]$ suy ra $a = -\frac{9}{5}; b = \frac{9}{5} \Rightarrow a + b = 0$.

x	2	3
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$g(2)$	$g(3)$

Vậy $g(2) < 2m < g(3) \Leftrightarrow f(2) + \sin 2\pi < 2m < f(3) + \sin 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(2) < m < \frac{1}{2}f(3)$.

Câu 4. Cho hàm số $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $h(x) = m^2 + m$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2.

B. 10.

C. 71.

D. 2022.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị có $h'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $m \neq 0$ và $m < 0$

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Mặt khác dựa vào đồ thị $y = h'(x)$ suy

$$ra h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) = 4m\left(x^3 - \frac{13}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}\right).$$

Đồng nhất hệ số ta có: $n = -\frac{13m}{3}$, $p = -m$, $q = 15m$.

Xét phương trình $h(x) = m^2 + m \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = m^2 + m$

$$\Leftrightarrow x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x = m + 1. \text{ Đặt } f(x) = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x.$$

Bảng biến thiên:

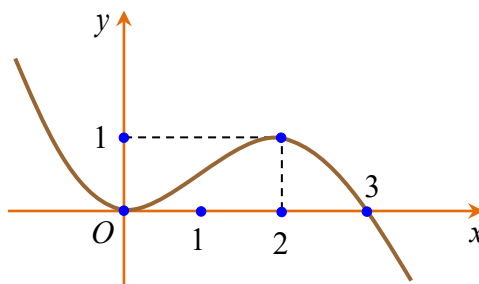
x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{8575}{768}$			0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có để phương trình $h(x) = m^2 + m$ có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\text{TH 1: } \frac{-32}{3} < m + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-35}{3} < m < -1 \Rightarrow m \in \{-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}.$$

$$\text{TH 2: } m + 1 > \frac{8575}{768} \Leftrightarrow m > \frac{7807}{768} \text{ (loại vì } m < 0\text{)}. \text{ Vậy ta có 10 giá trị } m \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Ta thấy rằng đây là hàm bậc 3 qua 0 không đổi dấu và qua 3 đổi dấu 1 lần. Nên suy ra

$$f'(x) = k \cdot x^2(x-3) \quad (k < 0) \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ nên } k < 0)$$

$$\text{Do } f'(2) = 1 \Rightarrow -4k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{-1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + e = -\frac{1}{4}x^3\left(\frac{1}{4}x - 1\right) + e.$$

Mà theo đề ta có phương trình

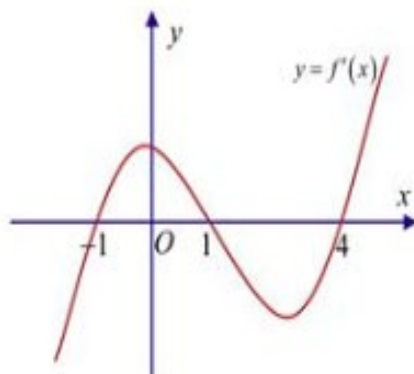
$$f(-x^2 + 2x + m) = e \Leftrightarrow (-x^2 + 2x + m)^3 \left(\frac{-x^2 + 2x + m}{4} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m = 0 & (1) \\ -x^2 + 2x + m - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) và (2) lần lượt có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 1 + m > 0 \\ \Delta_2 = 1 + m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5; 5] \end{cases} \Rightarrow m \in \{4; 5\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = -2$, $f(1) = 3$, $f(4) = -3$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Phương trình $f(x) - m + 2019 = 0$ có 1 nghiệm khi

A. $m = 2016$.

B. $m = 2017$.

C. $m = 2018$.

D. $m = 2019$

Lời giải

Chọn A.

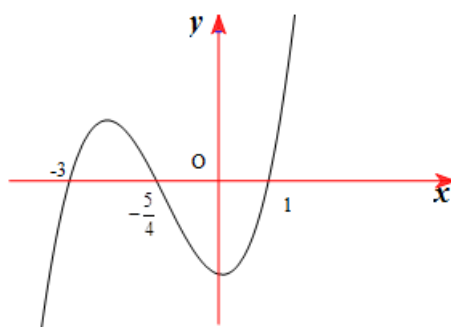
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và giả thiết ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	3	-3	$+\infty$

Ta có $f(x) - m + 2019 = 0 \Leftrightarrow f(x) = m - 2019$ (*).

Qua bảng biến thiên ta thấy để phương trình (*) có 1 nghiệm thì $m - 2019 = -3 \Leftrightarrow m = 2016$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m$ ($a, b, c, d, m \in \mathbb{R}, a \neq 0$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Phương trình $f(x) = m$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số có $f'(x) = 4a(x+3)\left(x+\frac{5}{4}\right)(x-1) = 4ax^3 + 13ax^2 - 2ax - 15a$.

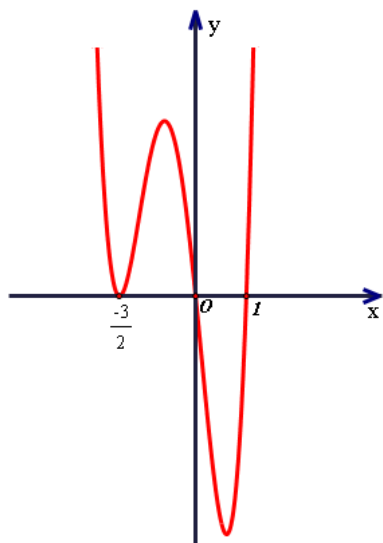
$$\Rightarrow f(x) = ax^4 + \frac{13}{3}ax^3 - ax^2 - 15ax + m.$$

$$f(x) = m \Leftrightarrow ax^4 + \frac{13}{3}ax^3 - ax^2 - 15ax + m = m \Leftrightarrow ax^4 + \frac{13}{3}ax^3 - ax^2 - 15ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^3 + \frac{13}{3}x^2 - x - 15\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{3} \\ x = -3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0$; $f(0) = 3$; $f(1) = 0$; $f(2) > 3$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như sau:



Với $m \in (0; 3)$ số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 - 3) = m$; (m là tham số thực), là

A. 3

B. 4

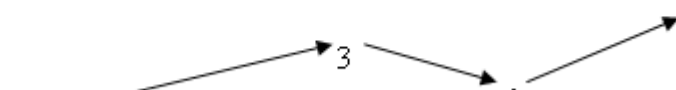
C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

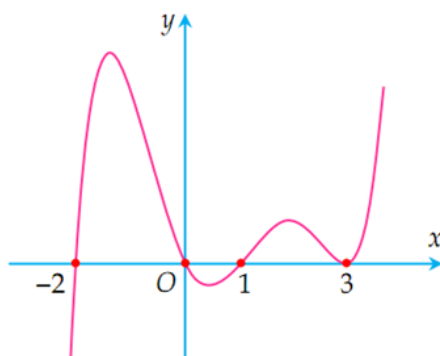
x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$								

Đặt $t = x^2 - 3 \Rightarrow t \geq -3$, ta có phương trình $\begin{cases} f(t) = m \\ m \in (0; 3) \end{cases}$ (*) có 3 nghiệm phân biệt, hơn nữa

do $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0; f(2) > 3$ nên phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt $t_1, t_2, t_3 \in \left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ (thỏa

mãn điều kiện) suy ra mỗi phương trình $t_i = x^2 - 3$; $t_i \in \left(-\frac{3}{2}; 2\right); i = 1, 2, 3$. đều có 2 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $f(x^2 - 3) = m$ có tất cả 6 nghiệm phân biệt với $m \in (0; 3)$

Câu 9. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f(x^2) = m$ (m là tham số thực) là?



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+	+
$f(x)$		$f(-2)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$	

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = m$ có tối đa hai nghiệm dương, do đó phương trình $f(x^2) = m$ có tối đa 4 nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) + f(5) = 2f(3)$ và có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2	3	x_3	4	$+\infty$
$f'(x)$		0		0		0		0	

Tập nghiệm của phương trình $f(x^2 - 1) = f(3)$ có bao nhiêu phần tử?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT của hàm số $y = f'(x)$ suy ra dấu của $f'(x)$ và có BBT của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$						

Lại có $f(0) + f(5) = 2f(3)$, mà $f(0) < f(3)$ nên $f(5) > f(3)$.

Mặt khác với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $x^2 - 1 \geq -1$, do đó $f(x^2 - 1) = f(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 3 \\ x^2 - 1 = a \ (4 < a < 5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{a+1} \end{cases}$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Dạng 10: Biết số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có chứa $f'(x); f''(x) \dots$

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = (x+1)(x^2-x)(x^2-4)(x^2-9)$. Hỏi phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$f(x) = (x+1)(x^2-x)(x^2-4)(x^2-9) = (x^3-x)(x^4-13x^2+36) = x^7-14x^5+49x^3-36x$$

$$f'(x) = 7x^6 - 70x^4 + 147x^2 - 36$$

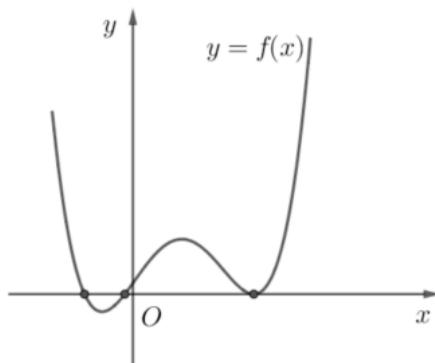
$$\text{Đặt } t = x^2, (t \geq 0)$$

$$\text{Xét hàm } g(t) = 7t^3 - 70t^2 + 147t - 36$$

Do phương trình $g'(t) = 21t^2 - 140t + 147 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt và $g_{CD} \cdot g_{CT} < 0, g(0) = -36 < 0$ nên $g(t) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Do đó $f'(x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$ có số phần tử là

A. 1.

B. 2.

C. 6.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$ (1)

Do $f(x) = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) và $f'(x_3) = 0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

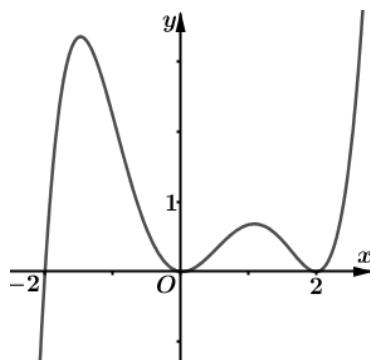
Ta có $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2, (a \neq 0)$

$$\text{Với } x \neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{2}{x-x_3} \right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2} - \frac{2}{(x-x_3)^2} = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x = x_3$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



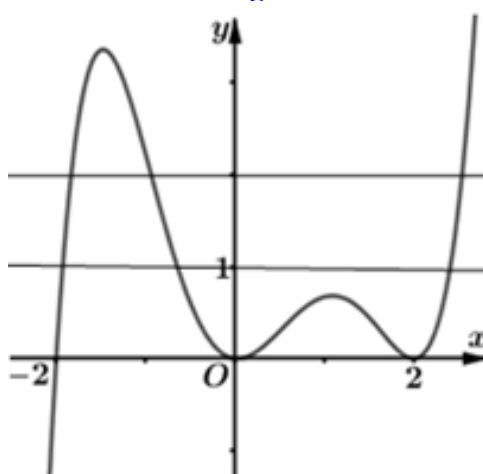
A. 10.

B. 12.

C. 8.

D. 14.

Lời giải



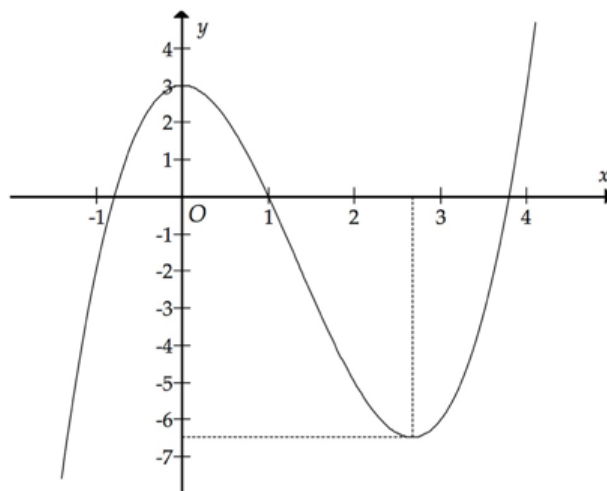
$$g(x) = f[f(x)] \Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)].$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = 0 \\ x = x_2 \in (1; 2) \\ x = 2 \\ f(x) = x_1 \in (-2; -1) \Leftrightarrow x = x_3 < -2 \\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 2\} \\ f(x) = x_2 \in (1; 2) \Leftrightarrow x \in \{x_4; x_5; x_6\}, x_3 < x_4 < x_5 < 0 < 2 < x_6 \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{x_7; x_8; x_9\}, x_4 < x_7 < x_8 < x_5 < x_6 < x_9 \end{cases}$$

Kết luận phương trình $g'(x) = 0$ có 12 nghiệm phân biệt.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

A. 8.

B. 2

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$.

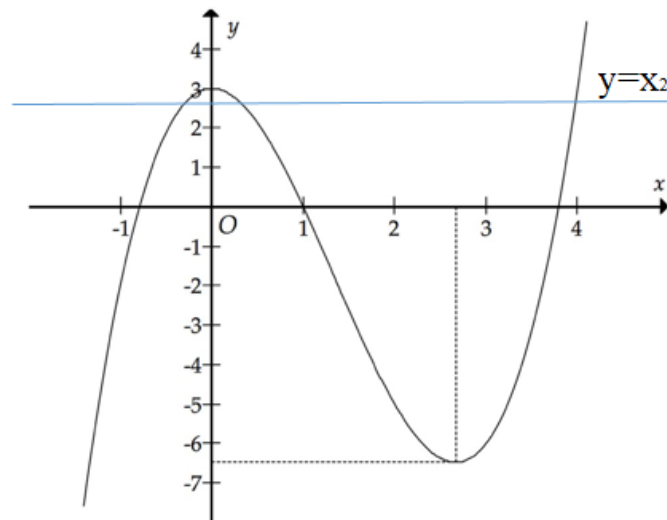
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'[f(x)] = 0 & (2) \end{cases}$$

❖ Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nên $f'(x) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 0$; x_2 với $2 < x_2 < 3$.

$$\text{❖ PT (2): } f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 = 0 \\ f(x) = x_2; 2 < x_2 < 3 \end{cases}$$

♦ Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thì $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

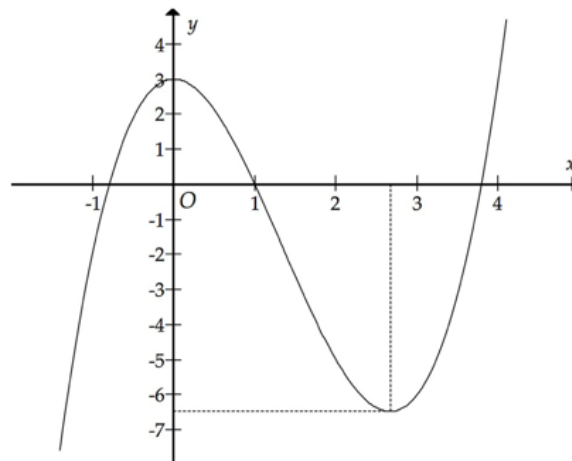
♦ Kẻ đường thẳng $y = x_2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = x_2$ có ba nghiệm phân biệt.



Nên phương trình (2) có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 8 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x)2^{f(x)} \ln 2 - f'(x)3^{f(x)} \ln 3 = f'(x)[2^{f(x)} \ln 2 - 3^{f(x)} \ln 3]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2^{f(x)} \ln 2 = 3^{f(x)} \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = \log_{\frac{2}{3}} \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx -1,1358 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nên $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

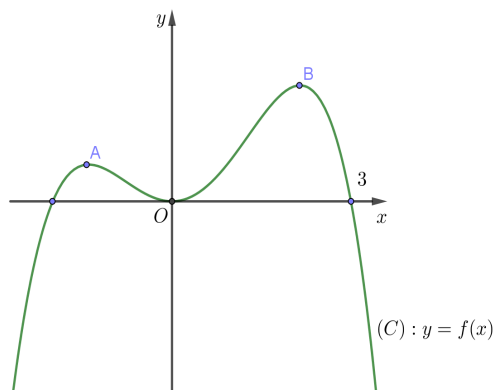
Kẻ đường thẳng $y = \log_{\frac{2}{3}} \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx -1,1358$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt nên

phương trình $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} \frac{\ln 3}{\ln 2}$ có ba nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm thực phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)$ có đồ thị (C) như hình dưới đây, trong đó A, B là các điểm cực đại của (C) , các tiếp tuyến của (C) tại các tiếp điểm thuộc cung AB đều không song song với hai đường thẳng đường thẳng $y = 2x$, $y = -2x$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$. Xét phương trình $f(|f'(x)|+1) = 0$ (*), khẳng định nào sau đây đúng?



A. (*) có đúng hai nghiệm.

C. (*) có ít nhất hai nghiệm.

B. (*) có đúng ba nghiệm.

D. (*) có đúng ba nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) = 0$ có ba nghiệm trong đó có một nghiệm dương là 3.

Do $|f'(x)|+1 \geq 1$ nên $f(|f'(x)|+1) = 0 \Leftrightarrow |f'(x)|+1 = 3$. Tức $\begin{cases} f'(x) = 2 \\ f'(x) = -2 \end{cases}$.

Gọi x_A, x_B lần lượt là hoành độ của A, B. Do $f'(x)$ liên tục nên ta có:

$$+ \begin{cases} f'(x_A) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \exists x_1 \in (-\infty; x_A) \text{ sao cho } f'(x_1) = 2.$$

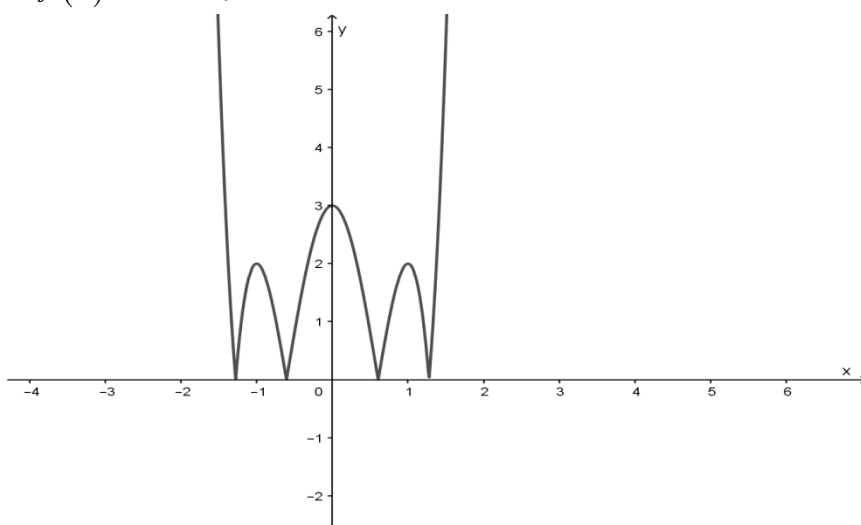
$$+ \begin{cases} f'(x_B) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \exists x_2 \in (x_B; +\infty) \text{ sao cho } f'(x_2) = -2.$$

+ Các tiếp tuyến của (C) tại các tiếp điểm thuộc cung AB đều không song song với hai đường

thẳng đường thẳng $y = 2x$, $y = -2x$ chứng tỏ $\begin{cases} f'(x) \neq 2 \\ f'(x) \neq -2 \end{cases} \forall x \in [x_A; x_B]$.

Tóm lại, (*) có ít nhất hai nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$, biết $g(x) = f^3(x) - f^2(x) + 8$.

A. 13.

B. 15.

C. 17.

D. 19.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 3 \cdot f'(x) \cdot f^2(x) - 2 \cdot f'(x) \cdot f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta được

+ Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $-1; 0; 1$

+ Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

+ Phương trình $f(x) = \frac{2}{3}$ có 8 nghiệm phân biệt (để tìm nghiệm phương trình $f(x) = \frac{2}{3}$ ta kẻ

đường thẳng $y = \frac{2}{3}$, thấy đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 8 điểm phân biệt)

Vậy phương trình có tất cả 15 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($ac \neq 0; ad - bc \neq 0; a, b, c, d \in \mathbb{Q}$). Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$, biết $g(x) = e^{f(x)} - e^{3f(x)}$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải: Đáp án A.

Tập xác định $g(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

Ta có: $g'(x) = f'(x)e^{f(x)} - 3f'(x)e^{3f(x)}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} - 3f'(x)e^{3f(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ e^{f(x)} - 3e^{3f(x)} = 0 & (2) \end{cases}$$

+) Giải (1) vô nghiệm

$$\text{+) Giải (2): } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{f(x)} = 0 & (3) \\ 1 - 3e^{2f(x)} = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Ta có (3) vô nghiệm. PT(4) } \Leftrightarrow \begin{cases} e^{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3}} & (5) \\ e^{f(x)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} (VN) \end{cases}$$

Từ (5) ta có $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{3}}$ Dựa vào dạng đồ thị của $f(x)$ ta có PT chỉ có 1 nghiệm

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại tất cả bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 1.

B. 6.

C. 0.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = 0$ có các nghiệm: $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$.

Áp dụng định lý Lagrange lần lượt trên các đoạn: $[0; 1]; [1; 2]; [2; 3]; [3; 4]; [4; 5]; [5; 6]; [6; 7]$.

Chẳng hạn xét trên đoạn $[0;1]$ thì tồn tại x_1 sao cho:

$f'(x_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_1) = f(1) - f(0) = 0$. Suy ra $x = x_1$ là một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

Làm tương tự vậy các khoảng còn lại ta suy ra $f'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt hay đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 7 điểm phân biệt.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Biết phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Số nào sau đây là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$

- A. $x_1 + x_2$ B. $\frac{x_1 - x_2}{2}$.
 C. $\frac{x_1 + x_2}{2}$. D. $x_1 - x_2$.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc 3 và phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành, tức là trong 2 nghiệm $x_1; x_2$ có 1 nghiệm kép. Không mất tính tổng quát giả sử nghiệm kép là x_2 .

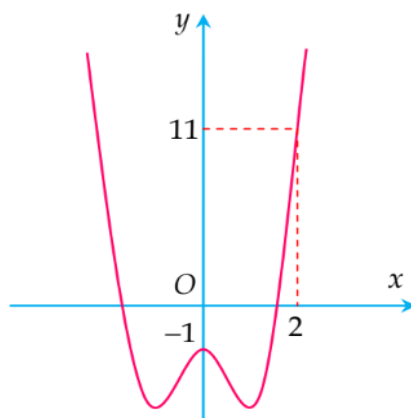
Khi đó ta có: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)^2$

$$\Rightarrow f'(x) = (x - x_2)(2x - x_1 - x_2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \\ x = \frac{x_1 + x_2}{2} \end{cases}$$

Vì $x_1; x_2$ phân biệt nên $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Ta chọn **B**.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ và thỏa mãn đẳng thức sau: $f(x+1) - f(x) = 2x(2x+1)(x+1)$. Cho hàm số $g(x) = mx^2 + nx + p$ và $f(x) = g(x^2 - 1)$. Tìm nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



- A. $-\frac{1}{2}$. B. -2 . C. $-\frac{1}{4}$. D. -4 .

Lời giải

Chọn C

Với $x = 0$ thì $f(1) = f(0)$.

Vì $f(1) = f(0)$ và đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ đi qua $(0; -1)$, $(2; 11)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(1) = f(0) \\ f(0) = -1 \\ f(2) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = c \\ c = -1 \\ 16a + 4b + c = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x^4 - x^2 - 1$.

Ta có $f(x) = g(x^2 - 1) \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = m(x^2 - 1)^2 + n(x^2 - 1) + p$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = mx^4 + (-2m + n)x^2 + (m - n + p)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ -2m + n = -1 \\ m - n + p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ p = -1 \end{cases}$$

Do đó $g(x) = x^2 + x - 1$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x) \cdot f''(x) = [f'(x)]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3 .

Xét $g(x) = 2f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2$

$$\Rightarrow g'(x) = 2[f'(x) \cdot f''(x) + f(x) \cdot f'''(x)] - 2f'(x) \cdot f''(x) = 2f(x) \cdot f'''(x) = 6f(x).$$

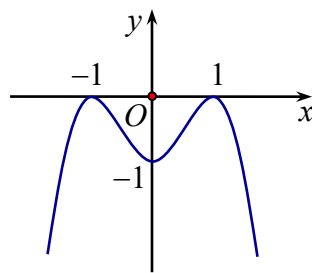
$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất 4 nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ



Tìm số nghiệm của phương trình $\left([f(x^2)]^2\right)' = 0$

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn A.

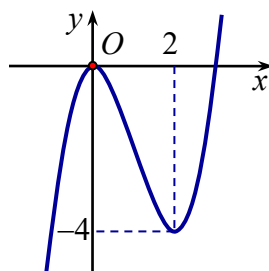
Ta có

$$\left([f(x^2)]^2\right)' = 0 \Leftrightarrow 4x \cdot f(x^2) \cdot f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2) = 0 \\ f'(x^2) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \pm 1 \\ x^2 = \pm 1, x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình 3 nghiệm.

Câu 14. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình

$$\left(f[f(x^2 - 1)]\right)' = 0.$$



A. 5.

B. 3.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left(f[f(x^2 - 1)]\right)' = 0, \left(f[f(x^2 - 1)]\right)' = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2 - 1) \cdot f[f(x^2 - 1)] = 0;$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = 0 \\ f[f(x^2 - 1)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 2 \\ f(x^2 - 1) = 0 \\ f(x^2 - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = a \in (2; +\infty) \\ x^2 - 1 = b \in (a; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \\ x = \pm \sqrt{a+1}, a+1 \in (3; +\infty) \\ x = \pm \sqrt{b+1}, b+1 \in (a+1; +\infty) \end{cases}$$

Vậy phương trình có 9 nghiệm.

Dạng 11: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x) \geq g(x); f(u(x)) \geq g(x) (>, <, \leq) \dots$ có thể có tham số.

1. Lý thuyết:

Loại 1: Không chứa tham số (đề thường yêu cầu về tập nghiệm của bất phương trình)

Phương pháp giải:

- Chuyển bất phương trình về $f(x) \geq g(x)$ 1 vế và lập bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ và xét dấu của hàm số $y = g'(x)$

Lưu ý: 1) Hàm số $y = f(x); y = g(x)$ cùng đồng biến(nghịch biến) trên K thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ đồng biến(nghịch biến) trên K

2) Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến(nghịch biến) trên K thì:

+ Hàm số $y = \sqrt[n]{f(x)}$ đồng biến(nghịch biến) trên K

+ Hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ với $f(x) > 0$ nghịch biến(đồng biến) trên K

+ Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến(đồng biến) trên K

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và vẽ đồ thị của hàm số $y = g(x)$ để kết luận nghiệm.

- Đặt $t = u(x)$, xác định điều kiện của biến t . Biến đổi $f(u(x)) \geq g(x)$ thành $f(t) \geq h(t)$ sau đó làm tương tự như trên.

Loại 2: Chứa tham số (thường yêu cầu tìm điều kiện của m để bất phương trình có nghiệm hoặc có nghiệm với $x \in \mathbb{R}$)

Cô lập tham số m biến đổi đưa về dạng

$$f(x, m) \geq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow g(x) \geq h(m), \forall x \in K \Leftrightarrow \min_K g(x) \geq h(m)$$

$$f(x, m) \leq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow g(x) \leq h(m), \forall x \in K \Leftrightarrow \max_K g(x) \leq h(m)$$

$$f(x, m) \geq 0 \text{ có nghiệm trên } K \Leftrightarrow f(x, m) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq h(m), \forall x \in K \Leftrightarrow \max_K g(x) \geq h(m)$$

$$f(x, m) \leq 0 \text{ có nghiệm trên } K \Leftrightarrow f(x, m) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq h(m), \forall x \in K \Leftrightarrow \min_K g(x) \leq h(m)$$

Chú ý: Đối với các bất phương trình $f(x, m) > 0, f(x, m) < 0$ làm tương tự tuy nhiên ở bước cuối nếu $\max_K g(x), \min_K g(x)$ đạt tại $x_0 \notin K$ thì ta kết luận dấu $\leq, \geq$. Nếu

$\max_K g(x), \min_K g(x)$ đạt tại $x_0 \in K$ thì ta kết luận dấu $<, >$.

2. Bài tập:

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			-1			-2		$+\infty$

Tập nghiệm của phương trình là $3f(x) \geq 3e^{x^2} - 6$ là

A. $(-2019; 0)$.

B. $(-1; +\infty)$

C. $[-1; 1]$

D. 1 đáp án khác

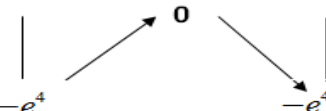
Lời giải

Chọn D

Ta có: $3f(x) \geq 3e^{x^2} - 6 \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2} + 2 \geq 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - e^{x^2} + 2$. Ta thấy $g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2}$

Dựa vào bản biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = -e^{x^2} + 2$ ta được, Bảng biến thiên hàm số $g(x) = f(x) - e^{x^2} + 2$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+
$-2x.e^{x^2}$		+		+	0	-		-
g'(x)	chưa xác định dấu			+	0	-		chưa xác định dấu
g(x)	...						...	
			$-e^4$				$-e^4$	

Dựa vào bảng biến thiên trên của hàm số $g(x) = f(x) - e^{x^2} + 2$. Ta thấy $\forall x \in (-1; 1)$. hàm số $g(x) = f(x) - e^{x^2} + 2 < 0$. Vậy các đáp án A, B, C đều có các khoản tại đó hàm số âm nên không thể là nghiệm của phương trình $f(x) - e^{x^2} + 2 \geq 0$.

Vậy đáp án là **D**.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	-2		

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(\sqrt{x-1}+1) \leq m$ có nghiệm?

A. $m \geq 1$

B. $m \geq -2$.

C. $m \geq 4$.

D. $m \geq 0$.

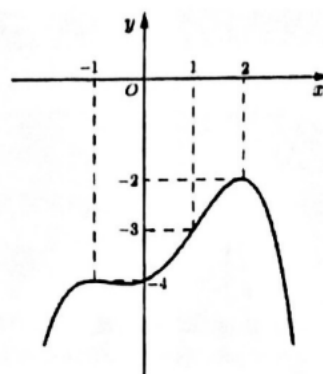
Lời giải

Chọn B

Đặt $t(x) = \sqrt{x-1}+1, t \geq 1$.

Bất phương trình trở thành $f(t) \leq m$ ($t \geq 1$) (*). Bất phương trình (*) có nghiệm với $t \geq 1$ thì $\min_{[1; +\infty)} f(t) \leq m$. Dựa vào BBT ta thấy $\min_{[1; +\infty)} f(t) = -2 \Rightarrow m \geq -2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

A. 10.

B. 4.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có bất phương trình $9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq -m^2 + 5m \quad (1).$$

+ Từ đồ thị suy ra $f(x) \leq -2, \forall x \Rightarrow 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 4, \forall x$ và $(4 - f^2(x)) \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq 0, \forall x$

+ Suy ra $9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq 4, \forall x \Rightarrow \max g(x) = 4.$

+ Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$. Vậy có 4 giá trị m nguyên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ có bảng biến thiên dưới đây. Biết rằng với $m > \alpha$ thì bất phương trình $(4 - x^2)(3 - \sqrt{4 - x^2}) < m + 6$ luôn đúng với mọi m . Hãy cho biết kết luận nào sau đây đúng?

A. α là số nguyên âm. **B.** α là số nguyên dương.

C. α là số hữu tỉ dương.

D. α là số vô tỉ.

Lời giải.

Chọn A.

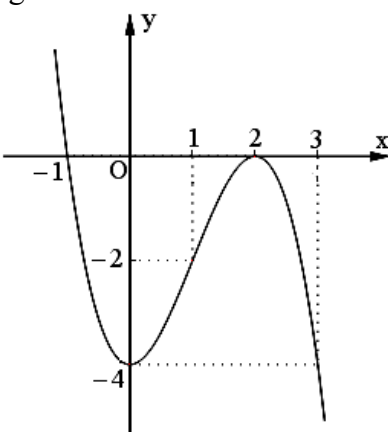
Đặt $t = \sqrt{4 - x^2}; 0 \leq t$

Khi đó bất phương trình

$$(4 - x^2)(3 - \sqrt{4 - x^2}) < m + 6$$

Tức là $f(t) < m + 2$ lu

$$\Leftrightarrow m + 2 > \max_{t \in [0; 2]} f(t) <$$



$$m + 2 \quad (*)$$

n thì (*) luôn đúng với mọi $t \in [0; 2]$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy cho biết tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq -2$?

A. $S = (-1; +\infty)$.

B. $S = [-1; +\infty)$.

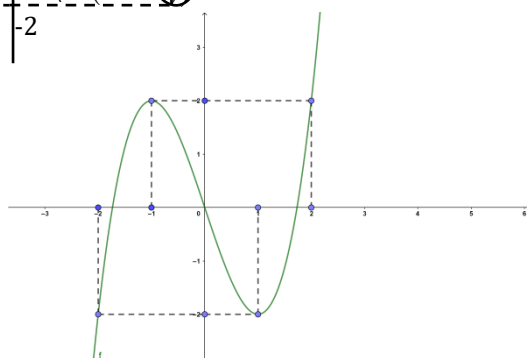
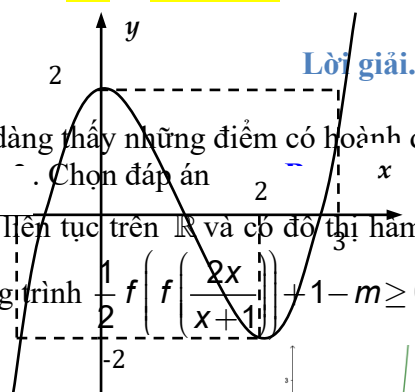
C. $S = (0; +\infty)$.

D. $S = [-2; +\infty)$.

Chọn B.

Nhìn vào đồ thị dễ dàng thấy những điểm có hoành độ lớn hơn hoặc bằng -1 đều có tung độ lớn hơn hoặc bằng -1 . Chọn đáp án

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\frac{1}{2} f\left(f\left(\frac{2x}{x+1}\right)\right) + 1 - m \geq 0$ có nghiệm là:



A. $m \leq 2$

B. $1 \leq m \leq 2$

C. $m \leq 1$

D. $m \leq -5$

Lời giải

Chọn A.

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$$x \in [-1; 1] \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$$

$$x \in [-2; 2] \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$$

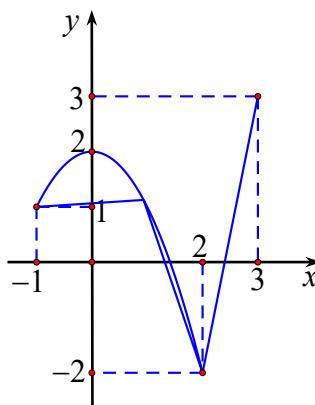
$$\text{Ta có: } \frac{2|x|}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \in [-2; 2] \Leftrightarrow \frac{1}{2}f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) + 1 \in [0; 2]$$

$$\frac{1}{2}f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) + 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) + 1 \geq m$$

Nên bpt có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq 2$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi

A. $m \leq 7$.

B. $m \geq 7$.

C. $m \leq 2\sqrt{2} - 2$.

D. $m \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(x+1+7-x)} = 4.$$

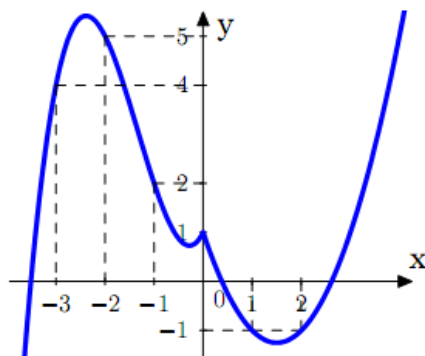
Dấu "=" xảy ra khi $1+x = 7-x \Leftrightarrow x = 3$.

$$\text{Ta có: } \max_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 3.$$

Do đó bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi

$$m \leq \max_{[-1;3]} (f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}) = 4 + 3 = 7. \text{ Vậy } m \leq 7.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết trên $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ thì $f'(x) > 0$.



Số nghiệm nguyên thuộc $(-10;10)$ của bất phương trình $f(x)(x^2 - x - 6) > -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ là

A. 9.

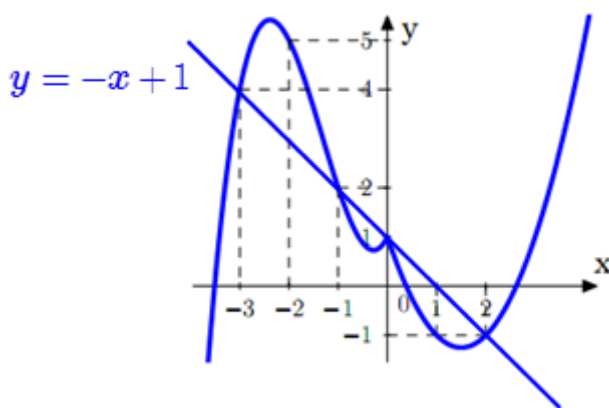
B. 10.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn C



Ta có $f(x)(x^2 - x - 6) > -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \Leftrightarrow [f(x) + x - 1](x^2 - x - 6) > 0$

+ Trường hợp 1 :

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ f(x) + x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \vee x > 3 \\ -3 < x < -1 \vee x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < -2 \vee x > 3$$

+ Trường hợp 2 :

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ f(x) + x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ x < -3 \vee -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

+ Từ hai trường hợp trên ta được các nghiệm nguyên thuộc $(-10;10)$ là $\{0;1;4;5;6;7;8;9\}$.

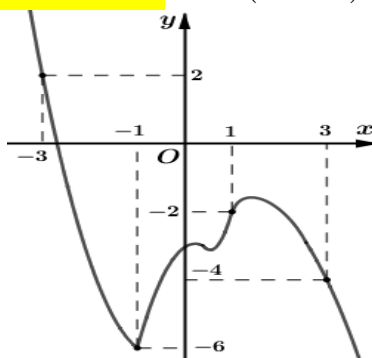
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình dưới và $g(x) = -x - 1$. Tập nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $f(x) > g(x)$.

A. $(-3;1)$.

B. $(-\infty; -3) \cup (1;3)$.

C. $(-\infty; -3)$.

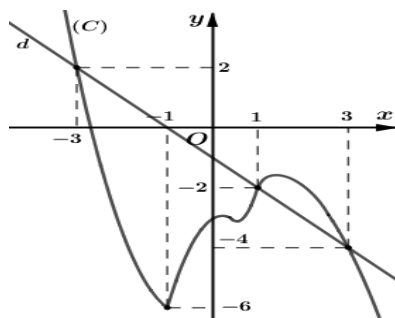
D. $(1;3)$.



Lời giải

Chọn B

Ta có số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = -x - 1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm các giá trị của x để đồ thị của hàm số $f(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = -x - 1$.

Đối chiếu các đáp án ta thấy đáp án **B** thỏa mãn.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	2	3	$-\infty$

Bất phương trình $(x^2 + 1).f(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi x trên $(-1; 2)$ là

A. $m > 15$

B. $m \leq 15$

C. $m \leq 2$

D. $m > 2$

Lời giải

Chọn C

Đặt: $g(x) = (x^2 + 1).f(x) \Rightarrow g'(x) = 2x.f(x) + (x^2 + 1).f'(x)$

Với $-1 < x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

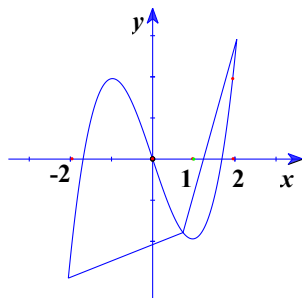
Với $0 < x < 2 \Rightarrow g'(x) > 0$

$g(0) = 2; g(-1) = 8; g(2) = 15$

Suy ra $\forall x \in (-1; 2) \Rightarrow 2 \leq g(x) < 15$

Yêu cầu bài toán ta được $\min_{[-1; 2]} g(x) \geq m \Leftrightarrow 2 \geq m$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có ĐTHS như hình vẽ



Bất phương trình $\frac{f(x)-x}{f(|x|)} \leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-6;8]$

A. 8.

B. 10.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

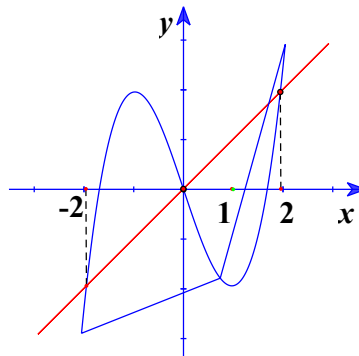
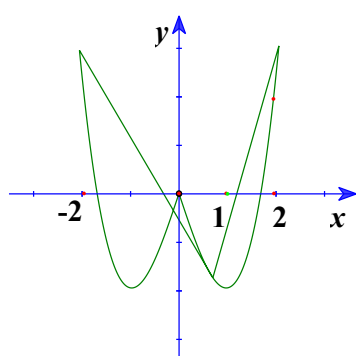
Ta giải các phương trình hoành độ giao điểm sau:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$f(|x|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Ta chia hai trường hợp và căn cứ vào đồ thị:



ĐTHS $f(|x|)$ Tương giao giữa đths $f(x)$ và đường thẳng $y = x$

$$\text{Th1: } \begin{cases} f(x) - x \geq 0 \\ f(|x|) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{Th2: } \begin{cases} f(x) - x \leq 0 \\ f(|x|) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ x < -\sqrt{3} \\ x > \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \Rightarrow x \in \{-6; -5; -4; -3; -2\} \\ \sqrt{3} < x \leq 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình trên có 7 nghiệm nguyên thuộc $[-6;8]$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Tìm m để bất phương trình $m^2 - f(x+4) - \frac{1}{3}x^3 \geq 0$ có nghiệm trên đoạn $[-5;1]$

A. $m \leq \frac{47}{64}$

B. $\frac{47}{64} < m < \frac{3}{2}$.

C. $m \leq -5$ hoặc $m \geq 5$

D. $-1 \leq m \leq 1$.

Lời giải

Chọn C

BPT $\Leftrightarrow m^2 \geq f(x+4) + \frac{1}{3}x^3$

Đặt $g(x) = f(x+4) + \frac{1}{3}x^3$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m^2 \geq \min g(x), \forall x \in [-5; -1]$

Ta có: $g'(x) = f'(x+4) + x^2$

Vì $-5 \leq x \leq -1$ nên $-1 \leq x+4 \leq 3$

Từ đó và quan sát bảng xét dấu thấy: $f'(x+4) \geq 0$

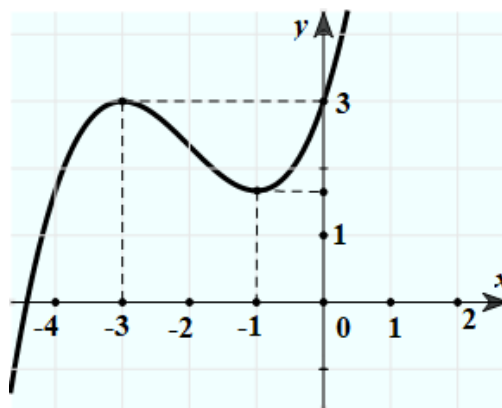
Suy ra $g'(x) = f'(x+4) + x^2 \geq 0, \forall x \in [-5; -1]$

x	-5	-1
$g(x)$	$g(-5)$	$g(-1)$

$\Rightarrow \min_{[-5; -1]} g(x) = g(-5) = 25$

Vậy $m^2 \geq 25 \Leftrightarrow m \geq 5$ hoặc $m \leq -5$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $f(m) \geq f(\sqrt{4-x^2}) + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{20}{3}$ có nghiệm.



A. 9

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(\sqrt{4-x^2}) + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{20}{3}$.

* Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

* $h'(x) = -\frac{x \cdot f'(\sqrt{4-x^2})}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 2x = -x \left(\frac{f'(\sqrt{4-x^2})}{\sqrt{4-x^2}} + 2 - x \right)$

$$N_x: \begin{cases} 2-x \geq 0, \forall x \in [-2; 2] \\ \sqrt{4-x^2} \geq 0, \forall x \in [-2; 2] \end{cases} \text{ và } y = f(x) \text{ đồng biến trên } (-1; +\infty) \text{ nên}$$

$$\frac{f'(\sqrt{4-x^2})}{\sqrt{4-x^2}} + 2-x > 0$$

* Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ trên $D = [-2; 2]$.

x	-2	0	2
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	3	$f(2) + \frac{20}{3}$	$\frac{16}{3}$

* Yêu cầu bài toán $f(m) \geq \min_{[-2;2]} h(x) = 3$

* Từ đồ thị $y = f(x)$ suy ra $f(m) \geq \min_{[-2;2]} h(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m \geq 0 \end{cases}$ kết hợp $m \in [-10; 10]$ và m nguyên nên có 12 giá trị của m .

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $(\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x})^3 - 6\sqrt{2+x-x^2} - 9 \leq m$ có nghiệm.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

A. 12

B. 13.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Chọn D

* ĐKXĐ: $-1 \leq x \leq 2$

* Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$. Với $-1 \leq x \leq 2$ thì $\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{6}$

* Ta có $t^2 = 3 + 2\sqrt{2+x-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{2+x-x^2} = t^2 - 3$

* Bất phương trình đã cho trở thành $m \geq t^3 - 3t^2 = f(t)$, $t \in [\sqrt{3}; \sqrt{6}]$.

* Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[\sqrt{3}; \sqrt{6}]$ là

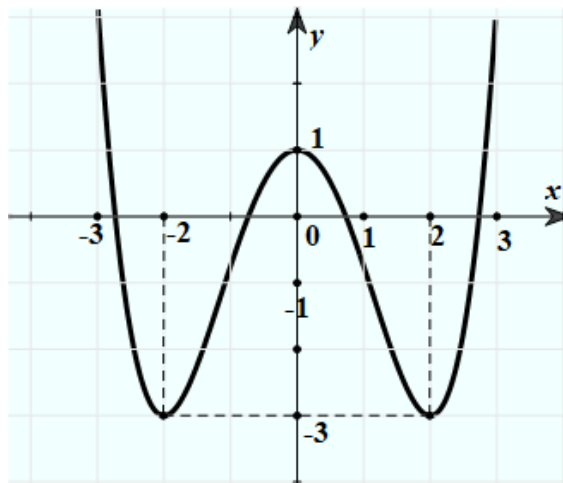
x	$-\infty$	0	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	0		-4		$+\infty$

* Yêu cầu bài toán $m \geq \min_{[\sqrt{3}; \sqrt{6}]} f(t) = -4$

* $m \geq -4$ kết hợp $m \in [-10; 10]$ và m nguyên nên có 15 giá trị của m .

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số các nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^3 + 3[f(x)]^2 + f(x) + 3} \leq 0 \text{ là.}$$



A. 1

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

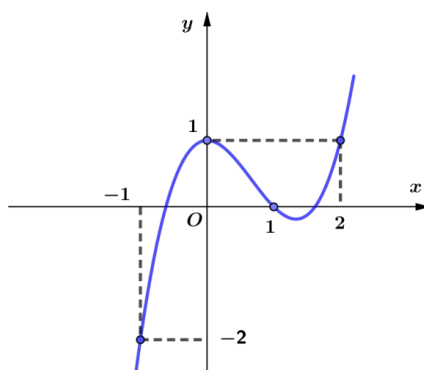
* Ta có $[f(x)]^3 + 3[f(x)]^2 + f(x) + 3 = (f(x) + 3)([f(x)]^2 + 1)$ và

$$f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow a(x - 2)^2(x + 2)^2 = 0, \text{ (với } a > 0, a \in \mathbb{R} \text{)}$$

* Do đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{x(x - 2)(x + 2)^2}{(x - 2)^2(x + 2)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 2$

* Kết hợp điều kiện nghiệm nguyên nên có $x \in \{0; 1\}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $f(x) - x + 1 \geq 0$.

A. $S = [-1; 1] \cup [2; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -1] \cup [1; 2]$.

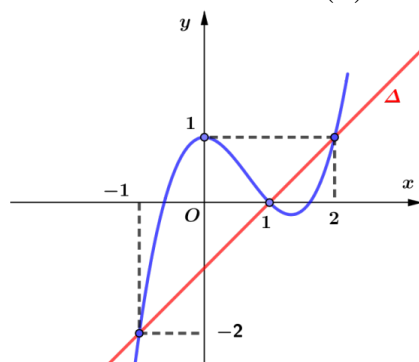
C. $S = [0; 1] \cup [2; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 0] \cup [1; 2]$.

Lời giải

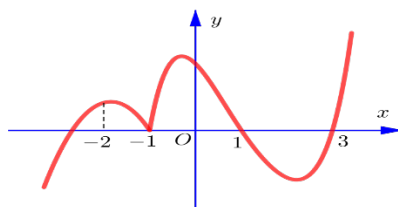
Chọn A

Ta có bất phương trình $f(x) - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x - 1$ nên nếu vẽ đường thẳng $\Delta: y = x - 1$ trên cùng hệ trục với đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì tập nghiệm S của bất phương trình đã cho là tập hợp hoành độ các điểm sao cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên đường thẳng Δ .



Dựa vào đồ thị ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-1; 1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $(mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1)f(x) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 2]$?

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Đặt $g(x) = mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1$.

Từ đồ thị của $y = f(x)$ ta thấy $f(x)$ đổi dấu khi qua $x = 1$ nên suy ra $g(x)$ cũng phải đổi dấu khi qua $x = 1$. Mặt khác $g(x)$ liên tục nên $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 1$.

Kiểm tra: Với $m = -1$. Ta có

$$g(x).f(x) = (-x + \sqrt{5-x^2} - 1)f(x) = (1-x)\left(\frac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}} + 1\right)f(x)$$

$$\text{Nhận xét: } \frac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}} + 1 = \frac{3+x+\sqrt{5-x^2}}{2+\sqrt{5-x^2}} > 0, \forall x \in [-2; 2].$$

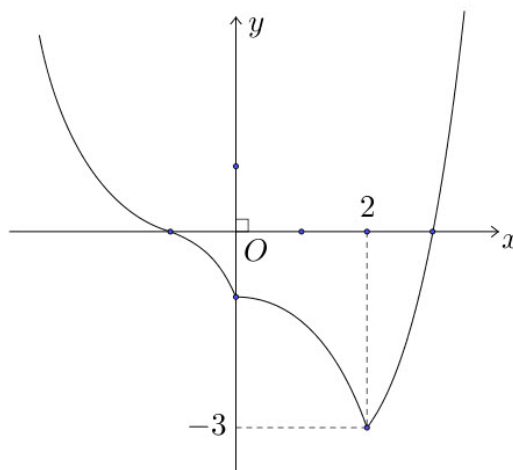
Khi đó quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy:

+ TH1: với $x \in [1; 2]$ thì $f(x) \leq 0$ nên $(1-x).f(x) \geq 0$.

+ TH2: với $x \in [-2; 1]$ thì $f(x) \geq 0$ nên $(1-x).f(x) \geq 0$.

Do đó trong cả hai trường hợp ta luôn có $g(x).f(x) \geq 0, \forall x \in [-2; 2]$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(x) + x^2 > 4x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$.

A. $m < -3$

B. $m < -10$.

C. $m < -2$.

D. $m < 5$.

Lời giải

Chọn B

BPT đã cho nghiệm đúng với $x \in (-1; 3) \Leftrightarrow f(x) > \frac{-x^2 + 4x + m}{2}$ đúng $\forall x \in (-1; 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x + m}{2} < -3, \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow -x^2 + 4x + m + 6 < 0, \forall x \in (-1; 3)$$

$$\Leftrightarrow m < x^2 - 4x - 6, \forall x \in (-1; 3)$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 4x - 6$ với $x \in (-1; 3)$

$$h'(x) = 2x - 4 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

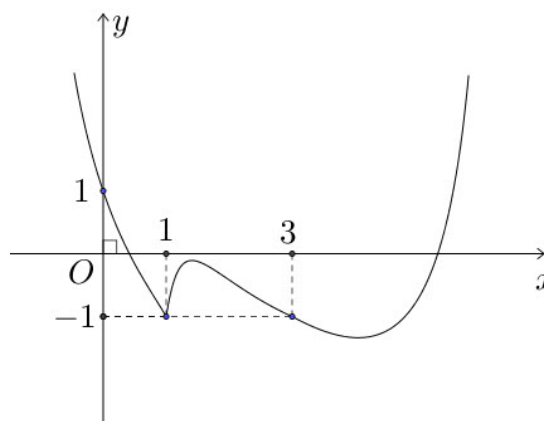
Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1		2		3
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	-1				-9

-10

Từ BBT suy ra $m < \min_{x \in (-1; 3)} h(x) \Leftrightarrow m < -10$.

Câu 19. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để bất phương trình $f(x) \leq \frac{m}{x^2 - 2x + 6}$ có nghiệm trên $[0; 3]$?

A. 9

B. 10.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) \leq \frac{m}{x^2 - 2x + 6} \text{ có nghiệm trên } [0; 3] \Leftrightarrow m \geq (x^2 - 2x + 6) \cdot f(x) \text{ có nghiệm } x \in [0; 3]$$

Xét hàm số $g(x) = (x^2 - 2x + 6) \cdot f(x)$ với $x \in [0; 3]$.

Ta có $|g(x)| = |x^2 - 2x + 6| \cdot |f(x)| \leq 9 \cdot 1 = 9, \forall x \in [0; 3]$ (dấu bằng xảy ra khi $x = 3$).

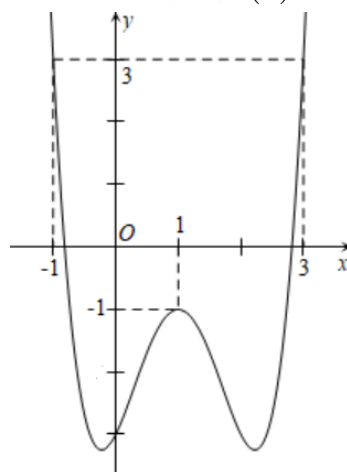
$$\Rightarrow \min_{[0; 3]} g(x) = -9.$$

Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm trên $[0; 3] \Leftrightarrow m \geq -9$.

Vì m nguyên âm nên $-9 \leq m \leq -1 \Rightarrow$ có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 12: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x) \geq g(x); f(u(x)) \geq g(x) (>, <, \leq) \dots$ có thể có tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi

A. $m > 3f(3)$.

B. $m \geq 3f(3)$.

C. $m > 3f(-1) + 4$.

D. $m \geq 3f(-1) + 4$.

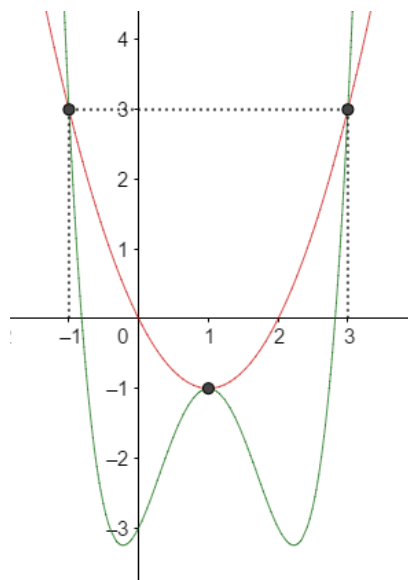
Chọn D

Ta có: $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x^2 \leq m$ với mọi $x \in (-1; 3)$.

Xét $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x^2$ với $x \in (-1; 3)$.

Khi đó: $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 6x = 3[f'(x) - x^2 + 2x]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 2x$.



Phương trình $g'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = -1; x = 3; x = 1$ trên đoạn $[-1; 3]$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [3f(x) - x^3 + 3x^2] = 3f(-1) + 4;$$

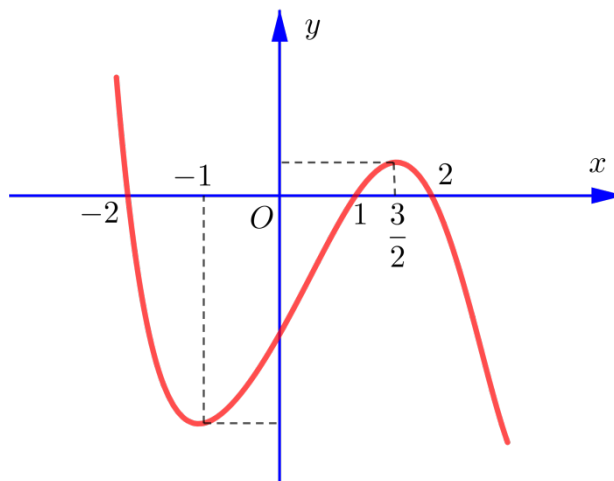
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [3f(x) - x^3 + 3x^2] = 3f(3).$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1	1	3
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	$3f(-1) + 4$	$3f(3)$	

Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi $m \geq g(x), \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m \geq 3f(-1) + 4$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình dạng như hình vẽ bên dưới.



Bất phương trình $f(x) + 2m - 1 \leq 0$ đúng với mọi số thực x khi và chỉ khi

A. $m < \frac{1}{2}$.

B. $m \leq \frac{1}{2}$.

C. $m \geq \frac{1}{2}$.

D. $m > \frac{1}{2}$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và giả thiết ta có BBT của hàm số $y = f(x)$ như sau:

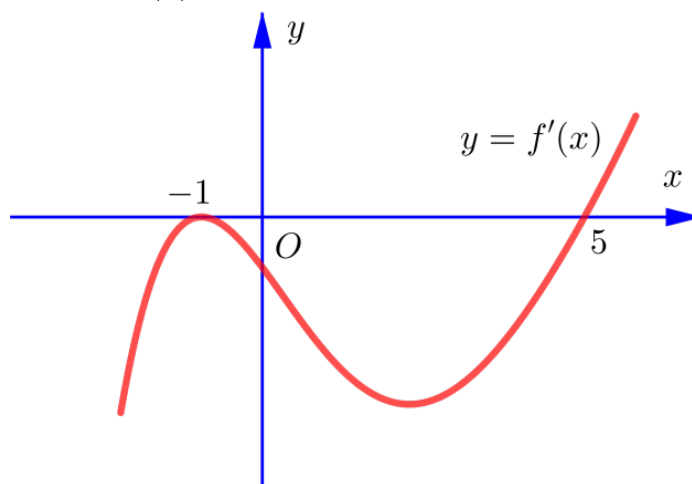
x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			0		0		0	

$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow f(1) \rightarrow 0 \rightarrow -\infty$

Ta có $f(x) + 2m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \geq f(x) (*)$.

Bất phương trình $[*]$ đúng với mọi số thực $x \Leftrightarrow 1 - 2m \geq \max_{\mathbb{R}} f(x)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Để hàm số $y = f(2x^3 - 6x + 3)$ đồng biến với mọi $x > m$ ($m \in \mathbb{R}$) thì $m \geq \sin \frac{b\pi}{c}$, trong đó

$a, b, c \in \mathbb{N}^*$. $c > 2b$. Tổng bằng $S = 2a + 3b - c$ bằng

A. -9 .

B. 7 .

C. 5 .

D. -2 .

Lời giải

Đặt $g(x) = f(2x^3 - 6x + 3)$. Ta có $g'(x) = 6(x^2 - 1)f'(2x^3 - 6x + 3)$.

$$\text{Hàm số } y = g(x) \text{ đồng biến khi } g'(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ f'(2x^3 - 6x + 3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 \geq 5 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ f'(2x^3 - 6x + 3) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 < 5 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x^3 - 6x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -1, 53) \cup (-1; -0, 35) \cup (1; 1, 88).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 2x^3 - 6x - 2 < 0 \end{cases}$$

Ta thấy $x \approx 1,88$ là nghiệm lớn nhất. Để hàm số $y = f(2x^3 - 6x + 3)$ đồng biến với mọi $x > m$ ($m \in \mathbb{R}$) thì $m \geq x \approx 1,88$. Ta sẽ tìm cách giải cụ thể giá trị $x \approx 1,88$ là nghiệm của $2x^3 - 6x - 2 = 0$ bằng phương pháp đổi biến lượng giác.

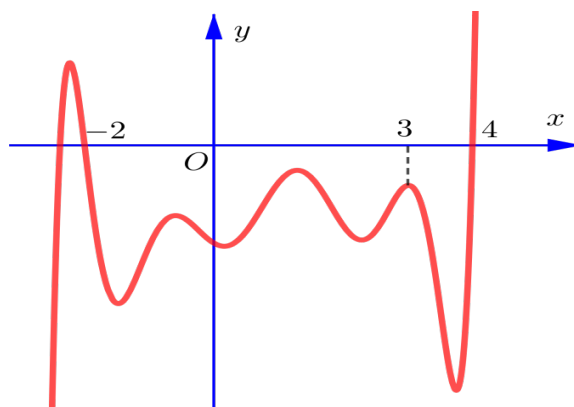
Đặt $x = 2\cos t \Rightarrow 8\cos^3 t - 6\cos t - 1 = 0 \Rightarrow \cos 3t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \pm \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$, với $t \in [0; 2\pi]$

ta được $t = \frac{\pi}{9}$ hoặc $t = \frac{17\pi}{9}$. Do đó $2\cos \frac{17\pi}{9} = a\sin \frac{b}{c}\pi = 2\sin \frac{-25}{18}\pi$ (không thỏa mãn đk)

hoặc $2\cos \frac{\pi}{9} = a\sin \frac{b}{c}\pi = 2\sin \frac{7}{18}\pi$ $a = 2, b = 7; c = 18 \Rightarrow S = 7$ (thỏa mãn).

$$\Leftrightarrow 1 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Chọn B.}$$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(x) \geq \frac{2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 + 27m}{27}$ nghiệm đúng với $x \in (-2; 3)$ mọi khi

A. $f(3) \leq m \leq f(3) + 1$. **B.** $f(-2) + 1 \leq m \leq f(3)$.

C. $f(-2) - 2 \leq m \leq f(3)$.

D. $f(3) \leq m \leq f(-2) - 2$.

Lời giải

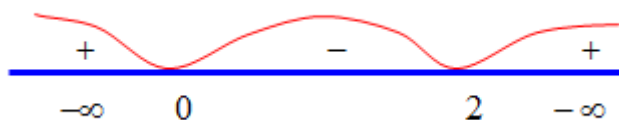
Ta có với $x \in (-2; 3)$ thì $f'(x) < 0$ Ta có $f(3) < f(x) < f(-2)$, $\forall x \in (-2; 3)$.

$f(3) - 2m < f(x) - m < f(-2) - m$ Đặt $t = f(x) - m \Rightarrow f(3) - m < t < f(-2) - m$

Ta có $f(x) \geq \frac{2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 + 27m}{27} \Leftrightarrow 2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 - 27(f(x) - m) \leq 0$

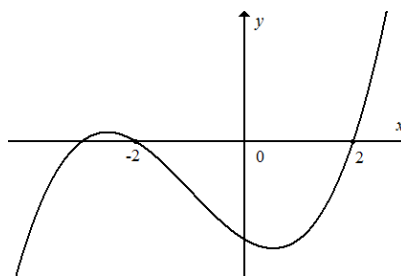
$2^t + 5^t - 27t - 2 \leq 0$. Về trái chỉ có 2 nghiệm $t = 0; t = 2$

Xét dấu



Ta có $0 \leq t \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(3) - m \geq 0 \\ f(-2) - m \leq 2 \end{cases} \Rightarrow f(-2) - 2 \leq m \leq f(3) \Rightarrow \text{Chọn C.}$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



Bất phương trình $f(x) > x^2 - 2x + m$ đúng với mọi $x \in (1; 2)$ khi và chỉ khi

- A.** $m \leq f(2)$. **B.** $m < f(1) - 1$. **C.** $m \geq f(2) - 1$. **D.** $m \geq f(1) + 1$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x) > x^2 - 2x + m, \forall x \in (1; 2) \Rightarrow g(x) = f(x) - x^2 + 2x > m, \forall x \in (1; 2)$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 < 0, \forall x \in (1; 2)$ do $\forall x \in (1; 2) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \\ 2x - 2 > 0 \end{cases}$

Vậy ta có: $\min_{x \in (1; 2)} g(x) = g(2) = f(2) \geq m$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A.** $m \geq f(0) - 1$. **B.** $m > f(-1) - e$. **C.** $m > f(0) - 1$. **D.** $m \geq f(-1) - e$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = e^{x^2}$

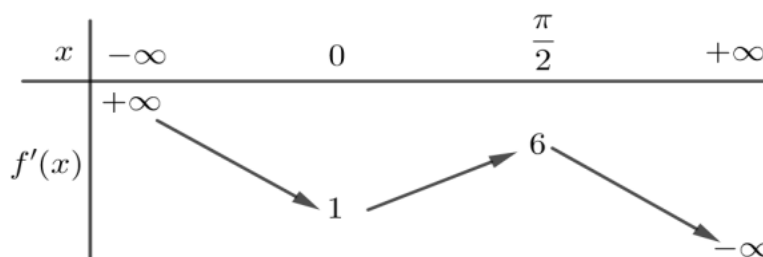
Do $x^2 \in [0; 1] \forall x \in (-1; 1)$ nên $g(x) = e^{x^2} \geq e^0 = 1$

Ta có $\max_{x \in (-1; 1)} f(x) = f(0), \min_{x \in (-1; 1)} g(x) = g(0) = 1$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1) \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2} < m,$

$\forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in (-1; 1)} [f(x) - e^{x^2}] = f(0) - 1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Bất phương trình $f(x) > 2^{\cos x} + 3m$ đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

- A.** $m \leq \frac{1}{3}[f(0) - 2]$. **B.** $m < \frac{1}{3}[f(0) - 2]$.

C. $m \leq \frac{1}{3} \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right]$. D. $m < \frac{1}{3} \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) > 2^{\cos x} + 3m \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) - 2^{\cos x} > 3m \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm $g(x) = f(x) - 2^{\cos x}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 2^{\cos x} \sin x \ln 2$

Vì $f'(x) \geq 1 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $\sin x > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2^{\cos x} \sin x \ln 2 > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên ta suy ra

$g'(x) = f'(x) + 2^{\cos x} \sin x \ln 2 > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

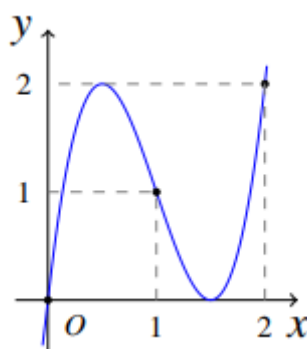
Vậy ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$g(0)$	$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Từ bảng biến thiên ta có bất phương trình $f(x) > 2^{\cos x} + 3m$ đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và

chỉ khi $g(0) \geq 3m \Leftrightarrow 3m \leq f(0) - 2 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3} [f(0) - 2]$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(2 \sin x) - 2 \sin^2 x < m$ đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(1) - \frac{1}{2}$. B. $m \geq f(1) - \frac{1}{2}$. C. $m \geq f(0) - \frac{1}{2}$. D. $m > f(0) - \frac{1}{2}$.

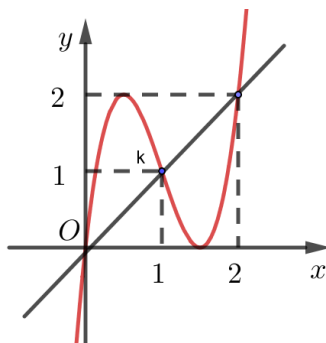
Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(2 \sin x) - 2 \sin^2 x < m \quad (1)$

Đặt $2 \sin x = t$, do $x \in (0; \pi)$ nên $t \in (0; 2]$.

Với $t \in (0; 2]$ thì (1) trở thành: $f(t) - \frac{t^2}{2} < m$, $\forall t \in (0; 2] \Leftrightarrow m > \max_{t \in (0; 2]} g(t)$, với $g(t) = f(t) - \frac{t^2}{2}$.



Ta có $g'(t) = f'(t) - t$. Từ đồ thị ta có: $g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	0			1			2				
$g'(t)$	0			+	0			-	0		
$g(t)$	$g(0)$ $g(1)$ $g(2)$										

Từ bảng biến thiên ta có khi $m > \max_{t \in (0; 2]} g(1) \Leftrightarrow m > f(1) - \frac{1}{2}$ thì bất phương trình $f(2 \sin x) - 2 \sin^2 x < m$ đúng với mọi $x \in (0; \pi)$.

Cô Hương Bùi

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < \ln x + m$ đúng với mọi $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f\left(\frac{1}{3}\right) + \ln 3$. B. $m < f(1)$. **C. $m \geq f\left(\frac{1}{3}\right) + \ln 3$.** D. $m \geq f(1)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$.

$$f(x) < \ln x + m, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \Leftrightarrow m > f(x) - \ln x, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right).$$

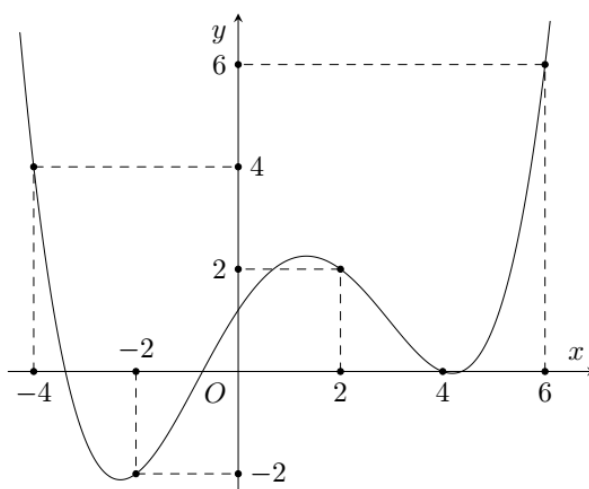
$$\text{Đặt } g(x) = f(x) - \ln x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Xét trên đoạn } \left[\frac{1}{3}; 1\right] \text{ ta có: } f'(x) \leq 0 \text{ và } -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow g'(x) < 0.$$

$$\Rightarrow \text{Hàm số } g(x) \text{ nghịch biến trên đoạn } \left[\frac{1}{3}; 1\right] \Rightarrow g\left(\frac{1}{3}\right) > g(x), \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right).$$

$$\text{Vậy } m > f(x) - \ln x, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \Rightarrow m \geq g\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) + \ln 3.$$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $-\frac{1}{3}f(-3x-8) \geq \frac{9}{2}x^2 + 16x - m$ đúng với mọi $x \in [-2; 0]$:

- A. $m \leq \frac{1}{3}f(-2) - 14.$ B. $m \leq \frac{1}{3}f(-4) - \frac{40}{3}.$
 C. $m \geq \frac{1}{3}f(-2) - 4.$ **D. $m \geq \frac{1}{3}f(-4) - \frac{40}{3}.$**

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{3}f(-3x-8) + \frac{9}{2}x^2 + 16x \leq m \text{ đúng với mọi } x \in [-2; 0]$$

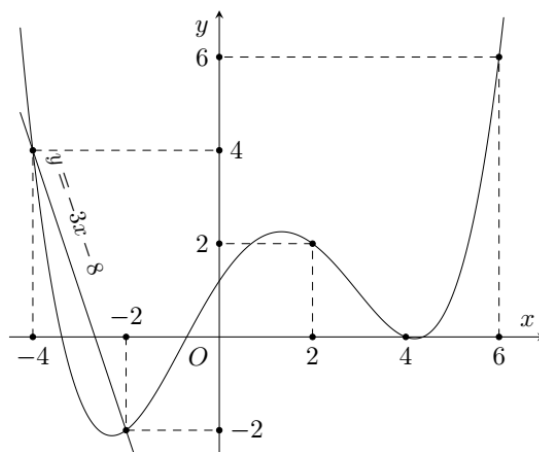
Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{3}f(-3x-8) + \frac{9}{2}x^2 + 16x$ với $x \in [-2; 0]$. Ta có:

$$g'(x) = -f'(-3x-8) + 9x + 16$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -f'(-3x-8) + 9x + 16 = 0 \Leftrightarrow f'(-3x-8) = 9x + 16 \quad (1)$$

Đặt $t = -3x - 8$ thì phương trình (1) trở thành: $f'(t) = -3t - 8 \quad (2)$

Số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của ĐTHS $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = -3t - 8$.



Từ đồ thị ta được: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 8 = -4 \\ -3x - 8 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{3} \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

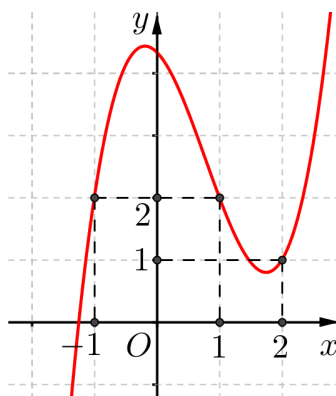
x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	0	$+\infty$
$g'(x)$			+	0	-
$g(x)$			$\frac{1}{3}f(-4) - \frac{40}{3}$		
		$\frac{1}{3}f(-2) - 14$		$\frac{1}{3}f(-8)$	

Từ bảng biến thiên suy ra:

Bất phương trình $\frac{1}{3}f(-3x-8) + \frac{9}{2}x^2 + 16x \leq m$ đúng với mọi $x \in [-2; 0]$ khi và chỉ khi:

$$\max_{[-2; 0]} g(x) \leq m \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}f(-4) - \frac{40}{3}.$$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm m để bất phương trình $4f(\sqrt{5}\sin x) \geq 5\sin 2x + 10x + m$ thỏa mãn $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $m \leq 4f(1) - 4 + 10 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$

B. $m \leq 4f(-1) + 4 - 10 \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$

C. $m \leq 4f(2) - 4 + 10 \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$

D. $m \leq 4f(2) + 4 - 10 \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$

Lời giải

Chọn B

Ta có $4f(\sqrt{5} \sin x) \geq 5 \sin 2x + 10x + m \Leftrightarrow m \leq 4f(\sqrt{5} \sin x) - 5 \sin 2x - 10x$

Xét hàm số $g(x) = 4f(\sqrt{5} \sin x) - 5 \sin 2x - 10x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có

$$g'(x) = 4\sqrt{5} \cos x \cdot f'(\sqrt{5} \sin x) - 10 \cos 2x - 10 = 4\sqrt{5} \cos x \cdot f'(\sqrt{5} \sin x) - 20 \cos^2 x$$

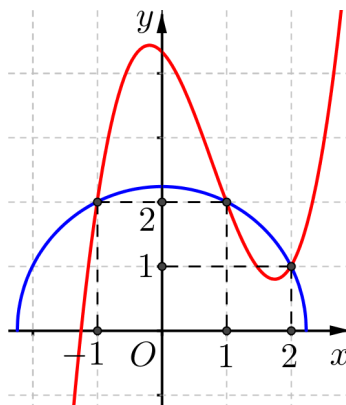
$$= 4\sqrt{5} \cos x \left[f'(\sqrt{5} \sin x) - \sqrt{5} \cos x \right]$$

Do $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(\sqrt{5} \sin x) = \sqrt{5} \cos x \Leftrightarrow f'(\sqrt{5} \sin x) = \sqrt{5 - 5 \sin^2 x}.$

Đặt $t = \sqrt{5} \sin x$ ta được $f'(t) = \sqrt{5 - t^2}$

Xét hàm số $y = \sqrt{5 - x^2}$ có đồ thị là nửa đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{5}$ nằm phía trên trục hoành.



Dựa vào đồ thị suy ra $f'(t) = \sqrt{5 - t^2} \Leftrightarrow t \in \{-1; 1; 2\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5} \sin x = -1 \\ \sqrt{5} \sin x = 1 \\ \sqrt{5} \sin x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = x_1 \\ x = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = x_2 \\ x = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = x_3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

x	$-\frac{\pi}{2}$	x_1	x_2	x_3	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$		$g(x_2)$		$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$
		$g(x_1)$		$g(x_3)$	

Ta có $g(x_1) = 4f(-1) + 4 - 10\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ và $g(x_3) = 4f(2) - 4 + 10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$. Dựa vào đồ thị ta thấy diện tích hình (H) lớn hơn 4.

Vì $f(2) - f(-1) = \int_{-1}^2 f'(x)dx = S(H)$ nên $f(2) > f(-1) + 4$

Do đó $g(x_3) = 4f(2) - 4 + 10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) > 4f(-1) + 12 + 10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) > g(x_1)$

Vậy để $m \leq g(x)$ với $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $m \leq g(x_1) = 4f(-1) + 4 - 10\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	1	4	$-\infty$

Bất phương trình $f(e^x) < e^{2x} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (\ln 2; \ln 4)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f(2) - 4$. **B.** $m \geq f(2) - 16$. **C.** $m > f(2) - 4$. **D.** $m > f(2) - 16$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(e^x) < e^{2x} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (\ln 2; \ln 4)$ khi và chỉ khi

$m > f(e^x) - e^{2x}, \forall x \in (\ln 2; \ln 4)$. (*)

Đặt $t = e^x \Rightarrow t \in (2; 4)$

Bất phương trình (*) trở thành : $m > f(t) - t^2, \forall t \in (2; 4)$

Xét hàm số $g(t) = f(t) - t^2$ trên $(2; 4)$

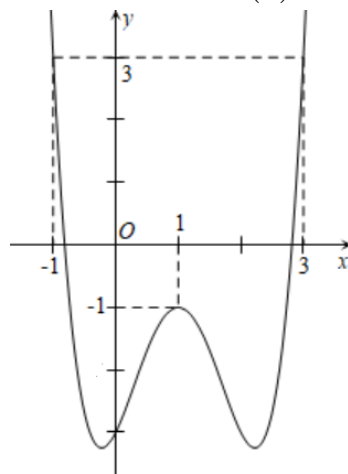
Ta có $g'(t) = f'(t) - 2t < 0$ (do $f'(t) < 4, \forall t \in (2; 4)$)

Vậy $g(t) = f(t) - t^2$ nghịch biến trên $(2; 4)$

Suy ra : $g(t) < g(2) = f(2) - 4$

Do đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có $m \geq f(2) - 4$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi

A. $m > 3f(3)$. B. $m \geq 3f(3)$. C. $m > 3f(-1) + 4$. **D. $m \geq 3f(-1) + 4$.**

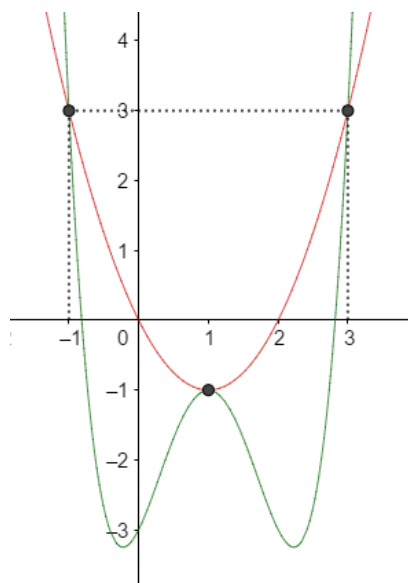
Chọn D

Ta có: $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x^2 \leq m$ với mọi $x \in (-1; 3)$.

Xét $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x^2$ với $x \in (-1; 3)$.

Khi đó: $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 6x = 3[f'(x) - x^2 + 2x]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 2x$.



Phương trình $g'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = -1; x = 3; x = 1$ trên đoạn $[-1; 3]$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [3f(x) - x^3 + 3x^2] = 3f(-1) + 4;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [3f(x) - x^3 + 3x^2] = 3f(3).$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1	1	3
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$3f(-1)+4$ $3f(3)$ 		

Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi $m \geq g(x), \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m \geq 3f(-1) + 4$.