

LƯ' SĨ PHÁP

Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

TOÁN 12



CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

0939989966 - 0916620899

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn bài tập Giải Tích 12.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

Bài tập Giải tích 12 gồm 2 phần:

Phần 1. Phần tự luận

Ở phần này tôi trình bày đầy đủ lí thuyết và bài tập có hướng dẫn giải ở từng bài. Với mong muốn mong các em nắm được phương pháp giải bài tập trước khi chuyển sang giải Toán trắc nghiệm.

Phần 2. Phần trắc nghiệm

Ở phần này tôi trình bày tóm tắt các lý thuyết cần nắm, kỹ năng làm bài trắc nghiệm, hướng dẫn sử dụng máy tính cầm tay cần thiết trong quá trình làm bài trắc nghiệm.

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để lần sau cuốn bài tập hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gọi về số **0939989966 – 0916 620 899**

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

GV_ Trường THPT Tuy Phong

MỤC LỤC

Phần 1. Phần tự luận

Bài 1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số	01 – 11
Bài 2. Cực trị của hàm số	12 – 23
Bài 3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	24 – 30
Bài 4. Đường tiệm cận	31 – 33
Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	34 – 47
Bài 6. Bài toán thường gặp về đồ thị hàm số	48 – 56
Ôn tập chương I	57 – 93

Phần 2. Phần trắc nghiệm

Bài 1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số	94 – 101
Bài 2. Cực trị của hàm số	102 – 110
Bài 3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	111 – 116
Bài 4. Đường tiệm cận	117 - 122
Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	123 – 132
Bài 6. Bài toán thường gặp về đồ thị hàm số	133 – 139
Ôn tập chương I	140 – 157
Một số câu hỏi trong kì thi THPT	158 – 168
Đáp án trắc nghiệm	169 – 173

CHƯƠNG I

--- 000 ---

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

---000---

§1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Nhắc lại định nghĩa

☞ Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K . Ta nói:

☞ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ nhỏ hơn $f(x_2)$, tức là: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

☞ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ lớn hơn $f(x_2)$, tức là: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

☞ Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là hàm số đơn điệu trên K .

Nhận xét. Từ định nghĩa trên ta thấy

$$a) f(x) \text{ đồng biến trên } K \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \forall x_1, x_2 \in K; (x_1 \neq x_2)$$

$$f(x) \text{ nghịch biến trên } K \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \forall x_1, x_2 \in K; (x_1 \neq x_2)$$

b) Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải

2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Định lí: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ không đổi trên K .

Tóm lại, trên K

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến} \\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến} \end{cases}$$

Chú ý: Ta có định lí mở rộng sau đây.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K . Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K .

II. QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Quy tắc

Để tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số, ta tiến hành theo các bước sau:

- ① Tìm tập xác định.
- ② Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Tính các giới hạn tại vô cực và giới hạn một bên (nếu có) của hàm số.
- ④ Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- ⑤ Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Phương pháp

👉 Tìm tập xác định của hàm số

👉 Tính đạo hàm

👉 Xét dấu đạo hàm

Kết luận

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$.

Bài 1.1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

b) $y = x^4 + 8x^3 + 5$

c) $y = \frac{x-1}{x+1}$

d) $y = \frac{3x+1}{1-x}$

HD & Giải

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② $y' = x^2 - x - 2$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = \frac{19}{6} \\ x = 2 \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \end{cases}$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

b) $y = x^4 + 8x^3 + 5$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② $y' = 4x^3 + 24x^2 = 4x^2(x+6)$

Cho

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 5 \\ x = -6 \Rightarrow y = -427 \end{cases}$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

④ Bảng biến thiên

c) $y = \frac{x-1}{x+1}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

② $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

Ta có y' không xác định tại $x = -1$

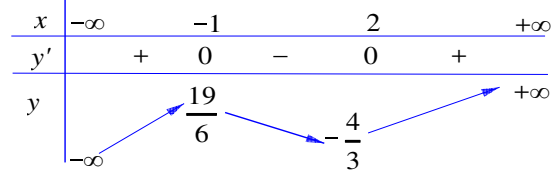
③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1,$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty$

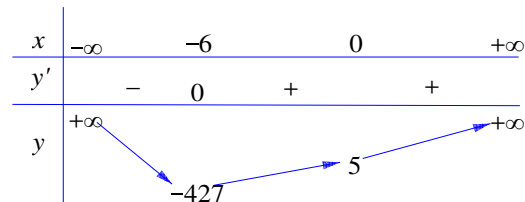
④ Bảng biến thiên

d) $y = \frac{3x+1}{1-x}$

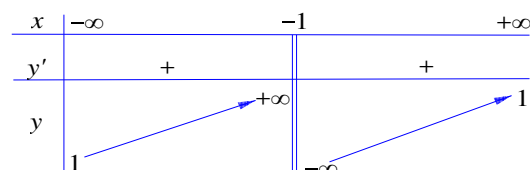
④ Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.



Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -6)$, đồng biến trên khoảng $(-6; +\infty)$.



Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

① Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

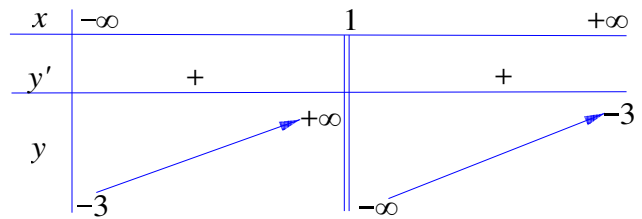
② $y' = \frac{4}{(1-x)^2} > 0, \forall x \in D$

Ta có y' không xác định tại $x = 1$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -3, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -3,$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$

④ Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Bài 1.2. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = 4 + 3x - x^2$ b) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$ c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$ d) $y = -x^3 + x^2 - 5$

HD & Giải

a) $y = 4 + 3x - x^2$

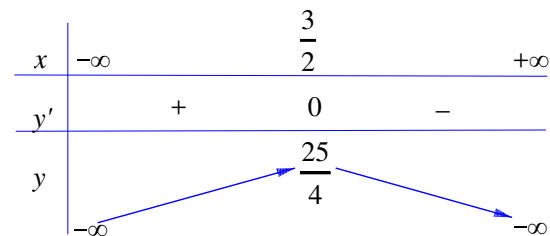
↳ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

↳ $y' = 3 - 2x$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{25}{4}$

↳ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

↳ Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; \frac{3}{2})$, nghịch biến trên khoảng $(\frac{3}{2}; +\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -7)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-7; 1)$.

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

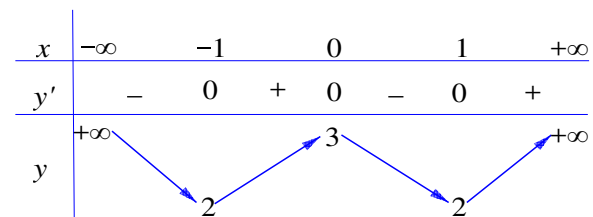
↳ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

↳ $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$

↳ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

↳ Bảng biến thiên



Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; \frac{2}{3})$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(\frac{2}{3}; +\infty)$

Bài 1.3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x - x^2}$ b) $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$ c) $y = \sqrt{25 - x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

HD & Giải

a) $y = \sqrt{2x - x^2}$

⇒ Tập xác định: $D = [0; 2]$

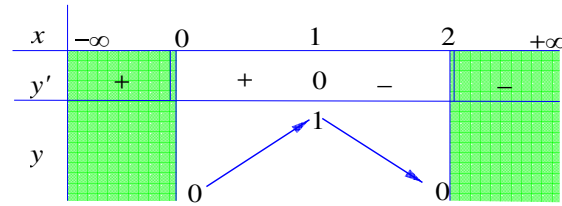
$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Cho

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

⇒ Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$, nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

b) $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$

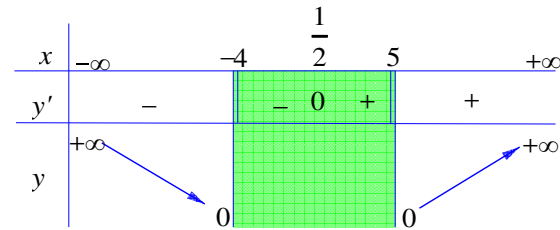
⇒ Tập xác định: $D = (-\infty; -4] \cup [5; +\infty)$

$$y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-20}}$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin D$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$

⇒ Bảng biến thiên



Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -4)$, đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

c) $y = \sqrt{25-x^2}$

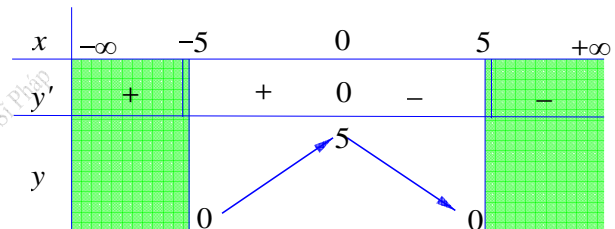
⇒ Tập xác định: $D = [-5; 5]$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

⇒ Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; 0)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 5)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

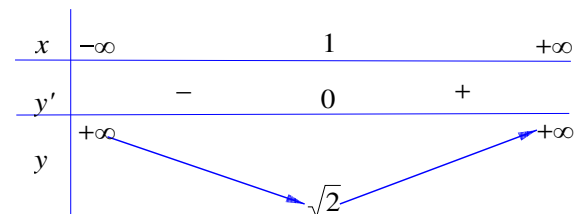
⇒ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}. \text{ Cho}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$

⇒ Bảng biến thiên



Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$; đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Bài 1.4. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

HD & Giải

$$\text{Hàm số } y = \frac{x}{x^2+1}$$

** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$** \ y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$** \ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

** Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Vậy hàm số biến trên khoảng $(-1;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Bài 1.5. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

HD & Giải

Hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x + 1}$

△ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

△ $y' = \frac{-x^2 - 2x - 5}{(x + 1)^2} < 0, \forall x \neq -1$

Ta có y' không xác định tại $x = -1$

△ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = -\infty$

△ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

Vấn đề 2. Tìm điều kiện để hàm số đơn điệu trên tập xác định D của nó (khoảng cho trước).
Phương pháp

1. Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập xác định (hoặc trên từng khoảng xác định).

Các hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) và $y = \frac{ax^2 + bx + c}{Ax + B}$ ($a \neq 0$) luôn luôn tăng (hoặc luôn luôn giảm) trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y' \geq 0$ (hoặc $y' \leq 0$), $\forall x \in D$.

Hàm số: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn luôn tăng (hoặc luôn luôn giảm) trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y' > 0$ (hoặc $y' < 0$), $\forall x \in D$.

Lưu ý: Cho hàm số $f(t) = at + b$

$$a) f(t) \geq 0, \forall t \in (\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 0 \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases}$$

$$b) f(t) \leq 0, \forall t \in (\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases}$$

c) Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) thì:

$$\bullet y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \bullet y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

2. Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng $(a; b)$.

Ta có: $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

a) Hàm số f đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a; b)$.

• Nếu bất phương trình $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(m) \geq g(x)$
thì f đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow h(m) \geq \max_{(a; b)} g(x)$

• Nếu bất phương trình $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(m) \leq g(x)$
thì f đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow h(m) \leq \min_{(a; b)} g(x)$

b) Hàm số f nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a; b)$.

• Nếu bất phương trình $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(m) \geq g(x)$
thì f nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow h(m) \geq \max_{(a; b)} g(x)$

• Nếu bất phương trình $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(m) \leq g(x)$
thì f nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow h(m) \leq \min_{(a; b)} g(x)$

3. Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng d cho trước.

• f đơn điệu trên khoảng $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \quad (1)$

• Biến đổi $|x_1 - x_2| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2 \quad (2)$

• Sử dụng định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}$ đưa (2) thành phương trình theo m .

• Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

Bài 1.6. Với giá trị nào của a hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

HD & Giải

Hàm số $y = ax - x^3$

➤ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

➤ $y' = a - 3x^2$

✓ Nếu $a < 0$ thì $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

✓ Nếu $a = 0$ thì $y' = -3x^2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

✓ Nếu $a > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$					$-\infty$

Hàm số đồng biến trong khoảng $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}; \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$. Vậy $a > 0$ không thỏa mãn ycbt

Do đó, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a \leq 0$.

Bài 1.7. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ luôn luôn tăng.

HD Giải

Hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Ta có: $y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m+5$
- Hàm số luôn luôn tăng $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m+5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9(2m+1)^2 - 3(12m+5) \leq 0 \Leftrightarrow 36m^2 - 6 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{6}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Vậy: $m \in \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$ thì hàm số đã cho luôn luôn tăng.

Bài 1.8. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + (3-m)x^2 - 2mx + 2$ luôn luôn giảm.

HD Giải

Hàm số $y = -x^3 + (3-m)x^2 - 2mx + 2$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Ta có: $y' = -3x^2 + 2(3-m)x - 2m$
- Hàm số luôn luôn giảm $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3x^2 + 2(3-m)x - 2m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (3-m)^2 - 6m \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3\sqrt{3} \leq m \leq 6 + 3\sqrt{3}$$

Vậy: $m \in [6 - 3\sqrt{3}; 6 + 3\sqrt{3}]$ thì hàm số đã cho luôn luôn giảm.

Bài 1.9. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - (2m+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

HD Giải

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - (2m+1)$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Ta có: $y' = x^2 + 2mx + m + 6$
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m + 6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 3$$

Vậy: $m \in [-2; 3]$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 1.10. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2mx - 4$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

HD **Giải**

Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2mx - 4$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 2m$
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 2m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$
 $\Leftrightarrow 2m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0)$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 6x$

Ta có: $g'(x) = 6x + 6$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -3$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên khoảng $(-\infty; 0)$

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-3	0

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có: Ycbt $\Leftrightarrow 2m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$

Vậy $m \leq -\frac{3}{2}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

Bài 1.11. Cho hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

HD **Giải**

Hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3x^2 + 2(1 - 2m)x + (2 - m)$

Hàm đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0$ với $\forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2(1 - 2m)x + (2 - m) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x + 1} \text{ với } \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x + 1}. \text{ Ta có: } g'(x) = \frac{6(2x^2 + x - 1)}{(4x + 1)^2}.$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = \frac{1}{2}$$

Lập BBT của hàm $g(x)$ trên $(0; +\infty)$, từ đó ta đi đến kết luận: $m \leq \frac{5}{4}$.

Bài 1.12. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ (1), (m là tham số).

Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

HD **Giải**

Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

- Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m$ có $\Delta' = 9 - 3m$.
 - + Nếu $m \geq 3$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m \geq 3$ không thỏa mãn.
 - + Nếu $m < 3$ thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.
- Hàm số nghịch biến trên đoạn $[x_1; x_2]$ với độ dài $l = |x_1 - x_2|$.
- Ta có: $x_1 + x_2 = -2; x_1 x_2 = \frac{m}{3}$.
- YCBT $\Leftrightarrow l = 1 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Bài 1.13. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ (1), (m là tham số).
 Tìm giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

HD **Giải**

$y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$
 $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
 $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$
 $\forall m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\}$

Vấn đề 3. Ứng dụng tính đơn điệu để chứng minh bất đẳng thức
Phương pháp

Để chứng minh $g(x) > h(x), \forall x \in (a; b)$, ta thực hiện các bước:

Bước 1. Biến đổi: $g(x) > h(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow g(x) - h(x) > 0, \forall x \in (a; b)$

Bước 2. Đặt $f(x) = g(x) - h(x)$

Bước 3. Tính $f'(x)$ và lập bảng biến thiên của $f(x)$. Từ đó suy ra kết quả.

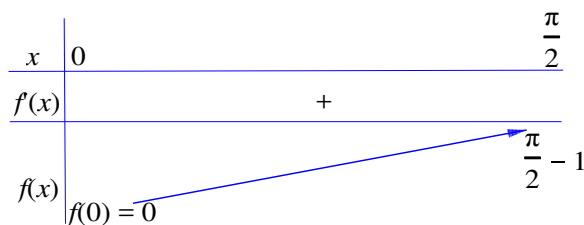
Bài 1.14. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- a) $\tan x > x > \sin x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ b) $\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

HD **Giải**

a) i. Chứng minh $x > \sin x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

- Ta có: $x > \sin x \Leftrightarrow x - \sin x > 0$.
- Đặt: $f(x) = x - \sin x$, ta có $f'(x) = 1 - \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
- Bảng biến thiên



Vậy: $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $f(x) > f(0) \Rightarrow x - \sin x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hay $x > \sin x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (1)

ii. Chứng minh $\tan x > x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

- Ta có: $\tan x > x \Leftrightarrow \tan x - x > 0$

▪ Đặt: $f(x) = \tan x - x$, ta có $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = 0$ chỉ tại một điểm $x = 0$. Do đó, $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Tức là $f(x) > f(0), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Vì $f(0) = 0$ nên $\tan x - x > 0$ hay $\tan x > x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\tan x > x > \sin x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

▪ Ta có $\sin x + \tan x > 2x \Leftrightarrow \sin x + \tan x - 2x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

▪ Đặt $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$. Hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và có

đạo hàm $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vì $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} > 2, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

▪ Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và ta có $f(x) > f(0), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hay

$\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài 1.15. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, ta có $x + \frac{1}{x} \geq 2$

HD & Giải

▪ Xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

▪ Ta có $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$)

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Ta có $f(1) = 2$ và $f(x) > 2$ với mọi $0 < x \neq 1$

Vậy $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$ với mọi $x > 0$

Bài 1.16. Chứng minh rằng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$

HD & Giải

▪ Đặt $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}; x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x) > 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$
- $f'(x) = 0$ chỉ tại điểm $x = 0$. Do đó, $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$
- Vì $f(0) = 0$ nên $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3} > 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ hay $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.17. Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

- a) $y = x^3 + 9x^2 + 15x - 3$ b) $y = -x^3 + 2x^2 - 7x + 5$
 c) $y = -x^4 + 6x^2 - 3$ d) $y = 2x^4 + 4x^2 - 2$

Bài 1.18. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{x-1}{x-2}$ b) $y = \frac{3-2x}{x+7}$ c) $y = \frac{x^2-2x+3}{x+1}$
 d) $y = \frac{x^2-5x+3}{x-2}$ e) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$ f) $y = \sqrt{x^2+2x+3}$

Bài 1.19. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

- a) $y = 2x - 1 - \sqrt{3x-5}$ b) $y = x + 1 - \sqrt{4-x^2}$
 c) $y = 1 + \sqrt{-2x^2+10x-8}$ d) $y = -x + \sqrt{x^2+8}$

Kết quả

Bài 1.17.

- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-5; -1)$.
 b) Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$; nghịch biến trên các khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$.
 d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Bài 1.18.

- a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -7)$ và $(-7; +\infty)$.
 c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1 - \sqrt{6})$ và $(-1 + \sqrt{6}; +\infty)$; nghịch biến trên các khoảng $(-1 - \sqrt{6}; -1)$ và $(-1; -1 + \sqrt{6})$.
 d) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 e) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 1)$; đồng biến trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 f) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$; đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Bài 1.19.

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{3}; \frac{89}{48}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(\frac{89}{48}; +\infty\right)$.
 b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; \sqrt{2})$; đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{2}; 2)$.
 c) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1; \frac{5}{2}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$.
 d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$, (có thể a là $-\infty$, b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

2. Chú ý:

i) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là f_{CD} (f_{CT}), còn điểm

$M(x_0, f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.

ii) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là cực đại (cực tiểu) và được gọi chung là cực trị của hàm số.

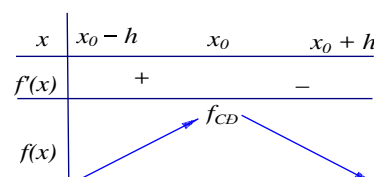
iii) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$

II. ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

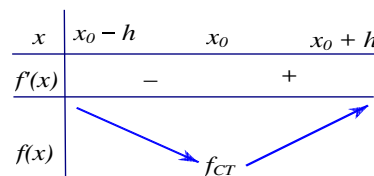
Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

1. Định lí 1.

a) $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của $f(x)$



b) $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của $f(x)$



2. Định lí 2.

a) $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của $f(x)$

b) $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của $f(x)$

III. QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ

1. Quy tắc 1.

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

2. Quy tắc 2.

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots)$ là các nghiệm của nó.

Bước 3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$, suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Áp dụng quy tắc 1 để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 1.

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Bài 2.1. Áp dụng quy tắc 1, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

c) $y = x + \frac{1}{x}$

d) $y = x^3(1-x)^2$

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

f) $y = |x|(x+2)$

HD & Giải

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Ta có: $y' = 6x^2 + 6x - 36$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = -54 \\ x = -3 \Rightarrow y = 71 \end{cases}$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	71	-54	$+\infty$			

- Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y_{CB} = y(-3) = 71$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = y(2) = -54$.

b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Ta có: $y' = 4x^3 + 4x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -3$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = y(0) = -3$.

c) $y = x + \frac{1}{x}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

• Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = -2$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = 2$.

d) $y = x^3(1-x)^2$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $y' = x^2(1-x)^2(3-5x)$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x)^2(3-5x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{108}{3125} \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{5}$	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		$\frac{108}{3125}$	0	$+\infty$		

• Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{3}{5}$ và $y_{CD} = y\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{108}{3125}$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = 0$.

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

• Ta có: $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $y' = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2}$ và $y_{CT} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) $y = |x|(x+2)$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Ta có: $y = |x|(x+2) = \begin{cases} x(x+2) & \text{với } x \geq 0 \\ -x(x+2) & \text{với } x < 0 \end{cases}$

➤ Với $x > 0, y' = 2x + 2 > 0$

➤ Với $x < 0, y' = -2x - 2; y' = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

- Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CB} = y(-1) = 1$
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = y(0) = 0$.

Vấn đề 2. Áp dụng quy tắc 2 để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 2.

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots)$ là các nghiệm của nó.

Bước 3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$, suy ra tính chất cực trị của điểm x_i theo định lí 2:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $f'(x_0) = 0$. Khi đó:

a) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

b) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Lưu ý:

- Đối với nhiều hàm thông dụng (như hàm đa thức, hàm lượng giác, ...), sử dụng quy tắc II thuận tiện hơn quy tắc I.

- Đối với hàm không có đạo hàm cấp một (và do đó không có đạo hàm cấp hai), không thể sử dụng quy tắc II để tìm cực trị được.

Bài 2.2. Áp dụng quy tắc 2, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

c) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$

d) $y = \sin 2x$

e) $y = \sin 2x - x$

f) $y = \sin x + \cos x$

HD & Giải

a) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = x^3 - 4x = x(x^2 - 2)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

♦ $y'' = 3x^2 - 4$

♦ $y''(\pm 2) = 8 > 0 \Rightarrow x = -2$ và $x = 2$ là hai điểm cực tiểu

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại.

♦ Vậy:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ và $x = 2$; $y_{CT} = y(\pm 2) = 2$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CB} = y(0) = 6$.

b) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

♦ $y'' = 12x^2 - 4$

♦ $y''(\pm 1) = 8 > 0 \Rightarrow x = -1$ và $x = 1$ là hai điểm cực tiểu.

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại.

♦ Vậy:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$; $y_{CT} = y(\pm 1) = 0$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CB} = y(0) = 1$.

c) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = 5x^4 - 3x^2 - 2$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

♦ $y'' = 20x^3 - 6x$

♦ $y''(1) = 14 > 0 \Rightarrow x = 1$ là hai điểm cực tiểu.

$y''(-1) = -14 < 0 \Rightarrow x = -1$ là điểm cực đại.

♦ Vậy:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = -1$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CB} = y(-1) = 3$.

d) $y = \sin 2x$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = 2 \cos 2x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + l\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2} (l \in \mathbb{Z})$

♦ $y'' = -4 \sin 2x$

♦ $y''\left(\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}\right) = -4 \sin\left(\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -4 \text{ nếu } l = 2k \\ 4 \text{ nếu } l = 2k + 1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

♦ Vậy:

Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ và $y_{CB} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ và $y_{CT} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + k2\pi\right) = -1$.

e) $y = \sin 2x - x$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = 2 \cos 2x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

♦ $y'' = -4 \sin 2x$

$$\diamond y''\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -4 \sin\left(\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0 (k \in \mathbb{Z})$$

$$y''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -4 \sin\left(-\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0 (k \in \mathbb{Z})$$

♦ Vậy:

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực đại của hàm số.

$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực tiểu của hàm số.

$$f) y = \sin x + \cos x \Rightarrow y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\diamond y' = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\diamond y'' = -\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\diamond y''\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \begin{cases} -\sqrt{2} & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ \sqrt{2} & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$$

♦ Vậy:

$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực đại của hàm số.

$x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi, (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vấn đề 3. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu
Phương pháp

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $y = \frac{ax^2 + bx + c}{Ax + B}$ có một cực đại và một cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt (khi đó hiển nhiên y' đổi dấu khi qua các nghiệm).

Bài 2.3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m , hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$ luôn luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

HD  **Giải**

Hàm số: $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$

 Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\diamond y' = 3x^2 - 2mx - 2$$

 Hàm số luôn luôn có một cực đại và một cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2mx - 2 = 0 (*)$$

$$\Delta' = m^2 + 6 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Điều này chứng tỏ (*) luôn có hai nghiệm phân biệt

Vậy hàm số luôn luôn có một cực đại và một cực tiểu.

Bài 2.4. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m , hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x^2 + 2}$ luôn luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

HD  **Giải**

Hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x^2 + 2}$

✎ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

✎ $y' = \frac{2[-x^2 + (2-m)x + 2]}{(x^2 + 2)^2}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + (2-m)x + 2 = 0(*)$

$\Delta' = (2-m)^2 + 8 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Điều này chứng tỏ (*) luôn có hai nghiệm phân biệt

Vậy hàm số luôn có một cực đại và một cực tiểu.

Bài 2.5. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + 2(5m-8)x + 1$. Tìm m để hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

HD✎Giải

Hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + 2(5m-8)x + 1$, m là tham số

✎ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

✎ $y' = x^2 + 2mx + 2(5m-8) = g(x)$

✎ Hàm số có một cực đại và một cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_g > 0 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 16 > 0 \Leftrightarrow m < 2$ hoặc $m > 8$.

Vậy: $m \in (-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$ thì thỏa YCBT.

Bài 2.6. Xác định giá trị của tham số m , để hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x - m}{x+1}$ có cực đại và cực tiểu.

HD✎Giải

Hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x - m}{x+1}$

✎ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

✎ $y' = \frac{x^2 + 2x + 2m + 2}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$

✎ Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Đặt $g(x) = x^2 + 2x + 2m + 2$

✎ $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \neq 0 \\ \Delta'_g = 1 - (2m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$$

Vậy: $m < -\frac{1}{2}$ thì thỏa YCBT.

Vấn đề 4. Tìm điều kiện để hàm số đạt cực trị tại một điểm cho trước

Phương pháp

Áp dụng điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 .

♦ Tìm tập xác định D của hàm số

♦ Tính $f'(x)$

♦ Do $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 nên $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định tại điểm x_0 . Từ đó suy ra tham số m .

♦ Thế giá trị m tìm được vào $f'(x)$ để kiểm tra. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 thì hàm số có cực trị tại

$x = x_0$, suy ra m cần tìm.

Chú ý: Nếu $f'(x_0) = 0$ thì chưa chắc $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0

Bài 2.7. Tìm a và b để các cực trị của hàm số $y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$ đều là những số dương và $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại.

HD & Giải

Hàm số $y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$

✎ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

✎ Nếu $a = 0$ thì hàm số trở thành $y = -9x + b$. Hàm số này không có cực trị. Do đó, ta chỉ xét trường hợp $a \neq 0$.

✎ Khi đó, ta có: $y' = 5a^2x^2 + 4ax - 9$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 5a^2x^2 + 4ax - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{5a} \\ x = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

a) Với $a < 0$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{a}$	$-\frac{9}{5a}$	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+		
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Theo giả thiết $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại nên $\frac{1}{a} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow a = -\frac{9}{5}$

Mặt khác, giá trị cực tiểu là số dương nên $y_{CT} = y\left(-\frac{9}{5a}\right) = y(1) > 0$

Ta có:

$$y(1) = \frac{5a^2}{3} + 2a - 9 + b = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{25} + 2\left(-\frac{9}{5}\right) - 9 + b > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{36}{5} + b > 0 \Leftrightarrow b > \frac{36}{5}$$

b) Với $a > 0$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{5a}$	$\frac{1}{a}$	$+\infty$		
y'	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	$+\infty$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} -\frac{9}{5a} = -\frac{5}{9} \\ y_{CT} = y\left(\frac{1}{a}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{81}{25} \\ b > \frac{400}{243} \end{cases}$$

Vậy: $\begin{cases} a = -\frac{9}{5} \\ b > \frac{36}{5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = \frac{81}{25} \\ b > \frac{400}{243} \end{cases}$ thì thỏa YCBT.

Bài 2.8. Xác định giá trị của tham số m , để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

HD **Giải**

Cách 1. Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = -3$

Thử lại

+ Với $m = -1$, ta có: $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$				
y'	+	0	-	-	0	+			
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên chứng tỏ hàm số không đạt cực đại tại $x = 2$.

+ Với $m = -3$, ta có: $y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y						

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Vậy: Với $m = -3$ hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Cách 2. Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}; y' = \frac{2x + 2m}{(x + m)^4}$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases} \Rightarrow m = -3.$

Bài 2.9. Xác định giá trị của tham số m , để hàm số $y = x^4 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

HD **Giải**

Hàm số $y = x^4 + mx$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 + m$

✎ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 0^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$

✎ Thử lại

Với $m = 0$, ta có: $y' = 4x^3; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 (y = 0)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Vậy: Với $m = 0$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Bài 2.10. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - ax^2 + b$. Tìm a và b để hàm số đạt cực trị bằng -2 tại điểm $x = 1$.

HD ✎ Giải

Hàm số $y = \frac{x^4}{2} - ax^2 + b$

✎ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

✎ $y' = 2x^3 - 2ax$

✎ Hàm số đạt cực trị bằng -2 tại điểm $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y(1) = -2 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - a + b = -2 \\ 2 - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$

✎ Thử lại: Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$. Ta có $y' = 2x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	-2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số đạt cực trị bằng -2 tại điểm $x = 1$.

Vậy: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$ thì thỏa YCBT.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 2.11. Tìm cực trị các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$

c) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 2$

d) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

e) $y = x\sqrt{4 - x^2}$

f) $y = \sqrt{8 - x^2}$

Bài 2.12. Tìm cực trị các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $y = (x + 1)^3(5 - x)$

c) $y = (x+2)^2(x-3)^3$

d) $y = \frac{x+1}{x^2+8}$

e) $y = x - 6\sqrt[3]{x^2}$

f) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$

Bài 2.13. Tìm cực trị các hàm số sau:

a) $y = x - \sin 2x + 2$

b) $y = 3 - 2 \cos x - \cos 2x$

Bài 2.14. Tìm cực trị các hàm số sau:

a) $y = \sin^2 x - \sqrt{3} \cos x, x \in [0; \pi]$

b) $y = 2 \sin x + \cos 2x, x \in [0; \pi]$

Bài 2.15. Xác định tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x + 5$ có cực trị tại $x = 1$. Khi đó, hàm số

đạt cực đại hay cực tiểu? Tính cực trị tương ứng.

Bài 2.16. Tìm các hệ số a, b, c, d của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$.

Bài 2.17. Xác định các hệ số a, b, c sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại $x = -2$ và đồ thị đi qua điểm $A(1; 0)$.

Bài 2.18. Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$. Tìm tham số m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Kết quả

Bài 2.11.

a) Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y_{CB} = y(-3) = -1$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = 2$.

b) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CB} = y(-1) = \frac{32}{15}$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = \frac{28}{15}$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CB} = y(0) = -3$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = y(2) = 1$.

e) Hàm số đạt cực đại tại $x = \sqrt{2}$ và $y_{CB} = y(\sqrt{2}) = 2$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\sqrt{2}$ và $y_{CT} = y(-\sqrt{2}) = -2$

f) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CB} = y(0) = 2\sqrt{2}$

Bài 2.12.

a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CB} = y(0) = 4$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ và $y_{CT} = y\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9}{4}$.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{7}{2}$ và $y_{CB} = y\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{2187}{16}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $y_{CB} = y(-2) = 0$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = y(0) = 108$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và $y_{CB} = y(2) = \frac{1}{4}$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -4$ và $y_{CT} = y(-4) = -\frac{1}{8}$.

e) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CB} = y(0) = 0$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 64$ và $y_{CT} = y(64) = -32$.

f) Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y_{CB} = y(-3) = -9\sqrt{3}$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = y(3) = 9\sqrt{3}$.

Bài 2.13.

a) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực đại của hàm số;

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực tiểu của hàm số.

b) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực đại của hàm số.

$x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Bài 2.14.

a) Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{5\pi}{6}$ và $y_{CB} = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{7}{4}$.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$; $y_{CB} = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{2}$ và $y_{CT} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Bài 2.15. $m = \frac{7}{3}$

HD: Tập xác định : $D = \mathbb{R}$, Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + m - \frac{2}{3} = g(x)$

Ta biết hàm số $y = f(x)$ có cực trị khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm và y' đổi dấu qua các nghiệm đó.

Khi đó: $\Delta'_g = m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < 1$ hoặc $m > 2$

Để hàm số có cực trị tại $x = 1$ thì $y'(1) = 3 - 2m + m - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}$

Với $m = \frac{7}{3}$, hàm số trở thành: $y = x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 5$

Ta có: $y'' = 3x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{5}{3}, y'' = 6x - \frac{14}{3}$.

Vì $y''(1) = 6 - \frac{14}{3} > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = \frac{16}{3}$

Bài 2.16. $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$

Bài 2.17. $a = 3, b = 0, c = -4$

Bài 2.18. $m \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$

HD: Tập xác định : $D = \mathbb{R}$, Ta có: $y' = 4x^3 - 2(m^2 - 9)x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 4mx^2 + 2(m^2 - 9) = 0 \end{cases}$

YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân

biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0^2 - 8m(m^2 - 9) > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases}$

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

Số M là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D nếu: $f(x) \leq M, \forall x \in D$ và $\exists x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu:

$$M = \max_D f(x)$$

Số m là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên D nếu: $f(x) \geq m, \forall x \in D$ và $\exists x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu:

$$m = \min_D f(x)$$

II. Cách tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) trên một đoạn

1. Định lí: Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Như vậy: $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b] \Rightarrow$ tồn tại $\max_{[a; b]} f(x), \min_{[a; b]} f(x)$

2. Quy tắc

- ① Tìm tập xác định hàm số
- ② Tìm $x_i \in [a; b] (i = 1, 2, \dots, n)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Tính $f(a), f(x_i), f(b)$.
- ④ Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Khi đó: $M = \max_{[a; b]} f(x), m = \min_{[a; b]} f(x)$.

III. Cách tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) trên một khoảng

$y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$, ta xét hai trường hợp

x	a	x_0	b
y'		+	-
y		$\nearrow$ GTLN $\searrow$	

x	a	x_0	b
y'		-	+
y		$\searrow$ GTNN $\nearrow$	

(trong đó $f'(x_0)$ bằng 0 hoặc không xác định tại x_0)

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Tìm GTLN & GTNN của hàm số liên tục trên một đoạn $[a; b]$

Phương pháp:

- ① Tìm tập xác định hàm số hay ghi rõ hàm số liên tục và xác định trên đoạn $[a; b]$
- ② Tìm $x_i \in [a; b] (i = 1, 2, \dots, n)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Tính $f(a), f(x_i), f(b)$.
- ④ Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Khi đó: $M = \max_{[a; b]} f(x), m = \min_{[a; b]} f(x)$.

Bài 3.1. Tính GTLN & GTNN của các hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn $[-4; 4]$ và $[0; 5]$

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn $[0; 3]$ và $[2; 5]$

c) $y = \frac{2-x}{1-x}$ trên các đoạn $[2; 4]$ và $[-3; -2]$

d) $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$

HD & Giải

a) Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = 3x^2 - 6x - 9$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

✦ Trên đoạn $[-4; 4]$, ta có: $y(-4) = -41; y(-1) = 40; y(4) = 15$

Do đó: $\min_{[-4;4]} y = y(-4) = -41, \max_{[-4;4]} y = y(-1) = 40$

✦ Trên đoạn $[0; 5]$, ta có: $y(0) = 35; y(3) = 8; y(5) = 40$

Do đó: $\min_{[0;5]} y = 8, \max_{[0;5]} y = 40$

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn $[0; 3]$ và $[2; 5]$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = 4x^3 - 6x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$

✦ Trên đoạn $[0; 3]$, ta có: $y(0) = 2; y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{4}; y(3) = 56$. Do đó: $\min_{[0;3]} y = -\frac{1}{4}, \max_{[0;3]} y = 56$

✦ Trên đoạn $[2; 5]$, ta có: $y(2) = 6; y(5) = 552$. Do đó: $\min_{[2;5]} y = 6, \max_{[2;5]} y = 552$

c) $\min_{[2;4]} y = 0, \max_{[2;4]} y = \frac{2}{3}; \min_{[-3;-2]} y = \frac{5}{4}, \max_{[-3;-2]} y = \frac{4}{3}$

d) $\min_{[-1;1]} y = 1, \max_{[-1;1]} y = 3$

Vấn đề 2. Tìm GTLN & GTNN của hàm số trên một khoảng (đoạn)
Phương pháp

- Để tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ (đoạn $[a; b]$), ta lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(a; b)$ (đoạn $[a; b]$) rồi dựa vào đó đưa ra kết luận.

- Khi không nói tập xác định D , ta hiểu tìm GTLN – GTNN trên tập xác định của hàm số.

Bài 3.2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 2x - 5$ trên đoạn $[-2; 3]$

b) $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$

c) $y = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

d) $y = -x^2 + 2x + 4$ trên đoạn $[2; 4]$

e) $y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên đoạn $[0; 1]$

f) $y = x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 2]$

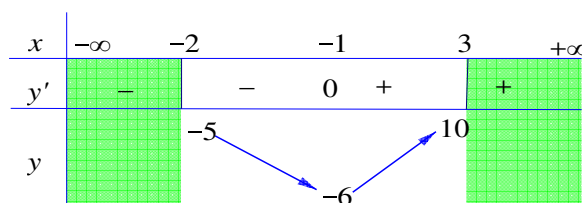
HD & Giải

a) $y = x^2 + 2x - 5$ trên đoạn $[-2; 3]$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = 2x + 2$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -6$

♦ Bảng biến thiên:



♦ Từ bảng biến thiên, ta có: $\min_{[-2;3]} y = y(-1) = -6, \max_{[-2;3]} y = y(3) = 10$

b) $\min_{[-4;0]} y = y(-4) = y(-1) = -\frac{16}{3}, \max_{[0;4]} y = y(-3) = y(0) = -4$

c) $y = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

♦ $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \neq 0$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

$+\infty \swarrow \quad \searrow 2 \quad \swarrow \quad \searrow +\infty$

♦ Từ bảng biến thiên, ta có: $\min_{(0;+\infty)} y = y(1) = 2$. Hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

d) $\min_{[2;4]} y = y(4) = -4, \max_{[2;4]} y = y(2) = 4$

e) $\min_{[0;1]} y = y(0) = 2, \max_{[0;1]} y = y(1) = \frac{11}{3}$

f) $\max_{(0;2]} y = y(2) = \frac{3}{2}$. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng $(0; 2]$.

Bài 3.3. Tìm GTLN & GTNN của các hàm số sau:

a) $y = \frac{4}{1+x^2}$

b) $y = 4x^3 - 3x^4$

c) $y = \frac{x}{4+x^2}$

d) $y = \frac{1}{1+x^4}$

HD & Giải

a) $y = \frac{4}{1+x^2}$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = \frac{-8x}{(1+x^2)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	0	4	0

♦ Từ bảng biến thiên, ta suy ra: $\max_{\mathbb{R}} y = y(0) = 4$. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) $y = 4x^3 - 3x^4$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = 12x^2 - 12x^3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 12x^2(1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	0	1	$+\infty$

♦ Từ bảng biến thiên, ta suy ra được $\max_{\mathbb{R}} y = y(1) = 1$. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

c) $y = \frac{x}{4+x^2}$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = \frac{4-x^2}{(4+x^2)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \\ x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \end{cases}$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

♦ Từ bảng biến thiên, ta suy ra được: $\max_{\mathbb{R}} y = y(2) = \frac{1}{4}$, $\min_{\mathbb{R}} y = y(-2) = -\frac{1}{4}$.

d) $y = \frac{1}{1+x^4}$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = \frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	0	1	0

♦ Từ bảng biến thiên, ta suy ra được $\max_{\mathbb{R}} y = y(0) = 1$. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Bài 3.4. Tìm GTLN & GTNN của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

b) $y = \frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0; \pi)$

c) $y = 2 \sin x + \sin 2x$ trên khoảng $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

d) $y = (\cos x + 1) \sin x$ trên khoảng $[0; 2\pi]$

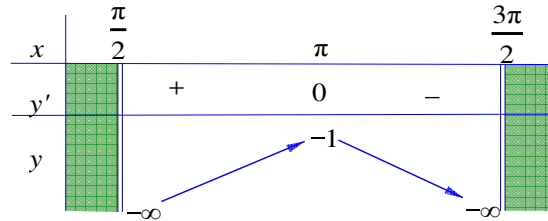
HD & Giải

a) $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})\right\}$

♦ $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pi$ (do $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -1$)

♦ Bảng biến thiên:



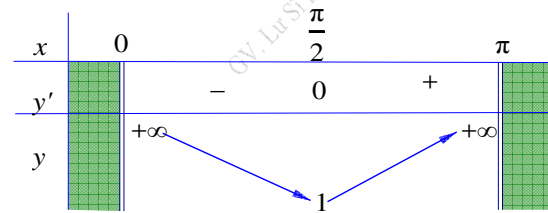
♦ Từ bảng biến thiên, ta suy ra được $\max_{\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)} y = y(\pi) = -1$. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

b) $y = \frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0; \pi)$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$

♦ $y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (do $x \in (0; \pi) \Rightarrow y = 1$)

♦ Bảng biến thiên:



♦ Từ bảng biến thiên, ta suy ra được $\min_{(0; \pi)} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Hàm số không có giá trị lớn nhất.

c) $y = 2 \sin x + \sin 2x$ trên khoảng $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = 2 \cos x + 2 \cos 2x$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos \frac{3x}{2} = 0 \end{cases}$

Do $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \pi, x = \frac{\pi}{3}$

♦ Ta có: $y(0) = 0; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; y(\pi) = 0; y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$

♦ Từ đó, ta có: $\min_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} y = -2; \max_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

d) $y = (\cos x + 1) \sin x$ trên khoảng $[0; 2\pi]$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = \cos 2x + \cos x$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do } x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = 2\pi, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$$

♦ Ta có: $y(0) = 0; y(2\pi) = 0; y(\pi) = 0, y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}; y\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

♦ Từ đó, ta có: $\min_{[0; 2\pi]} y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}; \max_{[0; 2\pi]} y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Bài 3.5. Tìm GTLN & GTNN của các hàm số sau:

a) $y = 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1$

b) $y = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$

c) $y = \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 9 \cos x + 5$

d) $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$

HD & Giải

a) $y = 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1$

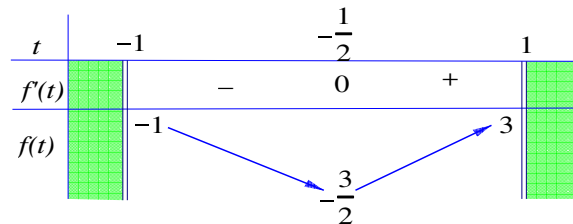
♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$. Hàm số viết lại: $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

Ta tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1; 1]$. Đó cũng là GTLN & GTNN của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$.

♦ Ta có: $f'(t) = 4t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$

♦ Bảng biến thiên:



♦ Từ bảng biến thiên, ta suy ra được: $\min_{[-1; 1]} f(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}; \max_{[-1; 1]} f(t) = f(1) = 3$

♦ Do đó: $\min_{\mathbb{R}} y = -\frac{3}{2}; \max_{\mathbb{R}} y = 3$

b) $y = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$

Ta có: $y = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$

$$= 1 - \sin^2 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + 4 = -\sin^2 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + 5$$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

♦ Đặt $t = \sin 2x, -1 \leq t \leq 1$. Hàm số viết lại: $y = f(t) = -t^2 - \frac{1}{2}t + 5$

Ta tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1; 1]$. Đó cũng là GTLN & GTNN của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$.

♦ Ta có: $f'(t) = -2t - \frac{1}{2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(t) = \frac{81}{16}$

♦ Bảng biến thiên:

t	-1	$-\frac{1}{4}$	1
$f'(t)$		$+$	0
$f(t)$	$\frac{9}{2}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{7}{2}$

♦ Từ bảng biến thiên, ta suy ra được: $\min_{[-1;1]} f(t) = f(1) = \frac{7}{2}$; $\max_{[-1;1]} f(t) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{16}$

♦ Do đó: $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{7}{2}$; $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{81}{16}$

c) $y = \cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 5$.

Giải tương tự, ta có: $\min_{\mathbb{R}} y = -1$; $\max_{\mathbb{R}} y = 9$

d) $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$.

Giải tương tự, ta có: $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{23}{27}$; $\max_{\mathbb{R}} y = 5$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 3.6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[-4; 4]$ b) $y = x^3 + 5x - 4$ trên đoạn $[-3; 1]$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn $[-1; 3]$ d) $y = \frac{x}{x+2}$ trên nửa khoảng $(-2; 4]$

e) $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ f) $y = x\sqrt{1-x^2}$

Bài 3.7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x + \cos x + 1}$ b) $y = 2(1 + \sin 2x \sin 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$

Kết quả

Bài 3.6.

a) $\min_{[-4;4]} y = y(1) = -4$; $\max_{[-4;4]} y = y(4) = 77$ b) $\min_{[-3;1]} y = y(-3) = -46$; $\max_{[-3;1]} y = y(1) = 2$

c) $\min_{[-1;3]} y = y(2) = 0$; $\max_{[-1;3]} y = y(3) = 25$ d) $\max_{(-2;4]} y = y(4) = \frac{2}{3}$, không có GTNN.

e) $\min_{(1;+\infty)} y = y(2) = 5$, không có GTLN. f) $\min_{[-1;1]} y = y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$; $\max_{[-1;1]} y = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Bài 3.7.

a) $\min_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = 0$; $\max_{[-1;1]} f(t) = f(0) = 1$. Do đó: $\min_{\mathbb{R}} y = 0$; $\max_{\mathbb{R}} y = 1$.

b) $\min_{[-1;1]} f(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$; $\max_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = 5$. Do đó: $\min_{\mathbb{R}} y = 1$; $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

§4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Kí hiệu (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$

1. Đường tiệm cận đứng

Nếu một trong các điều kiện $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (C).

2. Đường tiệm cận ngang

Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ thì đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của (C).

Lưu ý:

- Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ và hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ không có đường tiệm cận.

- Cách tìm tiệm cận của hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

a) Tiệm cận đứng:

Giải phương trình $Q(x) = 0$

Nếu phương trình $Q(x) = 0$ vô nghiệm thì kết luận hàm số đã cho không có tiệm cận đứng

Nếu phương trình $Q(x) = 0$ có nghiệm là $x = x_i$ thì tính $\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{P(x)}{Q(x)}$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty$ thì $x = x_i$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{P(x)}{Q(x)} \neq \pm\infty$ thì $x = x_i$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Tiệm cận ngang

Nếu bậc $P(x) <$ bậc của $Q(x)$ thì trục hoành Ox là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Nếu bậc $P(x) =$ bậc của $Q(x)$ thì $y = \frac{a_0}{b_0}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số, trong đó a_0, b_0 tương ứng là hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của $P(x)$ và $Q(x)$.

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
L > 0	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
L < 0		+	$-\infty$
		−	$+\infty$

B. BÀI TẬP

Bài 4.1. Tìm các tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{x-1}{x+2}$

b) $y = \frac{x}{2-x}$

c) $y = \frac{-x+7}{x+1}$

d) $y = \frac{2x-5}{5x-2}$

HD & Giải

a) $y = \frac{x-1}{x+2}$

↪ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

↪ $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x-1}{x+2} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng

↪ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang

b) $y = \frac{x}{2-x}$

↪ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

↪ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng

↪ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2-x} = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2-x} = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang

c) Tiệm cận đứng: $x = -1$; tiệm cận ngang: $y = -1$

d) Tiệm cận đứng: $x = \frac{2}{5}$; tiệm cận ngang: $y = \frac{2}{5}$

Bài 4.2. Tìm tiệm cận đứng và ngang của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{2-x}{9-x^2}$

b) $y = \frac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}$

c) $y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$

d) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

HD & Giải

a) Tiệm cận đứng: $x = -3, x = 3$; tiệm cận ngang: $y = 0$

b) Tiệm cận đứng: $x = -1, x = \frac{3}{5}$; tiệm cận ngang: $y = -\frac{1}{5}$

c) Tiệm cận đứng: $x = -1$

d) Tiệm cận đứng: $x = 1$; tiệm cận ngang (phía phải): $y = 1$

Bài 4.3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{x+2}{x^2-1}$

b) $y = \frac{-2x-2}{x+3}$

c) $y = x+2 - \frac{1}{x-3}$

d) $y = \frac{x^2-3x+4}{2x+1}$

HD & Giải

a) Tiệm cận đứng: $x = 1, x = -1$; tiệm cận ngang: $y = 0$

b) Tiệm cận đứng: $x = -3$; tiệm cận ngang: $y = -2$

c) Tiệm cận đứng: $x = 3$, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x-3} \right) = 0$ hoặc

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x-3} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = x+2$ là tiệm cận xiên.

d) Tiệm cận đứng: $x = -\frac{1}{2}$, tiệm cận xiên có dạng: $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3x+4}{x(2x+1)} = \frac{1}{2}; b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[y - \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2-3x+4}{2x+1} - \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-7x+8}{2(2x+1)} = -\frac{7}{4}$$

Đường thẳng $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{4}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$)

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 4.4. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+2}$

b) $y = \frac{3-2x}{3x+1}$

c) $y = \frac{5}{2-3x}$

d) $y = \frac{-4}{x+1}$

Bài 4.5. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2-12x+27}{x^2-4x+5}$

b) $y = \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$

c) $y = \frac{x^2+3x}{x^2-4}$

d) $y = \frac{2-x}{x^2-4x+3}$

Kết quả

Bài 4.4.

a) Tiệm cận đứng: $x = -2$, tiệm cận ngang: $y = 2$

b) Tiệm cận đứng: $x = -\frac{1}{3}$, tiệm cận ngang: $y = -\frac{2}{3}$

c) Tiệm cận đứng: $x = \frac{2}{3}$, tiệm cận ngang: $y = 0$

d) Tiệm cận đứng: $x = -1$, tiệm cận ngang: $y = 0$

Bài 4.5.

a) Tiệm cận ngang: $y = 1$

b) Tiệm cận đứng: $x = 1$, tiệm cận ngang: $y = 1$

c) Tiệm cận đứng: $x = -2, x = 2$, tiệm cận ngang: $y = 1$

d) Tiệm cận đứng: $x = 1, x = 3$, tiệm cận ngang: $y = 0$

§5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NĂM

I. Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$

1. Tìm tập xác định của hàm số

2. Sự biến thiên

a) Chiều biến thiên

➤ Tính y'

➤ Tìm các nghiệm của phương trình $y' = 0$ và các điểm tại đó y' không xác định

➤ Xét dấu y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số

b) Tìm cực trị

c) Tìm các giới hạn vô cực; các giới hạn $+\infty, -\infty$ và tại các điểm mà hàm số không xác định. Tìm các tiệm cận đứng và ngang (nếu có)

d) Lập bảng biến thiên

3. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị

Chú ý:

Để vẽ đồ thị hàm số chính xác:

- Tính thêm tọa độ của một số điểm, đặc biệt nên tính các giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ.

- Lưu ý tính chất đối xứng (qua trục, qua tâm...) của đồ thị.

II. Khảo sát một số hàm số đa thức và phân thức

1. Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

➤ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

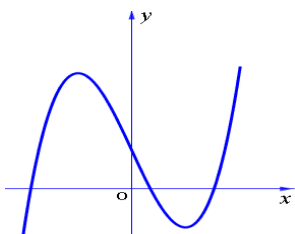
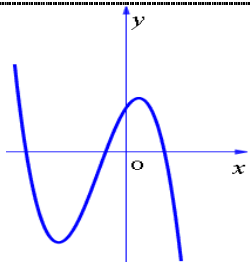
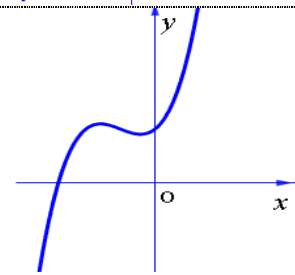
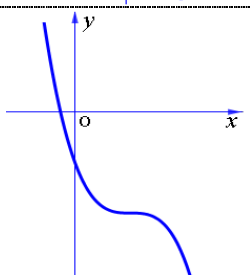
➤ y' là một tam thức bậc hai:

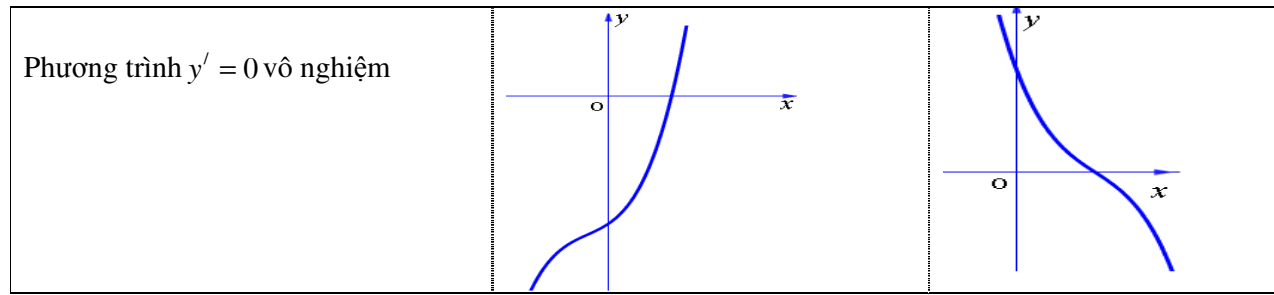
+ Nếu y' có hai nghiệm phân biệt thì sẽ đổi dấu hai lần khi qua các nghiệm của nó, khi đó đồ thị có hai điểm cực trị.

+ Nếu y' có nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì không đổi dấu, do đó đồ thị không có điểm cực trị.

+ y'' là một nhị thức bậc nhất luôn đổi dấu qua nghiệm của nó nên có một điểm uốn. Đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

Đồ thị hàm số bậc ba thường có một trong các dạng như hình dưới đây

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		



2. Hàm số trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

↪ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

↪ $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$

+ Nếu a, b cùng dấu thì y' có một nghiệm và đổi dấu một lần qua nghiệm của nó nên chỉ có một điểm cực trị.

+ Nếu a, b trái dấu thì y' có ba nghiệm phân biệt và đổi dấu ba lần khi qua các nghiệm của nó nên đồ thị có ba điểm cực trị.

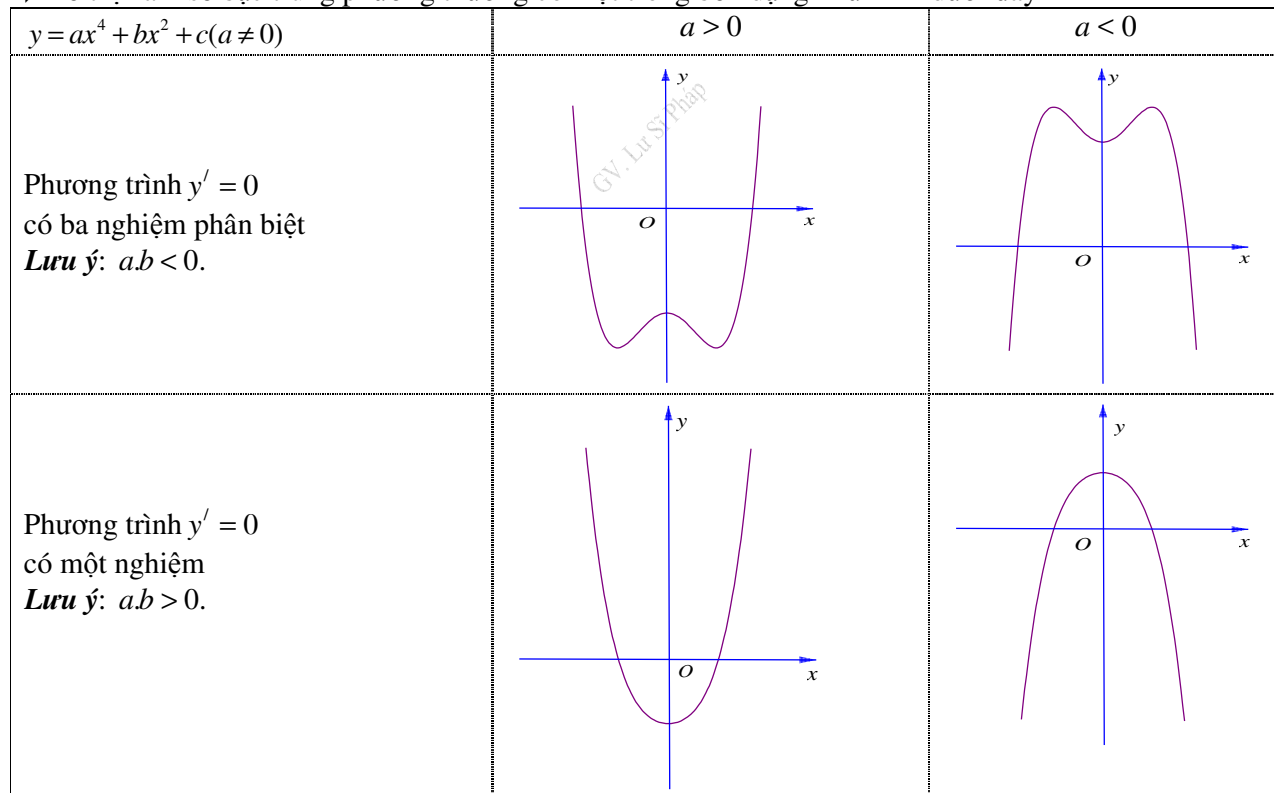
↪ $y'' = 12ax^2 + 2b$

+ Nếu a, b cùng dấu thì y'' không đổi dấu nên đồ thị không có điểm uốn

+ Nếu a, b trái dấu thì y'' có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu hai lần khi qua các nghiệm của nó nên đồ thị có hai điểm uốn.

↪ Đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng

↪ Đồ thị hàm số bậc trùng phương thường có một trong bốn dạng như hình dưới đây



3. Hàm số phân thức: $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - cb \neq 0)$

↪ Tập xác định: $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

↪ $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2} = \frac{D}{(cx + d)^2}$

+ Nếu $D > 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in D_1$

+ Nếu $D < 0 \Rightarrow y' < 0, \forall x \in D_1$

↪ Tiệm cận:

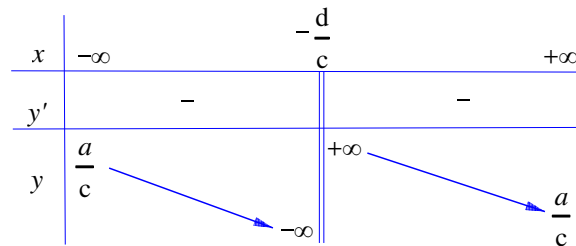
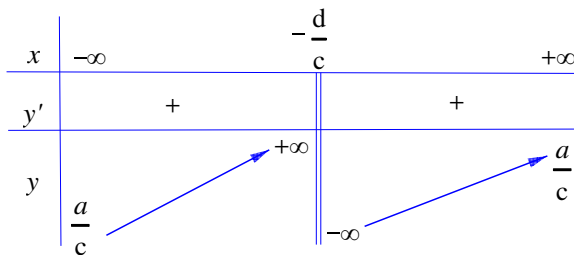
+ $y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang;

+ $x = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng

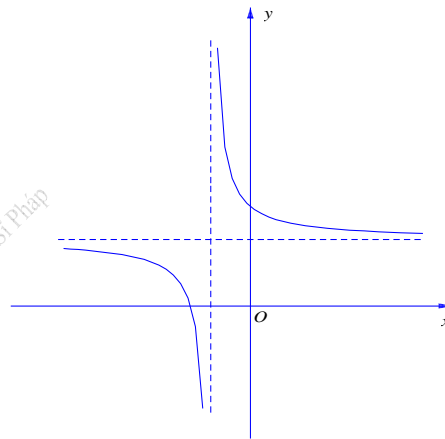
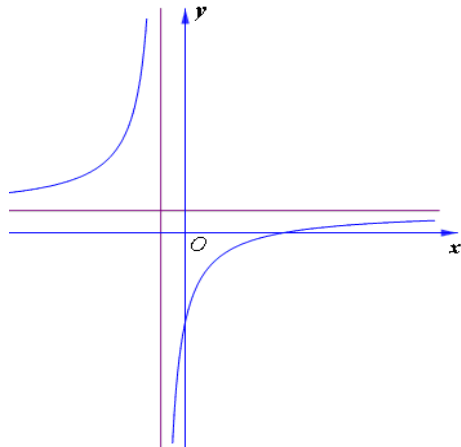
↪ Bảng biến thiên

TH: $y' > 0$

TH: $y' < 0$



↪ Đồ thị có dạng:



B. BÀI TẬP

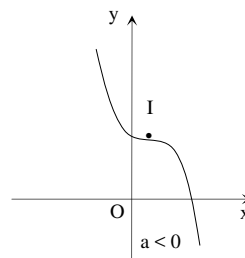
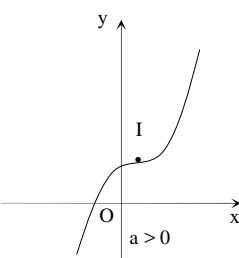
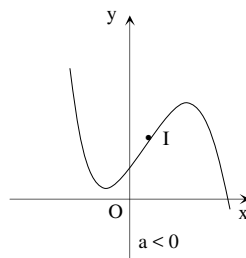
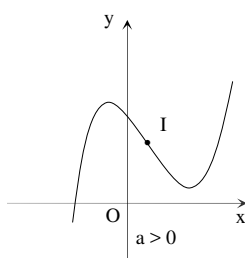
Vấn đề 1. Khảo sát hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

♦ y' là một tam thức bậc hai

+ Nếu y' có hai nghiệm phân biệt thì sẽ đổi dấu hai lần khi qua nghiệm của nó, khi đó đồ thị có hai điểm cực trị.

+ Nếu y' có nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì không đổi dấu, khi đó đồ thị không có điểm cực trị

♦ y'' là một nhị thức bậc nhất luôn đổi dấu qua nghiệm của nó nên có một điểm uốn. Đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng. Hình dạng của đồ thị



Dạng 1: Hàm số có 2 cực trị

Dạng 2: Hàm số không có cực trị

Bài 5.1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 + 3x^2 - 4$

b) $y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$

c) $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

d) $y = -x^3 + 3x + 2$

e) $y = x^3 + x^2 + x - 3$

f) $y = -2x^3 + 5$

HD & Giải

a) $y = x^3 + 3x^2 - 4$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

• Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $y_{CB} = y(-2) = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = y(0) = -4$

• Các giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = -\infty.$$

• Đồ thị không có tiệm cận

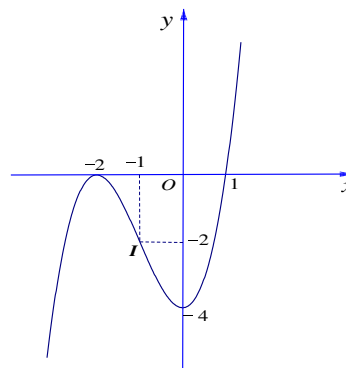
• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$		

③ Đồ thị:

Bảng giá trị(hay Điểm đặc biệt)

x	-2	-1	0	1
y	0	-2	-4	0



Đồ thị nhận điểm $I(-1; -2)$ làm tâm đối xứng. Trong đó hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

b) $y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = \frac{1}{8}(3x^2 - 6x - 9)$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$

• Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = y(3) = -4$

• Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5) = -\infty$$

• Đồ thị không có tiệm cận

• Bảng biến thiên

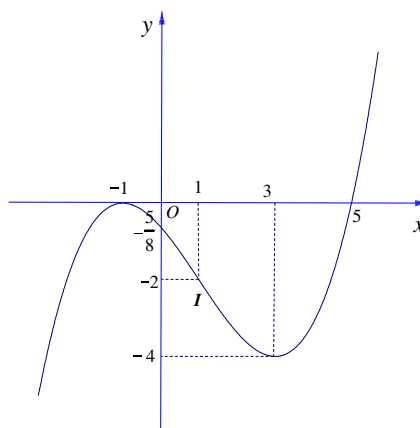
x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		0		-4	$+\infty$

③ Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $\left(0; -\frac{5}{8}\right)$

$$\text{Ta có: } y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Vậy đồ thị và trục hoành có hai điểm chung $(-1; 0), (5; 0)$. Đồ thị nhận điểm $I(1; -2)$ làm tâm đối xứng.



c) $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = -3x^2 + 6x - 4 = -(3(x-1)^2 + 1) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- Cực trị: Hàm số không có cực trị
- Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) = +\infty$$

- Đồ thị không có tiệm cận.
- Bảng biến thiên

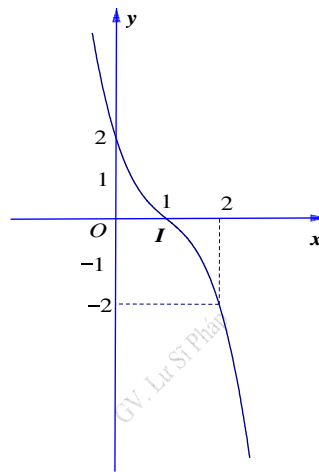
x	$-\infty$	$+\infty$
y'		-
y	$+\infty$	$-\infty$

③ Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; 2)$

Giao điểm của đồ thị và trục hoành điểm $(1; 0)$.

Đồ thị nhận điểm $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng.



d) $y = -x^3 + 3x + 2$

- ① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- ② Sự biến thiên
- Chiều biến thiên

$$y' = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1). \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = y(1) = 4$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = y(-1) = 0$

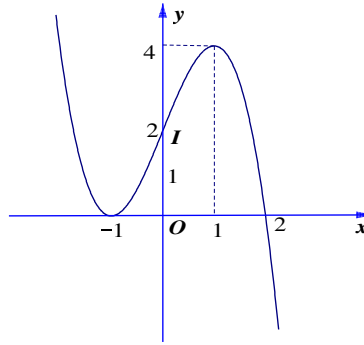
- Các giới hạn tại vô cực $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x + 2) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x + 2) = +\infty$
- Đồ thị không có tiệm cận
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	0		4	$-\infty$

③ Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; 2)$

Giao điểm của đồ thị và trục hoành là $(-1; 0), (2; 0)$. Đồ thị nhận điểm uốn $I(0; 2)$ làm tâm đối xứng.



e) $y = x^3 + x^2 + x - 3$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = 3x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + (x+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

• Cực trị: Hàm số không có cực trị

• Các giới hạn tại vô cực $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2 + x - 3) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + x - 3) = -\infty$

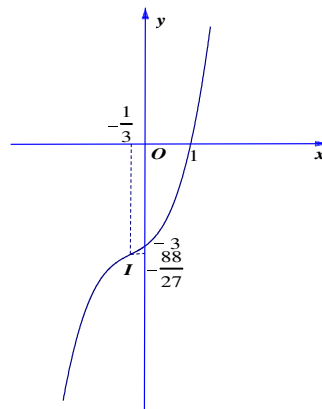
• Đồ thị không có tiệm cận.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		+
y	$-\infty$	$+\infty$

③ Đồ thị: Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; -3)$. Giao điểm của đồ thị và trục hoành điểm

$(1; 0)$. Đồ thị nhận điểm uốn $I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{88}{27}\right)$ làm tâm đối xứng.



f) $y = -2x^3 + 5$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

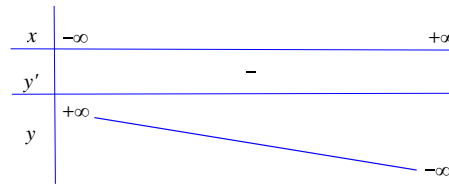
② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = -6x^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- Cực trị: Hàm số không có cực trị
- Các giới hạn tại vô cực $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 5) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5) = +\infty$
- Đồ thị không có tiệm cận.
- Bảng biến thiên

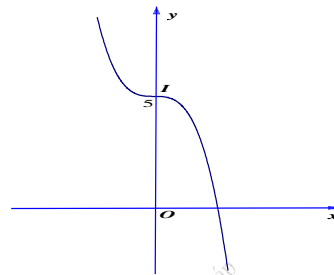


③ Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; 5)$

Giao điểm của đồ thị và trục hoành điểm $\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}; 0\right)$.

Đồ thị nhận điểm uốn $I(0; 5)$ làm tâm đối xứng.



Vấn đề 2. Khảo sát hàm số trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Bài 5.2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

- a) $y = x^4 - 2x^2 - 3$ b) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ c) $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$ d) $y = \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{3}{2}$

HD & Giải

a) $y = x^4 - 2x^2 - 3$

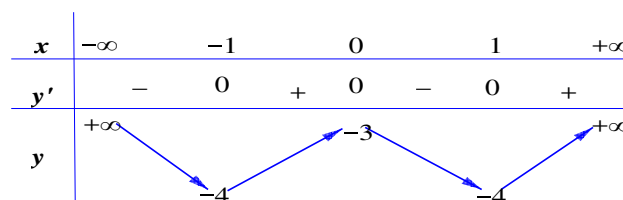
① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -3 \\ x = 1 \Rightarrow y = -4 \\ x = -1 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

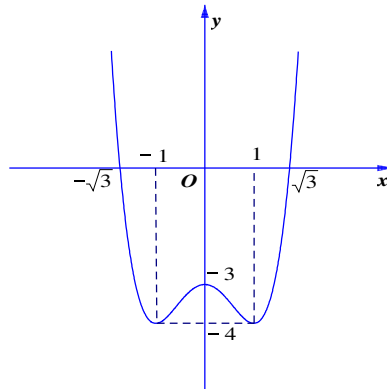
- Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{CT} = y(\pm 1) = -4$, đạt cực đại tại $x = 0, y_{CB} = y(0) = -3$
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
- Đồ thị không có tiệm cận
- Bảng biến thiên:



③ Đồ thị:

Hàm số đã cho là hàm số chẵn, do đó đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng. Giao điểm của đồ thị với trục hoành là các điểm $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; 0)$

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; -3)$



b) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên: $y' = -4x^3 + 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 4 \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

• Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1, y_{CD} = y(\pm 1) = 4$, đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = y(0) = 3$

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

• Đồ thị không có tiệm cận

• Bảng biến thiên:

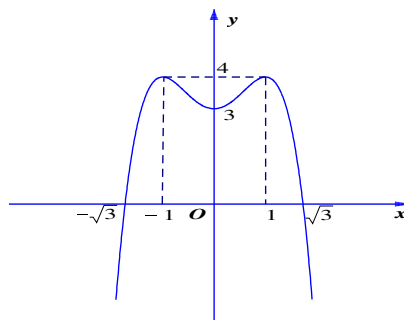
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$+\infty$	4	3	4	$+\infty$

③ Đồ thị:

Hàm số đã cho là hàm số chẵn, do đó đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là các điểm $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; 0)$

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; 3)$



c) $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên: $y' = -2x^3 - 2x = -2x(x^2 + 1); y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$, nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

• Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = y(0) = \frac{3}{2}$, hàm số không có cực tiểu.

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

• Đồ thị không có tiệm cận

• Bảng biến thiên:

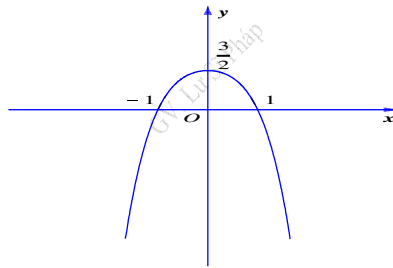
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$

③ Đồ thị:

Hàm số đã cho là hàm số chẵn, do đó đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là các điểm $(-1; 0), (1; 0)$

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; \frac{3}{2})$



d) $y = \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{3}{2}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên: $y' = 2x^3 + 2x = 2x(x^2 + 1); y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = y(0) = -\frac{3}{2}$, hàm số không có cực đại.

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

• Đồ thị không có tiệm cận

• Bảng biến thiên:

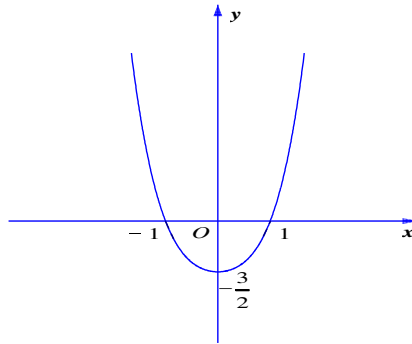
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$

③ Đồ thị:

Hàm số đã cho là hàm số chẵn, do đó đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là các điểm $(-1; 0), (1; 0)$

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$



Vấn đề 3. Khảo sát hàm số nhất biến: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad-bc \neq 0$)

Bài 5.3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{x-2}{2x+1}$

b) $y = \frac{2x-1}{x-1}$

c) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$

d) $y = \frac{1-2x}{2x-4}$

HD & Giải

a) $y = \frac{x-2}{2x+1}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

② Sự biến thiên:

• Đạo hàm: $y' = \frac{5}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \neq -\frac{1}{2}$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

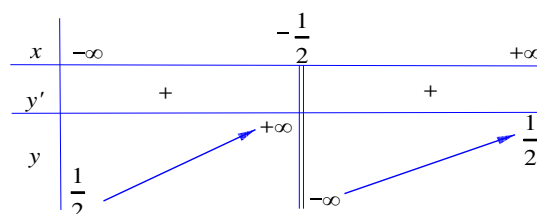
• Hàm số không có cực trị

• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

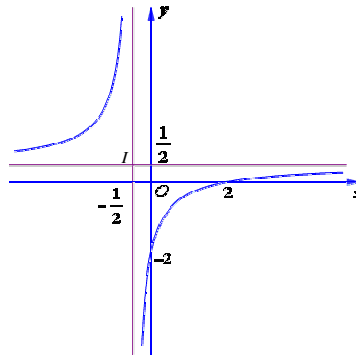
$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} y = -\infty \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ tiệm cận đứng

• Bảng biến thiên:



③ Đồ thị: Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$ và trục hoành tại điểm $(2; 0)$

Đồ thị gồm hai nhánh và đồ thị nhận điểm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) $y = \frac{2x-1}{x-1}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

② Sự biến thiên:

• Đạo hàm: $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

• Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

• Hàm số không có cực trị

• Giới hạn và tiệm cận:

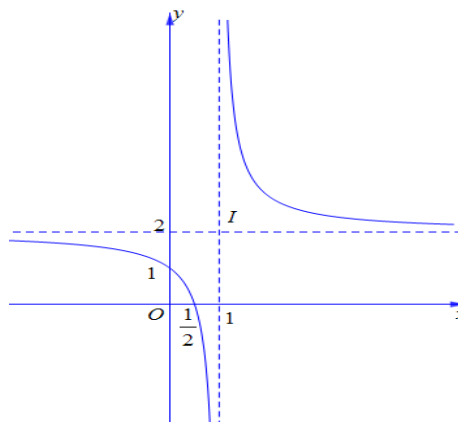
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng}$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y	2		$+\infty$		2

③ Đồ thị: Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;1)$ và trục hoành tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Đồ thị gồm hai nhánh và đồ thị nhận điểm $I(1;2)$ làm tâm đối xứng.



c) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

② Sự biến thiên:

• Đạo hàm: $y' = \frac{-5}{(2x+1)^2} < 0, \forall x \neq -\frac{1}{2}$

• Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

• Hàm số không có cực trị

• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

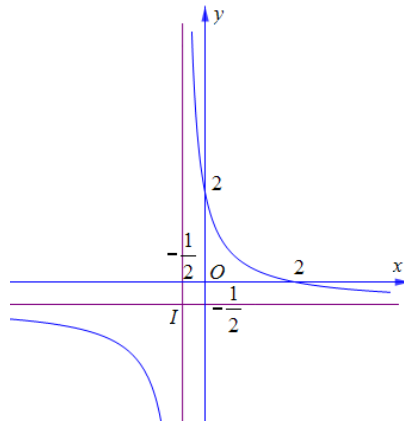
$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		-	-
y	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$

③ Đồ thị: Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$ và trục hoành tại điểm $(2; 0)$.

Đồ thị gồm hai nhánh và đồ thị nhận điểm $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng.



d) $y = \frac{1-2x}{2x-4}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

② Sự biến thiên:

• Đạo hàm: $y' = \frac{3}{2(x-2)^2} > 0, \forall x \neq 2$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

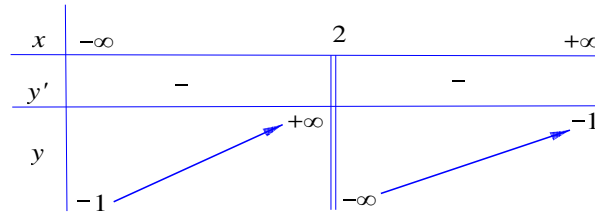
• Hàm số không có cực trị

- Giới hạn và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ là tiệm cận ngang}$$

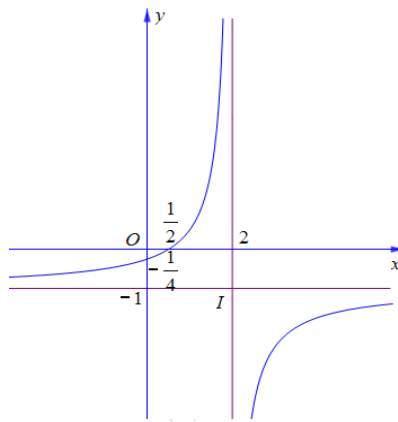
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} y = -\infty \Rightarrow x = 2 \text{ là tiệm cận đứng}$$

- Bảng biến thiên:



- ③ Đồ thị: Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0; -\frac{1}{4}\right)$ và trục hoành tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

Đồ thị gồm hai nhánh và đồ thị nhận điểm $I(2; -1)$ làm tâm đối xứng.



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 5.4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$

b) $y = x^3 - 3x + 1$

c) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - \frac{2}{3}$

d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

e) $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

f) $y = x^4 - 3x^2 + 2$

Bài 5.5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = -x^4 - 2x^2 + 1$

b) $y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1$

c) $y = -x^4 + 2x^2 + 2$

d) $y = \frac{x+1}{x-1}$

e) $y = \frac{2x+1}{1-3x}$

f) $y = \frac{x+3}{x+1}$

§6. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Biện luận số giao điểm của hai đồ thị

Giao điểm của hai đường cong $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$

- Lập phương trình tìm hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ (*)
- Giải và biện luận (*)
- Kết luận: (*) có bao nhiêu nghiệm thì (C_1) và (C_2) có bấy nhiêu giao điểm.

2. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

Dùng đồ thị $(C): y = f(x)$, biện luận theo m số nghiệm của phương trình $h(x, m) = 0$ (1)

Bước 1. Khảo sát và vẽ đồ thị $(C): y = f(x)$ (nếu chưa có sẵn đồ thị (C)).

Bước 2. Biến đổi $h(x, m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(m)$. Suy ra số nghiệm của phương trình (1) là giao điểm của hai đường thẳng $y = f(x)$ và $y = g(m)$. Sau đó căn cứ vào đồ thị để suy ra kết quả.

Lưu ý: $y = g(m)$ là đường thẳng cùng phương với trục Ox , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng $g(m)$.

3. Viết phương trình tiếp tuyến

Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ của đường cong $(C): y = f(x)$ có dạng là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

↳ $M(x_0; y_0)$ gọi là tiếp điểm

↳ $k = f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến

↳ $y_0 = f(x_0)$

Lưu ý: Trong phương trình tiếp tuyến (1), có ba tham số $x_0, y_0, f'(x_0)$. Để viết được phương trình (1), ta phải tính hai tham số còn lại khi cho biết một tham số.

4. Sự tiếp xúc của các đường cong

a. Định nghĩa: Nếu tại điểm chung $M(x_0; y_0)$, hai đường cong (C_1) và

(C_2) có chung tiếp tuyến thì ta nói (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau tại M .

Điểm M được gọi là tiếp điểm của hai đường cong đã cho.

b. Điều kiện tiếp xúc

Hai đường cong $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$
 có nghiệm và nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đó.

c. Các trường hợp đặc biệt

- $(\Delta): y = ax + b$ tiếp xúc với $(C): y = f(x)$ khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f'(x) = a \end{cases}$ có nghiệm.
- $(\Delta): y = ax + b$ tiếp xúc với $(C): y = f(x)$ tại $M_0(x_0; y_0)$ khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} f(x_0) = ax_0 + b \\ f'(x_0) = a \end{cases}$ có nghiệm.
- (C) tiếp xúc với trục Ox khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Chú ý:

① Nếu $(\Delta): y = ax + b$ thì (Δ) có hệ số góc $k = a$.

② Phương trình đường thẳng (Δ) qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k là: $y - y_0 = k(x - x_0)$

③ Cho $(\Delta): y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- $(\Delta') // (\Delta) \Rightarrow (\Delta')$ có phương trình $y = ax + m$ ($m \neq b$)
- $(\Delta') \perp (\Delta) \Rightarrow (\Delta')$ có phương trình $y = -\frac{1}{a}x + m$
- (Δ) có hệ số góc là k , (Δ') có hệ số góc là k' . $(\Delta') \perp (\Delta) \Leftrightarrow k.k' = -1$
- (Δ) hợp với trục hoành một góc α thì hệ số góc của (Δ) là $k = |\tan \alpha|$

Lưu ý: Dùng MTCT

Khi viết phương trình tiếp tuyến ta cần tìm hoành độ tiếp điểm x_0 . Thực hiện 1 trong 2 cách sau

Cách 1. Phương trình tiếp tuyến có dạng $y = ax + b$

Bước 1. Tìm $a = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=x_0}$

Bước 2. Tìm $b = y(x_0) - ax_0$

Cách 2.

Bước 1. MTCT bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2. Tính $y' = f'(x)$

Bước 3. Nhập $f'(x)(i-x) + y$ và Calc: $x = x_0$. Kết quả có dạng $b + ai$ như vậy pttt: $y = ax + b$.

B. BÀI TẬP

Bài 6.1. Cho đường cong $(C): y = -x^3 - 3x^2 + 3$ và đường thẳng $(d): y = m(x+1) + 1$. Tìm m để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

HD **Giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) :

$$-x^3 - 3x^2 + 3 = m(x+1) + 1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2 + m(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x - 2 + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ g(x) = x^2 + 2x - 2 + m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ (-1)^2 - 2 - 2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3. \text{ Vậy } m < 3 \text{ thì thỏa YCBT.}$$

Bài 6.2. Chứng minh rằng đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ luôn luôn cắt đường thẳng $(d): y = m - x$ với mọi giá trị của m .

HD **Giải**

Hàm số $y = \frac{x-1}{x+1} (C)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đường cong $(C): \frac{x-1}{x+1} = m - x \quad (1)$

(C) luôn luôn cắt đường thẳng (d) với mọi giá trị của m khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm với mọi m . Ta có:

$$\frac{x-1}{x+1} = m - x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = (m-x)(x+1) \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2-m)x - m - 1 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \quad (2)$$

Xét phương trình (2), ta có: $\Delta = m^2 + 8 > 0$ với mọi giá trị của m và $x = -1$ không thỏa mãn (2) nên phương trình luôn có hai nghiệm khác -1 . Vậy (C) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm.

Bài 6.3. Với các giá trị nào của m , đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm

phân biệt.

HD Giải

Cách 1.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình:

$$x^4 - 2x^2 - 3 = m \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 3 - m = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = x^2, t > 0$, ta được: $t^2 - 2t - 3 - m = 0 \quad (2)$

Đường thẳng cắt đường cong đã cho tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương t_1, t_2 phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 4 > 0 \\ -m - 3 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -3. \text{ Vậy: } m \in (-4; -3) \text{ thì thỏa YCBT}$$

Cách 2. Giải bài toán bằng đồ thị

Vẽ đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2x^2 - 3$

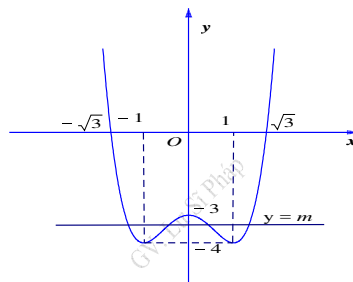
① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② $y' = 4x^3 - 4x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 (y = -3)$ hoặc $x = -1 (y = -4)$

hoặc $x = 1 (y = -4)$

Đồ thị có điểm cực đại là $(0; -3)$ và điểm cực tiểu $(\pm 1; -4)$

Đồ thị:



Dựa vào đồ thị, ta có $m \in (-4; -3)$ thì thỏa YCBT

Bài 6.4. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + m - 3)x - m^2 + 3 \quad (C_m)$

Định m để:

- (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt
- (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương
- (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ âm.

HD Giải

$$x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + m - 3)x - m^2 + 3 = 0$$

Phương trình hoành độ giao điểm (C_m) và trục hoành $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - mx + m^2 - 3) = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ g(x) = x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

a) YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m^2 - 3) > 0 \\ 1 - m + m^2 - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

b) YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 > 0 \\ m > 0 \\ 1 - m + m^2 - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m < -\sqrt{3} \text{ hoặc } m > \sqrt{3} \\ m > 0 \\ m \neq -1 \text{ và } m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 2$$

c) YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm trong đó có đúng hai nghiệm âm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm âm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 > 0 \\ m < 0 \\ 1 - m + m^2 - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m < -\sqrt{3} \text{ hoặc } m > \sqrt{3} \\ m < 0 \\ m \neq -1 \text{ và } m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < -\sqrt{3} \\ m \neq -1 \end{cases}$$

Bài 6.5.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận về số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + m = 0$ theo tham số m .

HD Giải

a) $y = -x^3 + 3x + 1$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = -3x^2 + 3. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$

• Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = y(1) = 3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = y(-1) = -1$

• Các giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty.$$

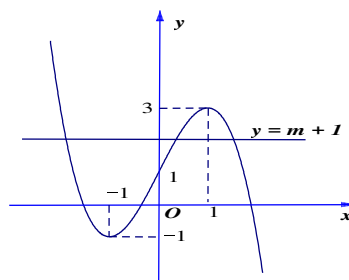
• Đồ thị không có tiệm cận

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1		3	$-\infty$

③ Đồ thị:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$



b) Ta có $x^3 - 3x + m = 0$ (1)

$\Leftrightarrow -x^3 + 3x + 1 = m + 1$. Vậy số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đường cong (C):

$y = -x^3 + 3x + 1$ và đường thẳng $y = m + 1$.

Dựa vào đồ thị, ta có:

$m + 1$	m	Số nghiệm của phương trình (1)
$m + 1 > 3$	$m > 2$	Có 1 nghiệm
$-1 < m + 1 < 3$	$-2 < m < 2$	Có 3 nghiệm
$m + 1 < -1$	$m < -2$	Có 1 nghiệm
$m + 1 = 3$	$m = 2$	Có 2 nghiệm
$m + 1 = -1$	$m = -2$	Có 2 nghiệm

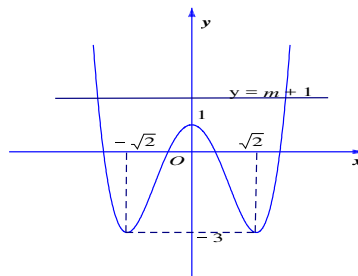
Bài 6.6. Cho hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + 1$ (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận về số nghiệm của phương trình $x^4 - 4x^2 - m = 0$ theo tham số m .

HD & Giải

a) Khảo sát: Bạn đọc tự giải



b) Ta có: $x^4 - 4x^2 - m = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 1 = m + 1$. Vậy số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đường cong (C):

$y = x^4 - 4x^2 + 1$ và đường thẳng $y = m + 1$.

Dựa vào đồ thị, ta có:

$m + 1$	m	Số nghiệm của phương trình (1)
$m + 1 < -3$	$m < -4$	Vô nghiệm
$m + 1 = 3$	$m = -4$	Có 2 nghiệm
$-3 < m + 1 < 1$	$-4 < m < 0$	Có 4 nghiệm
$m + 1 = 1$	$m = 0$	Có 3 nghiệm
$m + 1 > 1$	$m > 0$	Có 2 nghiệm

Bài 6.7. Cho hàm số $y = x^3 + (m+3)x^2 + 1 - m$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m)

a) Xác định m để hàm số có điểm cực đại là $x = -1$

b) Xác định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại $x = -2$

HD & Giải

a) Ta có: $y = x^3 + (m+3)x^2 + 1 - m$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 2(m+3)x = x(3x + 2m+6); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2m+6}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

		$-\frac{2m+6}{3}$				
x	$-\infty$				0	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	↗ CB		↘ CT		↗ $+\infty$

Hàm số có điểm cực đại là $x = -1 \Leftrightarrow -\frac{2m+6}{3} = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

b) (C_m) cắt trục hoành tại $x = -2 \Leftrightarrow -8 + 4(m+3) + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}$

Bài 6.8. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + m$ (m là tham số)

a) Với giá trị nào của m , đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 1)$?

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $\frac{7}{4}$

HD & Giải

a) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + m$, tập xác định $D = \mathbb{R}$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 1)$. Ta có: $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + m \Rightarrow m = \frac{1}{4}$

b) Với $m = 1$, ta có $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1$. Tự khảo sát

c) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm, khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm M có dạng là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (\Delta)$$

$$(C): y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad y' = x^3 + x$$

Theo giả thiết, ta có: $\frac{1}{4}x_0^4 + \frac{1}{2}x_0^2 + 1 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x_0^4 + 2x_0^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm 1$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y'(1) = 2$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y - \frac{7}{4} = 2(x - 1)$ hay $y = 2x - \frac{1}{4}$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y'(-1) = -2$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y - \frac{7}{4} = -2(x + 1)$ hay $y = -2x - \frac{1}{4}$

Bài 6.9. Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x - 2m + 1}{x - 1}$ (m là tham số), có đồ thị (C)

a) Xác định m để đồ thị (C) đi qua điểm $(0; -1)$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số với m tìm được.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị trên tại giao điểm của nó với trục tung.

HD & Giải

a) Đồ thị (C) qua điểm $(0; -1)$, ta có: $-1 = \frac{-2m+1}{-1} \Leftrightarrow m = 0$

b) Hàm số cần tìm: $y = \frac{x+1}{x-1}$. Bạn đọc tự giải

c) Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm, khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm M có dạng là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (\Delta). \text{ Ta có } (C): y = \frac{x+1}{x-1}, \text{ tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Theo giả thiết, ta có đồ thị (C) cắt trục tung tại $M(0; -1)$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y'(0) = -2$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y + 1 = -2(x + 0)$ hay $y = -2x - 1$

Bài 6.10. Cho $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) biết (Δ) song song với $(\Delta'): y = 9x$.

HD **Giải**

Ta có $(\Delta) // (\Delta'): y = 9x \Rightarrow (\Delta): y = 9x + m \ (m \neq 0)$

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = 9x + m & (1) \\ 3x^2 - 6x = 9 & (2) \end{cases}$$
 có nghiệm

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Với $x = -1 \Rightarrow m = 6$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = 9x + 6$

Với $x = 3 \Rightarrow m = -26$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = 9x - 26$

Bài 6.11. Cho $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) biết (Δ) vuông góc với (Δ') có phương trình $3x - y + 5 = 0$.

HD **Giải**

$(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có: $(\Delta'): 3x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 3x + 5$. Do (Δ) vuông góc với (Δ') nên phương trình $(\Delta): y = -\frac{1}{3}x + m$

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} = -\frac{1}{3}x + m & (1) \\ \frac{-3}{(x-1)^2} = -\frac{1}{3} & (2) \end{cases}$$
 có nghiệm

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 9 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 3 \\ x-1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

Với $x = 4 \Rightarrow m = \frac{13}{3}$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$

Với $x = -2 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

Bài 6.12. Cho $(C): y = 2x^3 + 3x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) qua điểm $M(0; -1)$

HD **Giải**

$(C): y = 2x^3 + 3x^2 - 1$, Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến (Δ) với đồ thị (C) qua điểm $M(0; -1)$. Khi đó $(\Delta): y = kx - 1$

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 1 = kx - 1 & (1) \\ 6x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$$
 có nghiệm

Thay k từ (2) vào (1), ta được: $2x^3 + 3x^2 - 1 = (6x^2 + 6x) - 1 \Leftrightarrow 4x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Với $x = 0 \Rightarrow k = 0$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = -1$

Với $x = -\frac{3}{4} \Rightarrow k = -\frac{9}{8}$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = -\frac{9}{8}x - 1$

Bài 6.13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C)

- a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) qua điểm $M(2; -3)$.
 b) Tìm trên đường thẳng $y = -2$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được đến đồ thị hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

HD & Giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C), Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến (Δ) với đồ thị (C) qua điểm $M(2; -3)$. Khi đó (Δ): $y = k(x - 2) - 3$

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x - 2) - 3 & (1) \\ 3x^2 - 6x = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\text{Thay } k \text{ từ (2) vào (1), ta được: } x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x - 2) - 3 \Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Với $x = 1 \Rightarrow k = -3$. Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ): $y = -3x + 3$

Với $x = \frac{5}{2} \Rightarrow k = \frac{15}{4}$. Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ): $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{2}$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C). Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 - 6x$

Gọi $N(a; -2)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = -2$

Đường thẳng qua N có hệ số góc k có phương trình: $y = k(x - a) - 2$ (Δ')

$$(\Delta') \text{ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình: } \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x - a) - 2 & (1) \\ 3x^2 - 6x = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\text{Thay } k \text{ từ (2) vào (1), ta được: } x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x - a) - 2 \Leftrightarrow 2x^3 - 3(a + 1)x^2 + 6ax - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[2x^2 - (3a - 1)x + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = 2x^2 - (3a - 1)x + 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Vì $x = 2 \Rightarrow k = 0$ và tiếp tuyến $y = -2$ là đường thẳng nằm ngang nên không có tiếp tuyến nào vuông góc với nó.

Vậy để từ N có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) vuông góc với nhau thì phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a - 1)^2 - 16 > 0 \\ a \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \text{ hoặc } a > \frac{5}{3} \\ a \neq 2 \end{cases} (*)$$

$$\text{Mặt khác: Ta có } k(x_1).k(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 - 6x_1).(3x_2^2 - 6x_2) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9[x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4x_1 x_2] = -1$$

$$\text{Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình (3), có } x_1 + x_2 = \frac{3a - 1}{2}, x_1 x_2 = 1$$

$$\text{Do đó: } 9\left[1 - 2\left(\frac{3a - 1}{2}\right) + 4\right] = -1 \Leftrightarrow a = \frac{55}{27} \text{ (thỏa } (*) \text{)}$$

$$\text{Vậy điểm cần tìm là: } N\left(\frac{55}{27}; -2\right)$$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 6.14. Cho hàm số $y = x^3 - 2m(x+1) + 1$

a) Với các giá trị nào của m , đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 2$

Đáp số: a) $m > \frac{3}{8}$ và $m \neq \frac{3}{2}$.

Bài 6.15. Với các giá trị nào của m , phương trình $4x^3 - 3x - 2m + 3 = 0$ có một nghiệm duy nhất?

Đáp số: $m < 1$ hoặc $m > 2$

Hướng dẫn: $4x^3 - 3x - 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x + 3 = 2m$. Do đó nghiệm của phương trình đã cho là giao điểm của đồ thị (C): $y = 4x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = 2m$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 4x^3 - 3x + 3$. Từ đó dễ dàng tìm được các giá trị của m sao cho đường thẳng $y = 2m$ cắt (C) tại đúng một điểm.

Bài 6.16. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1; -2)$ và tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x$

Đáp số: $y = 2x - 4$ và $y = -2x$

Bài 6.17. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) qua điểm

$M(0; 2)$.

Đáp số: $y = 2, y = \frac{8\sqrt{6}}{9}x + 2, y = -\frac{8\sqrt{6}}{9}x + 2$

GV. Lư Sĩ Pháp

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Tìm các điểm cực trị các hàm số:

a) $y = -x^3 - 6x^2 + 15x + 1$

b) $y = x^2\sqrt{x^2 + 2}$

c) $y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

HD & Giải

a) $y = -x^3 - 6x^2 + 15x + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 - 12x + 15$ và $y'' = -6x - 12$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$

Ta có: $y''(1) = -18 < 0$ và $y''(-5) = 18 > 0$

Vậy: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = y(1) = 9$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$ và $y_{CT} = y(-5) = -99$

b) $y = x^2\sqrt{x^2 + 2}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 2x\sqrt{x^2 + 2} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{3x^3 + 4x}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x(3x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 2}}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		0		$+\infty$

Từ đó, ta có: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = y(0) = 0$

c) $y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Mặt khác: $y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$. Xét $y''(0) = 2 > 0$ và $y''(-2) = -2 < 0$

Vậy: Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $y_{CD} = y(-2) = -4$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = y(0) = 0$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$

b) $y = 2 \sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

c) $y = -2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1$

d) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

HD & Giải

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ chứa $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x - 12$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in \left(-2; \frac{5}{2}\right) \\ x = 2 \in \left(-2; \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

Ta lại có: $y(-1) = 8, y(2) = -19, y(-2) = -3, y\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{33}{2}$

Vậy: $\text{Max}_{x \in \left(-2; \frac{5}{2}\right)} y = y(-1) = 8; \text{Min}_{x \in \left(-2; \frac{5}{2}\right)} y = y(2) = -19$

b) $y = 2 \sin x + \sin 2x$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ chứa $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

Ta có: $y' = 2 \cos x + 2 \cos 2x = 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \text{ Vì}$$

$$x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \pi; x = \frac{\pi}{3}. \text{ Khi đó: } y(0) = y(\pi) = 0, y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$$

Vậy: $\text{Max}_{x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \text{Min}_{x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$

c) $y = -2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$. Hàm số viết lại: $y = f(t) = -2t^2 + 2t - 1$

Ta tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1; 1]$. Đó cũng là GTLN & GTNN của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = -4t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in [-1; 1]$

$$f(-1) = -5, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, f(1) = -1$$

Vậy: $\text{Max}_{t \in [-1; 1]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}; \text{Min}_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(-1) = -5$.

Do đó: $\text{Max}_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{2}, \text{Min}_{\mathbb{R}} y = -5$

d) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Tập xác định: $D = [-2; 2]$

$$\text{Ta có: } y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in (-2; 2)$$

$$y(-2) = 2, y(2) = 2, y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

Vậy: $Max_{y = y(\sqrt{2})} = 2\sqrt{2}; Min_{y = y(-2)} = -2$

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - (m+2)x - 1$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi $m = 1$

b) Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ và tiếp xúc với đồ thị (C).

c) Chứng minh rằng hàm số (1) luôn có một cực đại, một cực tiểu.

d) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai cực trị của (C).

e) Biện luận theo k số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x = k$.

HD và Giải

a) Với $m = 1$, ta có: $y = x^3 - 3x - 1$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

• Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = 1$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = -3$

• Các giới hạn tại vô cực

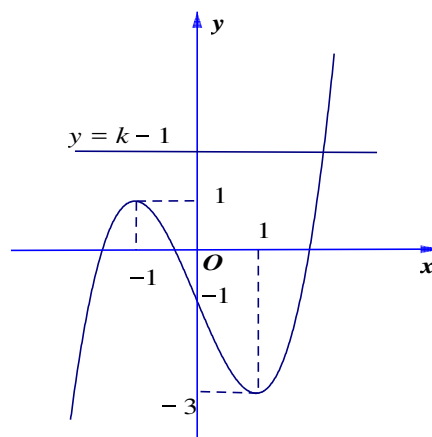
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 1) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 1) = -\infty$

• Đồ thị không có tiệm cận

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		1		-3	$+\infty$

③ Đồ thị:



b) Đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ nên (d) có dạng: $y = -3x + b$

(d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x - 1 = -3x + b & (1) \\ 3x^2 - 3 = -3 & (2) \end{cases}$$
 có nghiệm

Từ (2) suy ra: $x = 0$ thay vào (1), ta có được $b = -1$. Vậy phương trình tiếp tuyến (d): $y = -3x - 1$

c) Hàm số: $y = x^3 + (m-1)x^2 - (m+2)x - 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(m-1)x - (m+2)$

Mặt khác, ta có: $\Delta' = (m-1)^2 + 3(m+2) = m^2 + m + 7 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Nên phương trình $y' = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó hàm số (1) luôn có một cực đại và một cực tiểu với mọi giá trị của m .

d) Đồ thị (C) có điểm cực đại là $A(-1;1)$ và điểm cực tiểu là $B(1;-3)$.

Đường thẳng đi qua A, B có phương trình là: $\frac{x+1}{1+1} = \frac{y-1}{-3-1} \Leftrightarrow y = -2x - 1$

e) Ta có: $x^3 - 3x = k$ (*)

$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 1 = k - 1$. Vậy số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đường cong (C):

$y = x^3 - 3x - 1$ và đường thẳng $y = k - 1$.

Dựa vào đồ thị, ta có:

$k-1$	k	Số nghiệm của phương trình (*)
$k-1 > 1$	$k > 2$	Có 1 nghiệm
$k-1 = 1$	$k = 2$	Có 2 nghiệm
$-3 < k-1 < 1$	$-2 < k < 2$	Có 3 nghiệm
$k-1 = -3$	$k = -2$	Có 2 nghiệm
$k-1 < -3$	$k < -2$	Có 1 nghiệm

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

b) Giải bất phương trình $f'(x-1) > 0$

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 , biết rằng $f''(x_0) = -6$.

HD&Giải

a) Bạn đọc tự giải

b) Hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$. $f'(x-1) = -3(x-1)^2 + 6(x-1) + 9 = -3x^2 + 12x$

$f'(x-1) > 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

c) Phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$ và $f''(x) = -6x + 6$

Theo giả thiết, ta có: $f''(x_0) = -6 \Leftrightarrow -6x_0 + 6 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = 24, f'(2) = 9$.

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) là: $y = 9x + 6$

Bài 5. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận số nghiệm của phương trình sau theo m : $x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}$

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (C).

HD&Giải

a) $y = x^3 + 3x^2 + 1$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$

• Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $y_{CD} = y(-2) = 5$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = y(0) = 1$

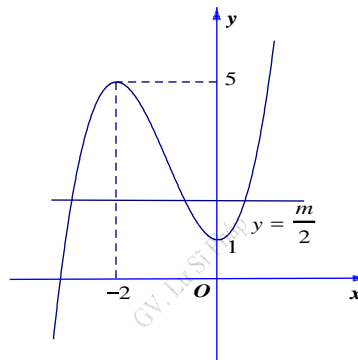
• Các giới hạn tại vô cực

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 + 1) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 1) = -\infty$, đồ thị không có tiệm cận

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$			

③ Đồ thị:



b) Ta có: $x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}$ (*)

Vậy số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đường cong (C): $y = x^3 + 3x^2 + 1$ và đường thẳng $y = \frac{m}{2}$.

Dựa vào đồ thị, ta có:

$\frac{m}{2}$	m	Số nghiệm của phương trình (*)
$\frac{m}{2} < 1$	$m < 2$	Có 1 nghiệm
$\frac{m}{2} = 1$	$m = 2$	Có 2 nghiệm
$1 < \frac{m}{2} < 5$	$2 < m < 10$	Có 3 nghiệm
$\frac{m}{2} = 5$	$m = 10$	Có 2 nghiệm
$\frac{m}{2} > 5$	$m > 10$	Có 1 nghiệm

c) Đồ thị (C) có điểm cực đại là $A(-2; 5)$ và điểm cực tiểu là $B(0; 1)$.

Đường thẳng đi qua A, B có phương trình là: $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{4} \Leftrightarrow y = -2x + 1$

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ (m là tham số)

- Xác định m để hàm số đồng biến trên tập xác định
- Với giá trị nào của tham số m hàm số có một cực đại và một cực tiểu.
- Xác định m để $f''(x) > 6x$

HD & Giải

Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$, Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

a) Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1) = 3(x^2 - 2mx + 2m-1)$

Hàm số đồng biến trên tập xác định khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy: $m = 1$ thì thỏa YCBT

b) Hàm số có một cực đại và một cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Ta có: $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Vậy: $m \neq 1$ thì thỏa YCBT

c) $y' = f'(x) = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1) = 3(x^2 - 2mx + 2m-1)$

$$y'' = f''(x) = 6x - 6m$$

Ta có: $f''(x) > 6x \Leftrightarrow 6x - 6m > 6x \Leftrightarrow m < 0$. Vậy: $m < 0$ thì thỏa YCBT

Bài 7. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị (C)

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.
- Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $x^4 - 6x^2 + 3 = m$.

HD & Giải

a) Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

$$\bullet \text{ Chiều biến thiên: } y' = 2x^3 - 6x. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow y = -3 \\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$;

đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$

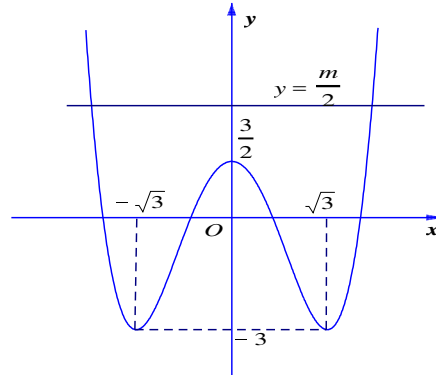
• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{3}, y_{CT} = y(\pm\sqrt{3}) = -3$, đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = y(0) = \frac{3}{2}$

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, đồ thị không có tiệm cận

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-3	$\frac{3}{2}$	-3	$+\infty$

③ Đồ thị:



b) Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 2x^3 - 6x$ và $f''(x) = 6x^2 - 6$

Theo giả thiết, ta có: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Với $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1, f'(-1) = 4$.

Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 4x + 3$

Với $x = 1 \Rightarrow f(1) = -1, f'(1) = -4$

Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = -4x + 3$

c) Ta có: $x^4 - 6x^2 + 3 = m$ (1)

$$x^4 - 6x^2 + 3 = m \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = \frac{m}{2}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đường cong (C): $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ và

đường thẳng $y = \frac{m}{2}$.

Dựa vào đồ thị, ta có:

$\frac{m}{2}$	m	Số nghiệm của phương trình (1)
$\frac{m}{2} < -3$	$m < -6$	Vô nghiệm
$\frac{m}{2} = -3$	$m = -6$	Có 2 nghiệm
$-3 < \frac{m}{2} < \frac{3}{2}$	$-6 < m < 3$	Có 4 nghiệm
$\frac{m}{2} = \frac{3}{2}$	$m = 3$	Có 3 nghiệm
$\frac{m}{2} > \frac{3}{2}$	$m > 3$	Có 2 nghiệm

Bài 8. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$

b) Xác định m để đồ thị (C_m) của hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

HD & Giải

a) Với $m = 1$, hàm số $y = x^4 - 2x^2$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

② Sự biến thiên

• Chiều biến thiên:

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$; đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

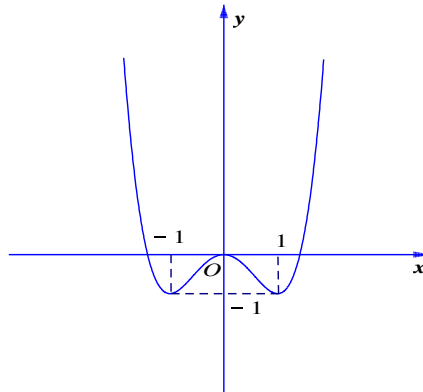
• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{CT} = y(\pm 1) = -1$, đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = y(0) = 0$

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, đồ thị không có tiệm cận

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

③ Đồ thị:



b) Hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Đồ thị (C_m) của hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

➤ Nếu $m \leq 0$ thì $x^2 - m \geq 0$ với mọi x nên đồ thị không tiếp xúc với trục Ox tại hai điểm phân biệt.

➤ Nếu $m > 0$ thì $y' = 0$ khi $x = 0, x = \pm\sqrt{m}$

$y(\sqrt{m}) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + m^3 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (do $m > 0$)

Vậy: $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - 3$ (1)

- a) Xác định m để hàm số (1) luôn luôn có cực đại, cực tiểu.
 b) Chứng minh rằng phương trình $x^3 + mx^2 - 3 = 0$ (2) luôn luôn có một nghiệm dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 c) Xác định m để phương trình (2) có một nghiệm duy nhất.

HD & Giải

a) Hàm số $y = x^3 + mx^2 - 3$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 2mx = x(3x + 2m)$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\text{Khi đó: } y' = 0 \Leftrightarrow x(3x + 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2m}{3} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \neq 0$$

Vậy: $m \neq 0$ là giá trị cần tìm

b) Xét hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 - 3$, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + mx^2 - 3) = +\infty$ và $f(0) = -3 < 0$

Do đó, với mọi m , phương trình $x^3 + mx^2 - 3 = 0$ luôn luôn có nghiệm dương.

c) Phương trình $f(x) = x^3 + mx^2 - 3 = 0$ có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ cùng dấu và $m \neq 0$, nghĩa là:

$$f(0) \cdot f\left(-\frac{2m}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow -3 \left(-\frac{8m^3}{27} + \frac{4m^3}{9} - 3 \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 8m^3 - 12m^3 + 81 > 0 \Leftrightarrow -4m^3 + 81 > 0 \Leftrightarrow m < 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

Vậy: $m < 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ và $m \neq 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Cho hàm số $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5$ (m là tham số)

- a) Xác định m để hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Khi đó, hàm số đồng biến hay nghịch biến? Tại sao?
 b) Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

HD & Giải

Hàm số $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$a) y' = -3(m^2 + 5m)x^2 + 12mx + 6$$

Hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi y' không đổi dấu.

Ta xét các trường hợp:

$$\text{TH1: có } m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -5 \end{cases}$$

✎ Với $m = 0$ thì $y' = 6$ nên hàm số luôn đồng biến.

✎ Với $m = -5$ thì $y' = -60x + 6$ đổi dấu khi x đi qua $\frac{1}{10}$

TH2: có $m^2 + 5m \neq 0$. Khi đó, y' không đổi dấu nếu:

$$\Delta' = 36m^2 + 18(m^2 + 5m) \leq 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 5m \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq m \leq 0$$

Với điều kiện đó, ta có $-(m^2 + 5m) > 0$ nên $y' > 0$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Vậy: $-\frac{5}{3} \leq m \leq 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) Nếu hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì $y'(1) = 0$.

$$\text{Khi đó: } y'(1) = -3m^2 - 3m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } y'' = -6(m^2 + 5m)x + 12m$$

Với $m = 1$ thì $y'' = -36x + 12$. Khi đó: $y''(1) = -24 < 0$, hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Với $m = -2$ thì $y'' = 36x - 24$. Khi đó: $y''(1) = 12 > 0$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Vậy: $m = 1$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{3(x+1)}{x-2}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b) Viết phương trình các đường thẳng đi qua $O(0;0)$ và tiếp xúc với (C).

c) Tìm tất cả các điểm trên (C) có tọa độ là các điểm nguyên.

HD & Giải

a) Hàm số $y = \frac{3(x+1)}{x-2}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

② Sự biến thiên:

• Đạo hàm: $y' = \frac{-9}{(x-2)^2} < 0, \forall x \neq 2$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

• Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3 \Rightarrow$ tiệm cận ngang: $y = 3$

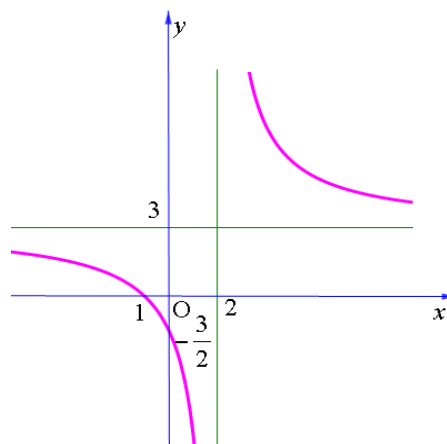
$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng: $x = 2$

• Hàm số không có cực trị

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		-		-	
y	3		$+\infty$		3
			$-\infty$		

③ Đồ thị:



b) Gọi k là hệ số góc của đường thẳng (Δ) tiếp xúc với đồ thị (C) và đi qua $O(0;0)$. Khi đó $(\Delta): y = kx$

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ khi và chỉ khi hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{3(x+1)}{x-2} = kx & (1) \\ \frac{-9}{(x-2)^2} = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\text{Thay } k \text{ từ (2) vào (1), ta được: } \frac{3(x+1)}{x-2} + \frac{9x}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow k = -\frac{3}{2}(2 + \sqrt{3}). \text{ Vậy phương trình tiếp tuyến } (\Delta): y = -\frac{3}{2}(2 + \sqrt{3})x$$

$$\text{Với } x = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow k = -\frac{3}{2}(2 - \sqrt{3}). \text{ Vậy phương trình tiếp tuyến } (\Delta): y = -\frac{3}{2}(2 - \sqrt{3})x$$

c) Gọi $M(x; y) \in (C), x \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ta có: } y = \frac{3(x+1)}{x-2} = 3 + \frac{9}{x-2}. M(x; y) \in (C) \text{ có tọa độ nguyên khi và chỉ khi } \frac{9}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 : (x-2).$$

Khi đó: $x-2$ nhận các giá trị $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ hay x nhận các giá trị $1; 3; -1; 5; -7; 11$

Vậy, các điểm trên (C) có tọa độ nguyên là: $(1; -6), (3; 12), (-1; 0), (5; 6), (-7; 2), (11; 4)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x}$

b) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

c) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - \sqrt{4x - x^2}$

e) $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$

Kết quả

Bài 11

a) $\text{Max}_y = y(1) = 2\sqrt{3}; \text{Min}_y = y(-2) = y(4) = \sqrt{6}$

b) $\text{Max}_y = y(0) = 2; \text{Min}_y = y(\pm 1) = \sqrt{2}$

c) $\text{Max}_y = y(2) = 2; \text{Min}_y = y(1) = y(3) = \sqrt{2}$

d) $\text{Max}_y = f(0) = f(4) = 0; \text{Min}_y = f(2) = -3$

e) $\text{Max}_y = f(4) = 5; \text{Min}_y = f(0) = \sqrt{5}$

Bài 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) .

b) Dùng đồ thị (C) , biện luận theo m số nghiệm các phương trình:

i) $x^3 - 3x^2 + 4 - m = 0$

ii) $x^3 - 3x^2 + 2m = 0$

Bài 13. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ có đồ thị (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) .

b) Dùng đồ thị (C) , biện luận theo m số nghiệm phương trình: $x^4 - 4x^2 - m = 0$.

Bài 14. Cho đường cong $(C): y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) :

a) Tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$

b) Biết (Δ) có hệ số góc $k = -3$

c) Biết $(\Delta) // (\Delta_1): 9x - y + 1 = 0$

d) Biết $(\Delta) \perp (\Delta_2): x + 24y - 48 = 0$

e) Biết (Δ) đi qua điểm $M(-1; -2)$

MỘT SỐ BÀI TẬP TRONG CÁC KÌ THI

Bài 1(TNTHPT-2014). Cho hàm số $y = \frac{-2x+3}{x-1}$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại các giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x - 3$.

HD & Giải

a) Khảo sát ...

Hàm số $y = \frac{-2x+3}{x-1}$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

❖ Sự biến thiên:

♦ Đạo hàm: $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

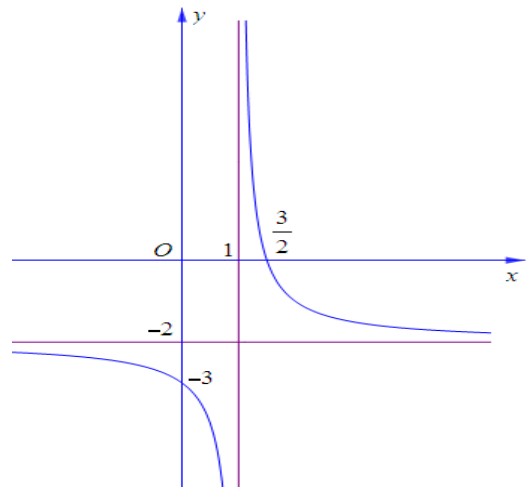
♦ Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2$; tiệm cận ngang: $y = -2$; $\lim_{x \rightarrow (1)^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (1)^+} y = +\infty$; tiệm cận đứng: $x = 1$

♦ Hàm số không có cực trị

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y	-2		$+\infty$		-2



❖ Đồ thị:

b) Kí hiệu d là tiếp tuyến cần tìm và $M(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x - 3$ là nghiệm của phương trình: $\frac{-2x+3}{x-1} = x-3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 (x \neq 1) \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2$$

❖ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(0; -3)$ là $y = -x - 3$

❖ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; -1)$ là $y = -x + 1$

Bài 2(TNTHPT-2013). Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9.

HD & Giải

a) Hàm số $y = x^3 - 3x - 1$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

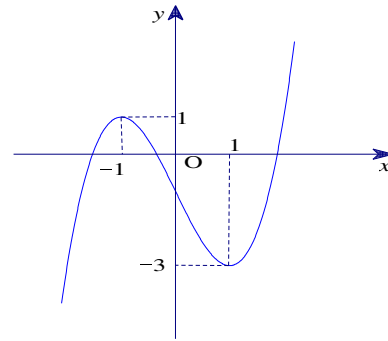
❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -1$

♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

- ♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CD} = y(-1) = 1$, đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = y(1) = -3$
- ♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
- ♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		1		-3	$+\infty$



❖ Đồ thị:

b) Kí hiệu d là tiếp tuyến cần tìm và $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm. Hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9.

Ta có: $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{cases}$

❖ Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình của d là: $y = 9x - 17$

❖ Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -3$. Phương trình của d là: $y = 9x + 15$

Bài 3(TNTHPT-2012). Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 , biết $f''(x_0) = -1$

HD & Giải

a) Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 2$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$; đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$

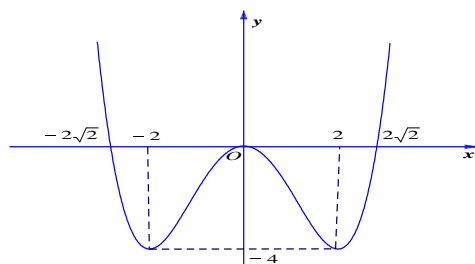
♦ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 2, y_{CT} = -4$, đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = 0$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	-4	0	-4	$+\infty$	

❖ Đồ thị:



b) Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, với x_0 là hoành độ tiếp điểm

Ta có $f'(x) = x^3 - 4x$; $f''(x) = 3x^2 - 4$. Theo giả thiết, ta có: $f''(x_0) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{7}{4}$, $f'(1) = -3$: Phương trình tiếp tuyến d là: $y = -3x + \frac{5}{4}$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -\frac{7}{4}$, $f'(-1) = 3$: Phương trình tiếp tuyến d là: $y = 3x + \frac{5}{4}$

Bài 4(TNTHPT-2011). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Xác định tọa độ giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = x + 2$

HD & Giải

a) Khảo sát . . .

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

❖ Sự biến thiên:

♦ Đạo hàm: $y' = \frac{-4}{(2x-1)^2}$, $y' < 0, \forall x \neq \frac{1}{2}$

♦ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty \right)$

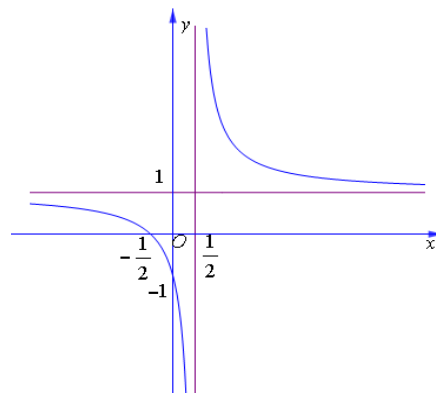
♦ Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$; tiệm cận ngang: $y = 1$; $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$; tiệm cận đứng: $x = \frac{1}{2}$

♦ Hàm số không có cực trị

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'			
	-		-
y	1	$+\infty$	1



❖ Đồ thị:

b) Hoành độ giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x + 2$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{2x+1}{2x-1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = (x+2)(2x-1) \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 3 = 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (y = 3) \\ x = -\frac{3}{2} (y = \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $(1; 3), \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

Bài 5(TNTHPT-2010). Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm các giá trị tham số m để phương trình $x^3 - 6x^2 + m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

HD Giải

a) $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = \frac{3}{4}x^2 - 3x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$

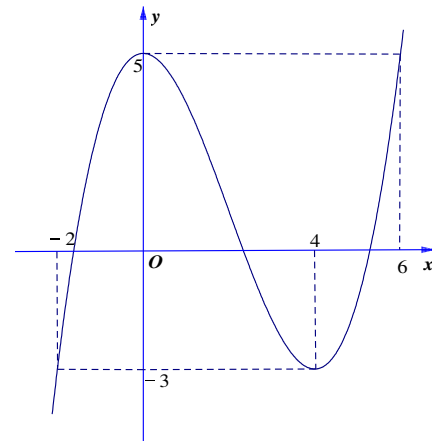
♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = y(0) = 5$, đạt cực tiểu tại $x = 4, y_{CT} = y(4) = -3$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Đồ thị không có tiệm cận

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		5		-3		$+\infty$



❖ Đồ thị:

b) Xét phương trình $x^3 - 6x^2 + m = 0$ (*). Ta có: (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 = 5 - \frac{m}{4}$

Do đó: (*) có ba nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow y = 5 - \frac{m}{4}$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt

Dựa vào đồ thị, ta có: $-3 < 5 - \frac{m}{4} < 5 \Leftrightarrow 0 < m < 32$

Vậy, giá trị cần tìm là: $m \in (0; 32)$.

Bài 6 (TNTHPT-2009). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -5 .

HD Giải

a) Bạn đọc tự giải

b) Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ta có: $y' = \frac{-5}{(x-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, với x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Hệ số góc của d bằng $-5 \Leftrightarrow \frac{-5}{(x_0-2)^2} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -3$: Phương trình tiếp tuyến d là: $y = -5x + 2$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 7$: Phương trình tiếp tuyến d là: $y = -5x + 22$

Bài 7 (KA và A1- 2014). Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x$ bằng $\sqrt{2}$

HD Giải

a) Khảo sát ...

Hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

❖ Sự biến thiên:

♦ Đạo hàm: $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}; y' < 0, \forall x \in D$

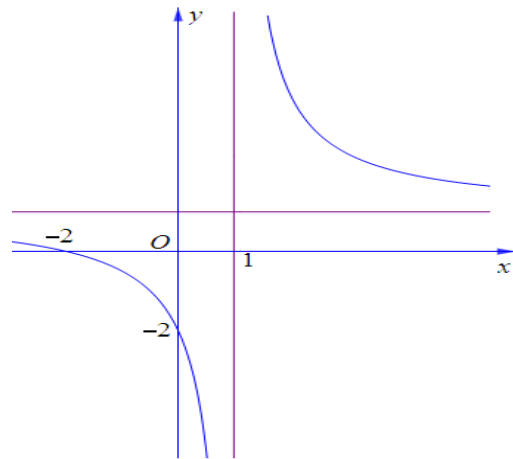
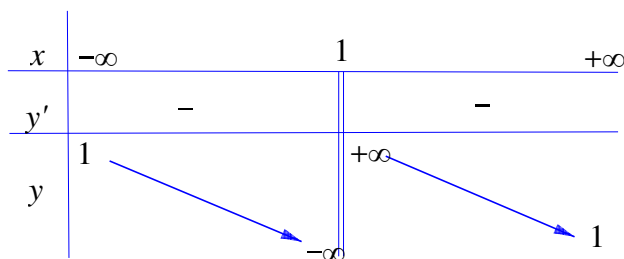
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

♦ Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$; tiệm cận ngang: $y = 1$;

$\lim_{x \rightarrow (1)^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (1)^+} y = +\infty$; tiệm cận đứng: $x = 1$

♦ Hàm số không có cực trị

♦ Bảng biến thiên:



❖ Đồ thị:

b) Ta có: $M \in (C) \Rightarrow M\left(a; \frac{a+2}{a-1}\right), a \neq 1$

Khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x$ là $d = \frac{\left|a + \frac{a+2}{a-1}\right|}{\sqrt{2}}$

Mặt khác: $d = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|a + \frac{a+2}{a-1}\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a^2 + 2| = 2|a-1| \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + 4 = 0 \\ a^2 + 2a = 0 \end{cases}$

❖ $a^2 - 2a + 4 = 0$: Phương trình vô nghiệm

❖ $a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$. Vậy tọa độ cần tìm: $M(0; -2)$ hoặc $M(-2; 0)$

Bài 8(KA và A1- 2013). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1) với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

HD & Giải

a) Khi $m = 0$, ta có: $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

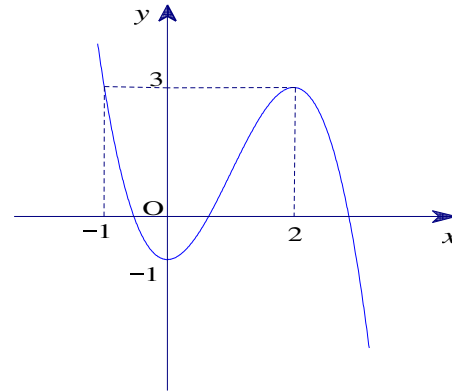
♦ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 2, y_{CB} = y(2) = 3$, đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = y(0) = -1$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$+\infty$		3	$-\infty$



❖ Đồ thị:

b) Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3m$.

Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x > 0$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \leq \min_{(0; +\infty)} (x^2 - 2x)$$

Xét $g(x) = x^2 - 2x$ với $x > 0$. Ta có: $g'(x) = 2x - 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	0	-1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được giá trị của m thỏa yêu cầu của bài toán là $m \leq -1$

Bài 9(KA và A1- 2012). Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

HD & Giải

a) Khi $m = 0$, ta có: $y = x^4 - 2x^2$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$

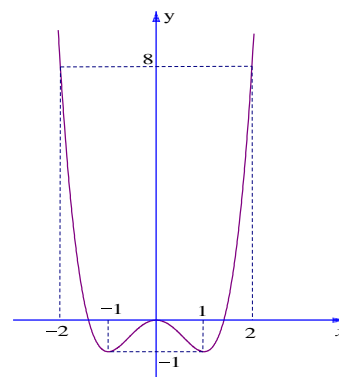
♦ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$; đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{CT} = -1$, đạt cực đại tại $x = 0, y_{CC} = 0$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$



❖ Đồ thị:

b) Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$

Đồ thị hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1(*)$.

Các điểm cực trị của đồ thị là $A(0; m^2), B(-\sqrt{m+1}; -2m-1), C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Suy ra: $\overline{AB} = (-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2)$ và $\overline{AC} = (\sqrt{m+1}; -(m+1)^2)$

Ta có $AB = AC$ nên tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow (m+1)^4 - (m+1) = 0$. Kết hợp với (*), ta được giá trị m cần tìm là $m = 0$.

Bài 10(KA-2011). Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HD & Giải

a) Khảo sát . . .

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

❖ Sự biến thiên:

♦ Đạo hàm: $y' = \frac{-1}{(2x-1)^2}, y' < 0, \forall x \neq \frac{1}{2}$

♦ Hàm số nghịch biến trên các khoảng

$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

♦ Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\frac{1}{2}$;

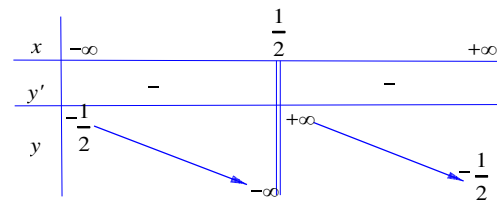
tiệm cận ngang: $y = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$; tiệm cận

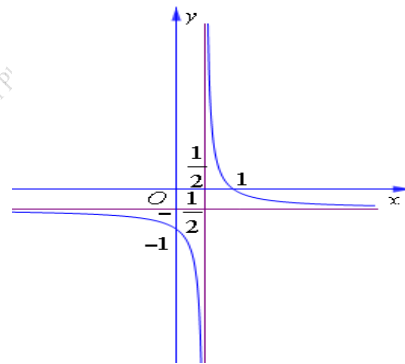
đứng: $x = \frac{1}{2}$

♦ Hàm số không có cực trị

♦ Bảng biến thiên:



❖ Đồ thị:



b) Hoành độ giao điểm của $d: y = x + m$ và (C) là nghiệm của phương trình: $x + m = \frac{-x+1}{2x-1}$

$\Leftrightarrow (x+m)(2x-1) = -x+1$ (do $x = \frac{1}{2}$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0(*)$

Ta có: $\Delta' = m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1 > 0, \forall m$. Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (*), ta có:

$$k_1 + k_2 = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} - \frac{1}{(2x_2-1)^2} = -\frac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2}{[4x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 1]^2}$$

Theo định lí Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = -m, x_1 x_2 = -\frac{m+1}{2}$.

Suy ra: $k_1 + k_2 = -4m^2 - 8m - 6 = -4(m+1)^2 - 2 \leq -2$

Vậy: $k_1 + k_2$ lớn nhất bằng -2 khi và chỉ khi $m = -1$

Bài 11(KA-2010). Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m(1)$, m là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

HD & Giải

a) Khi $m = 1$, ta có $y = x^3 - 2x^2 + 1$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{4}{3}$

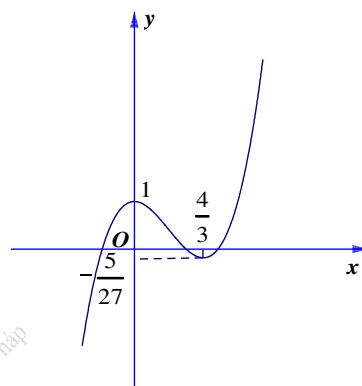
♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(\frac{4}{3}; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{4}{3})$.

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = y(0) = 1$, đạt cực tiểu tại $x = \frac{4}{3}, y_{CT} = y(\frac{4}{3}) = -\frac{5}{27}$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Đồ thị không có tiệm cận

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$-\frac{5}{27}$	$+\infty$		



❖ Đồ thị:

b) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0(*) \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác 1.

Kí hiệu $g(x) = x^2 - x - m = 0$, $x_1 = 1; x_2, x_3$ là các nghiệm của (*)

$$\text{Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ x_2^2 + x_3^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ -m \neq 0 \\ 1 + 2m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 1 \text{ và } m \neq 0$$

Vậy, giá trị cần tìm là $m \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \setminus \{0\}$

Bài 12(KA-2009). Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O .

HD & Giải

a) Bạn đọc khảo sát...

b) Hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2}$

Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, với x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Tam giác OAB vuông cân tại O (Nghĩa là tiếp tuyến song song với các đường thẳng $y = -x$ hoặc $y = x$)

$$\text{nên hệ số góc của } d \text{ bằng } \pm 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0 + 3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

❖ Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$: Phương trình tiếp tuyến d là: $y = -x$ (loại vì không cắt trực tọa độ tại 2 điểm)

❖ Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$: Phương trình tiếp tuyến d là: $y = -x - 2$ (thỏa mãn)

Vậy, tiếp tuyến cần tìm: $y = -x - 2$

Bài 13(KB – 2014). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

b) Cho điểm $A(2;3)$ Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A .

HD & Giải

a) Khi $m = 1$, ta có: $y = x^3 - 3x + 1$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

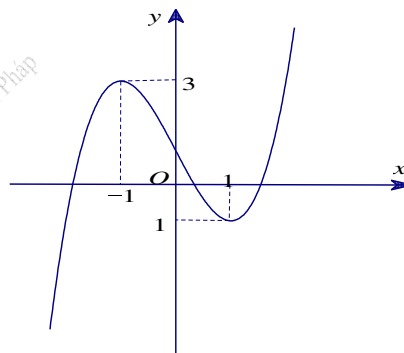
♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CD} = y(-1) = 3$, đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = y(1) = -1$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$



❖ Đồ thị

b) Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$

Đồ thị hàm số (1) có hai cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (*)

Tọa độ các điểm cực trị $B(-\sqrt{m}; 2\sqrt{m^3} + 1), C(\sqrt{m}; -2\sqrt{m^3} + 1) \Rightarrow \overline{BC} = (2\sqrt{m}; -4\sqrt{m^3})$

Gọi I là trung điểm của BC , suy ra $I(0;1)$

Tam giác ABC cân tại $A \Leftrightarrow \overline{AI} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow -4\sqrt{m} + 8\sqrt{m^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m = 0 \\ m = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

So với (*), vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{1}{2}$

Bài 14(KB – 2013). Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

HD\Giải

a) Khi $m = -1$, ta có: $y = 2x^3 - 6x$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 6x^2 - 6$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$

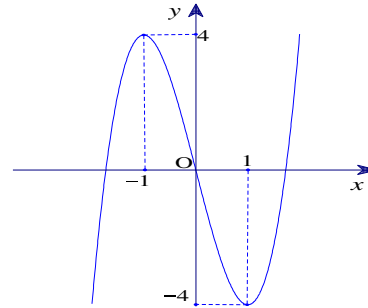
♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CD} = y(-1) = 4$, đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = y(1) = -4$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4		-4	$+\infty$



❖ Đồ thị:

b) Ta có: $y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m$.

Hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1 (*)$$

Mặt khác: $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6(m+1)x + 6m = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = m$.

Hai cực trị: $A(1; 3m-1); B(m; -m^3 + 3m^2)$. Ta có: $\overline{AB} = (m-1; (1-m)^3) \Rightarrow$ Hệ số góc của đường thẳng AB là $k_{AB} = -(m-1)^2$.

Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $d: y = x + 2$ nên có: $k_{AB} \cdot k_d = -1 \Leftrightarrow (1-m)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 2$.

So với (*), vậy m cần tìm là $m = 0$ và $m = 2$.

Bài 15(KB – 2012). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

HD\Giải

a) Khi $m = 1$, ta có: $y = x^3 - 3x^2 + 3$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

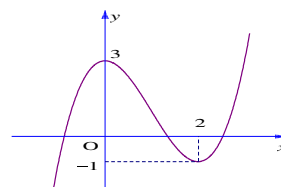
♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = 3$, đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = -1$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3		-1	$+\infty$

❖ Đồ thị:



b) Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2m$

Đồ thị hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$ (*)

Các điểm cực trị của đồ thị là $A(0; 3m^3)$, $B(2m; -m^3)$.

Suy ra: $OA = 3|m^3|$ và $d(B, (OA)) = 2|m|$

Mặt khác, ta có: $S_{\triangle OAB} = 48 \Leftrightarrow 3m^4 = 48 \Leftrightarrow m = \pm 2$, thỏa mãn(*)

Bài 16(KB-2011). Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 1$ (1), m là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$, trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

HD & Giải

a) Khi $m = 1$, ta có: $y = x^4 - 4x^2 + 1$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên:

$y' = 4x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$

♦ Hàm số nghịch biến trên các khoảng

$(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$; đồng biến trên các

khoảng $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại

$x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -3$, đạt cực đại tại

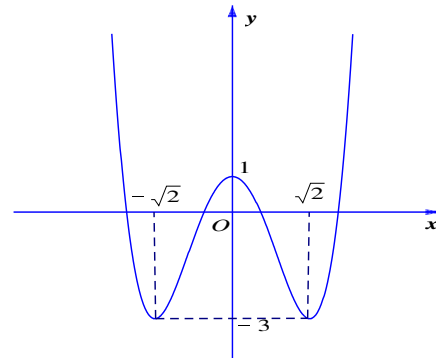
$x = 0$, $y_{CD} = 1$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$	-3	1	-3	$+\infty$

❖ Đồ thị:



b) Hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 1$

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = m + 1$ (2)

Đồ thị hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow m > -1$ (*)

Khi đó: $A(0; m)$, $B(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1)$, $C(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1)$

Ta có: $\overline{OA} = (0; m)$, $\overline{BC} = (2\sqrt{m+1}; 0)$. $OA = BC \Leftrightarrow m^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ (thỏa (*))

Vậy, giá trị cần tìm: $m = 2 + \sqrt{2}$ hoặc $m = 2 - \sqrt{2}$

Bài 17(KB-2010). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm m để phương trình đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ).

HD & Giải

a) Hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

❖ Sự biến thiên:

♦ Đạo hàm: $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$, $y' > 0, \forall x \neq -1$

♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

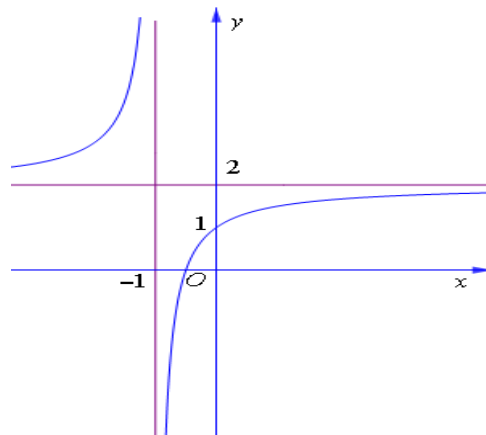
♦ Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$; tiệm cận ngang: $y = 2$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty$; tiệm cận đứng: $x = -1$

♦ Hàm số không có cực trị

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$ $-\infty$	2



❖ Đồ thị:

b) Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1} = -2x+m$

$\Leftrightarrow 2x+1 = (x+1)(-2x+m)$ (do $x = 1$ không là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow 2x^2 + (4-m)x + 1-m = 0 \quad (1)$

Ta có: $\Delta = m^2 + 8 > 0$ với mọi m . Suy ra đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m .

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, với x_1, x_2 là các nghiệm của (1); $y_1 = -2x_1 + m, y_2 = -2x_2 + m$

Ta có: $d(O; AB) = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$ và $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2} = \frac{\sqrt{5(m^2 + 8)}}{2}$

Theo giả thiết: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} d(O; AB) \cdot AB = \frac{|m|\sqrt{m^2 + 8}}{4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy, giá trị cần tìm là: $m = 2$ hoặc $m = -2$.

Bài 18(KB-2009). Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 \quad (1)$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

b) Với các giá trị nào của m , phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

HD & Giải

a) Hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 8x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$

♦ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$; đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

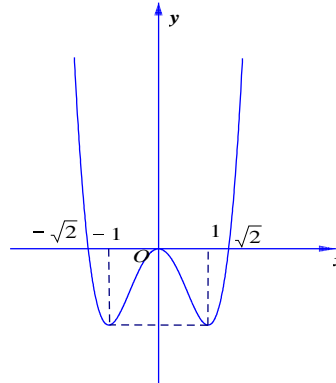
♦ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{CT} = y(\pm 1) = -2$, đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = y(0) = 0$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$

❖ Đồ thị:

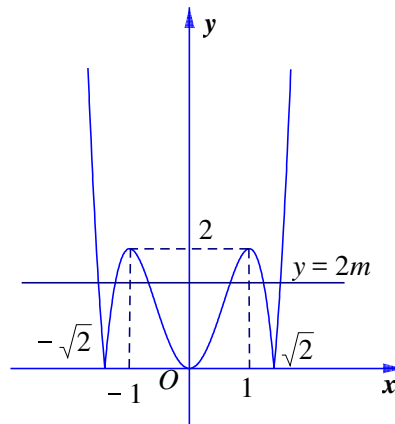


b) Ta có: $x^2|x^2 - 2| = m$ (*)

$\Leftrightarrow |2x^4 - 2x^2| = 2m$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đường cong (C): $y = |2x^4 - 2x^2|$ và đường thẳng $d: y = 2m$.

Phương trình (*) có đúng 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $d: y = 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 2x^2|$ tại 6 điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 2x^2|$ và đường thẳng $d: y = 2m$



Dựa vào đồ thị, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi: $0 < 2m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1$

Bài 19(KD - 2014). Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc bằng 9.

HD & Giải

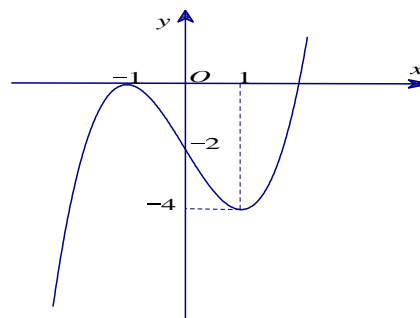
a) Hàm số $y = x^3 - 3x - 2$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên ♦ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$

- ♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- ♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CD} = y(-1) = 0$, đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = y(1) = -4$
- ♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
- ♦ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		0		-4	$+\infty$



❖ Đồ thị

b) Ta có: $M \in (C) \Rightarrow M(a; a^3 - 3a - 2)$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng 9 $\Leftrightarrow y'(a) = 9 \Leftrightarrow 3a^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 2$

Vậy tạo độ điểm M thỏa YCBT là $M(2; 0)$ hoặc $M(-2; -4)$

Bài 20(KD – 2013). Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ (1), với m là tham số thực.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
- Tìm m để đường thẳng $y = -x + 1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt

HD & Giải

a) Khi $m = 1$, ta có: $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 6x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$

♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

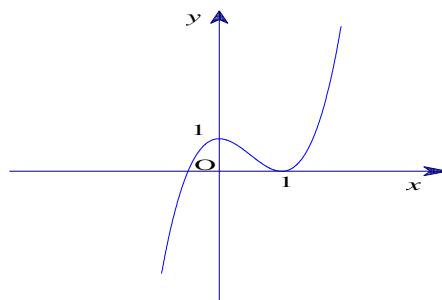
♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = y(0) = 1$, đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = y(1) = 0$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	1		0		$+\infty$

❖ Đồ thị:



b) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) với đường thẳng $y = -x + 1$ là:

$$2x^3 - 3mx^2(m-1)x + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 2x^2 - 3mx + m = 0 (*) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 8m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{9}{8}$$

Bài 21(KD - 2012). Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

HD & Giải

a) Khi $m = 1$, ta có: $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 2x^2 - 2x - 4$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$

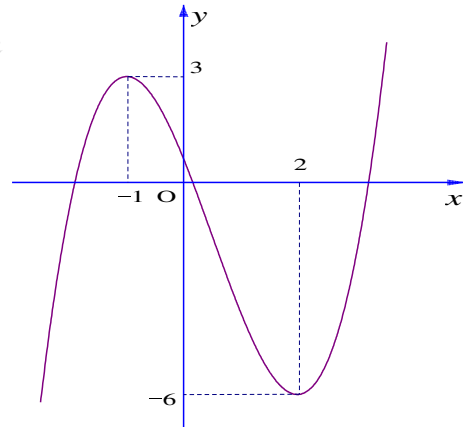
♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CD} = 3$, đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = -6$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-6	$+\infty$	



❖ Đồ thị:

b) Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$.

Đồ thị hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ hoặc } m < \frac{2\sqrt{13}}{13} (*)$$

Ta lại có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = 1 - 3m^2$, do đó

$$x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow 1 - 3m^2 + 2m = 1 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = \frac{2}{3}$$

So với (*), ta được $m = \frac{2}{3}$.

Bài 22(KD-2011). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

HD Giải

a) Bạn đọc khảo sát

b) Gọi $d: y = kx + 2k + 1$. Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình:

$$kx + 2k + 1 = \frac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow (kx + 2k + 1)(x+1) = 2x+1 \text{ (do } x = -1 \text{ không là nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \text{ hoặc } k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó: $A(x_1; kx_1 + 2k + 1), B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$, x_1, x_2 là nghiệm của (1)

$$\text{Ta có: } d(A, Ox) = |y_A| = |kx_1 + 2k + 1|; d(B, Ox) = |y_B| = |kx_2 + 2k + 1|$$

$$d(A, Ox) = d(B, Ox) \Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -(kx_2 + 2k + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k(x_1 - x_2) = 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \text{ (do } x_1 \neq x_2)$$

$$\text{Áp dụng định lí Vi-ét đối với (1), ta có: } x_1 + x_2 = \frac{-(3k-1)}{k}.$$

$$\text{Suy ra: } (1-3k) + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \text{ (thỏa } (*))$$

Vậy, giá trị cần tìm là $k = -3$

Bài 23(KD-2010). Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

HD Giải

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = -4x^3 - 2x = -2x(2x^2 + 1)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

♦ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$; nghịch biến trên các khoảng $(0; +\infty)$

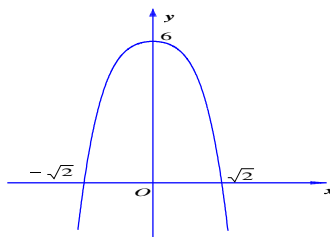
♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CB} = y(0) = 6$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	6	$-\infty$

❖ Đồ thị:



b) Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, với x_0 là hoành độ tiếp điểm

Ta có: d vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$ nên hệ số góc của d là bằng -6 .

Do đó: $y'(x_0) = -6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0^2 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4$: Phương trình tiếp tuyến là: $y = -6(x - 1) + 4$ hay $y = -6x + 10$

Bài 24(KD-2009). Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$, có đồ thị (C_m) , m là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$

b) Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

HD&Giải

a) Bạn đọc khảo sát (Xem bài 15 KB _ 2009)

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y = -1$: $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m = -1$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$: Phương trình trở thành: $t^2 - (3m + 2)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3m + 1$

Yêu cầu của bài toán tương đương: $\begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Vậy, giá trị cần tìm là: $m \in \left(-\frac{1}{3}; 1\right) \setminus \{0\}$

Bài 25(CĐ – năm 2014). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc (C) có hoành độ bằng 1.

HD&Giải

a) Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 + 6; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

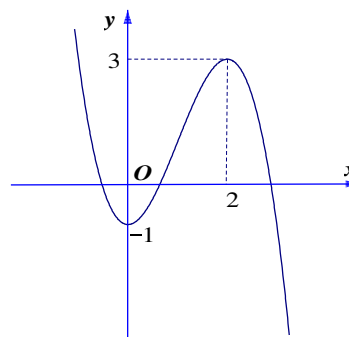
♦ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$; đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 2, y_{CD} = y(2) = 3$, đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = y(0) = -1$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

♦ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$			3	$-\infty$
		-1			



❖ Đồ thị

b) Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(1) = 3$

Khi $x = 1 \Rightarrow y = 1$. Tọa độ tiếp điểm $M(1; 1)$

Phương trình tiếp tuyến $d: y = 3x - 2$

Bài 26(CĐ – năm 2013). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho

b) Gọi M là một điểm thuộc (C) có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox và Oy

lần lượt tại A và B. Tính diện tích của tam giác OAB

HD Giải

❖ Đồ thị:

a) Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

❖ Sự biến thiên:

♦ Đạo hàm: $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$, $y' < 0, \forall x \neq 1$

♦ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

♦ Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$; tiệm

cận ngang: $y = 2$

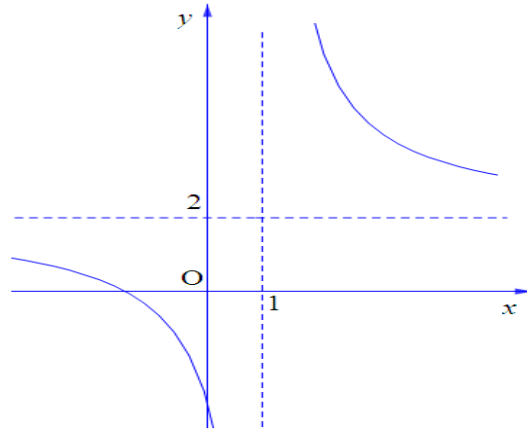
$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$; tiệm cận đứng:

$x = 1$

♦ Hàm số không có cực trị

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2



b) Gọi $M(m; 5)$. Ta có: $M \in (C) \Leftrightarrow 5 = \frac{2m+1}{m-1} \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow M(2; 5)$

Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M là: $y = y'(2)(x-2) + 5$ hay $d: y = -3x + 11$

Đường thẳng d cắt Ox tại $A\left(\frac{11}{3}; 0\right)$ và cắt Oy tại $B(0; 11)$

Ta có: $OA = \frac{11}{3}$, $OB = 11$. Diện tích tam giác OAB là: $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{3} \cdot 11 = \frac{121}{6}$

Bài 27 (CD – năm 2012). Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

b) Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số (1), biết rằng d vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

HD Giải

a) Khảo sát . . .

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

❖ Sự biến thiên:

♦ Đạo hàm: $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $y' < 0, \forall x \neq -1$

♦ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

♦ Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$; tiệm cận ngang: $y = 2$ $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$. Tiệm cận

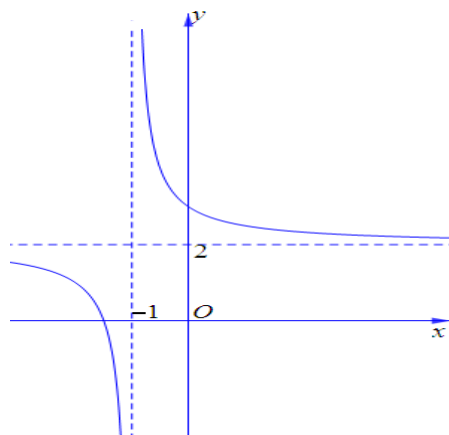
đứng: $x = -1$

♦ Hàm số không có cực trị

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	2	$+\infty$	2

❖ Đồ thị:



b) Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, với x_0 là hoành độ tiếp điểm
Ta có: d vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$ nên hệ số góc của d là bằng -1 .

$$\text{Do đó: } y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0 + 1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

❖ Với $x_0 = 0$: Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x + 3$

❖ Với $x_0 = -2$: Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 1$

Bài 28(CĐ-2011). Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b)Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

HD **Giải**

a) Bạn đọc khảo sát

$$\text{b) } y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1; y' = -x^2 + 4x - 3$$

Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, với x_0 là hoành độ tiếp điểm

Tọa độ giao điểm của (C) với trục tung là $(0;1)$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(0) = -3$

Vậy, phương trình tiếp tuyến là: $y = -3x + 1$

Bài 29(CĐ-2010). Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 .

HD **Giải**

a) Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$

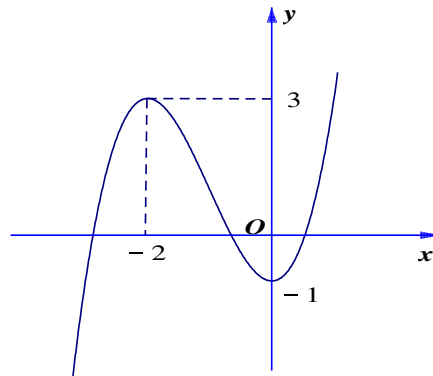
♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -2, y_{CD} = y(-2) = 3$, đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = y(0) = -6$

- ♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Đồ thị không có tiệm cận
- ♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$		

❖ Đồ thị:



b) Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, với $x_0 = -1$ là hoành độ tiếp điểm

Ta có: $y_0 = y(-1) = 1$, hệ số góc của tiếp tuyến là: $k = y'(-1) = -3$

Vậy, phương trình tiếp tuyến d : $y = -3(x + 1) + 1$ hay $y = -3x - 2$

Bài 30(CĐ-2009). Cho hàm số $y = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$ (1), m là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) có hoành độ dương.

HD & Giải

a) Khi $m = 2$, hàm số (1) trở thành: $y = x^3 - 3x^2 + 2$

❖ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

❖ Sự biến thiên

♦ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

♦ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

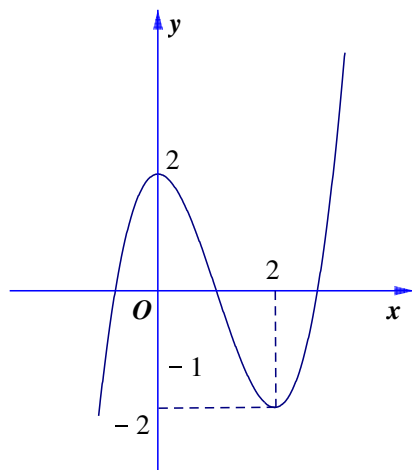
♦ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CB} = y(0) = 2$, đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = y(2) = -2$

♦ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Đồ thị không có tiệm cận

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

❖ Đồ thị:



b) Hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ (1). Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m$

Hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ S = \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ P = \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$$

Bài 31(KB-2008). Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

HD & Giải

a) Bạn đọc khảo sát

b) Đường thẳng (Δ) với hệ số góc k và đi qua điểm $M(-1; -9)$ có phương trình: $y = kx + k - 9$

(Δ) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) khi và chỉ khi hệ phương trình sau phải có nghiệm:

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 1 = kx + k - 9 & (2) \\ 12x^2 - 12x = k & (3) \end{cases} \text{Thay } k \text{ từ (3) và (2), ta được:}$$

$$4x^3 - 6x^2 + 1 = (12x^2 - 12x)x + 12x^2 - 12x - 9 \Leftrightarrow (x+1)^2(4x-5) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{4}{5}$$

❖ Với $x_0 = -1 \Rightarrow k = 24$: Phương trình tiếp tuyến (Δ) là: $y = 24x + 15$.

❖ Với $x_0 = \frac{4}{5} \Rightarrow k = \frac{15}{4}$: Phương trình tiếp tuyến (Δ) là: $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.

Bài 32(KD-2008). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

b) Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm $I(1; 2)$ với hệ số góc k ($k > -3$) đều cắt đồ thị của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn AB .

HD & Giải

a) Bạn đọc khảo sát

b) Gọi (C) là đồ thị của hàm số (1). Ta nhận thấy: Điểm $I(1; 2)$ thuộc (C)

Đường thẳng (Δ) với hệ số góc k và đi qua điểm $I(1; 2)$ có phương trình: $y = kx - k + 2$

Hoành độ giao điểm (C) và đường thẳng (Δ) là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx - k + 2 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - (k+2)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (ứng với giao điểm I)} \\ x^2 - 2x - (k+2) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình (*), có $\Delta' = k + 3 > 0$ (do $k > -3$) và $x = 1$ không là nghiệm của (*).

Suy ra (Δ) luôn cắt (C) tại ba điểm phân biệt $I(x_I; y_I), A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, với x_A, x_B là nghiệm của (*). Ta lại có: $x_A + x_B = 2 = 2x_I$ và I, A, B cùng thuộc (Δ) nên I là trung điểm của đoạn AB .

Bài 33(CĐ-2008). Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

HD **Giải**

a) Tự khảo sát

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình: $\frac{x}{x-1} = -x + m$

$\Leftrightarrow x^2 - mx + m = 0$ (1) (do $x = 1$ không là nghiệm)

đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m > 4$ hoặc $m < 0$

Bài 34(ĐH-CĐKA-2002). Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ (1) (m là tham số)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số (1) khi $m = 1$.

b) Tìm k để phương trình $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

HD **Giải**

a) Bạn đọc khảo sát

b) Ta có: $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = -k^3 + 3k^2$

Đây là phương trình hoành độ của đồ thị (C): $y = -x^3 + 3x^2$ và đường thẳng $d: y = -k^3 + 3k^2$

Dựa vào đồ thị, ta nhận thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$0 < -k^3 + 3k^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k^2 - 4k + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0; k \neq 2 \end{cases}$$

c) $y = -3x^2 + 6mx + 3(1-m^2)$. Ta có: $\Delta' = 9m^2 + 9 - 9m^2 = 9 > 0 \Rightarrow y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x_1 = m-1 \\ x_2 = m+1 \end{cases} \text{ và } y' \text{ đổi dấu khi qua các nghiệm đó nên hàm số đạt cực trị tại } x_1, x_2.$$

Hai điểm cực trị $A(m-1; -m^2 + 3m - 2), B(m+1; -m^2 + 3m + 2)$

$$\text{Vậy, đường thẳng đi qua } A \text{ và } B: \frac{x-m+1}{2} = \frac{y+m^2-3m+2}{4} \Leftrightarrow y = 2x - m^2 + m$$

Bài 35(ĐH-CĐKB-2002). Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (1), (m là tham số)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$

b) Tìm m để hàm số (1) có ba cực trị.

HD **Giải**

a) Bạn đọc khảo sát

b) $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x(2mx^2 + m^2 - 9), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Đặt $g(x) = 2mx^2 + m^2 - 9$

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -2m(m^2 - 9) > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \\ m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases}$$

Bài 36(ĐH-CDKD-2002). Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$ (1), (m là tham số)

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số (1) khi $m = -1$
 b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và hai trục tọa độ
 c) Tìm m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$

HD & Giải

a) Bạn đọc khảo sát

b) Diện tích cần tính: $S = \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(\frac{-3x-1}{x-1} \right) dx = -3 \int_{-\frac{1}{3}}^0 dx - 4 \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{x-1} = -3 \cdot \frac{1}{3} - 4 \ln|x-1| \Big|_{-\frac{1}{3}}^0 = -1 + 4 \ln \frac{4}{3}$

c) $y = f(x) = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $y = g(x) = x$

$$\text{YCB} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1} = x \\ \frac{-2(x-m)(x-1) + (x-m)^2}{(x-1)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-m)^2}{x-1} = 0(1) \\ \frac{-2(x-m)(x-1) + (x-m)^2}{(x-1)^2} = 0(2) \end{cases}$$

Từ (1), ta có $\begin{cases} x = m \\ x \neq 1 \end{cases}$. Thay vào (2), nhận thấy thỏa mãn. Vậy: $m \neq 1$ thì thỏa ycbt.

Bài 37(ĐH-CDKB-2003). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1) (m là tham số)

- a) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ
 b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số (1) khi $m = 2$

HD & Giải

a) Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đồ thị hàm số (1) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ y(x_0) = -y(-x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_0^3 - 3x_0^2 + m = -[(-x_0)^3 - 3(-x_0)^2 + m] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ 3x_0^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

b) Bạn đọc khảo sát

Bài 38(ĐH-CDKB-2004). Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (1) có đồ thị (C)

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1)
 b) Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) tại điểm uốn (tại điểm mà đạo hàm cấp hai bằng không) và chứng minh rằng (Δ) là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

HD & Giải

a) Bạn đọc khảo sát

b) Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = x^2 - 4x + 3, y'' = 2x - 4; y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2. \text{ Điểm uốn } I \left(2; \frac{2}{3} \right)$$

Hệ số góc của tiếp tuyến là: $y'(2) = -1$

Vậy trình tiếp tuyến (Δ) của (C) tại điểm uốn của đồ thị (C) là: $y = -1(x-2) + \frac{2}{3}$ hay $y = -x + \frac{8}{3}$

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x là:

$$y' = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow y'(x) > y'(2), \forall x$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$ (là hoành độ của điểm uốn)

Do đó tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm uốn có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 39(ĐH-CDKD-2005). Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (*), (m là tham số)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_2) hàm số (*) khi $m = 2$

b) Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1 . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

HD **Giải**

a) Bạn đọc khảo sát

b) Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = x^2 - mx$. Điểm M thuộc (C_m) có hoành độ -1 là $M\left(-1; -\frac{m}{2}\right)$

Tiếp tuyến tại điểm M của (C_m) là: $(\Delta): y + \frac{m}{2} = y'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = (m+1)x + \frac{m+2}{2}$

(Δ) song song với $d: 5x - y = 0$ (hay $y = 5x$) $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1=5 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$

Bài 40.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị (C)

c) Với giá trị nào của tham số m , đường thẳng $y = x + m^2 - m$ đi qua trung điểm của đoạn nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (C).

HD **Giải**

a) Bạn đọc khảo sát

b) Điểm uốn $I(2; 2)$, $y'(2) = -3$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn: $y - 2 = -3(x - 2)$ hay $y = -3x + 8$

c) Điểm cực đại $A(1; 4)$, điểm cực tiểu $B(3; 0)$. Trung điểm đoạn nối hai điểm cực đại, cực tiểu là điểm uốn $I(2; 2)$.

Đường thẳng $y = x + m^2 - m$ đi qua $I(2; 2) \Leftrightarrow 2 = 2 + m^2 - m \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$

Bài 41. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

HD **Giải**

Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm A . Ta có: $\overrightarrow{NM} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2) = (x_1 - x_2; 6(x_1 - x_2))$ là một vtcp của Δ .

Hệ số góc của Δ là $k = 6$, suy ra: $x^3 - 7x = 6 \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3; x_2 = -1; x_3 = -2$

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) do đó $\Delta \cap (C)$ có ba nghiệm phân biệt.

✓ Với $x_1 = 3 \Rightarrow \Delta: y = 6x - \frac{117}{4}$. Ta có: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 = 6x - \frac{117}{4}$

$\Leftrightarrow x^4 - 14x^2 - 24x + 117 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x^2 + 6x + 13) = 0$ có duy nhất một nghiệm không thỏa ycbt.

✓ Với $x_2 = -1 \Rightarrow \Delta: y = 6x + \frac{11}{4}$. Ta có: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 = 6x + \frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow x^4 - 14x^2 - 24x - 11 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2 - 2x - 11) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa ycbt.

✓ Với $x_3 = -2 \Rightarrow \Delta: y = 6x + 2$. Ta có: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 = 6x + 2 \Leftrightarrow x^4 - 14x^2 - 24x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2(x^2 - 4x - 2) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa ycbt.

Vậy trên (C) có hai điểm để tiếp tuyến tại đó thỏa mãn ycbt.

Cách khác:

✓ Nhận xét đây là hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$.

✓ Ta có $y' = x^3 - 7x$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{7} \\ x = \sqrt{7} \end{cases}$ suy ra hàm số có ba cực trị.

✓ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(x_0; y_0)$ (là đường thẳng qua hai điểm M, N) có hệ số góc:

$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 6$. Do đó để tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ có hệ số góc $k = 6 > 0$ và cắt (C) tại hai điểm phân

biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thì $-\sqrt{7} < x_0 < 0$ và $x_0 \neq -\frac{\sqrt{21}}{3}$ (hoành độ điểm uốn).

✓ Ta có phương trình: $y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow x_0^3 - 7x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$ (l)

Vậy có 2 điểm A thỏa yêu cầu.

Bài 42. Ông A dự định sử dụng hết $6,5 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) ?

HD & Giải

Gọi chiều rộng của bể là x ($x > 0$). Suy ra chiều dài của bể là $2x$.

Ta có: $S_{\text{đáy}} = 2x^2, S_{\text{xq}} = 2(xh + 2xh) = 6xh$ và $V = 2x^2h$

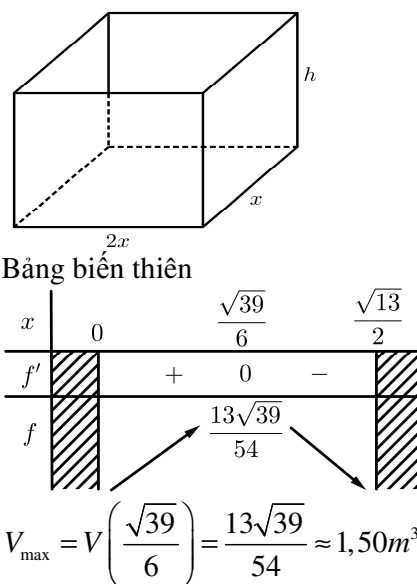
Theo giả thiết, ta có:

$$2x^2 + 6xh = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 4x^2 + 12xh = 13 \Rightarrow h = \frac{13 - 4x^2}{12x}$$

$$\Rightarrow V = 2x^2 \cdot \frac{13 - 4x^2}{12x} = \frac{1}{6}x(13 - 4x^2).$$

Do $h > 0, x > 0$ nên $\frac{13}{2} - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{13}}{2}$ (*).

Xét: $V' = \frac{1}{6}(13 - 4x^2) + \frac{2}{6}x(-8x) = \frac{1}{6}(13 - 12x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{39}}{6}$ (do (*)).



Bài 43. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng bao nhiêu ?

HD & Giải

Ta có: $y = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow y-1 = -\frac{3}{x+2}$

đặt $Y = y-1, X = x+2 \Rightarrow Y = -\frac{3}{X}$ tức ta đã chuyển gốc

tọa độ về

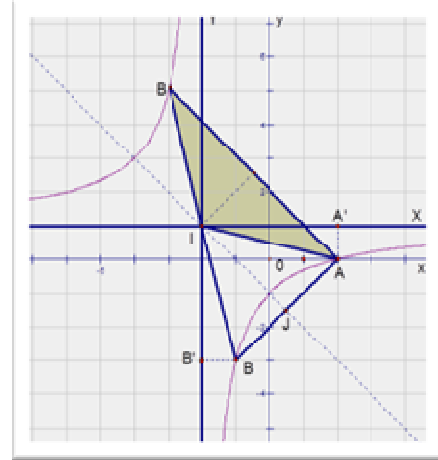
giao của hai tiệm cận gọi A, B là hai điểm thuộc (C) thỏa đk đầu bài và J là

trung điểm AB thì IA, IB đối xứng nhau qua IJ . Nếu A, B lần lượt nằm vào hai nhánh của (C) thì góc AIB luôn là góc tù nên yêu cầu bài toán thỏa mãn khi khi và chỉ khi A, B thuộc cùng một nhánh như hình vẽ nên tam giác AIB đều thì hai góc AIA' và góc BIB' bằng nhau và đều bằng 15°

(A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục hoành trục OX ; và trên trục tung OY của hệ tọa độ mới). Trong hệ tọa

độ OXY gọi $A\left(a; -\frac{3}{a}\right)$. Xét tam giác vuông IAA'

Ta có $\tan AIA' = \frac{IA'}{A'A} = \frac{\left|a\right|}{\left|-\frac{3}{a}\right|} = \frac{a^2}{3}$



Suy ra: $\tan 15^\circ = \frac{a^2}{3} \Rightarrow a = \pm 3\sqrt{\tan 15^\circ}$ và

$A\left(\pm 3\sqrt{\tan 15^\circ}; -\frac{3}{\pm 3\sqrt{\tan 15^\circ}}\right)$

Ta có:

$IA^2 = 3 \tan 15^\circ + \frac{9}{3 \tan 15^\circ} = 12 \Rightarrow IA = 2\sqrt{3}$.

Vậy $AB = 2\sqrt{3}$.

Bài 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

HD & Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$. Ta có: $y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.

CHUYÊN ĐỀ 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

---000---

§1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Bảng đạo hàm

HÀM SỐ SƠ CẤP	HÀM SỐ HỢP	QUY TẮC
$(C)' = 0$	$u = u(x)$	$u = u(x), v = v(x)$
$(x)' = 1, (kx)' = kx' = k$	$(ku)' = ku'$	$(u + v)' = u' + v'$
$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(u - v)' = u' - v'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$	$(ax + b)' = a$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \tan^2 u)u'$	$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -(1 + \cot^2 u)u'$	
$(a^x)' = a^x \ln a, 0 < a \neq 1$	$(a^u)' = u' a^u \ln a$	
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' e^u$	
$(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}, 0 < a \neq 1, x > 0$	$(\log_a u) = \frac{u'}{u \ln a}, 0 < a \neq 1$	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	

2. Có các dạng toán cơ bản:

Dạng 1. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số đã choPhương pháp: Áp dụng qui tắc. Xét hàm số $y = f(x)$ Qui tắc:

- ① Tìm tập xác định
- ② Tính y' , tìm các nghiệm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định
- ③ Tìm các giới hạn vô cực; các giới hạn $+\infty, -\infty$ và tại các điểm mà hàm số không xác định (nếu có)
- ④ Lập bảng biến thiên
- ⑤ Dựa vào bảng biến thiên, kết luận.

Dạng 2. Tìm tham số $m \in \mathbb{R}$ để hàm số luôn luôn đồng biến hay nghịch biến trên tập xác định của nóPhương pháp: Thường cho hàm số bậc ba: $y = f(x, m)$ chứa biến x và tham số m . Khi tính đạo hàm ta

được hàm số bậc hai. Giả sử hàm bậc hai $y' = ax^2 + bx + c$

Phương pháp: Áp dụng qui tắc:

Qui tắc:

① Tìm tập xác định

② Tính đạo hàm y'

③ Lập luận: Nếu cơ số a có chứa tham số

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$; Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$

♦ Xét $a = 0 \Rightarrow m$ thay vào đạo hàm. Nhận xét y' đưa ra kết luận (1)

♦ Xét $a \neq 0$, $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad (2) \quad \diamond \text{ Xét } a \neq 0, y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad (2')$

④ So với (1) và (2) hoặc (1) và (2') đưa ra kết luận yêu cầu bài toán.

Dạng 3. Tìm tham số $m \in \mathbb{R}$ để hàm số luôn luôn đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $(\alpha; \beta)$

Phương pháp:

a) Hàm số f đồng biến trên $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(\alpha; \beta)$.

• Nếu bất phương trình $f'(x, m) \geq 0 \Leftrightarrow h(m) \geq g(x) (*)$ thì f đồng biến trên $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow h(m) \geq \max_{(\alpha; \beta)} g(x)$

• Nếu bất phương trình $f'(x, m) \geq 0 \Leftrightarrow h(m) \leq g(x) (**)$ thì f đồng biến trên $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow h(m) \leq \min_{(\alpha; \beta)} g(x)$

b) Hàm số f nghịch biến trên $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(\alpha; \beta)$.

• Nếu bất phương trình $f'(x, m) \leq 0 \Leftrightarrow h(m) \geq g(x) (*)$ thì f nghịch biến trên $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow h(m) \geq \max_{(\alpha; \beta)} g(x)$

• Nếu bất phương trình $f'(x, m) \leq 0 \Leftrightarrow h(m) \leq g(x) (**)$ thì f nghịch biến trên $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow h(m) \leq \min_{(\alpha; \beta)} g(x)$.

Lưu ý: Sử dụng máy tính kiểm tra sự đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 1. Áp dụng định nghĩa: Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng K

♦ Trên khoảng K , khi x tăng và y tăng suy ra hàm số đồng biến.

♦ Trên khoảng K , khi x tăng và y giảm suy ra hàm số nghịch biến.

Sử dụng máy tính cầm tay với chức năng TABLE. BẤM MODE 7, nhập dữ liệu $f(X)$, chọn Start, end và step.

Cách 2. Áp dụng đạo hàm. Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng K

♦ Trên khoảng K , nếu $y' > 0, (y' \geq 0)$ suy ra hàm số đồng biến.

♦ Trên khoảng K , nếu $y' < 0, (y' \leq 0)$ suy ra hàm số nghịch biến.

Sử dụng máy tính cầm tay với chức năng đạo hàm: Bấm shift $\int \square$. Màn hình: $\frac{d}{dx}(f(x)) \Big|_{x=x}$

Cần hiểu: $y' = \frac{d}{dx}(f(x)) \Big|_{x=X}$. Nhập hàm số đã cho. Calc giá trị của X thuộc khoảng K theo yêu cầu bài

toán tương ứng. Nhận xét và đưa ra kết luận.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 2: Với giá trị nào của tham số a thì hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $a \geq 0$.

B. $a > 0$.

C. $a < 0$.

D. $a \leq 0$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	3	2	$+\infty$

Bảng biến thiên đó của hàm số nào ?

A. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

B. $y = x^4 + 2x^2 + 3$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Câu 6: Cho hàm số $y = (1-m)x^3 + (2m-1)x - m + 1$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

A. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

C. $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

D. $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m < -1$.

B. $m \leq -1$.

C. $m \geq -1$.

D. $m < 1$.

Câu 9: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -4)$ và $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leq \frac{5}{4}$.

B. $m = \frac{5}{4}$.

C. $m < \frac{5}{4}$.

D. $m \geq \frac{5}{4}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên và có các khẳng định :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$

- ① Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$
 ② Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$ và $y_{CD} = 4$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = 3$
 ③ Đồ thị hàm số đối xứng qua trục tung
 ④ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ và đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$

Trong bốn khẳng định đó, có bao nhiêu khẳng định đúng ?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Câu 12: Tìm tất các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m > 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $m \leq -1$.

D. $m \geq 1$.

Câu 13: Tìm tất cả giá trị thực tham số m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 12x + 2$ đồng biến trên tập xác định của nó.

A. $m \in \emptyset$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \leq -3$.

D. $m \geq \frac{1}{4}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 15: Tìm tất các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \geq 2$.

B. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

C. $1 \leq m < 2$.

D. $m \leq 0$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ và đồng biến trên $(1; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ và nghịch biến trên $(1; 2)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m-3)x^3 - 2x^2 + mx + m$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $m \in (-\infty; -4)$.

B. $m \in [-4; +\infty)$.

C. $m \in (-4; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -4]$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x - 1}{2-x}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

- A. $m > 1$. B. $m \leq \frac{-5}{2}$. C. $m = -1$. D. $m \in (-1; 1)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 22$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{4}{5}x^5 - x^4 + \frac{x^3}{3} - 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2mx - 4$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

- A. $m \geq -\frac{3}{2}$. B. $m = -\frac{3}{2}$. C. $m \leq -\frac{3}{2}$. D. $m < -\frac{3}{2}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 5)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 4. B. 5. C. Vô số. D. 3.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{3}{4}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 3)$.

Câu 26: Tìm tất các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx + 2}{2x + m}$ đồng biến trên từng khoảng

xác định của nó.

- A. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $-2 < m < 2$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Câu 27: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-4; \frac{1}{2}\right)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Câu 28: Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+3}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-3; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. C. $(-\infty; 3)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 30: Cho hàm số $y = 2x - 1 - \sqrt{3x - 5}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{89}{48}; +\infty\right)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{3}; \frac{89}{48}\right)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{3}; \frac{89}{48}\right)$.

Câu 31: Tìm tất các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

- A. $m \in (1; 2)$. B. $m = 1$ hoặc $m = 2$.
C. $1 < m < 2$. D. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 32: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - (2m+1)$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

- A. $m = 3$. B. $m \in [-2; 3]$. C. $m = -2$. D. $m \in (-2; 3)$.

Câu 33: Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

Câu 34: Cho hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 35: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

A. $m \in (-\infty; 2]$. **B.** $m \in (2; +\infty)$. **C.** $m \in [2; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; 2)$.

Câu 37: Cho hàm số $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 7$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 38: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 39: Tìm tất cả giá trị thực tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 2$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $m \geq 1$. **B.** $m \leq -2$. **C.** $m > 0$. **D.** $m \leq 0$.

Câu 40: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 41: Cho hàm số $y = 2x^4 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\frac{1}{2}; +\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$.

Câu 42: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 43: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + m + 1}{x + 1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

A. $m > 0$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m \leq 0$.

Câu 44: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \left(\frac{m+1}{3}\right)x^3 - (m+1)x^2 - 3x + 1$ nghịch biến trên từng tập xác định của nó.

A. $m \in [-4; -1]$. **B.** $m \in [-4; -1]$. **C.** $m \in (-4; -1)$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Câu 45: Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty; +\infty)$. **B.** $(-1; 1)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Câu 46: Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 47: Cho hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

- A.** $m \in \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **B.** $m = -\frac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $m \in \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$. **D.** $m = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu 48: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$ và nghịch biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -4)$ và đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 5)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4; 5)$.

Câu 49: Cho hàm số $y = -x^3 + (3-m)x^2 - 2mx + 2$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định của nó.

- A.** $m \in (6 - 3\sqrt{3}; 6 + 3\sqrt{3})$. **B.** $m = 6 + 3\sqrt{3}$.
C. $m = 6 - 3\sqrt{3}$. **D.** $m \in [6 - 3\sqrt{3}; 6 + 3\sqrt{3}]$.

Câu 50: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A.** $y = -x^3 - 3x$. **B.** $y = x^3 + x$. **C.** $y = \frac{x+1}{x+3}$. **D.** $y = \frac{x-1}{x-2}$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$. Khẳng định nào dưới đây sai ?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Các dạng toán cơ bản

Dạng 1. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Phương pháp: Áp dụng hai qui tắc

a) Qui tắc 1.

- ① Tìm tập xác định.
- ② Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
- ③ Tìm các giới hạn vô cực; các giới hạn $+\infty, -\infty$ và tại các điểm mà hàm số không xác định (nếu có)
- ④ Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- ⑤ Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

b) Qui tắc 2.

- ① Tìm tập xác định.
- ② Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots)$ là các nghiệm của nó.
- ③ Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- ④ Dựa vào dấu của $f''(x_i)$, suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

Dạng 2. Tìm tham số m để hàm số đạt cực đại hay cực tiểu tại điểm x_0

Phương pháp: Vận dụng nội dung định lí 2.

$$\text{a) } \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực tiểu của } f(x) \quad \text{b) } \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực đại của } f(x)$$

- ① Tìm tập xác định.
- ② Tính y' và y''
- ③ Lập luận theo yêu cầu bài toán a) hay b).
- ④ Kết luận.

Dạng 3. Tìm tham số m để hàm số không có hoặc có cực trị và thỏa mãn điều kiện bài toán.

Phương pháp: Chủ yếu cho hàm bậc ba và hàm bậc bốn (trùng phương)

☺ **Hàm số bậc 3:** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0) \rightarrow$ không có cực trị hoặc có 2 cực trị.

- ① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- ② Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$
- ③ Lập luận: ♦ Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$$\diamond \text{ Hàm số có 2 cực trị } \Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases}$$

- ④ Kết luận

Lưu ý: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: Tính y', y'' . Xác định hệ số a . Phương

trình cần viết: $y - \frac{y' \cdot y''}{18a} = 0$

☺ **Hàm số bậc 4 (Trùng phương):** $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0) \rightarrow$ có 1 cực trị hoặc 3 cực trị.

Cực trị đối với hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

- ♦ TXĐ: $D = \mathbb{R}$ ♦ $y' = 4ax^3 + 2bx$ ♦ $y' = 0$ có 1 nghiệm hoặc có 3 nghiệm

I. Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

①

- Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow a = b = 0$
- Hàm số có một điểm cực trị $\Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$ hoặc $a \neq 0, ab \geq 0$
- Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$

Hàm số có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$		Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$	
$a > 0$: có 1 cực tiểu	$a < 0$: có 1 cực đại	$a > 0$: có 1 CĐ và 2 CT	$a < 0$: có 2 CĐ và 1 CT

② Giả sử hàm số có ba cực trị A, B, C . Ta có: $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$$AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

$$\text{Gọi } \alpha = \widehat{BAC}. \text{ Ta có: } 8a(1 + \cos \alpha) + b^3(1 - \cos \alpha) = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \text{ và } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{|a|} \sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

$$\text{Phương trình đường tròn đi qua ba điểm } A, B, C: x^2 + y^2 - (c+k)x + ck = 0 \text{ với } k = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}.$$

③ Các bài toán liên quan hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị $A \in Oy, B, C \dots$

Dữ kiện bài toán	Công thức vận dụng
Tam giác vuông cân	$8a + b^3 = 0$
Tam giác đều	$24a + b^3 = 0$
Tam giác có góc $\widehat{BAC} = \alpha$	$8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$
Tam giác ABC có $S_{\triangle ABC} = S_0$	$32a^3 (S_0)^2 + b^5 = 0$
Tam giác ABC có $S_{\triangle ABC} = S_0$ lớn nhất	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{ a \left(a + \sqrt{1 - \frac{b^3}{a}} \right)}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = R_0$	$R_0 = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$
Độ dài $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
Độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2 n_0^2 - b^4 + 8b = 0$
Với $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
Tam giác cân tại A	Phương trình đường thẳng đi qua cc1 điểm cực trị $BC: y = -\frac{\Delta}{4a};$ $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}} \right)^3 x + c$
Tam giác có ba góc nhọn	$8a + b^3 > 0$
Tam giác có trọng tâm là O , với O là gốc tọa độ	$b^2 - 6ac = 0$
Tam giác có trực tâm là O , với O là gốc tọa độ	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
$ABCO$ là hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$

Tam giác ABC có tâm nội tiếp là gốc tọa độ O	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có tâm ngoại tiếp là gốc tọa độ O	$b^3 - 8a - 8abc = 0$

II. Xét hàm số $y = k(x^4 - 2a^2x^2) + b, (k \neq 0, a > 0)$

♦ Có ba cực trị là $A(0; b), B(-a; -ka^4 + b), C(a; -ka^4 + b)$

♦ Gọi H là trung điểm BC . Ta có: $AH = |k|a^4; BC = 2a; AB = AC = \sqrt{a^2 + k^2a^8}$

III. Xét hàm số $y = k(x^4 - 2a^2x^2), (k \neq 0, a > 0)$

♦ Có ba cực trị là $A(0; 0), B(-a; -ka^4), C(a; -ka^4)$

♦ Gọi H là trung điểm BC . Ta có: $AH = |k|a^4; BC = 2a; AB = AC = \sqrt{a^2 + k^2a^8}$

Nhận xét:

♦ Tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow AH = \frac{BC}{2}$

♦ Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$

♦ Tam giác ABC có diện tích bằng $q \Leftrightarrow AH \cdot BC = 2q$

♦ Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $R \Leftrightarrow 2R = \frac{AB^2}{AH}$

☺ **Hàm số nhất biến:** $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (ad-bc \neq 0) \rightarrow$ chỉ tăng hoặc chỉ giảm và không có cực trị.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm điểm cực tiểu x_{CT} của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

A. $x_{CT} = 1$.

B. $x_{CT} = 3$.

C. $x_{CT} = 2$.

D. $x_{CT} = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3		0	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại y_{CB} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CB} = 3$ và $y_{CT} = 0$. B. $y_{CB} = 2$ và $y_{CT} = 0$.

C. $y_{CB} = 3$ và $y_{CT} = -2$. D. $y_{CB} = -2$ và $y_{CT} = 2$.

Câu 3: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx - 3}{x - m}$ không có cực trị.

A. $m = -1$.

B. $m \in (-1; 1)$.

C. $m = 1$.

D. $m \in [-1; 1]$.

Câu 4: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = -\frac{4}{5}$.

B. $m = -\frac{5}{4}$.

C. $m = \frac{4}{5}$.

D. $m = \frac{5}{4}$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

A. $m \neq 0$.

B. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1; m = 1$.

Câu 6: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 2(5m-8)x + 1$ luôn có một cực đại và một cực tiểu.

A. $m \in (2; 8)$.

B. $m \in (-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$.

C. $m = 2$.

D. $m = 8$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 11$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Đồ thị hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

C. Đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại $x = -4$.

D. Đồ thị hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 8: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

A. $m < -\frac{2\sqrt{13}}{13}$ hoặc $m > \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

B. $m \neq \frac{2}{3}$.

C. $m = \frac{2}{3}$.

D. $m \in \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Câu 9: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 10: Tìm các giá trị của thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

A. $m = 1$.

B. $m = 3$.

C. $m = -1$.

D. $m = -3$.

Câu 11: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - mx^2 + (2m-1)x$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = -1$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	↗ 5	↘ 1	↗ $+\infty$	

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Câu 13: Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ đạt cực đại tại $A(0; -3)$ và đạt cực tiểu tại $B(-1; -5)$. Tính $S = a + 2b + 3c$.

A. $S = 5$.

B. $S = 17$.

C. $S = -15$.

D. $S = -9$.

Câu 14: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 0$.

Câu 15: Tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$.

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = 2x - 2$.

C. $y = -2x + 2$.

D. $y = -2x - 2$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $0 < m < 1$.

B. $m < 1$.

C. $m > 0$.

D. $0 < m < \sqrt[3]{4}$.

Câu 17: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 12x + 2$ đạt cực đại tại $x = 2$.

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -1$. D. $m = 0$.

Câu 18: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5$ đạt cực đại tại $x = 1$?

- A. $m = 2$ B. $m = 1$ C. $m = -1$ D. $m = -2$

Câu 19: Cho hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + 15x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$ và $y_{CT} = -99$.
 B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$, $y_{CT} = -99$ và đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CB} = 9$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CB} = 9$.
 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và cực đại tại $x = -5$.

Câu 20: Tìm giá trị cực đại y_{CB} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- A. $y_{CB} = 1$. B. $y_{CB} = 4$. C. $y_{CB} = 0$. D. $y_{CB} = -1$.

Câu 21: Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.

- A. $y_{CT} = -\frac{1}{3}$. B. $y_{CT} = \frac{1}{3}$. C. $y_{CT} = \frac{1}{2}$. D. $y_{CT} = -\frac{1}{2}$.

Câu 22: Biết đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có hai điểm cực trị A, B . Phương trình đường thẳng AB là.

- A. $y = 2x + 2$. B. $y = 2x - 2$. C. $y = x - 2$. D. $y = 2x - 3$.

Câu 23: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \in (0; +\infty)$.

Câu 24: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x - m}{x+1}$ luôn có một cực đại và một cực tiểu.

- A. $m < -\frac{1}{2}$. B. $m \neq -1$. C. $m > -\frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = x^2\sqrt{x^2 + 2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = 0$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CT} = \sqrt{3}$.
 C. Không có cực trị. D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = \sqrt{3}$.

Câu 26: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là sai?

- A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
 B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
 C. Hàm số có ba điểm cực trị.
 D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 28: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị.

- A. $m > -1$. B. $m < -1$. C. $m = -1$. D. $m \in (-1; 1)$.

Câu 29: Tìm giá trị cực tiểu y_{CB} của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

- A. $y_{CB} = 0$. B. $y_{CB} = 2$. C. $y_{CB} = 1$. D. $y_{CB} = 3$.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

- A. $m = 1$. B. $m = \sqrt[3]{3}$. C. $m = -2$. D. $m = 3\sqrt{3}$.

Câu 31: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

- A. $m = -1$. B. $m > 3$. C. $m = \frac{2}{3}$. D. $m = \frac{3}{2}$.

Câu 32: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có ba điểm cực trị.

- A. $m \in (0; 3)$. B. $m \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$.
C. $m \in (-3; 3)$. D. $m \in (-\infty; -3)$.

Câu 33: Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ có bao nhiêu cực trị ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'		+		-	0	+
y		$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
B. Hàm số có đúng một cực trị.
C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 35: Tìm các giá trị của thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + m}{4 - x}$ có cực đại và cực tiểu.

- A. $m > -8$. B. $m < -8$. C. $m \geq -8$. D. $m \leq -8$.

Câu 36: Tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$.

- A. $y = -\frac{8}{9}x - 1$. B. $y = 3x - 4$. C. $y = -8x - 9$. D. $y = 9x - 8$.

Câu 37: Tính khoảng cách h giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$.

- A. $h = 60$. B. $h = 2\sqrt{5}$. C. $h = \sqrt{15}$. D. $h = 2\sqrt{15}$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- A. $m = -1$. B. $m = -1$. C. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Câu 39: Cho hàm số $y = x^4 + 3x^2 + 2$. Các điểm cực tiểu x_{CT} của hàm số là.

- A. $x_{CT} = 1, x_{CT} = 2$. B. $x_{CT} = -1$. C. $x_{CT} = 0$. D. $x_{CT} = 5$.

Câu 40: Hàm số $y = \sin 2x$ đạt cực đại tại giá trị của x_{CB} là.

A. $x_{CD} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x_{CD} = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_{CD} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x_{CD} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 41: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x^2 + 2}$ luôn có một cực đại và một cực tiểu.

A. $m = 2$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $m = -2$.

D. $m \in (-2; 2)$.

Câu 42: Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 10$.

B. $S = 5$.

C. $S = 9$.

D. $S = \frac{10}{3}$.

Câu 43: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có hai điểm cực trị.

A. $m = 0$.

B. $m < 0$.

C. $m > 0$.

D. $m \neq 0$.

Câu 44: Hãy tìm các tham số a và b để hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - ax^2 + b$ đạt cực trị bằng -2 tại điểm $x = 1$.

A. $a = -\frac{3}{2}; b = 1$.

B. $a = 1, b = 4$.

C. $a = b = 1$.

D. $a = 1; b = -\frac{3}{2}$.

Câu 45: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$, trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

A. $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

B. $m = \pm 2$.

C. $m = \pm 2\sqrt{2}$.

D. $m = -2 \pm 2\sqrt{2}$.

Câu 46: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Nhận điểm $x = 3$ làm điểm cực đại.

B. Nhận điểm $x = -1$ làm điểm cực tiểu.

C. Nhận điểm $x = 3$ làm điểm cực tiểu.

D. Nhận điểm $x = 1$ làm điểm cực đại.

Câu 47: Cho hàm số $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và cực đại tại $x = -2$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và cực đại tại $x = -1$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và cực đại tại $x = 1$.

Câu 48: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{1}{4}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = \frac{3}{4}$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

Câu 49: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có hai điểm cực trị. Tọa độ trung điểm I của hai điểm cực trị là.

A. $I(-2; 0)$.

B. $I(-2; -2)$.

C. $I(-1; 0)$.

D. $I(0; 2)$.

Câu 50: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. Không có giá trị m .

Câu 51: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có ba điểm cực trị.

A. $m \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$.

B. $m \in (0; 3)$.

C. $m \in (-\infty; -3)$.

D. $m = -3$ hoặc $m = 1$.

Câu 52: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có giá trị cực đại y_{CB} và giá trị cực tiểu y_{CT} . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $y_{CB} + 3y_{CT} = 15$.

B. $2y_{CB} - y_{CT} = 5$.

C. $y_{CB} + y_{CT} = 12$.

D. $y_{CT} - y_{CB} = 2\sqrt{3}$.

Câu 53: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 4(m+1)x$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m = -3$.

C. $m = -\frac{3}{2}$.

D. $m = 1$.

Câu 54: Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 55: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $N(1; -10)$.

B. $P(1; 0)$.

C. $M(0; -1)$.

D. $Q(-1; 10)$.

Câu 56: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = x + m^2 - m$ đi qua trung điểm của đoạn nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (C) : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

A. $m = 2$ hoặc $m = -1$.

B. $m = 0$ hoặc $m = 1$.

C. $m = 1$ hoặc $m = 2$.

D. $m = -1$ hoặc $m = 1$.

Câu 57: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt giá trị cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 5$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = -7$.

Câu 58: Hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x + 7$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	2	4	5	2	

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

C. Hàm số không có cực đại.

D. Hàm số có bốn điểm cực trị.

Câu 60: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

A. $m = 3$.

B. $m = -3$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

Câu 61: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2m + 1$ luôn có một cực đại và một cực tiểu.

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \in (0; 1)$.

Câu 62: Tìm các giá trị của thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

A. $m = 3$.

B. $m = -2$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Câu 63: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của nó có hoành độ dương.

- A. $m > 2$. B. $\begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{5}{4} \end{cases}$. C. $m \in \left(\frac{5}{4}; 2\right)$. D. $m < \frac{5}{4}$.

Câu 64: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - 1$ có 2 cực trị.

- A. $m > -2$. B. $-2 < m < 3$. C. $m < -2$ hoặc $m > 3$. D. $m > 3$.

Câu 65: Hàm số $y = \sin 2x - x$ đạt cực tiểu tại giá trị của x_{CT} là.

- A. $x_{CT} = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x_{CT} = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x_{CT} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x_{CT} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 66: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^3 - 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Đồ thị hàm số nhận điểm $x = 3$ làm điểm cực đại.
B. Đồ thị hàm số nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực đại.
C. Đồ thị hàm số nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực tiểu.
D. Đồ thị hàm số nhận điểm $x = 3$ làm điểm cực tiểu.

Câu 67: Cho điểm $A(2;3)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A .

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{1}{2}$.

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NĂM

Các dạng toán cơ bản

Khi không nói tập xác định D , ta hiểu tìm GTLN – GTNN trên tập xác định của hàm số đó

Dạng 1. Tìm GTLN – GTNN của hàm số trên đoạn $[a; b]$. Xét hàm số $y = f(x)$

Phương pháp: Áp dụng qui tắc:

- ① Tìm tập xác định hàm số
- ② Tính y' . Tìm $x_i \in [a; b] (i = 1, 2, \dots, n)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Tính $f(a), f(x_i), f(b)$.
- ④ Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Khi đó: $M = \max_{[a; b]} f(x), m = \min_{[a; b]} f(x)$.

Chú ý:

- ♦ $y' > 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \min_{[a; b]} f(x) = f(a); \max_{[a; b]} f(x) = f(b)$
- ♦ $y' < 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \min_{[a; b]} f(x) = f(b); \max_{[a; b]} f(x) = f(a)$

Dạng 2. Tìm GTLN – GTNN của hàm số chứa căn thức

Phương pháp: Áp dụng qui tắc:

- ① Tìm điều kiện, suy ra tập xác định $D = [a; b]$. **Lưu ý:** Hàm số $y = \sqrt{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \geq 0$
- ② Tính y' . Tìm $x_i \in [a; b] (i = 1, 2, \dots, n)$ tại đó đạo hàm bằng 0.

Lưu ý: ♦ $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ ♦ $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ hay } A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

- ③ Tính $f(a), f(x_i), f(b)$.
- ④ Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Khi đó: $M = \max_{[a; b]} f(x), m = \min_{[a; b]} f(x)$.

Dạng 3. Tìm GTLN – GTNN của hàm số trên một khoảng $(a; b)$.

Phương pháp: Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$, rồi dựa vào bảng biến thiên đưa ra kết luận bài toán.

Dạng 4. Ứng dụng vào bài toán thực tế.

Chú ý: Từ bài toán, xây dựng công thức (hàm số); nắm được các công thức toán học, vật lí.

- ❖ Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = s(t)$
- ❖ Vận tốc của chất điểm: $v(t) = s'(t)$
- ❖ Gia tốc của chất điểm: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+3}$ trên đoạn $[2; 4]$.

A. $M = \frac{1}{7}$.

B. $M = \frac{1}{6}$.

C. $M = \frac{3}{19}$.

D. $M = -\frac{1}{2}$.

Câu 2: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$.

- A. $m=19$. B. $m=\frac{5}{2}$. C. $m=3$. D. $m=1$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x + \sqrt{3+2x-x^2}$.

- A. $m=1-2\sqrt{2}; M=1$. B. $m=-1; M=2$.
C. $m=-1; M=1+2\sqrt{2}$. D. $m=-1; M=1$.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$.

- A. $m=-1; M=3$. B. $m=-\frac{1}{2}; M=3$. C. $m=-\frac{3}{2}; M=1$. D. $m=-\frac{3}{2}; M=3$.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x + \sqrt{8-x^2}$.

- A. $m=-4; M=2$. B. $m=\sqrt{2}; M=4$. C. $m=-2\sqrt{2}; M=4$. D. $m=-\sqrt{2}; M=2$.

Câu 6: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ trên đoạn $[-5; -3]$. Tính $S = m + M$.

- A. $S = \frac{14}{3}$. B. $S = -\frac{46}{3}$. C. $S = \frac{46}{3}$. D. $S = -\frac{14}{3}$.

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$ trên đoạn $[-1; 3]$.

- A. $M = 2 + \sqrt{2}$. B. $M = 2$. C. $M = \sqrt{2}$. D. $M = 2\sqrt{2}$.

Câu 8: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$. Tính $P = m.M$.

- A. $P = -1$. B. $P = 0$. C. $P = -3\sqrt{3}$. D. $P = 3\sqrt{3}$.

Câu 9: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$.

- A. $m = \frac{7}{2}; M = \frac{81}{16}$. B. $m = -3; M = 10$. C. $m = -\frac{7}{2}; M = \frac{16}{81}$. D. $m = -\frac{1}{4}; M = \frac{7}{2}$.

Câu 10: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{4}{x^2 + 2}$.

- A. $M = -5$. B. $M = 3$. C. $M = 10$. D. $M = 2$.

Câu 11: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$.

- A. $m = -41; M = 15$. B. $m = 15; M = 40$. C. $m = -40; M = 41$. D. $m = -41; M = 40$.

Câu 12: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $24(m/s)$. B. $18(m/s)$. C. $64(m/s)$. D. $108(m/s)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 4$. B. $m \leq 0$. C. $0 < m \leq 2$. D. $2 < m \leq 4$.

Câu 14: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sqrt{4x+8} + \sqrt{12-4x}$.

- A. $m = -\frac{1}{2}; M = 2$. B. $m = -2; M = 2\sqrt{10}$.

C. $m = \sqrt{5}; M = \sqrt{10}$.

D. $m = 2\sqrt{5}; M = 2\sqrt{10}$.

Câu 15: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.

A. $M = 6$.

B. $M = 15$.

C. $M = 11$.

D. $M = 10$.

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-2}{x+2}$ trên đoạn $[0; 3]$.

A. $m = -1; M = \frac{7}{5}$.

B. $m = \frac{-7}{5}; M = 1$.

C. $m = \frac{1}{3}; M = 1$.

D. $m = -1; M = \frac{1}{3}$.

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x + \frac{8}{2x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$.

A. $m = 2; M = 7$.

B. $m = \frac{7}{2}; M = \frac{18}{5}$.

C. $m = 0; M = 18$.

D. $m = \frac{11}{3}; M = \frac{7}{2}$.

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$.

A. $m = 4; M = 5$.

B. $m = 4; M = \frac{13}{3}$.

C. $m = \frac{13}{3}; M = 5$.

D. $m = 1; M = 3$.

Câu 19: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$.

A. $m = -\sqrt{5}; M = 5$.

B. $m = 0; M = 5$.

C. $m = \sqrt{5}; M = 5$.

D. $m = -5; M = \sqrt{5}$.

Câu 20: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{x^2+5x+4}{x+2}$ trên đoạn $[0; 1]$.

A. $m = \frac{10}{3}; M = 7$.

B. $m = 2; M = \frac{27}{10}$.

C. $m = 2; M = \frac{10}{3}$.

D. $m = \frac{27}{10}; M = \frac{10}{3}$.

Câu 21: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \cos^4 x + \sin^2 x - 2$. Tính $P = m.M$.

A. $P = \frac{5}{4}$.

B. $P = -\frac{4}{5}$.

C. $P = -1$.

D. $P = -\frac{5}{4}$.

Câu 22: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

A. $m = -2$.

B. $m = \frac{19}{3}$.

C. $m = -3$.

D. $m = 6$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14.

A. $m = 5$.

B. $m = \pm 2\sqrt{3}$.

C. $m = \pm 5$.

D. $m = 2\sqrt{3}$.

Câu 24: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - \sqrt{4x-x^2}$.

A. $m = 1; M = 3$.

B. $m = -3; M = 0$.

C. $m = 0; M = 3$.

D. $m = -3; M = 3$.

Câu 25: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x - \sqrt{x^2 - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $m = \sqrt{3}$.

B. $m < \sqrt{3}$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

Câu 26: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

A. $m = 2\sqrt{3}; M = 12$.

B. $m = \sqrt{6}; M = 2\sqrt{3}$.

C. $m = \sqrt{3}; M = \sqrt{6}$.

D. $m = -2; M = 4$.

Câu 27: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $m = -3\sqrt{3}; M = 12$.

B. $m = -12; M = -5\sqrt{5}$.

C. $m = -12; M = 3\sqrt{13}$.

D. $m = 3\sqrt{13}; M = 12$.

Câu 28: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$.

B. $m = \frac{49}{4}$.

C. $m = 13$.

D. $m = \frac{51}{2}$.

Câu 29: Kết luận nào là đúng về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-x^2}$.

A. Có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

B. Có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

C. Có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.

D. Không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 30: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{3\cos x - 1}{3 + \cos x}$.

A. $M = -\frac{1}{3}, m = -2$.

B. $M = \frac{1}{2}, m = -3$.

C. $M = \frac{1}{2}, m = -2$.

D. $M = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{3}$.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

A. $m = -1, m = 2$.

B. $m = 1, m = 2$.

C. $m = -1, m = -2$.

D. $m = 1, m = -2$.

Câu 32: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2x + \sqrt{5-x^2}$.

A. $m = -2$.

B. $m = 2\sqrt{5}$.

C. $m = -2\sqrt{5}$.

D. $m = 5$.

Câu 33: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 5$.

A. $m = 11; M = 21$.

B. $m = 9; M = 11$.

C. $m = -11; M = 9$.

D. $m = -1; M = 5$.

Câu 34: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $m = 3$.

B. $m = -2$.

C. $m = 0$.

D. $m = 11$.

Câu 35: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $m = -1; M = 1$.

B. $m = 1; M = 3$.

C. $m = 1; M = \sqrt{5}$.

D. $m = \sqrt{5}; M = 3$.

Câu 36: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{-x^2-2x+3}$.

A. $M = \sqrt{3}$.

B. $M = 2$.

C. $M = 3$.

D. $M = \sqrt{2}$.

Câu 37: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $54(m/s)$.

B. $400(m/s)$.

C. $30(m/s)$.

D. $216(m/s)$.

Câu 38: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ trên đoạn $[1; 1]$.

A. $m = -\sqrt{2}; M = \sqrt{2}$.

B. $m = 1; M = 2\sqrt{2}$.

C. $m = -2; M = 2$.

D. $m = \sqrt{2}; M = 2$.

Câu 39: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$.

- A. $m = -19; M = 3$. B. $m = -19; M = 8$. C. $m = 9; M = 18$. D. $m = -\frac{33}{2}; M = 8$.

Câu 40: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $m = 7$. B. $m = \frac{33}{5}$. C. $m = 2\sqrt[3]{9}$. D. $m = 3\sqrt[3]{9}$.

Câu 41: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{3}x + 2\cos^2 x$ trên đoạn $[0; \pi]$.

- A. $m = \frac{2\sqrt{3}\pi + 3}{6}; M = \frac{\sqrt{3}\pi + 9}{6}$. B. $m = \frac{2\sqrt{3}\pi + 3}{6}; M = \sqrt{3}\pi + 2$.
C. $m = 2; M = \frac{\sqrt{3}\pi + 9}{6}$. D. $m = 2; M = \sqrt{3}\pi + 2$.

Câu 42: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$.

- A. $m = 2; M = 2\sqrt{2}$. B. $m = -1; M = \sqrt{2}$. C. $m = -2\sqrt{2}; M = 2$. D. $m = -2; M = 2\sqrt{2}$.

Câu 43: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 13$ trên đoạn $[-3; 2]$.

- A. $M = 9$. B. $M = 3$. C. $M = -4$. D. $M = 7$.

Câu 44: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x - 1$.

- A. $m = -5; M = 1$. B. $m = -5; M = -\frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}; M = 5$. D. $m = -1; M = \frac{1}{2}$.

Câu 45: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $3 < m \leq 4$. B. $m < -1$. C. $m > 4$. D. $1 \leq m < 3$.

Câu 46: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

- A. $M = 9$. B. $M = 1$. C. $M = 6$. D. $M = 8\sqrt{3}$.

Câu 47: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $[0; \frac{\pi}{2}]$.

- A. $m = \sqrt{2}; M = 2\sqrt{2}$. B. $m = -2\sqrt{2}; M = 2\sqrt{2}$.
C. $m = -\sqrt{2}; M = 2\sqrt{2}$. D. $m = \sqrt{2}; M = 4\sqrt{2} - 4$.

Câu 48: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $144(m/s)$. B. $36(m/s)$. C. $243(m/s)$. D. $27(m/s)$.

Câu 49: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^2 - 4\sqrt{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{4}; 4]$.

- A. $m = -3; M = -\frac{15}{8}$. B. $m = -\frac{15}{8}; M = 8$. C. $m = -3; M = 8$. D. $m = -8; M = 3$.

Câu 50: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$.

- A. $m = 3$. B. $m = 5$. C. $m = 10$. D. $m = \frac{17}{4}$.

Câu 51: Cho hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Giá trị lớn nhất M của hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng.

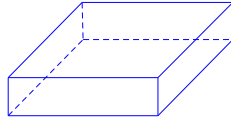
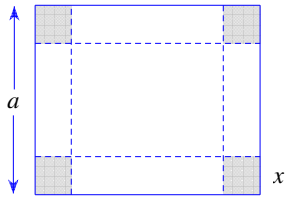
A. $M = 7$.

B. $M = -1$.

C. $M = 3$.

D. $M = 1$.

Câu 52: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới để được một cái hộp không nắp. Tìm cạnh x của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất.



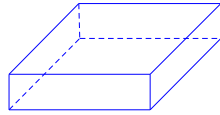
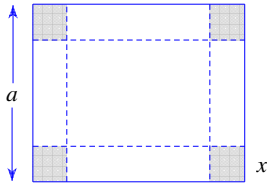
A. $x = \frac{a}{6}$.

B. $x = \frac{a}{2}$.

C. $x = \frac{a}{12}$.

D. $x = \frac{a}{3}$.

Câu 53: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $a = 12\text{cm}$. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm) rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 4$.

D. $x = 6$.

Câu 54: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$.

A. $m = 2; M = 56$.

B. $m = -\frac{1}{4}; M = 56$.

C. $m = -\frac{1}{4}; M = 0$.

D. $m = -\frac{1}{4}; M = 2$.

Câu 55: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x - \sqrt{x^2 - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $m = \sqrt{3}$.

B. $m < \sqrt{3}$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

Câu 56: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$.

A. $M = 0$.

B. $M = 2$.

C. $M = \sqrt{2}$.

D. $M = 3$.

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $y_{CB} = 5$.

B. $y_{CT} = 0$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$.

D. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

Câu 58: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = -3\sqrt{1-x}$.

A. $M = -3$.

B. $M = 0$.

C. $M = 1$.

D. $M = -1$.

Câu 59: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}; M = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $m = 0; M = 1$.

C. $m = -\frac{1}{2}; M = \frac{1}{2}$.

D. $m = -1; M = 1$.

§4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Các dạng toán cơ bản

Dạng 1: Tìm các đường tiệm cận thông qua định nghĩa; bảng biến thiên.

Dạng 2: Tìm các đường tiệm cận của hàm số nhất biến

♦ Hàm bậc ba, bậc bốn (trùng phương) không có tiệm cận

♦ Hàm số nhất biến: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x_0 = -\frac{d}{c} \right\}$

② Tính $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0 = \frac{a}{c}$. Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang

③ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ hay $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$. Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng.

Lưu ý:

♦ Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ và nhận định dấu của y' để đưa ra nhanh kết quả giới hạn trên.

♦ Hàm số đa thức không có tiệm cận.

Dạng 3: Tìm các đường tiệm cận đứng của hàm số khác

♦ Cho mẫu số bằng 0 tìm các nghiệm $x_i, (i = 1, 2, \dots)$

♦ Áp dụng định nghĩa ta tính giới hạn và đưa ra kết luận.

Lưu ý: Sử dụng máy tính bằng cách calc các giá trị x_i dựa vào định nghĩa đưa ra kết luận.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -3$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -3$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -3$.

Câu 2: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 2; x = 3$.

D. $x = -3; x = -2$.

Câu 3: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $y = -1$.

D. $y = 2$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$

C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Câu 5: Đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$ có bao nhiêu tiệm cận ?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{3-4x}{x+1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (C) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 4$. B. (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -4$.
C. (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$. D. (C) không có tiệm cận.

Câu 7: Tìm giá trị thực của tham số m và n để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-3}{x+n}$ nhận đường thẳng $y = 2$ làm tiệm cận ngang và đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng?

- A. $m = -2, n = 2$. B. $m = n = -2$. C. $m = 2, n = -2$. D. $m = n = 2$.

Câu 8: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{2x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \frac{3}{2}$. B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{3}{2}$.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$. D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$.

Câu 9: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

- A. $y = -1$. B. $x = 1$. C. $y = 2$. D. $x = 2$.

Câu 10: Cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x+1}{x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (C) chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$.
B. (C) chỉ có một tiệm cận đứng $x = -1$.
C. (C) có một tiệm cận đứng $x = -1$ và một tiệm cận ngang $y = 0$.
D. (C) không có tiệm cận.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

- A. Không có giá trị nào của m thỏa mãn. B. $m > 0$.
C. $m < 0$. D. $m = 0$.

Câu 12: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$.

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = 1$ và $x = 2$. D. $x = 0; x = 3$.

Câu 13: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-4}+3}{x^2+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 14: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^3-1}$.

- A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = 0$. D. $x = 1$ và $x = -2$.

Câu 15: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-9}$ có mấy đường tiệm cận đứng?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{mx-1}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = 2$. C. $m = \pm \frac{1}{2}$. D. $m \neq \pm 2$.

Câu 17: Đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ có bao nhiêu tiệm cận ?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 18: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{x+1}$?

- A. $x = -1$. B. $x = -2$. C. $y = 1$. D. $y = -2$.

Câu 19: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{m\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}$ có một tiệm cận ngang duy nhất.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m = \pm 1$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
 D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Câu 21: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-3}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
 B. Đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 3x^2 - 1$ không có tiệm cận đứng.
 C. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ không có tiệm cận ngang.
 D. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ không có tiệm cận đứng.

Câu 22: Tìm hàm số mà đồ thị của nó có hai tiệm cận đứng.

- A. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. B. $y = \frac{x^3-1}{x^2-1}$. C. $y = \frac{x^3+1}{x^2-1}$. D. $y = \frac{x^2+1}{x+1}$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{(m^2+1)\sqrt{x^2-2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 24: Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2+x+1}{2x-3}$ là.

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = \frac{3}{2}$. C. $y = 1$. D. $y = \frac{3}{2}$.

Câu 25: Đồ thị hàm số $y = 4 + \frac{1}{xm-2}$ có tiệm cận đứng là $x = -2$ khi và chỉ khi giá trị thực của tham số m là.

- A. $m \neq -1$. B. $m = -1$. C. $m = 4$. D. $m = 1$.

Câu 26: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+3x}{x^2-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 27: Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4-2x}{x}$.

- A. $x = 0; y = 4$. B. $x = 0; y = -2$. C. $x = 2; y = 0$. D. $x = -2; y = 0$.

Câu 28: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng ?

A. $y = x^3 - 3x + 2$. B. $y = \frac{1}{x^2 + x + 2}$. C. $y = \frac{1-x}{x^2 - 1}$. D. $y = \frac{1}{x^2 + 4}$.

Câu 29: Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ là.

A. TCD: $x = -1$ và $x = 2$; TCN: $y = 1$. B. TCD: $x = 2$ và TCN: $y = 2$.
C. TCD: $x = 1$ và $x = 2$; TCN: $y = 2$. D. TCD: $x = 1$ và TCN: $y = 2$.

Câu 30: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 2x}$.

A. $x = 2$. B. $x = 1$ và $x = 0$. C. $x = 0; x = 2$. D. $x = -2$.

Câu 31: Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x - 2m + 1}{x - 1}$ không có tiệm cận đứng ?

A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 32: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. (C) không có tiệm cận đứng. B. (C) có 1 tiệm cận ngang và 2 tiệm cận đứng.
C. (C) không có tiệm cận ngang. D. (C) có 2 tiệm cận ngang và 2 tiệm cận đứng.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
y'				+		-
y						

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 3. B. 2.
C. 4. D. 1.

Câu 34: Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x+1}$ là.

A. TCD: $x = -\frac{1}{2}$ và TCN: $y = -\frac{1}{2}$. B. TCD: $x = \frac{1}{2}$ và TCN: $y = \frac{1}{2}$.
C. TCD: $x = \frac{1}{2}$ và TCN: $y = -\frac{1}{2}$. D. TCD: $x = -\frac{1}{2}$ và TCN: $y = \frac{1}{2}$.

Câu 35: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

A. $x = -1$. B. $y = 2$. C. $x = 2$. D. $y = \frac{1}{2}$.

Câu 36: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x^2 - 2x - 1}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 37: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 38: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 39: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Nhận điểm $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng. B. Nhận điểm $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng.
C. Nhận điểm $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ làm tâm đối xứng. D. Nhận điểm $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng.

Câu 40: Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có bao nhiêu tiệm cận ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 41: Tìm tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{-x+1}$.

- A. (1; -2). B. (2; 1). C. (-2; 1). D. (1; 2).

Câu 42: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng ?

- A. $y = \frac{1}{x^2+x+1}$. B. $y = \frac{1}{x^4+1}$. C. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. D. $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Câu 43: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1-\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+2x-3}$.

- A. $x = -3$ và $x = 1$. B. $x = -3$. C. $x = 0$. D. $x = 1$.

Câu 44: Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào ?

- A. $y = \frac{x}{-2-x}$. B. $y = \frac{x+1}{x+2}$. C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. D. $y = \frac{x}{2-x}$.

Câu 45: Cho hàm số $y = \frac{2x+2m-1}{x+m}$. Tìm giá trị thực của tham số m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3; 1)$.

- A. $m = 2$. B. $m = -3$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Câu 46: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}$.

- A. $x = -4$. B. $x = 1$. C. $x = 4$ và $x = 0$. D. $x = 4$.

Câu 47: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 48: Đồ thị hàm số nào dưới đây nhận đường thẳng $y = 1$ làm đường tiệm cận ?

- A. $y = \frac{x-2}{1-x}$. B. $y = x^3+x$. C. $y = x^4-x^2$. D. $y = \frac{x-2}{x+3}$.

Câu 49: Cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{2x+1}{x^2-4}$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. Đồ thị hàm số (C) có hai đường tiệm cận. B. Đồ thị hàm số (C) có ba đường tiệm cận.
C. Đồ thị hàm số (C) có hai đường tiệm cận đứng. D. Đồ thị hàm số (C) có một đường tiệm cận ngang.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-		+	
y	1	$-\infty$	-1	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 3. B. 2.
C. 4. D. 1.

Câu 51: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 52: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 53: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2-1)(x-2)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 54: Tìm giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{5-x}$.

- A. $I(-5; 2)$. B. $I(-2; 5)$. C. $I(5; 2)$. D. $I(5; -2)$.

GV. Lư Sĩ Pháp

§5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

↳ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

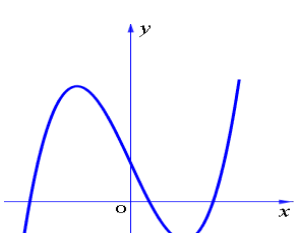
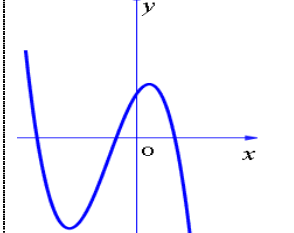
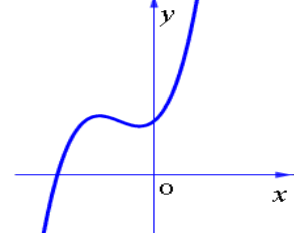
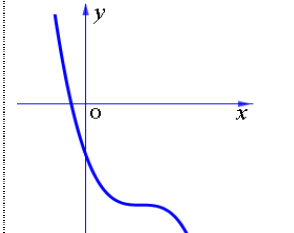
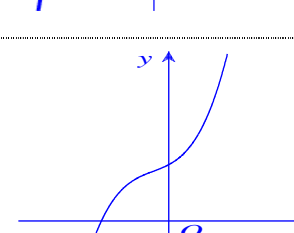
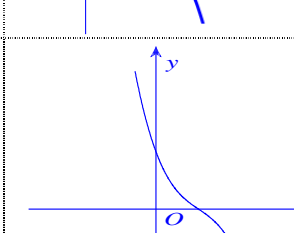
↳ y' là một tam thức bậc hai:

+ Nếu y' có hai nghiệm phân biệt thì sẽ đổi dấu hai lần khi qua các nghiệm của nó, khi đó đồ thị có hai điểm cực trị.

+ Nếu y' có nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì không đổi dấu, do đó đồ thị không có điểm cực trị.

+ y'' là một nhị thức bậc nhất luôn đổi dấu qua nghiệm của nó nên có một điểm uốn. Đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

Đồ thị hàm số bậc ba thường có một trong các dạng như hình dưới đây

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

2. Hàm số trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

↳ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

↳ $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$

+ Nếu a, b cùng dấu thì y' có một nghiệm và đổi dấu một lần qua nghiệm của nó nên chỉ có một điểm cực trị.

+ Nếu a, b trái dấu thì y' có ba nghiệm phân biệt và đổi dấu ba lần khi qua các nghiệm của nó nên đồ thị có ba điểm cực trị.

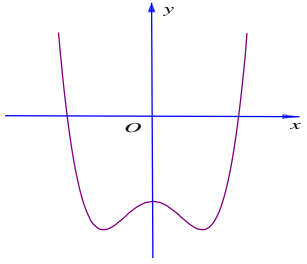
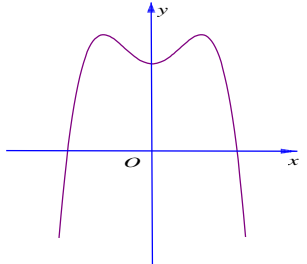
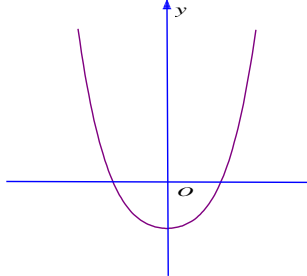
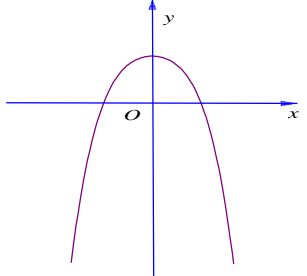
↳ $y'' = 12ax^2 + 2b$

+ Nếu a, b cùng dấu thì y'' không đổi dấu nên đồ thị không có điểm uốn

+ Nếu a, b trái dấu thì y'' có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu hai lần khi qua các nghiệm của nó nên đồ thị có hai điểm uốn.

Đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng

Đồ thị hàm số bậc trùng phương thường có một trong bốn dạng như hình dưới đây

$y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có một nghiệm		

3. Hàm số phân thức: $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - cb \neq 0)$

Tập xác định: $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2} = \frac{D}{(cx + d)^2}$

+ Nếu $D > 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in D_1$

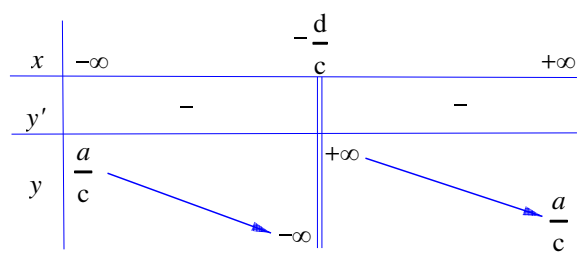
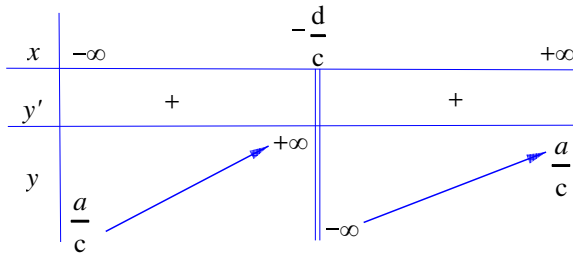
+ Nếu $D < 0 \Rightarrow y' < 0, \forall x \in D_1$

Tiệm cận: $y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang; $x = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng

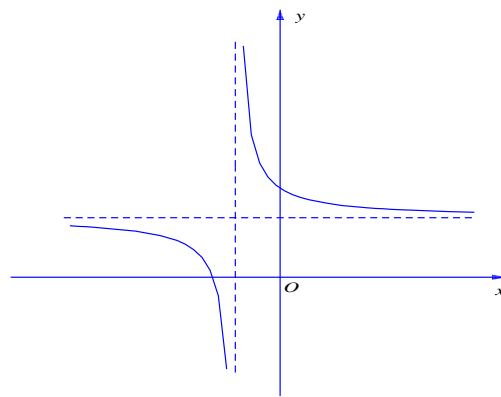
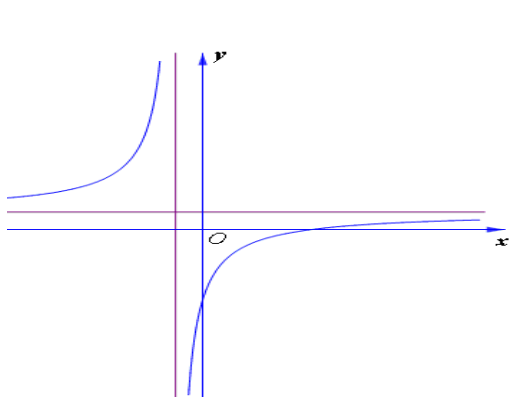
Bảng biến thiên

TH: $y' > 0$

TH: $y' < 0$

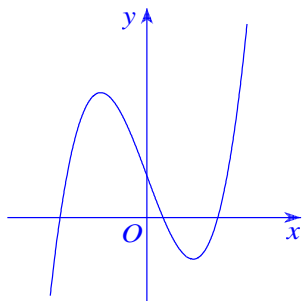


Đồ thị có dạng:



B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



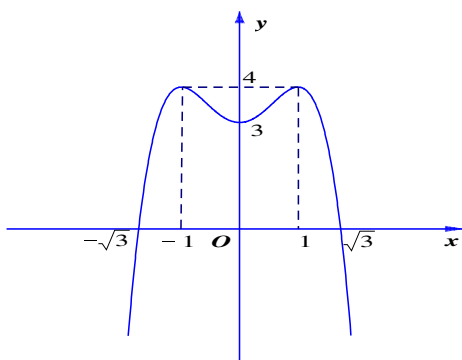
A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = -x^2 + x - 1$.

C. $y = x^4 - x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có đồ thị như hình bên.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

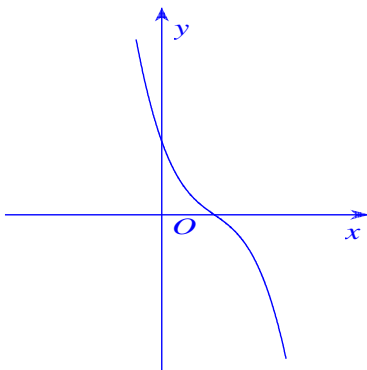
A. $-1 < m < 0$.

B. $m > 3$.

C. $3 < m < 4$.

D. $m < 4$.

Câu 3: Cho biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?



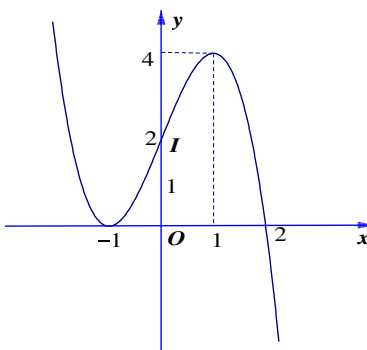
A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

Câu 4: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



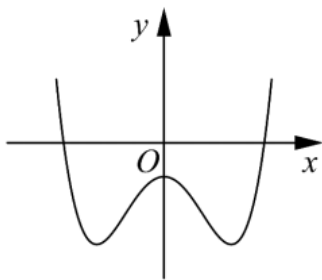
A. $y = -x^3 + 3x - 2$.

B. $y = -x^3 + 3x + 2$.

C. $y = x^3 + 3x + 2$.

D. $y = -x^3 + x + 2$.

Câu 5: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



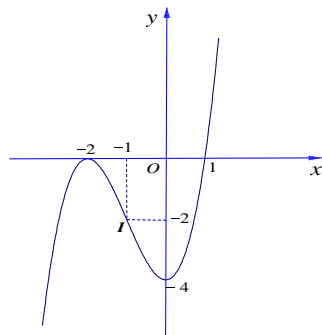
A. $y = x^3 - x - 1$.

B. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

C. $y = -x^4 + x^2 - 1$.

D. $y = x^4 - x^2 - 1$.

Câu 6: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



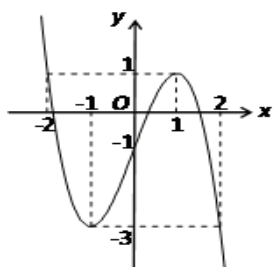
A. $y = -x^3 - 3x^2 + 4$.

B. $y = x^4 + 3x^2 - 4$.

C. $y = x^3 + 3x^2 + 4$.

D. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 7: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



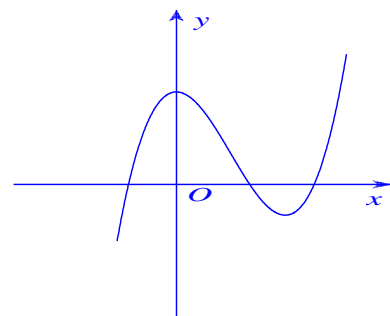
A. $y = x^3 - 3x - 1$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x - 1$.

D. $y = -x^3 - 3x - 1$.

Câu 8: Cho biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?



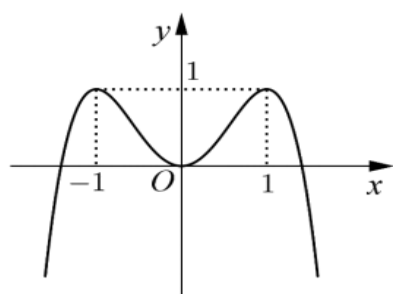
A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình bên.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

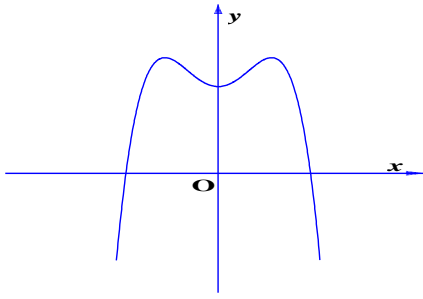
A. $0 < m < 1$.

B. $m > 0$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $m < 1$.

Câu 10: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



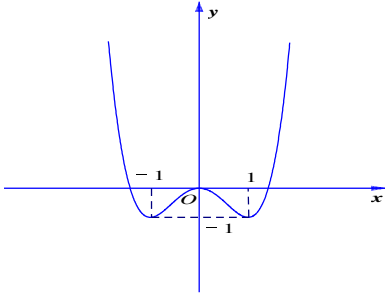
A. $y = -x^4 + 2x^2 + 3.$

B. $y = x^4 - 2x^2 - 3.$

C. $y = x^3 - 2x + 3.$

D. $y = -x^4 + 2x^2 - 3.$

Câu 11: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$ (m là tham số thực) và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi giá trị của m bằng bao nhiêu thì ta có đồ thị đó ?



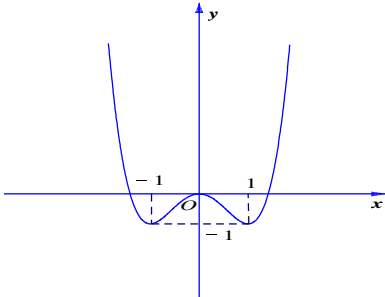
A. $m = -2.$

B. $m = -1.$

C. $m = 1.$

D. $m = 2.$

Câu 12: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



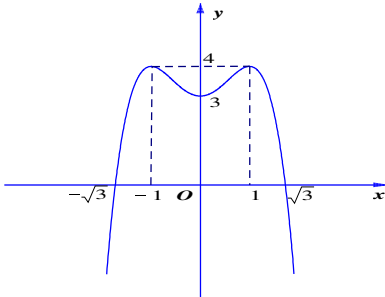
A. $y = x^4 - 4x^2.$

B. $y = x^4 - 2x^2.$

C. $y = x^2 - 2x.$

D. $y = x^3 - 3x^2 - 1.$

Câu 13: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



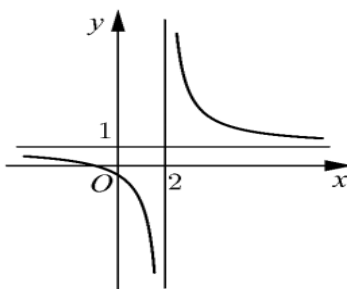
A. $y = x^4 - 2x^2 + 3.$

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 3.$

C. $y = x^4 - 2x^2 - 3.$

D. $y = -x^4 + 2x^2 - 3.$

Câu 14: Đường cong của hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $y' < 0, \forall x \neq 2.$

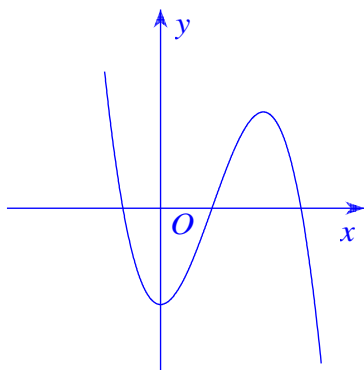
B. $y' > 0, \forall x \neq 2.$

C. $y' < 0, \forall x \neq 1.$

D. $y' > 0, \forall x \neq 1.$

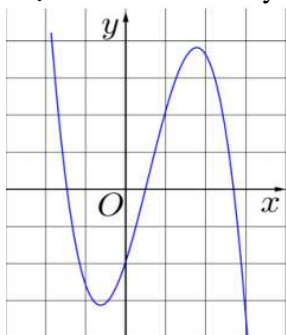
Câu 15: Cho biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị như hình bên.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?



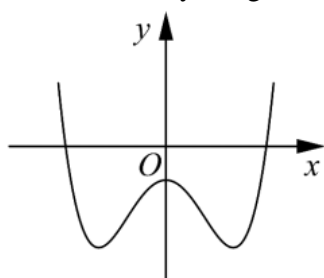
- A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$
- D. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

Câu 16: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



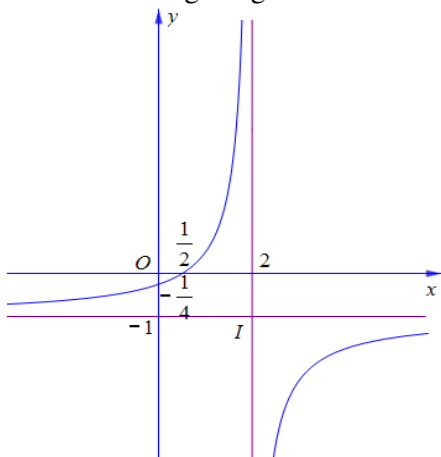
- A. $a < 0, b > 0, c < 0$ và $d < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c < 0$ và $d > 0$.
- C. $a < 0, b < 0, c > 0$ và $d < 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c > 0$ và $d < 0$.

Câu 17: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



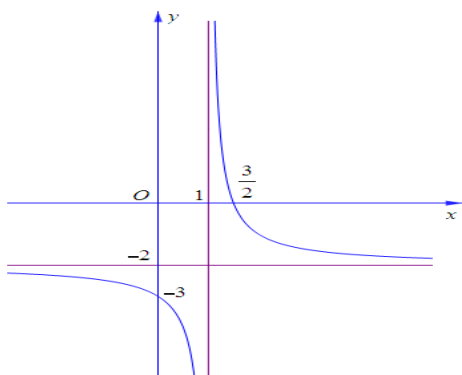
- A. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên số thực.
- B. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.
- C. Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.
- D. Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực.

Câu 18: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



- A. $y = \frac{1-2x}{2x+4}$.
- B. $y = \frac{1-2x}{2x-4}$.
- C. $y = \frac{1-x}{x-2}$.
- D. $y = \frac{2x+1}{2x-4}$.

Câu 19: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



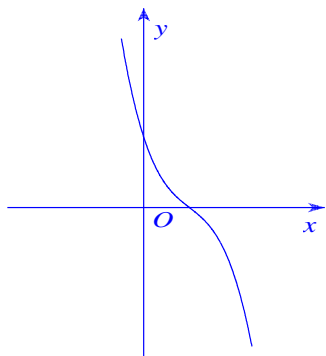
A. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

C. $y = \frac{-2x+3}{x-1}$.

D. $y = \frac{-2x+3}{x+1}$.

Câu 20: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



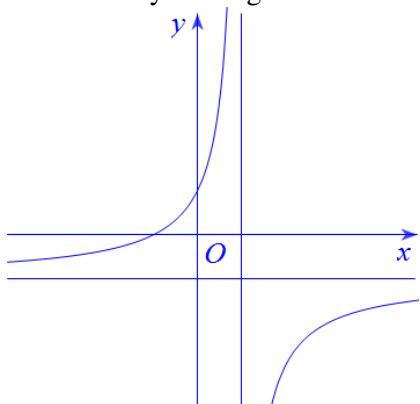
A. $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$.

C. $y = -x^2 + 3x + 4$.

D. $y = x^4 + 2x^2$.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



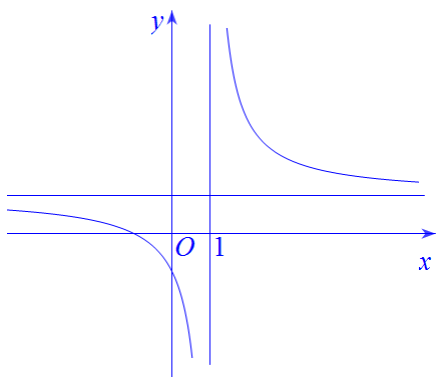
A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 22: Đường cong của hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



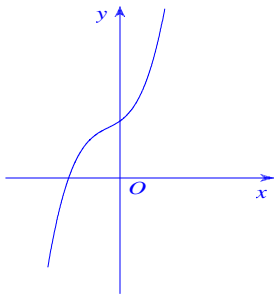
A. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

B. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 23: Cho biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?



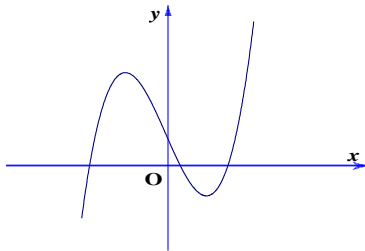
A. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

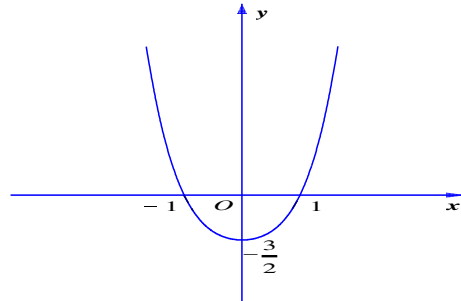
Câu 24: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = -3x^3 + 3x + 1$. B. $y = x^3 - 3x + 1$.

C. $y = x^4 - 2x + 1$. D. $y = x^3 + 3x - 1$.

Câu 25: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



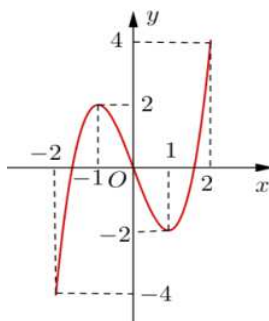
A. $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$.

B. $y = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$.

C. $y = \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{3}{2}$.

D. $y = x^2 - \frac{3}{2}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là một đường cong như trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?



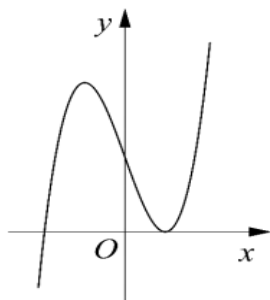
A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = -1$.

D. $x = -2$.

Câu 27: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



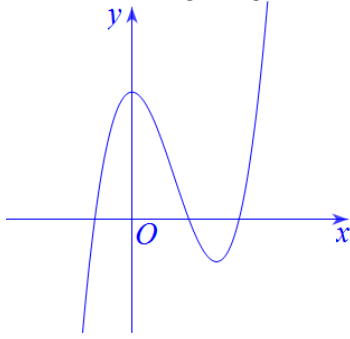
A. $y = -x^3 + 3x + 2$.

B. $y = x^3 - 3x + 2$.

C. $y = x^4 - x^2 + 1$.

D. $y = x^4 + x^2 + 1$.

Câu 28: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



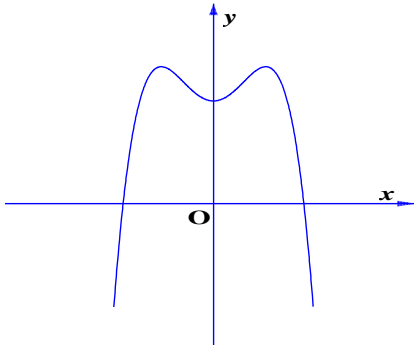
A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 29: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



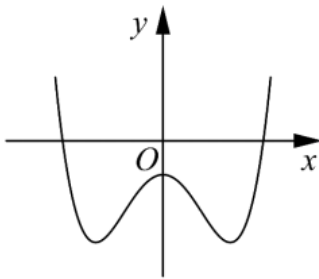
A. $y = x^3 - 2x + 3$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Câu 30: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



A. $a > 0, b < 0, c > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Câu 31: Cho hàm số $y = (x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

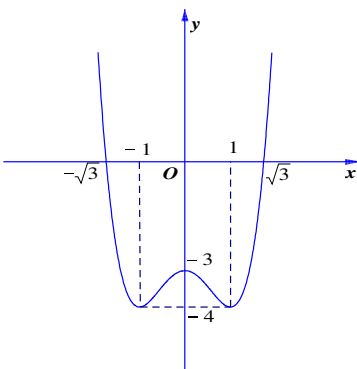
A. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.

D. (C) không cắt trục hoành.

Câu 32: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



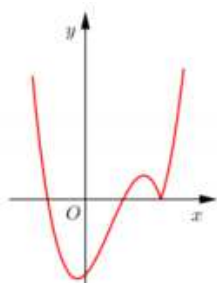
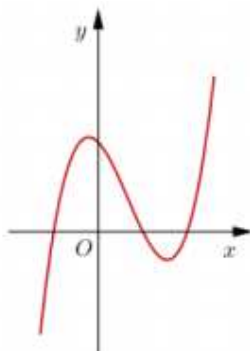
A. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

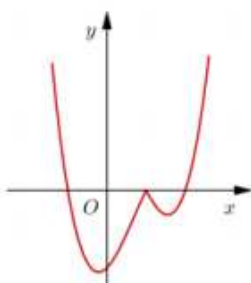
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

D. $y = x^2 - 2x + 3$.

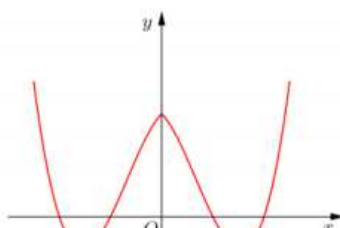
Câu 33. Hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



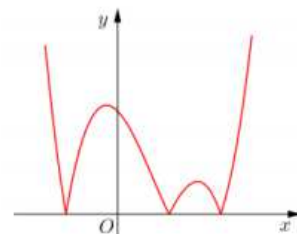
Hình 1.
A. Hình 1.



Hình 2.
B. Hình 2.

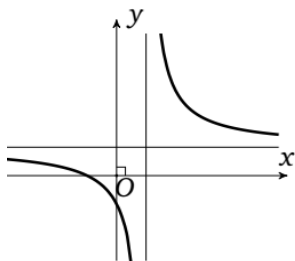


Hình 3.
C. Hình 3.



Hình 4.
D. Hình 4.

Câu 34: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $ab < 0, cd < 0$.

B. $bc > 0, ad < 0$.

C. $ac > 0, bd > 0$.

D. $bd < 0, ad > 0$.

§6. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Các dạng toán cơ bản

Dạng 1. Biện luận số giao điểm của hai đồ thị

Giao điểm của hai đường cong $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$

- Lập phương trình tìm hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ (*)

- Giải và biện luận (*)

- Kết luận: (*) có bao nhiêu nghiệm thì (C_1) và (C_2) có bấy nhiêu giao điểm.

Dạng 2. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

Dùng đồ thị $(C): y = f(x)$, biện luận theo m số nghiệm của phương trình $h(x, m) = 0$ (1)

Bước 1. Khảo sát và vẽ đồ thị $(C): y = f(x)$ (nếu chưa có sẵn đồ thị (C)).

Bước 2. Biến đổi $h(x, m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(m)$. Suy ra số nghiệm của phương trình (1) là giao điểm của $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = g(m)$. Sau đó căn cứ vào đồ thị để suy ra kết quả.

Lưu ý: $y = g(m)$ là đường thẳng cùng phương với trục Ox , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng $g(m)$.

Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến

Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ của đường cong $(C): y = f(x)$ có dạng là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

↳ $M(x_0; y_0)$ gọi là tiếp điểm

↳ $k = f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến

↳ $y_0 = f(x_0)$

Lưu ý: Trong phương trình tiếp tuyến (1), có ba yếu tố $x_0, y_0, f'(x_0)$. Để viết được phương trình (1), ta phải tính hai yếu tố còn lại khi cho biết một tham số.

MTCT: Thực chất ta chỉ tìm được x_0 , dùng MTCT thực hiện theo 1 trong 2 cách sau:

Cách 1. MODE 2 (CMPLX), nhập hàm: $y'(x)(i - x) + y \rightarrow \text{Calc} : x = x_0$.

Kết quả nhận được có dạng: $b + ai$ khi đó phương trình tiếp tuyến là: $y = ax + b$

Cách 2. Phương trình tiếp tuyến: $y = f(x) = ax + b$. Tính:

$$\textcircled{1} \quad a = y'(x_0) = \left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=x_0}$$

$$\textcircled{2} \quad b = f(x_0) - ax_0$$

Dạng 4. Sự tiếp xúc của các đường cong

a. Định nghĩa: Nếu tại điểm chung $M(x_0; y_0)$, hai đường cong (C_1) và

(C_2) có chung tiếp tuyến thì ta nói (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau tại M .

Điểm M được gọi là tiếp điểm của hai đường cong đã cho.

b. Điều kiện tiếp xúc

Hai đường cong $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm và nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong}$$

đó.

c. Các trường hợp đặc biệt

- $(\Delta): y = ax + b$ tiếp xúc với $(C): y = f(x)$ khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f'(x) = a \end{cases}$ có nghiệm.

- $(\Delta): y = ax + b$ tiếp xúc với $(C): y = f(x)$ tại $M_0(x_0; y_0)$ khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} f(x_0) = ax_0 + b \\ f'(x_0) = a \end{cases}$ có nghiệm.
- (C) tiếp xúc với trục Ox khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Chú ý:

- ① Nếu $(\Delta): y = ax + b$ thì (Δ) có hệ số góc $k = a$.
- ② Phương trình đường thẳng (Δ) qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k là: $y - y_0 = k(x - x_0)$
- ③ Cho $(\Delta): y = ax + b$ ($a \neq 0$)
- $(\Delta') // (\Delta) \Rightarrow (\Delta')$ có phương trình $y = ax + m$ ($m \neq b$)
- $(\Delta') \perp (\Delta) \Rightarrow (\Delta')$ có phương trình $y = -\frac{1}{a}x + m$
- (Δ) có hệ số góc là k , (Δ') có hệ số góc là k' . $(\Delta') \perp (\Delta) \Leftrightarrow k.k' = -1$
- (Δ) hợp với trục hoành một góc α thì hệ số góc của (Δ) là $k = |\tan \alpha|$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Số giao điểm của hai đường cong $y = x^3 - x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - x + 1$ là :

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 2: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 8x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $(C): y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

- A. $m = -8$. B. $m = 8$. C. $m = 3$. D. $m = 9$.

Câu 3: Tìm tọa độ giao điểm M của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$ và đường thẳng $d: y = x + 1$.

- A. $M(3; 1)$. B. $M(2; 2)$. C. $M(-1; 0)$. D. $M(2; -3)$.

Câu 4: Tìm tất các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị $(C_m): y = x^3 + (2m - 3)x^2 - (5m + 2)x - 3m + 6$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

- A. $m = 1$. B. $m \neq 1$. C. $m \neq -1$. D. $m = -1$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 + 2m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $0 < m < 2$. B. $m < 0$. C. $m > 2$. D. $0 < m < 1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Tìm những giá trị thực của tham số m để đồ thị đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

- A. $m > 1$ hoặc $m < -1$. B. $m > -3$. C. $m > 1$. D. $-3 < m < 1$.

Câu 7: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$ tại điểm có hoành độ x_0 , biết rằng $f''(x_0) = -6$.

- A. $y = 9x - 6$. B. $y = 3x + 2$. C. $y = 9x + 6$. D. $y = x + 6$.

Câu 8: Các đồ thị của hai hàm số $y = 3 - \frac{1}{x}$ và $y = 4x^2$ tiếp xúc với nhau tại điểm M . Tìm hoành độ của điểm M .

- A. $x_M = 1$. B. $x_M = \frac{1}{2}$. C. $x_M = -1$. D. $x_M = 2$.

Câu 9: Tìm những giá trị thực của tham số m để phương trình $4x^3 - 3x - 2m + 3 = 0$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m \in (-2; 4)$. B. $m = 1$ hoặc $m = 2$. C. $m < 1$ hoặc $m > 2$. D. $m \in (1; 2)$.

Câu 10: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = mx + 2$ cắt đồ thị hàm số

$(C): y = \frac{3-2x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt:

- A. $m \in (-\infty; -6 - 2\sqrt{5}) \cup (-6 + 2\sqrt{5}; +\infty)$. B. $m \in (-6 - 2\sqrt{5}; -6 + 2\sqrt{5})$.
 C. $m \in (-6 + 2\sqrt{5}; 0)$. D. $m \in (-\infty; -6 - 2\sqrt{5}) \cup (-6 + 2\sqrt{5}; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$.

- A. $m \in (-\infty; -1)$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 3)$.

Câu 12: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho để đường thẳng $d: y = mx + 2$ cắt đường cong

$(C): y = \frac{-2x}{x+1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $\triangle OAB$ vuông tại O .

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 13: Tìm những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- A. $-2 < m < 2$. B. $m > 2$ hoặc $m < -2$.
 C. $-2 < m < -1$. D. $-1 < m < 2$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = -2$. D. $m = -1$.

Câu 16: Tìm giá trị của tham số m thì phương trình $x^3 - 6x^2 + m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \in (32; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 0)$. C. $m \in (0; 32)$. D. $m = 0$ hoặc $m = 32$.

Câu 17: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng. Tìm giá trị thực của tham số m .

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.

Câu 18: Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ có hoành độ bằng -1 , với m là tham số. Biết tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $5x - y = 0$. Tìm giá trị m .

- A. $m = -4$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 4$.

Câu 19: Dựa đồ thị hàm số $(C): y = 2x^4 - 4x^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt nghiệm phân biệt.

- A. $-2 < m < 0$. B. $m > 2$. C. $0 < m < 2$. D. $0 < m < 1$.

Câu 20: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-3)(x^2 + x + 4)$ với trục hoành là.

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 21: Cho đồ thị hàm số $(C): y = -x^4 - x^2 + 6$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

- A. $y = -6x - 10$. B. $y = -6x + 10$. C. $y = 6x - 10$. D. $y = 6x + 10$.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$.

- A. $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. B. $m \in (-2; +\infty)$.
C. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 23: Biết rằng đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm duy nhất. Kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm $(x_0; y_0)$.

- A. $(x_0; y_0) = (-3; 8)$. B. $(x_0; y_0) = (2; 3)$. C. $(x_0; y_0) = (3; 2)$. D. $(x_0; y_0) = (-2; 7)$.

Câu 24: Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

- A. $m = 1$ hoặc $m = 2$. B. $m = -1$ hoặc $m = -2$.
C. $m = \pm 2$. D. $m = \pm 1$.

Câu 25: Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 4x^2 + 4x$. Tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ cắt (C) tại điểm M . Tìm tọa độ điểm M .

- A. $M(2; 12)$. B. $M(0; 4)$. C. $M(4; 12)$. D. $M(4; 16)$.

Câu 26: Biết đồ thị đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt. Tìm các giá trị thực của tham số m .

- A. Với mọi giá trị m . B. $-1 < m < -\frac{1}{2}$. C. $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$. D. $m > \sqrt{3}$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. B. $m \neq 0$. C. $m = 1$. D. $m = -1; m = 1$.

Câu 28: Tìm những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

- A. $m = 0$ và $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y = 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = 4x^3 - 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}$. B. $m \leq -\frac{3}{2}$. C. $m \geq -\frac{1}{2}$. D. $-3 < m < -1$.

Câu 30: Gọi M là một điểm thuộc $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox và Oy lần lượt tại A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB là:

- A. $S = \frac{11}{6}$. B. $S = \frac{122}{6}$. C. $S = \frac{1}{6}$. D. $S = \frac{121}{6}$.

Câu 31: Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $m = 0$ hoặc $m = \frac{8}{9}$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{8}{9}\right) \cup (0; +\infty)$.
C. $m < 0$ hoặc $m > \frac{8}{9}$. D. $m \in \left(0; \frac{8}{9}\right)$.

Câu 32: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$, với m là tham số và đường thẳng $d: y = x$. Tìm những giá trị thực của tham số m để đường thẳng d và đồ thị (C) tiếp xúc với nhau.

- A. $m \neq \pm 1$. B. $m = 1$. C. $m \neq 1$. D. $m = -1$.

Câu 33: Cho M thuộc đồ thị $(C): y = \frac{x+2}{x-1}$ và khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x$ bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ điểm M .

- A. $M(0;0)$ hoặc $M(2;2)$. B. $M(0;-2)$ hoặc $M(-2;0)$.
C. $M(-2;-2)$ hoặc $M(-2;2)$. D. $M(0;2)$ hoặc $M(2;0)$.

Câu 34: Tìm tất cả các điểm M trên $(C): y = \frac{x-2}{x-1}$ cách đều hai điểm $A(0;0)$ và $B(2;2)$.

- A. $M(0;2)$ hoặc $M(2;0)$. B. $M(0;4)$ hoặc $M(4;0)$.
C. $M(0;1)$ hoặc $M(1;0)$. D. $M(0;3)$ hoặc $M(3;0)$.

Câu 35: Đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ y_0 bằng bao nhiêu?

- A. $y_0 = 0$. B. $y_0 = 3$. C. $y_0 = -3$. D. $y_0 = -2$.

Câu 36: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-2x+3}{x-1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x - 3$.

- A. $y = -x + 3$ và $y = -x - 1$. B. $y = x - 3$ và $y = x + 1$.
C. $y = -x - 3$ và $y = -x + 1$. D. $y = -x + 3$ và $y = -x + 1$.

Câu 37: Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0 ?

- A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = -1$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = 0$.

Câu 38: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 6x$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $-2 < m < 2$. B. $-1 < m < 1$.
C. $m < -2$ hoặc $m > 2$. D. $m < -1$ hoặc $m > 1$.

Câu 39: Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = 7$. D. $m = 11$.

Câu 40: Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ có các điểm cực đại và cực tiểu x_1, x_2 thỏa $x_1 + 2x_2 = 1$.

- A. $m = -2$ hoặc $m = 3$. B. $m = 2$ hoặc $m = 1$.
C. $m = 2$ hoặc $m = \frac{3}{2}$. D. $m = 2$ hoặc $m = \frac{2}{3}$.

Câu 41: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 + m}{x-1}$ và đường thẳng $d: y = -x + 7$ với m là tham số. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng d và đồ thị (C) tiếp xúc với nhau.

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

Câu 42: Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2m(x+1) + 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- A. $m \in \left(\frac{3}{8}; +\infty\right)$. B. $m \in \left(\frac{3}{8}; +\infty\right) / \left\{\frac{3}{2}\right\}$. C. $m \neq \frac{3}{2}$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{8}\right)$.

Câu 43: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x-1}{2x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = 3x - 5$. B. $y = -3x - 5$. C. $y = -3x + 5$. D. $y = 3x + 5$.

Câu 44: Tìm tất cả các tham số thực m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \frac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm A, B sao cho các tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 0$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

- A. $0 < m < 4$. B. $m > 2$. C. $m \geq 4$. D. $m \leq 3$.

Câu 46: Tìm tất cả giá trị thực của m để phương trình $x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $2 < m < 10$. B. $m < 2$. C. $m > 10$. D. $1 < m < 5$.

Câu 47: Tìm tất cả giá trị thực của m để đường thẳng $(d): y = -3x + m$ cắt $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB nằm trên đường thẳng $(\Delta): x - y - 2 = 0$.

- A. $m = -7$. B. $m > 1$. C. $m = -3$. D. $m < -2$.

Câu 48: Cho M thuộc đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x - 2$ và tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc bằng 9. Tìm tọa độ điểm M .

- A. $M(-2; 0)$ hoặc $M(2; -4)$. B. $M(0; 2)$ hoặc $M(2; 4)$.
C. $M(2; 2)$ hoặc $M(0; 2)$. D. $M(2; 0)$ hoặc $M(-2; -4)$.

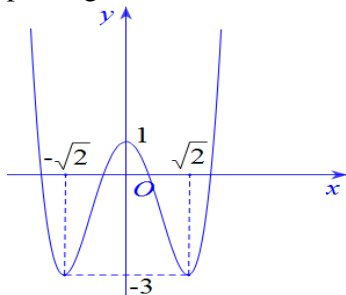
Câu 49: Dựa đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 2x^2 + 2$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 + 1 - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $0 < m < 1$. B. $m < 0$. C. $m > 1$. D. $0 < m < 2$.

Câu 50: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm x_0 biết $f''(x_0) = -1$.

- A. $y = -x - \frac{5}{4}$ và $y = 3x + \frac{5}{4}$. B. $y = -3x + 5$ và $y = 3x + 5$.
C. $y = -3x + \frac{5}{4}$ và $y = 3x + \frac{5}{4}$. D. $y = -3x + \frac{5}{4}$ và $y = -3x - \frac{5}{4}$.

Câu 51: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 - m = 0$ có hai nghiệm thực.



- A. $-4 < m < 0$. B. $m \in (0; +\infty) \cup \{-4\}$.
C. $m > 1$. D. $m \in (1; +\infty) \cup \{-3\}$.

Câu 52: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ (C) . Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (C) :

A. $y = 2x + 1$.

B. $y = -2x + 1$.

C. $y = -2x - 1$.

D. $y = -2x$.

Câu 53: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = x + m^2 - m$ đi qua trung điểm của đoạn nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số (C): $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

A. $m = 0$ hoặc $m = -1$.

B. $m = 1$ hoặc $m = 2$.

C. $m = 0$ hoặc $m = 1$.

D. $m = -1$ hoặc $m = 1$.

Câu 54: Cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x}{x-1}$ và đường thẳng $d: y = -x + m$ với m là tham số. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

A. $m \in (0; 4)$.

B. $m < 0$ hoặc $m > 4$.

C. $m = 0$ hoặc $m = 4$.

D. $m \in [0; 4]$.

Câu 55: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$, biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 2$.

A. $y = -3x + 1$.

B. $y = 3x - 1$ và $y = 3x + 11$.

C. $y = 3x + 1$ và $y = -3x + 11$.

D. $y = 3x - 11$.

Câu 56: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $y = -x + 1$.

A. $M(1; 0)$.

B. $M(1; 2)$.

C. $M(3; 2)$.

D. $M(3; 1)$.

Câu 57: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^4 - 2x^2$ tại điểm có hoành độ bằng -2 .

A. $y = -24x + 40$.

B. $y = 24x + 40$.

C. $y = -24x - 40$.

D. $y = 24x - 40$.

Câu 58: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	

A. $m = 2; m = -2$.

B. $m = 3; m = -1$.

C. $-2 < m < 2$.

D. $-1 < m < 3$.

Câu 59: Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ (C). Tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ cắt (C) tại điểm M . Tìm tọa độ của điểm M .

A. $M(4; 4)$.

B. $M(4; 16)$.

C. $M(0; 4)$.

D. $M(2; 4)$.

Câu 60: Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số (C): $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có các điểm cực đại và cực tiểu lập thành một tam giác đều.

A. $m = \sqrt[3]{3}$.

B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = \sqrt[3]{4}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CÁC BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP

Câu 1: Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A. $m < 1$. B. $0 < m < \sqrt[3]{4}$. C. $m > 0$. D. $0 < m < 1$.

Câu 3: Xét hàm số $y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số không có cực trị. B. Hàm số luôn luôn đồng biến.
C. Hàm số có hai cực trị. D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

Câu 4: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

- A. $30(m/s)$. B. $400(m/s)$. C. $216(m/s)$. D. $54(m/s)$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- A. $m = -\frac{5}{4}$. B. $m = -\frac{4}{5}$. C. $m = \frac{5}{4}$. D. $m = \frac{4}{5}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(mx)^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

- A. $m = 0$ hoặc $m = \sqrt[3]{3}$. B. $m = \sqrt[3]{3}$.
C. $m = \sqrt[3]{3}$ hoặc $m = -\sqrt[3]{3}$. D. $m = \sqrt[3]{3}$ hoặc $m = -\sqrt[3]{3}$ hoặc $m = 0$.

Câu 8: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{3\cos x - 1}{3 + \cos x}$.

- A. $M = \frac{1}{2}, m = -2$. B. $M = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{3}$. C. $M = \frac{1}{2}, m = -3$. D. $M = -\frac{1}{3}, m = -2$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{3-4x}{x+1}$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. (C) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 4$. B. (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -4$.
C. (C) không có tiệm cận. D. (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $0 < m \leq 2$. B. $m \leq 0$. C. $m > 4$. D. $2 < m \leq 4$.

Câu 11: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ với đường thẳng $y = 1 - x$ là.

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 12: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x^2 - 2x - 1}$ có bao nhiêu tiệm cận?

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 13: Cho hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$.

Câu 15: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

- A. $y = -1$. B. $y = 2$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 16: Hàm số $y = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+6}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = x_0$. Tìm x_0 .

- A. $x_0 = -6$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = 2$. D. $x_0 = 4$.

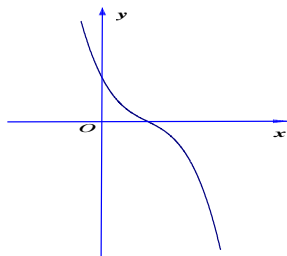
Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng xác định và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Giá trị cực đại bằng 1 và giá trị cực tiểu bằng 0.
 B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = -1$.
 C. Hàm số hai có cực trị.
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và không có cực tiểu.

Câu 18: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

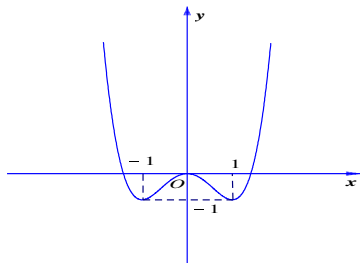


- A. $y = x^4 + 2x^2$.
 B. $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.
 C. $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$.
 D. $y = -x^2 + 3x + 4$.

Câu 19: Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - \sqrt{4x - x^2}$ lần lượt là.

- A. $m = 0; M = 3$. B. $m = -3; M = 0$. C. $m = 1; M = 3$. D. $m = -3; M = 3$.

Câu 20: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = x^3 - 2x^2 - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2$.
 C. $y = x^4 - 4x^2$. D. $y = x^2 - 2x$.

Câu 21: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2} \cos 2x + 4 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

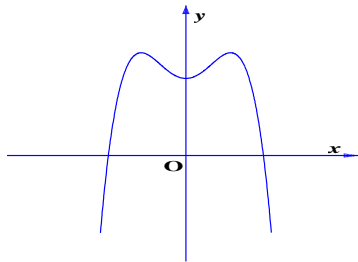
A. $\min y = -\sqrt{2}; \max y = 2\sqrt{2}.$

B. $\min y = \sqrt{2}; \max y = 2\sqrt{2}.$

C. $\min y = -2\sqrt{2}; \max y = 2\sqrt{2}.$

D. $\min y = \sqrt{2}; \max y = 4\sqrt{2} - 4.$

Câu 22: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = x^3 - 2x + 3.$

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 3.$

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 3.$

D. $y = x^4 - 2x^2 - 3.$

Câu 23: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2$.

A. $y = 2x + 1.$

B. $y = x.$

C. $y = -x.$

D. $y = -4x.$

Câu 24: Đường nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

A. $y = -1.$

B. $x = -1.$

C. $y = -1.$

D. $x = 1.$

Câu 25: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2x - \sqrt{x^2 - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. $m = 4.$

B. $m = -32.$

C. $m = 2.$

D. $m = \sqrt{3}.$

Câu 26: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

A. $m \geq 1.$

B. $m > 1.$

C. $m \leq 0.$

D. $m \in \mathbb{R}.$

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	2	$-\infty$ $+\infty$	2

Hỏi $f(x)$ là hàm số nào?

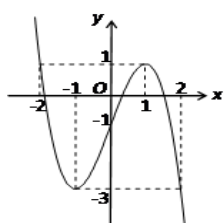
A. $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}.$

B. $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$

C. $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}.$

D. $f(x) = \frac{2x-1}{1-x}.$

Câu 28: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = x^3 - 3x - 1.$

B. $y = -x^3 + 3x - 1.$

C. $y = -x^3 - 3x - 1.$

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1.$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng xác định và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$ $	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	2	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số không có cực trị.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và đạt cực đại tại $x = 2$.

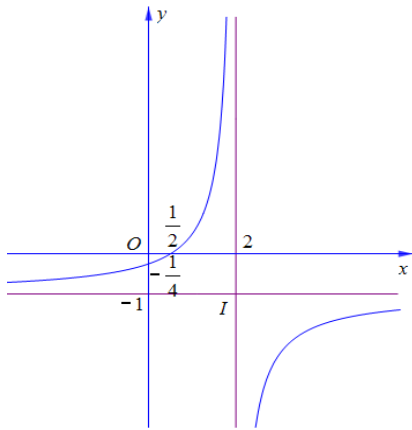
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và không đạt cực đại.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 30: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{3\cos x - 1}{3 + \cos x}$.

- A. $M = \frac{1}{2}, m = -3$. B. $M = \frac{1}{2}, m = -2$. C. $M = -\frac{1}{3}, m = -2$. D. $M = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{3}$.

Câu 31: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



- A. $y = \frac{1-2x}{2x+4}$. B. $y = \frac{1-2x}{2x-4}$.
C. $y = \frac{1-x}{x-2}$. D. $y = \frac{2x+1}{2x-4}$.

Câu 32: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng ?

- A. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. B. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$. C. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$. D. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2mx^2 + (m^2 + 3)x - m^3$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

- A. $m = 1$ hoặc $m = 7$. B. $m = -7$. C. $m = 7$. D. $m = 1$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y				

Arrows indicate: from $-\infty$ to -2 , $y \rightarrow -\infty$; from -2 to 0 , $y \rightarrow +\infty$; from 0 to $+\infty$, $y \rightarrow 0$.

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 3. B. 2.
C. 4. D. 1.

Câu 35: Biết rằng đường thẳng $y = -3x + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0 ?

- A. $y_0 = 3$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = 1$.

Câu 36: Hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$ nghịch biến trên khoảng nào ?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(5; +\infty)$. C. $\left(-4; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-\infty; -4)$.

Câu 37: Tìm giá trị cực đại y_{CB} của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 7$. $y = x^3 - 6x^2 + 7$

- A. $y_{CB} = 3$. B. $y_{CB} = 7$. C. $y_{CB} = -12$. D. $y_{CB} = -25$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4x^3 - 3x - 2m + 3 = 0$ có một nghiệm duy nhất.

- A. $m \in (1; 2)$. B. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

- A. $m = \sqrt[3]{3}$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 3\sqrt{3}$.

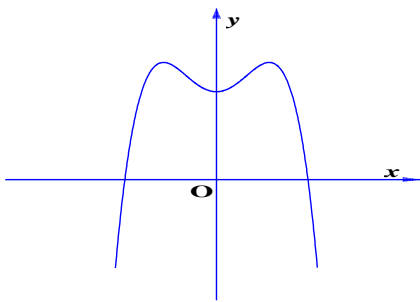
Câu 40: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $27(m/s)$. B. $144(m/s)$. C. $243(m/s)$. D. $36(m/s)$.

Câu 41: Hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$.
C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 42: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.
C. $y = x^3 - 2x + 3$. D. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

Câu 43: Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{3}{4}$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; +\infty)$. C. $(-2; 3)$. D. $(-2; 3)$.

Câu 44: Trong các hàm số sau, hàm số nào không có cực trị?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. B. $y = \frac{x+2}{2x-1}$. C. $y = x^4 - x^2 + 2$. D. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Câu 45: Cho hàm số $y = \frac{3-4x}{x+1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$. B. (C) không có tiệm cận.
C. (C) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 4$. D. (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -4$.

Câu 46: Tìm giá trị cực đại y_{CB} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- A. $y_{CB} = 0$. B. $y_{CB} = -1$. C. $y_{CB} = 4$. D. $y_{CB} = 1$.

Câu 47: Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu cực trị?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 48: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6mx^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $|m| > \frac{2}{3}$. B. $m > \frac{2}{3}$. C. $m < -\frac{3}{2}$. D. $m = \frac{3}{2}$.

Câu 49: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$.

- A. $m = 0; M = \sqrt{5}$. B. $m = -\sqrt{5}; M = 5$. C. $m = \sqrt{5}; M = 5$. D. $m = -5; M = \sqrt{5}$.

Câu 50: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu.

- A. $m \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. B. $-1 \leq m \leq 3$.
C. $m \in \{-1; 3\}$. D. $-1 < m < 3$.

Câu 51: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại giao điểm của (C) và trục tung.

- A. $y = 8x + 3$. B. $y = -8x + 3$. C. $y = -8x - 3$. D. $y = 8x + 1$.

Câu 52: Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số (C): $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

- A. $m = -1$ hoặc $m = -2$. B. $m = \pm 1$.
C. $m = 1$ hoặc $m = 2$. D. $m = \pm 2$.

Câu 53: Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

- A. $x = -3$ và $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 3$ và $x = 2$. D. $x = 3$.

Câu 54: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

- A. $M = 1$. B. $M = 8\sqrt{3}$. C. $M = 6$. D. $M = 9$.

Câu 55: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
B. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại 3 điểm phân biệt.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
D. Hàm số luôn đồng biến với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 56: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3x-2}{x+2}$ trên đoạn $[0; 3]$.

- A. $\min_{[0;3]} f(x) = -1; \max_{[0;3]} f(x) = \frac{1}{3}$. B. $\min_{[0;3]} f(x) = \frac{-7}{5}; \max_{[0;3]} f(x) = 1$.
C. $\min_{[0;3]} f(x) = -1; \max_{[0;3]} f(x) = \frac{7}{5}$. D. $\min_{[0;3]} f(x) = \frac{1}{3}; \max_{[0;3]} f(x) = 1$.

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'		+		-	0	+
y			0		-1	

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số có GTLN bằng 0 và GTNN bằng -1.
B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
C. Hàm số có đúng một cực trị.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 58: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung ?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 4.

Câu 59: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 60: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Với giá trị m nào thì đồ thị đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt ?

- A. $m > 1$ hoặc $m < -1$. B. $-3 < m < 1$. C. $m > 1$. D. $m > -3$.

Câu 61: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

- A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. B. $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. C. $y = x + 1$. D. $y = 3x + 3$.

Câu 62: Cho hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng 2. B. Cực tiểu của hàm số bằng 1.
C. Cực tiểu của hàm số bằng -3. D. Cực tiểu của hàm số bằng -6.

Câu 63: Tìm các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1}$.

- A. Tiệm cận đứng: $y = -1$. B. Tiệm cận đứng: $x = -1$.
C. Tiệm cận đứng: $x = 1$. D. Tiệm cận đứng: $y = 1$.

Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

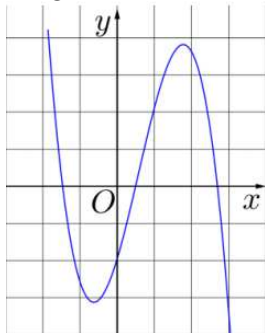
Hỏi đó là bảng biến thiên của hàm số nào ?

- A. $y = \frac{2x-3}{x-1}$. B. $y = \frac{2x+2}{x-1}$.
C. $y = \frac{2x-2}{1+x}$. D. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

Câu 65: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 - m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt, trong đó có hai nghiệm lớn hơn 2.

- A. $m > 0$. B. $-3 < m < 1$. C. $-3 < m < -1$. D. $-1 < m < 1$.

Câu 66: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



- A. $a < 0, b > 0, c > 0$ và $d < 0$.
B. $a < 0, b < 0, c > 0$ và $d < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c < 0$ và $d > 0$.
D. $a < 0, b > 0, c < 0$ và $d < 0$.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 68: Cho hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Đồ thị của hàm số nhận trục hoành làm trục đối xứng.

- B. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
 C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.
 D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 12.

Câu 69: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác đều.

- A. $m = \sqrt[3]{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 4$. D. $m = \sqrt[3]{3}$.

Câu 70: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm x_0 , biết $f''(x_0) = -1$ là.

- A. $y = -3x + \frac{5}{4}$ và $y = -3x - \frac{5}{4}$. B. $y = -3x + \frac{5}{4}$ và $y = 3x + \frac{5}{4}$.
 C. $y = -3x + 5$ và $y = 3x + 5$. D. $y = -x - \frac{5}{4}$ và $y = 3x + \frac{5}{4}$.

Câu 71: Tìm các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có $A(0; -3)$ là một điểm cực đại và $B(-1; -5)$ là một điểm cực tiểu.

- A. $a = -3, b = 2, c = 3$. B. $a = -2, b = 4, c = -3$.
 C. $a = 2, b = 4, c = -3$. D. $a = 2, b = -4, c = -3$.

Câu 72: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -1; m = 1$. B. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. C. $m = 1$. D. $m \neq 0$.

Câu 73: Tìm giá trị cực tiểu y_{CB} của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

- A. $y_{CB} = 1$. B. $y_{CB} = 3$. C. $y_{CB} = 2$. D. $y_{CB} = -2$.

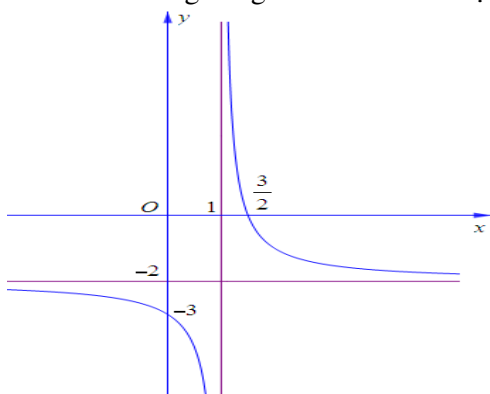
Câu 74: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ là.

- A. $\min_{[1;3]} f(x) = \frac{13}{3}; \max_{[1;3]} f(x) = 5$. B. $\min_{[1;3]} f(x) = 4; \max_{[1;3]} f(x) = \frac{13}{3}$.
 C. $\min_{[1;3]} f(x) = 4; \max_{[1;3]} f(x) = 5$. D. $\min_{[1;3]} f(x) = 1; \max_{[1;3]} f(x) = 3$.

Câu 75: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{-x^3}{3} + mx^2 + (4m-5)x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = -5$. B. $-5 \leq m \leq 1$. C. $-5 < m < 1$. D. $m = 1$.

Câu 76: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



- A. $y = \frac{2x+3}{x+1}$. B. $y = \frac{-2x+3}{x+1}$.
 C. $y = \frac{2x-3}{x-1}$. D. $y = \frac{-2x+3}{x-1}$.

Câu 77: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$ với trục hoành là.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 78: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 79: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A. $m = 5$. B. $m = 10$. C. $m = \frac{17}{4}$. D. $m = 3$.

Câu 80: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 1$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(6; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 5)$.
C. Đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.

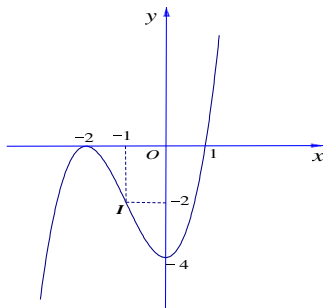
Câu 81: Biết $M(0; 2), N(2; -2)$ là các điểm cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A. $y(-2) = 22$. B. $y(-2) = -18$. C. $y(-2) = 2$. D. $y(-2) = 6$.

Câu 82: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ với trục hoành là.

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 83: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



- A. $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. B. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.
C. $y = x^3 + 3x^2 + 4$. D. $y = x^4 + 3x^2 - 4$.

Câu 84: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng qua đường thẳng $y = x$.

- A. $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 85: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + mx^2 + 1 - m$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

- A. $m = 4$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 2$.

Câu 86: Biết đường thẳng $y = 2x + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x + 3$ tại điểm duy nhất. Tìm tung độ y_0 của điểm đó.

- A. $y_0 = 2$. B. $y_0 = 3$. C. $y_0 = -1$. D. $y_0 = 0$.

Câu 87: Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x+1}$ là.

A. TCD: $x = -\frac{1}{2}$ và TCN: $y = \frac{1}{2}$.

B. TCD: $x = \frac{1}{2}$ và TCN: $y = \frac{1}{2}$.

C. TCD: $x = -\frac{1}{2}$ và TCN: $y = -\frac{1}{2}$.

D. TCD: $x = \frac{1}{2}$ và TCN: $y = -\frac{1}{2}$.

Câu 88: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

A. $m \leq 3$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \geq 3$.

D. $m < 1$.

Câu 89: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx - 10$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $m > 2$.

B. $m < -4$.

C. $m \geq -2$.

D. $m \leq -4$.

Câu 90: Cho hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. Vô số.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Câu 91: Số cực trị của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x + 7$ là.

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên mỗi khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	+	+	0	-	-
y		0	1	0	

Hỏi đây là bảng biến thiên của hàm số nào ?

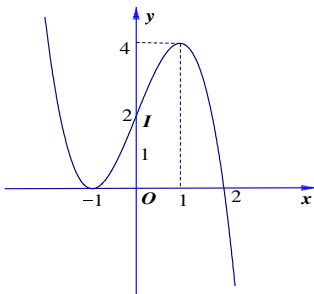
A. $y = \sqrt{2x-x^2}$.

B. $y = -x^2 + 2x + 3$.

C. $y = \frac{x+2}{x-2}$.

D. $y = \sqrt{x^2-2x}$.

Câu 93: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = -x^3 + x + 2$.

B. $y = -x^3 + 3x + 2$.

C. $y = x^3 + 3x + 2$.

D. $y = -x^3 + 3x - 2$.

Câu 94: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

A. $m > 3$.

B. $m = -1$.

C. $m = \frac{2}{3}$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

Câu 95: Cho hàm số $y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 22$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

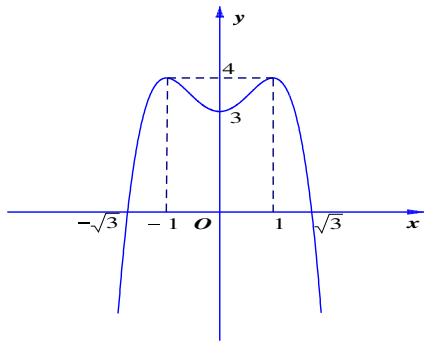
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 96: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Câu 97: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = |x^2 - x|$ trên đoạn $[-2; 2]$.

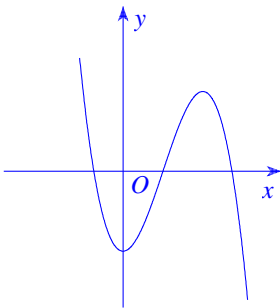
A. $M = 6, m = \frac{1}{4}$.

B. $M = 2, m = \frac{1}{4}$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 6, m = 0$.

Câu 98: Cho biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?



A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$			2	
	-1		$-\infty$		$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt.

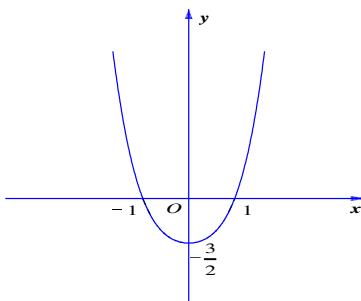
A. $m \in (-\infty; 2]$.

B. $m \in [-1; 2]$.

C. $m \in (-1; 2)$.

D. $m \in (-1; 2]$.

Câu 100: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



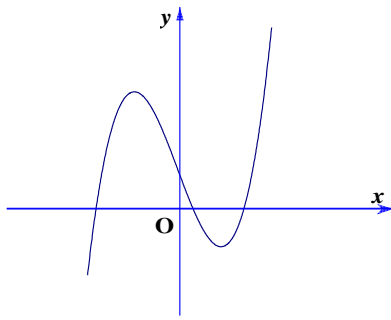
A. $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$.

B. $y = x^2 - \frac{3}{2}$.

C. $y = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$.

D. $y = \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{3}{2}$.

Câu 101: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



- A. $y = -3x^3 + 3x + 1$. B. $y = x^4 - 2x + 1$.
C. $y = x^3 + 3x - 1$. D. $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 102: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

- A. $54(m/s)$. B. $216(m/s)$. C. $400(m/s)$. D. $30(m/s)$.

Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng xác định và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

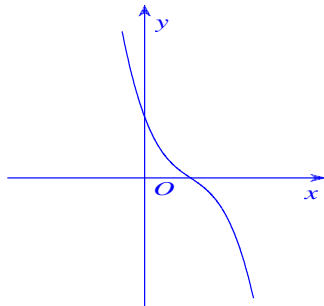
Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ và giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và đạt cực đại tại $x = -1$.
C. Hàm số hai có cực trị.
D. Giá trị cực đại bằng -2 và giá trị cực tiểu bằng 2 .

Câu 104: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2-x}{1-x}$ trên đoạn $[2;4]$.

- A. $\max_{[2;4]} y = \frac{1}{2}$. B. $\max_{[2;4]} y = 0$. C. $\max_{[2;4]} y = 2$. D. $\max_{[2;4]} y = \frac{2}{3}$.

Câu 105: Cho biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?



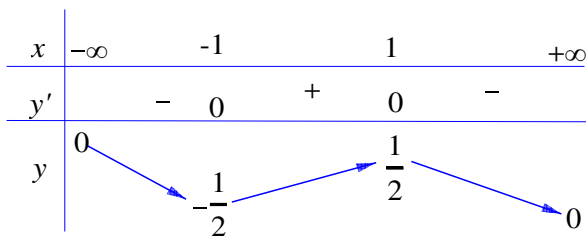
- A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

Câu 106: Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ là.

- A. $y_{CT} = 3$. B. $y_{CT} = 0$. C. $y_{CT} = -1$. D. $y_{CT} = -3$.

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên mỗi khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên

dưới đây.



Hỏi đây là bảng biến thiên của hàm số nào ?

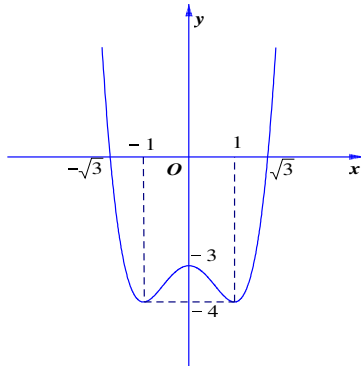
A. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

B. $y = -x^3 + 3x + 3$.

C. $y = 2x^3 - 6x$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 108: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

B. $y = x^2 - 2x + 3$.

C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

Câu 109: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có giá trị cực đại y_{CB} và giá trị cực tiểu y_{CT} . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

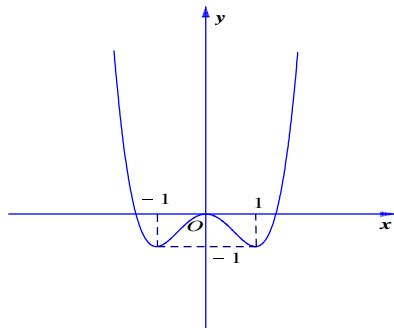
A. $y_{CB} + 3y_{CT} = 15$.

B. $y_{CB} + y_{CT} = 12$.

C. $y_{CT} - y_{CB} = 2\sqrt{3}$.

D. $2y_{CB} - y_{CT} = 5$.

Câu 110: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$ (m là tham số thực) và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi giá trị của m bằng bao nhiêu thì ta có đồ thị đó ?



A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2$.

Câu 111: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{3}{4}$.

B. $m = \frac{3}{2}$.

C. $m = -\frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{1}{4}$.

Câu 112: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 2}}{x^2 + 2x - 3}$.

A. $x = -3$.

B. $x = 1$.

C. $x = -3$ và $x = 1$.

D. $x = 0$.

Câu 113: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4\ln(3 - x)$ trên đoạn $[-2; 1]$.

A. $\text{Max}_{[-2; 1]} f(x) = 8\ln 2$ và $\text{Min}_{[-2; 1]} f(x) = 4\ln 2$.

- B. $\max_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} - 4 \ln 2$ và $\min_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} - 8 \ln 2$.
- C. $\max_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} - \ln 2$ và $\min_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} - 4 \ln 2$.
- D. $\max_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} + 8 \ln 2$ và $\min_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} + 4 \ln 2$.

Câu 114: Biết đường thẳng $y = -3x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ tại điểm duy nhất. Tìm tung độ y_0 của điểm đó.

- A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = 2$. C. $y_0 = -2$. D. $y_0 = -5$.

Câu 115: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

- A. $x = -3; x = -2$. B. $x = 3$. C. $x = 2; x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 116: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$?

- A. $m = \frac{3}{2}, m = 0$. B. $m = -\frac{1}{3}$. C. $m = \frac{2}{3}$. D. $m = 0, m = -3$.

Câu 117: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -(x-1)^3 + 3m^2(x-1) - 2$ có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

- A. $m = \pm \frac{1}{4}$. B. $m = \pm 2$. C. $m = \pm 5$. D. $m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 118: Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 119: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{x+1}{x+3}$. B. $y = -x^3 - 3x$. C. $y = x^3 + x$. D. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

Câu 120: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 121: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 122: Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+3}$ đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(-3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 123: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m , để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - mx^2 + (2m-1)x$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 2$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = -1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 124: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

- A. $m \leq -10$. B. $m \leq -9$. C. $m > 7$. D. $m > -1$.

Câu 125: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 126: Hàm số $y = \frac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 127: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 5.

Câu 128: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 129: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

- A. $m = 0$. B. $m \leq 0$. C. $m = -1$. D. $m > 0$.

Câu 130: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $3 < m \leq 4$. B. $m < -1$. C. $m > 4$. D. $1 \leq m < 3$.

Câu 131: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m+2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- A. $m < 0$. B. $m \leq 1$. C. $m \geq 0$. D. $m = 2$.

Câu 132: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên và có các khẳng định :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$

- ① Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$
② Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$ và $y_{CD} = 4$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = 3$
③ Đồ thị hàm số đối xứng qua trục tung

④ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ và đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$

Trong bốn khẳng định đó, có bao nhiêu khẳng định đúng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 133: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

- A. $m = \frac{51}{4}$. B. $m = \frac{49}{4}$. C. $m = 13$. D. $m = \frac{51}{2}$.

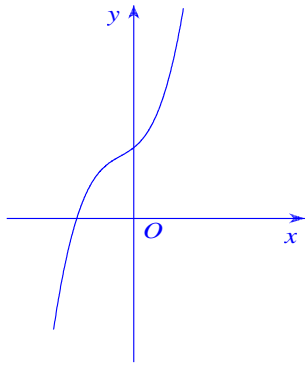
Câu 134: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $24(m/s)$. B. $18(m/s)$. C. $64(m/s)$. D. $108(m/s)$.

Câu 135: Trong các hàm số sau, hàm số nào đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$?

- A. $y = -x^2 + 2x - 3$. B. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$. C. $y = (x^2 - 1)^2$. D. $y = -x^3 + 2$.

Câu 136: Cho biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



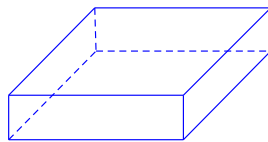
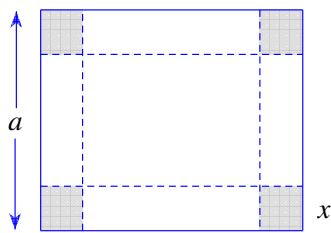
A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

Câu 137: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $a = 12cm$. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm) rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 3$. B. $x = 2$. C. $x = 4$. D. $x = 6$.

Câu 138: Hãy tìm tham số a và b để hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - ax^2 + b$ đạt cực trị bằng -2 tại điểm $x = 1$.

- A. $a = 1, b = 4$. B. $a = 1; b = -\frac{3}{2}$. C. $a = -\frac{3}{2}; b = 1$. D. $a = b = 1$.

Câu 139: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x - \sqrt{x^2 - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $m = \sqrt{3}$. B. $m < \sqrt{3}$. C. $m = 3$. D. $m = 2$.

Câu 140: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số

$y = \frac{2x}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 2 - 3\sqrt{3}) \cup (2 + 3\sqrt{3}; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 3 - 2\sqrt{2}) \cup (3 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 141: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m = 3\sqrt[3]{9}$.

B. $m = 7$.

C. $m = \frac{33}{5}$.

D. $m = 2\sqrt[3]{9}$.

Câu 142: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'	-	0	+	0	-		
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

B. $y_{CT} = 0$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$.

D. $y_{CB} = 5$.

Câu 143: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-3}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

B. Đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 3x^2 - 1$ không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ không có tiệm cận đứng.

Câu 144: Số cực trị của hàm số $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$ là.

A. 4.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 145: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x - 1}{2-x}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

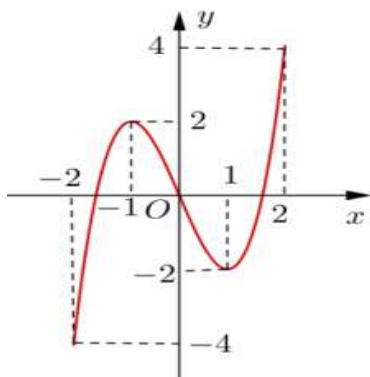
A. $m = -1$.

B. $m \in (-1; 1)$.

C. $m > 1$.

D. $m \leq -\frac{5}{2}$.

Câu 146: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là một đường cong như trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?



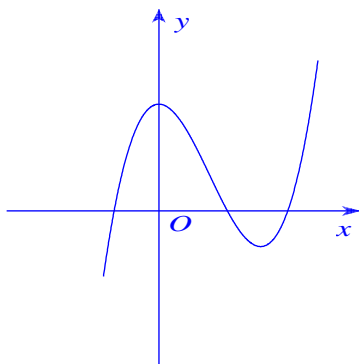
A. $x = 2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = -2$.

Câu 147: Cho biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?



A. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Câu 148: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{9-x^2}$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 149: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 150: Cho hàm $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		0		-4	$+\infty$

Hỏi đây là bảng biến thiên của hàm số nào ?

A. $y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$.

B. $y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x)$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$.

D. $y = \frac{1}{8}(x^4 - 2x^2)$.

MỘT SỐ CÂU TRONG ĐỀ THI THPT

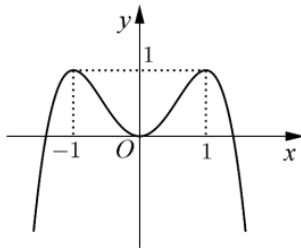
Câu 1: Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

- A. $x = 2$. B. $x = 3$ và $x = 2$. C. $x = -3$ và $x = -2$. D. $x = 3$.

Câu 2: Tìm những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2+mx+m^2-3)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- A. $-2 < m < 2$. B. $-2 < m < -1$. C. $-1 < m < 2$. D. $m > 2$ hoặc $m < -2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình bên.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $0 \leq m \leq 1$. B. $m < 1$. C. $m > 0$. D. $0 < m < 1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	4	5	$-\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$. B. $y_{CT} = 0$. C. $y_{CD} = 5$. D. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $m \in (-1; 2)$. B. $m \in [-1; 2]$. C. $m \in (-\infty; 2]$. D. $m \in (-1; 2]$.

Câu 6: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

- A. $27(m/s)$. B. $144(m/s)$. C. $243(m/s)$. D. $36(m/s)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 8: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

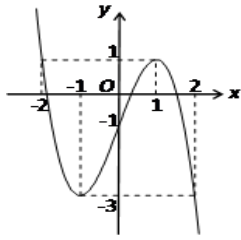
A. $m = 5$.

B. $m = 3$.

C. $m = 10$.

D. $m = \frac{17}{4}$.

Câu 9: Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = -x^3 - 3x - 1$.

B. $y = x^3 - 3x - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Câu 10: Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-1; 1)$.

B. $(-\infty; +\infty)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. 3.

B. 5.

C. Vô số.

D. 4.

Câu 12: Biết đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có hai điểm cực trị A, B . Phương trình đường thẳng AB là.

A. $y = x - 2$.

B. $y = 2x + 2$.

C. $y = 2x - 3$.

D. $y = 2x - 2$.

Câu 13: Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m = \pm 2$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = 1$ hoặc $m = 2$.

D. $m = -1$ hoặc $m = -2$.

Câu 14: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 2}}{x^2 + 2x - 3}$.

A. $x = -3$ và $x = 1$.

B. $x = 0$.

C. $x = -3$.

D. $x = 1$.

Câu 15: Tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$.

A. $y = -2x - 2$.

B. $y = 2x - 2$.

C. $y = 2x + 2$.

D. $y = -2x + 2$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

A. $m = 1; m = 2$.

B. $m = -1; m = -2$.

C. $m = 1; m = -2$.

D. $m = -1; m = 2$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$.

B. $m = \frac{49}{4}$.

C. $m = \frac{51}{2}$.

D. $m = 13$.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

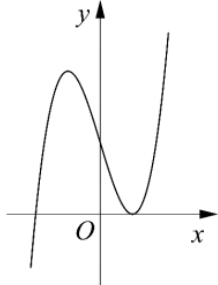
A. $m = -1; m = 1$.

B. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

C. $m \neq 0$.

D. $m = 1$.

Câu 20: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y = -x^3 + 3x + 2$.

B. $y = x^4 + x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 2$.

D. $y = x^4 - x^2 + 1$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Tìm những giá trị thực của tham số m để đồ thị đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

A. $m > 1$ hoặc $m < -1$.

B. $m > 1$.

C. $m > -3$.

D. $-3 < m < 1$.

Câu 22: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. 216(m/s).

B. 54(m/s).

C. 30(m/s).

D. 400(m/s).

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

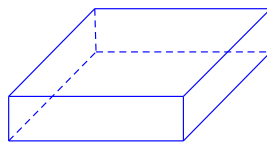
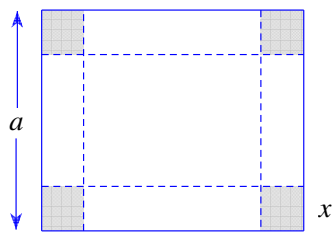
A. $1 \leq m < 3$.

B. $m > 4$.

C. $m < -1$.

D. $3 < m \leq 4$.

Câu 24: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $a = 12\text{cm}$. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm) rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = 4$.

B. $x = 3$.

C. $x = 2$.

D. $x = 6$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

B. $m \geq 2$.

C. $m \leq 0$.

D. $1 \leq m < 2$.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

- A. Không có giá trị nào của m thỏa mãn. B. $m > 0$.
C. $m = 0$. D. $m < 0$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây là sai ?

- A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
C. Hàm số có hai điểm cực tiểu.
D. Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 29: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 30: Biết rằng đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm duy nhất. Kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm $(x_0; y_0)$.

- A. $(x_0; y_0) = (2; 3)$. B. $(x_0; y_0) = (-2; 7)$. C. $(x_0; y_0) = (3; 2)$. D. $(x_0; y_0) = (-3; 8)$.

Câu 31: Biết đường thẳng $y = 2x + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x + 3$ tại điểm duy nhất. Tìm tung độ y_0 của điểm đó.

- A. $y_0 = -1$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = 3$.

Câu 32: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

- A. $M = 6$. B. $M = 1$. C. $M = 9$. D. $M = 8\sqrt{3}$.

Câu 33: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

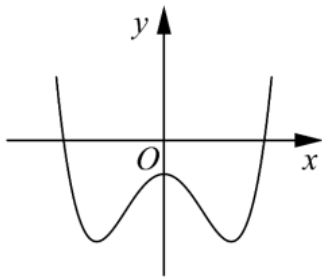
Câu 34: Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

- A. $24(m/s)$. B. $108(m/s)$. C. $18(m/s)$. D. $64(m/s)$.

Câu 35: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng ?

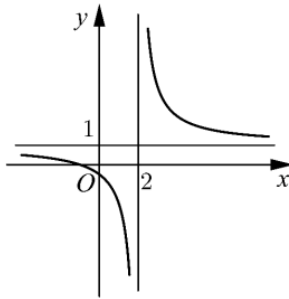
- A. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. B. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. C. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$. D. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Câu 36: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



- A. Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.
 B. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên số thực.
 C. Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực.
 D. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Câu 37: Đường cong của hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



- A. $y' > 0, \forall x \neq 2$.
 B. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
 C. $y' < 0, \forall x \neq 1$.
 D. $y' < 0, \forall x \neq 2$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

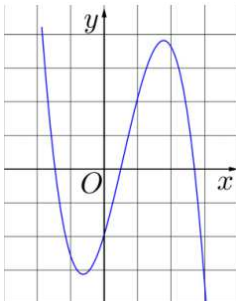
x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y				

Arrows indicate the function values at the boundaries: $-\infty$ at $x = -2$ and $+\infty$ at $x = 0$.

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận ?

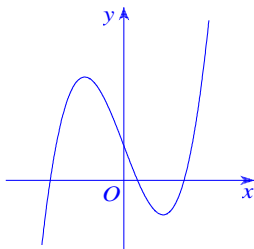
- A. 3.
 B. 4.
 C. 1.
 D. 2.

Câu 39: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



- A. $a < 0, b < 0, c > 0$ và $d < 0$.
 B. $a < 0, b > 0, c > 0$ và $d < 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c < 0$ và $d > 0$.
 D. $a < 0, b > 0, c < 0$ và $d < 0$.

Câu 40: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?



- A. $y = x^4 - x^2 + 1$.
 B. $y = x^3 - 3x + 1$.
 C. $y = -x^3 + 3x + 1$.
 D. $y = -x^2 + x - 1$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $m \leq 0$.
 B. $2 < m \leq 4$.
 C. $m > 4$.
 D. $0 < m \leq 2$.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'		+		-	0	+
y			0		-1	

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- B. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=-1$.
- D. Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 43: Cho hàm số $y = 2x^4 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

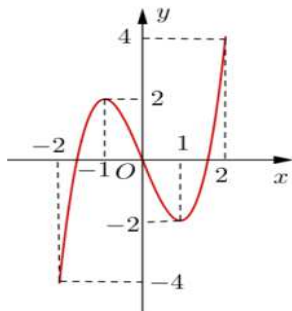
Câu 44: Đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ y_0 bằng bao nhiêu?

- A. $y_0 = -2$.
- B. $y_0 = 3$.
- C. $y_0 = -3$.
- D. $y_0 = 0$.

Câu 45: Cho hàm số $y = (x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

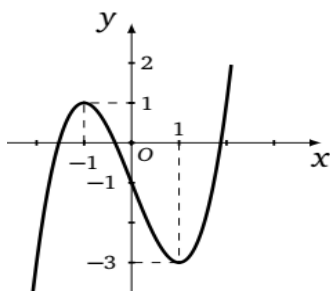
- A. (C) không cắt trục hoành.
- B. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.
- C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.
- D. (C) cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là một đường cong như trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?



- A. $x = 2$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = -2$.
- D. $x = 1$.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là.



- A. $x = 1$.
- B. $x = -1$.
- C. $M(-1; 1)$.
- D. $M(1; -3)$.

Câu 48: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là y_1 và y_2 . Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. $3y_1 - y_2 = -1$.
- B. $3y_1 - y_2 = 5$.
- C. $3y_1 - y_2 = 1$.
- D. $3y_1 - y_2 = -5$.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		1		4	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-2; 3)$.
C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 50: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$.

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			-1		-2		-1	
	$-\infty$							$-\infty$

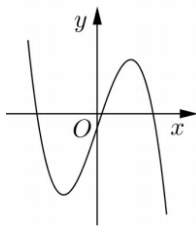
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$.
C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 52: Kí hiệu m giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$. Tìm m .

- A. $m = -4$. B. $m = 0$. C. $m = 4$. D. $m = -16$.

Câu 53: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 3.
C. 0. D. 2.

Câu 54: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

- A. 0. B. Vô số. C. 3. D. 6.

Câu 55: Cho hàm số $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 4(x_1 - x_2)$?

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

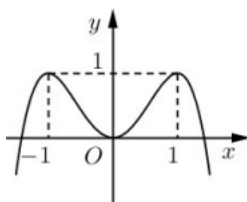
Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. Vô số.

Câu 57: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$.

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 58: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



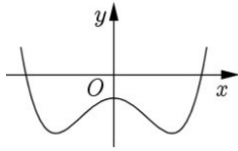
Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là bao nhiêu?

- A. 3. B. 0.
C. 4. D. 2.

Câu 59: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng bao nhiêu ?

- A. $AB = 2\sqrt{2}$. B. $AB = 4$. C. $AB = 2\sqrt{3}$. D. $AB = 2$.

Câu 60: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3. B. 0.
C. 1. D. 2.

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y							
	$-\infty$		3		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$.
C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 62: Kí hiệu m giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$. Tìm m .

- A. $m = -259$. B. $m = 68$. C. $m = -4$. D. $m = 0$.

Câu 63: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng bao nhiêu ?

- A. $AB = \sqrt{6}$. B. $AB = 2\sqrt{3}$. C. $AB = 2$. D. $AB = 2\sqrt{2}$.

Câu 64: Ông A dự định sử dụng hết $5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) ?

- A. $1,51m^2$. B. $1,01m^2$. C. $0,96m^2$. D. $1,33m^2$.

Câu 65: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng bao nhiêu ?

- A. $AB = \sqrt{6}$. B. $AB = \sqrt{3}$. C. $AB = 2\sqrt{2}$. D. $AB = 2\sqrt{3}$.

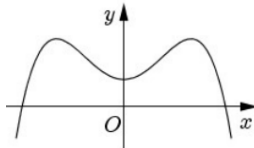
Câu 66: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 3. B. Vô số. C. 5. D. 4.

Câu 67: Kí hiệu M giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tìm M .

- A. $M = \frac{51}{4}$. B. $M = 25$. C. $M = 13$. D. $M = 85$.

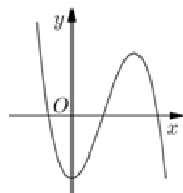
Câu 68: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị ?

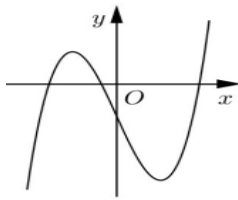
- A. 3. B. 0.
C. 1. D. 2.

Câu 69: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?



- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
C. $y = x^4 - x^2 - 2$. D. $y = -x^4 + x^2 - 2$.

Câu 70: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?



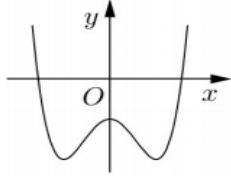
A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

B. $y = -x^4 + x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - 3x - 1$.

D. $y = -x^3 - 3x - 1$.

Câu 71: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?



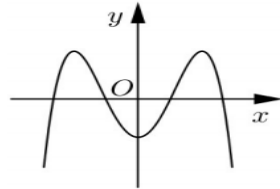
A. $y = x^3 - x^2 - 1$.

B. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Câu 72: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?



A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

C. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Câu 73: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-2	3	-2	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

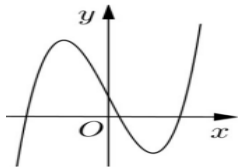
A. $(1; +\infty)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Câu 74: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số đã cho.



A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 75: Ông A dự định sử dụng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) ?

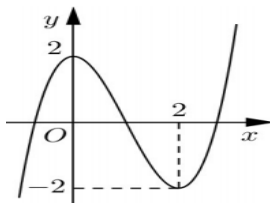
A. $1,33m^3$.

B. $1,61m^3$.

C. $2,26m^3$.

D. $1,50m^3$.

Câu 76: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là bao nhiêu?

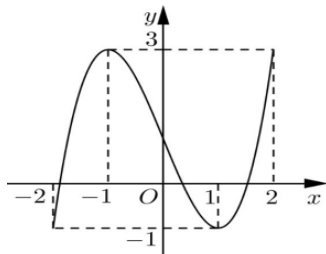
A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



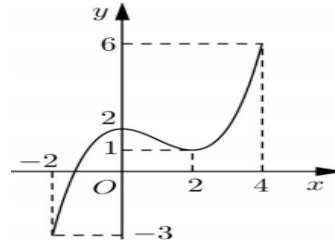
Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là bao nhiêu?

- A. 1. B. 3.
C. 4. D. 2.

Câu 78: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là bao nhiêu?

- A. 3. B. 1.
C. 0. D. 2.



Câu 79: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$.

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 80: Ông A dự định sử dụng hết $6,7 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $1,57 m^2$. B. $1,11 m^2$. C. $1,23 m^2$. D. $2,48 m^2$.

Câu 81: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 1. B. 3. C. Vô số. D. 2.

Câu 82: Ông A dự định sử dụng hết $5,5 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $1,40 m^2$. B. $1,01 m^2$. C. $1,17 m^2$. D. $1,51 m^2$.

Câu 83: Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 84: Kí hiệu M giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$. Tìm M .

- A. $M = 201$. B. $M = 2$. C. $M = 54$. D. $M = 9$.

Câu 85: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 86: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. $AB = 2\sqrt{2}$. B. $AB = 2\sqrt{3}$. C. $AB = 2$. D. $AB = 3$.

Câu 87: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến

của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 88: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

GV. Lư Sĩ Pháp

ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM

§1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
A											
B											
C											
D											

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67
A							
B							
C							
D							

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
A																			
B																			
C																			
D																			

§4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
A														
B														
C														
D														

§5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
A													
B													
C													
D													

§6. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

ÔN TẬP CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CÁC BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9	11 0	11 1	11 2	11 3	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8	11 9	12 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	12 1	12 2	12 3	12 4	12 5	12 6	12 7	12 8	12 9	13 0	13 1	13 2	13 3	13 4	13 5	13 6	13 7	13 8	13 9	14 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
A										
B										
C										
D										

MỘT SỐ CÂU HỎI TRONG KÌ THI THPT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48
A								
B								
C								
D								

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
A																				
B																				
C																				
D																				

	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
A																				
B																				
C																				
D																				