

GIẢI BPT MŨ BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ - ĐÁNH GIÁ
(KHÔNG CHỨA THAM SỐ)

PHƯƠNG PHÁP

 **Nhắc lại kiến thức cũ :**

➤ **Đạo hàm :** $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$

➤ **Nếu hàm số** f đồng biến trên khoảng D thì $\forall x, y \in D : f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y$

➤ **Nếu hàm số** f nghịch biến trên khoảng D thì $\forall x, y \in D : f(x) > f(y) \Leftrightarrow x < y$

 **Bước 1 : Đặt điều kiện của bpt (nếu có)**

 **Bước 2 : Các phương pháp giải**

➤ **Phương pháp 1 :** Dùng tính đơn điệu của hàm số

➤ **Phương pháp 2 :** Dùng phương pháp đồ thị hàm số

➤ **Phương pháp 3 :** Đánh giá

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $3^{x^2-25} + (x^2-25) \cdot 4^{x+2021} \leq 1$

A. 10.

B. 11.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $3^{x^2-25} + (x^2-25) \cdot 4^{x+2021} \leq 1$ (1)

Ta có: $4^{x+2021} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: Xét $x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5$ ta có $VT(1) = 1 \leq 1$ (Đúng) nên bpt (1) có nghiệm $x = \pm 5$

TH2: Xét $x^2 - 25 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ x > 5 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 3^{x^2-25} > 3^0 = 1 \\ (x^2-25) \cdot 4^{x+2021} > 0 \end{cases} \Rightarrow VT(1) > 1$ nên bpt (1) vô nghiệm.

TH3: Xét $x^2 - 25 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

Ta có $\begin{cases} 3^{x^2-25} < 3^0 = 1 \\ (x^2-25) \cdot 4^{x+2021} < 0 \end{cases} \Rightarrow VT(1) < 1$ nên bpt (1) có nghiệm $-5 < x < 5$

Vậy nghiệm của bpt đã cho là $x \in [-5; 5]$.

Vì x nguyên nên $x \in \{\pm 5; \pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$ có 11 giá trị

Câu 2. Giải bất phương trình $\frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1}$ ta được tập nghiệm $S = (a; b)$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = 10b - 3a$$

A. $P = 5$.

B. $P = 4$.

C. $P = 2$.

D. $P = 0$.

Lời giải

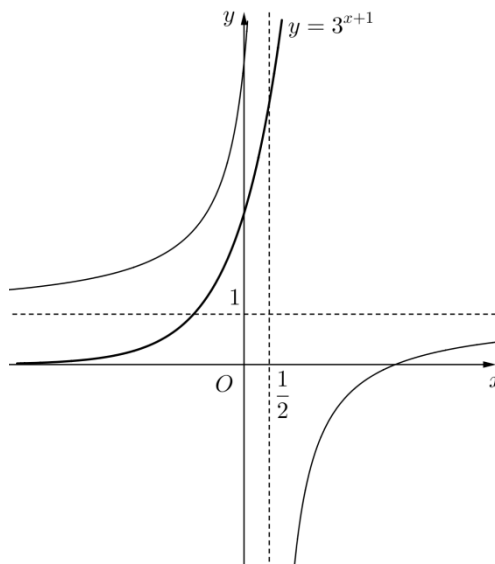
Chọn A

Điều kiện $x \neq 0; x \neq \frac{1}{2} (*)$

Với điều kiện (*), ta có: $\frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 6-3^{x+1} > \frac{10x}{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3^{x+1} < \frac{2x-6}{2x-1} \end{cases} (1)$

$\begin{cases} x < 0 \\ 6-3^{x+1} < \frac{10x}{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3^{x+1} > \frac{2x-6}{2x-1} \end{cases} (2)$

Gọi (C) và (H) theo thứ tự là đồ thị của hàm số $y = g(x) = 3^{x+1}$ và $y = f(x) = \frac{2x-6}{2x-1}$



Dựa vào đồ thị, ta có: hệ bpt (1) có nghiệm $0 < x < \frac{1}{2}$; hệ bpt (2) vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của bpt đã cho là $S = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ suy ra $a = 0; b = \frac{1}{2}$ nên $P = 10b - 3a = 5$.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \geq 0$ là

A. $[0; 1]$.

B. $(0; 1]$.

C. $(-1; 0]$.

D. $(0; 2]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $2^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Xét hàm số $f(x) = 2^{1-x} - 2x + 1 = -2x + 1 + \frac{2}{2^x}$ có $f'(x) = -2 - \frac{2 \cdot \ln 2}{2^x} < 0, \forall x$.

Do đó hàm số này nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $2^{1-x} - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow 1 - x > 0$ tức là $f(x)$ cùng dấu với $1 - x$.

Xét hàm số $g(x) = 2^x - 1$ có $g'(x) = 2^x \cdot \ln 2 > 0, \forall x$. Do đó hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ tức là $g(x)$ cùng dấu với x .

Suy ra bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

Vậy tập nghiệm của BPT là $S = (0; 1]$.

Câu 4. Bất phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq 4.3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên trên $[-2021\pi; 2022\pi]$.

A. 4043.

B. 2021.

C. 4044.

D. 2022.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin^2 x$ ($0 \leq t \leq 1$) thay vào bất phương trình đã cho ta có

$$2^t + 3^{1-t} \geq 4.3^t \Leftrightarrow 2^t + \frac{3}{3^t} \geq 4.3^t \Leftrightarrow 6^t + 3 \geq 4.9^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t \geq 4 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t$, $0 \leq t \leq 1$. Có $f'(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t \cdot \ln \frac{2}{3} + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t \ln \frac{1}{9} < 0$, $\forall t \in [0; 1]$.

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[0; 1]$.

Do đó luôn có $f(t) \leq f(0)$ hay $\left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t \leq 4 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t = 4 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Do $-2021\pi \leq x \leq 2022\pi \Rightarrow -2021\pi \leq k\pi \leq 2022\pi \Leftrightarrow -2021 \leq k \leq 2022$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Suy ra $k \in \{-2021; -2020; \dots; 2021; 2022\}$, có tất cả 4044 giá trị k

Vậy bất phương trình có tất cả 4044 nghiệm nguyên.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}(2^x - 2^{-x})$. Gọi S là tổng các giá trị x nguyên dương thỏa mãn bất phương trình $f(x+22) + f\left(\frac{228}{x-9}\right) \leq 0$. Tính S ?

A. $S = 36$.

B. $S = 45$.

C. 30.

D. 8.

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}+x} - 2^{\sqrt{x^2+1}-x}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(-x) = 2^{\sqrt{x^2+1}-x} - 2^{\sqrt{x^2+1}+x} = -f(x)$ nên hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Mặt khác $f'(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right) - 2^{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

$$f'(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}+x} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \ln 2 + 2^{\sqrt{x^2+1}-x} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \ln 2 > 0$$

$$(\text{Vì } \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \pm x > 0)$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó suy ra $f(x+22) + f\left(\frac{228}{x-9}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f(x+22) \leq -f\left(\frac{228}{x-9}\right) \Leftrightarrow f(x+22) \leq f\left(\frac{228}{9-x}\right)$

$$\Leftrightarrow x+22 \leq -\frac{228}{x-9} \Leftrightarrow \frac{x^2+13x+30}{x-9} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -10 \\ -3 \leq x < 9 \end{cases}$$

Vậy các số nguyên dương thỏa mãn bất phương trình là

$$x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \Rightarrow S = 1 + 2 + \dots + 8 = 36.$$

Câu 6. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình

$$(2x+y)^2 \cdot 2^{5x^2+2xy+2y^2-3} + (x-y)^2 \leq 3?$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ $(2x+y)^2 \cdot 2^{5x^2+2xy+2y^2-3} + (x-y)^2 \leq 3 \Leftrightarrow (2x+y)^2 \cdot 2^{(2x+y)^2+(x-y)^2-3} + (x-y)^2 - 3 \leq 0 (*)$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = (2x+y)^2 \\ b = (x-y)^2 - 3 \geq -3 \end{cases}$$

Khi đó bất phương trình (*) có dạng: $a \cdot 2^{a+b} + b \leq 0 \Leftrightarrow a \cdot 2^a + \frac{b}{2^b} \leq 0 \Leftrightarrow a \cdot 2^a \leq (-b) \cdot 2^{-b}$.

Vì $a \geq 0 \Rightarrow -b \geq 0$ nên ta xét các trường hợp sau đây:

TH1: Nếu $a > -b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a > -b \geq 0 \\ 2^a > 2^{-b} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot 2^a > (-b) \cdot 2^{-b}$ không thỏa mãn bất phương trình.

TH2: Nếu $0 \leq a \leq -b \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq -b \\ 0 < 2^a \leq 2^{-b} \end{cases} \Rightarrow a \cdot 2^a \leq (-b) \cdot 2^{-b}$ thỏa mãn bất phương trình.

Vậy bất phương trình $a \cdot 2^a \leq (-b) \cdot 2^{-b} \Leftrightarrow a \leq -b \Leftrightarrow a+b \leq 0$

Suy ra $(2x+y)^2 + (x-y)^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (2x+y)^2 + (x-y)^2 \leq 3$.

Với giả thiết $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $(2x+y)^2$ và $(x-y)^2$ chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

$2x+y$	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1
$x-y$	0	1	-1	1	1	-1	-1	0	0
x	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
	Nhận	Loại	Loại	Loại	Nhận	Nhận	Loại	Loại	Loại

Vậy có tất cả 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên trong đoạn $[0; 2021]$ thỏa mãn bất phương

trình: $x^2 - 3x - 2 \leq (3x-4) \cdot 2021^{x^2-6x+2} + (x^2-6x+2) \cdot 2021^{3x-4}$

A. 2016.

B. 2017.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a = x^2 - 6x + 2$, $b = 3x - 4$.

Bất phương trình có dạng:

$$a + b \leq b \cdot 2021^a + a \cdot 2021^b \Leftrightarrow a \cdot (1 - 2021^b) \leq b \cdot (2021^a - 1) \quad (1)$$

TH1: $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì nghiệm đúng bất phương trình đã cho.

$$\text{Bất phương trình đã cho tương với } \begin{cases} x^2 - 6x + 2 = 0 \\ 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{7} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

TH2: Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2021^a - 1 > 0 \\ 1 - 2021^b < 0 \end{cases} \Rightarrow VT(1) < 0; VP(1) > 0$.

Khi đó bất phương trình luôn đúng.

$$\text{Vậy bất phương trình tương đương với } \begin{cases} x^2 - 6x + 2 > 0 \\ 3x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 + \sqrt{7} \\ x < 3 - \sqrt{7} \\ x > \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > 3 + \sqrt{7}.$$

$$\text{TH3: Nếu } \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2021^a - 1 < 0 \\ 1 - 2021^b > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{VT}(1) < 0; \text{VP}(1) > 0$$

Khi đó bất phương trình luôn đúng.

Vậy bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 2 < 0 \\ 3x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{7} < x < 3 + \sqrt{7} \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{7} < x < \frac{4}{3}.$$

$$\text{TH4: Nếu } \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2021^a - 1 > 0 \\ 1 - 2021^b > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{VT}(1) > 0; \text{VP}(1) < 0.$$

Trường hợp này bất phương trình vô nghiệm.

$$\text{TH5: Nếu } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2021^a - 1 < 0 \\ 1 - 2021^b < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{VT}(1) > 0; \text{VP}(1) < 0$$

Trường hợp này bất phương trình vô nghiệm.

$$\text{Từ các trường hợp trên, bất phương trình đã cho có tập nghiệm là } S = \left[3 - \sqrt{7}; \frac{4}{3} \right] \cup \left[3 + \sqrt{7}; +\infty \right)$$

Các số nguyên thỏa mãn bất phương trình là $x \in \{1; 6; 7; \dots; 2020; 2021\}$.

Vậy bất phương trình có 2017 nghiệm nguyên trong đoạn $[0; 2021]$.

**GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶC TRƯNG
(KHÔNG CHỨA THAM SỐ)**

PHƯƠNG PHÁP

- Bước 1 : Biến đổi bất phương trình về dạng**
 $f(a) < f(b) \quad (f(a) > f(b); f(a) \leq f(b); f(a) \geq f(b)) \quad (1).$
- Bước 2 : Xét hàm số $y = f(x)$, chứng minh hàm số luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến**
- Bước 3 : Do hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến suy ra**
 $f(a) < f(b) \Leftrightarrow a < b$ hoặc $f(a) < f(b) \Leftrightarrow a >$

Câu 1. Số nghiệm nguyên của bất phương trình sau là:

$$2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0 \text{ là}$$

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + 2x^2 - 15x + 100 - (x^2 + 10x - 50) < 0.$$

Đặt $a = 2x^2 - 15x + 100$, $b = x^2 + 10x - 50$.

Khi đó bất phương trình trở thành: $2^a - 2^b + a - b < 0 \Leftrightarrow -2^a - a > -2^b - b \quad (1).$

Xét hàm số $f(t) = -2^t - t$ có $f'(t) = -2^t \ln 2 - 1 < 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow f(a) > f(b) \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0 \Leftrightarrow 10 < x < 15.$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{11; 12; 13; 14\}$.

Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Câu 2. Cho bất phương trình $2^{\sqrt{x^2+x}} + x \leq \frac{8}{2^x} - \sqrt{x(x+1)} + 3$. Số nghiệm

nguyên dương của bất phương trình đã cho là

A. 0.

B. 3

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

Ta có: $2^{\sqrt{x^2+x}} + x \leq \frac{8}{2^x} - \sqrt{x(x+1)} + 3 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2+x}} + x \leq 2^{3-x} - \sqrt{x^2+x} + 3$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2+x}} + \sqrt{x^2+x} \leq 2^{3-x} + 3 - x \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$, có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x^2+x}) \leq f(3-x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x} \leq 3-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x \leq -1 \\ x^2 + x \leq (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x \leq -1 \\ x \leq \frac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 0 \leq x \leq \frac{9}{7} \end{cases}$$

Do x nguyên dương, do đó $x \in \{1\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 1 nghiệm nguyên dương.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x} - 5^{3x} + 3(3^x - 5^x) > 0$ là

- A.** $(-\infty; 0)$. **B.** $(-\infty; 0]$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $[0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình đã cho tương đương với $3^{3x} + 3.3^x > 5^{3x} + 3.5^x \Leftrightarrow f(3^x) > f(5^x)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có: $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó từ $f(3^x) > f(5^x)$ ta có $3^x > 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

(*) Thử các giá trị là chọn được đáp án.

Ta có: $VT = 3^{3x} - 5^{3x} + 3(3^x - 5^x)$

Thử với $x = 0$ được $VT = 0 \Rightarrow x = 0$ không thỏa mãn bất phương trình. Do đó loại B và D.

Thử với $x = 1$ được $VT = -104 \Rightarrow x = 1$ không thỏa mãn bất phương trình. Do đó loại C.

Vậy còn lại đáp án đúng là A.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên $x \in (-2021; 2022)$ thỏa mãn bất phương trình

$$2^{6x} - 2^{4x} - 2^{3x} + 2^{2x} - 2^{x+2} - 3 < 0$$

- A.** 2021. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2^{3x} + 3.2^{2x} + 3.2^x + 1 - (2^{2x} + 2.2^x + 1) + 3.(2^x + 1) > (2^{2x})^3 - (2^{2x})^2 + 3.2^{2x}$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)^3 - (2^x + 1)^2 + 3.(2^x + 1) > (2^{2x})^3 - (2^{2x})^2 + 3.2^{2x} \Leftrightarrow f(2^x + 1) > f(2^{2x}).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 + 3t$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có: $f'(t) = 3t^2 - 2t + 3 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó từ } f(2^x + 1) > f(2^{2x}) \Leftrightarrow 2^x + 1 > 2^{2x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 2^x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < \log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \approx 0,69.$$

Mà $x \in (-2021; 2022)$ và $x \in \mathbb{Z}$ nên ta có $x \in \{-2020; -2019; \dots; 0\}$.

Vậy có 2021 số nguyên x thỏa mãn ycbt.

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{4}{5^{2x}} + 5^{2x} - \frac{2}{5^x} - 5^x - 2 > 0$ là

- A. $0 < x < \log_5 2$. B. $0 \leq x \leq \log_5 2$. C. $\begin{cases} x > \log_5 2 \\ x < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x \geq \log_5 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{2}{5^x} + 5^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5^x} + 5^x\right) > 3^2 - 3 \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{5^x} + 5^x\right) > f(3).$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t$ trên khoảng $(2\sqrt{2}; +\infty)$, ta có: $f'(t) = 2t - 1 > 0, \forall t > 2\sqrt{2}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\text{Do đó từ } f\left(\frac{2}{5^x} + 5^x\right) > f(3) \Leftrightarrow \frac{2}{5^x} + 5^x > 3 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x < 1 \\ 5^x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \log_5 2 \end{cases}.$$

(*) **Cách 2:** Đề xuất bởi GVPB2

Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{2}{5^x} + 5^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5^x} + 5^x\right) - 6 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5^x} + 5^x > 3 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x < 1 \\ 5^x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \log_5 2 \end{cases}.$$

Câu 6. Phương trình $2021^{\sqrt{2x^2-8}+2} - 2021^{x+1} = x - \sqrt{2x^2-8} - 1$ có nghiệm duy nhất $x = a + \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $b - a$.

- A. 9. B. -11. C. 11. D. -9.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } 2x^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

$$2021^{\sqrt{2x^2-8}+2} - 2021^{x+1} = x - \sqrt{2x^2-8} - 1 \Leftrightarrow 2021^{\sqrt{2x^2-8}+2} + \sqrt{2x^2-8} + 2 = 2021^{x+1} + x + 1 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2021^t + t$. Có $f'(t) = 2021^t \ln 2021 + 1 > 0, \forall t \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x^2-8}+2\right) = f(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-8}+2 = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2-8 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{10}.$$

Do đó $a = -1, b = 10 \Rightarrow b - a = 11$.

Câu 7. Tìm số nghiệm của phương trình $\pi^{\sin^2 x} - \pi^{\cos^2 x} = \cos 2x$ trong khoảng $(0; 10\pi)$.

- A. 19. B. 15. C. 20. D. 17.

Lời giải

Chọn C

$$\pi^{\sin^2 x} - \pi^{\cos^2 x} = \cos 2x \Leftrightarrow \pi^{\sin^2 x} - \pi^{\cos^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow \pi^{\sin^2 x} + \sin^2 x = \pi^{\cos^2 x} + \cos^2 x.$$

Xét hàm số $f(t) = \pi^t + t$ có $f'(t) = \pi^t \ln \pi + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(\sin^2 x) = f(\cos^2 x) \Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{Kết hợp với } x \in (0; 10\pi) \text{ suy ra } 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{39}{2}.$$

$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; \dots; 19\}$. Vậy phương trình có 20 nghiệm.

Câu 8. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2021$ và

$$2021^{x^2+1} + x^2 = 2021^y + y - 1.$$

A. 45.

B. 89.

C. 11.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

$$2021^{x^2+1} + x^2 = 2021^y + y - 1 \Leftrightarrow 2021^{x^2+1} + x^2 + 1 = 2021^y + y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2021^t + t$. Có $f'(t) = 2021^t \ln 2021 + 1 > 0, \forall t \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(x^2 + 1) = f(y) \Leftrightarrow y = x^2 + 1$$

Ta có với x nguyên thì y nguyên. Mà $0 \leq y \leq 2021 \Rightarrow 0 \leq x^2 + 1 \leq 2021 \Rightarrow -44 \leq x \leq 44$.

Vậy có 89 bộ $(x; y)$ nguyên thỏa mãn.

Câu 9. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+x} + 2x \leq 2^{3-x} - x^2 + 3$.

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2^{x^2+x} + 2x \leq 2^{3-x} - x^2 + 3 \Leftrightarrow 2^{x^2+x} + x^2 + x \leq 2^{3-x} + 3 - x \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t, t \in \mathbb{R}$, có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow f(x^2 + x) \leq f(3 - x) \Leftrightarrow x^2 + x \leq 3 - x \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của x thỏa mãn ycbt.

Câu 10. Tổng tất cả các nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 6 của bất phương trình:

$$27^x - 8^x - 3.4^x + 2.3^x - 5.2^x - 3 \geq 0 \text{ là}$$

A. 15.

B. 12.

C. 13.

D. 19.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 27^x - 8^x - 3.4^x + 2.3^x - 5.2^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 27^x + 2.3^x \geq (8^x + 3.4^x + 3.2^x + 1) + 2(2^x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^3 + 2.3^x \geq (2^x + 1)^3 + 2(2^x + 1) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ trên $\mathbb{R}$ ta có

$$f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Vậy hàm số } f(t) = t^3 + 2t \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Mà } (1) \Leftrightarrow f(3^x) \geq f(2^x + 1) \Leftrightarrow 3^x \geq 2^x + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 1 \quad (2).$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ có } g'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà (2) $\Leftrightarrow g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow x \geq 1$

Vậy tập hợp các nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 6 của bất phương trình là $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Tổng tất cả các nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 6 của bất phương trình: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Câu 11. Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình sau:

$$3x\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\frac{1}{x}} - 3x\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} + 1 \geq 3x^2 - 6x.$$

A. 2022.

B. 1.

C. 2.

D. 2021.

Lời giải

Chọn C

Theo đề ra ta có $x \in \mathbb{Z}$ và $x > 0$.

Bất phương trình $3x\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\frac{1}{x}} - 3x\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} + 1 \geq 3x^2 - 6x$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \geq \frac{3x^2 - 6x - 1}{3x} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \geq x - 2 - \frac{1}{3x} \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{3x}} + \frac{1}{3x} \geq 5^{x-2} + x - 2 \quad (*).$$

Xét hàm số $g(t) = 5^t + t$ có $g'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0$, $t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{3x}\right) \geq g(x-2) \Leftrightarrow \frac{1}{3x} \geq x-2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

Theo đề ra ta có $x \in \mathbb{Z}$ và $x > 0$ nên $x \in \{1; 2\}$ tức 2 nghiệm nguyên dương từ bpt trên

Câu 12. Tìm số nghiệm nguyên thuộc $[-2021; 2022]$ của bất phương trình

$$2022^{\sqrt[3]{2x-1}} - 2022^{2-x} + \sqrt[3]{2x-1} + x^3 - 6x^2 + 15x - 11 \leq 0$$

A. 2024.

B. 2023.

C. 2021.

D. 2022.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có bất phương trình tương đương với:

$$2022^{\sqrt[3]{2x-1}} - 2022^{2-x} + \sqrt[3]{2x-1} + x^3 - 6x^2 + 15x - 11 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2022^{\sqrt[3]{2x-1}} + 2x - 1 + \sqrt[3]{2x-1} \leq 2022^{2-x} - x^3 + 6x^2 - 13x + 10$$

$$\Leftrightarrow 2022^{\sqrt[3]{2x-1}} + \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 + \sqrt[3]{2x-1} \leq 2022^{2-x} + (2-x)^3 + 2 - x \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2022^t + t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 2022^t \ln 2022 + 3t^2 + 1 > 0, \forall t \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng

biến trên $\mathbb{R}$. Từ (1) ta có $f\left(\sqrt[3]{2x-1}\right) \leq f(2-x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1} \leq 2-x \Leftrightarrow 2x-1 \leq 8-12x+6x^2-x^3$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 14x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 9) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Vì x nguyên và $x \in [-2021; 2022] \Rightarrow -2021 \leq x \leq 1$ nên có 2023 giá trị nguyên của x .

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để mọi

nghiệm của bất phương trình $5^{2x+\sqrt{-x^2+2x+3}} - 5^{4+\sqrt{-x^2+2x+3}} + (x-2)^3 \leq x(x-3)^2 - 2$ (1) đều là

nghiệm của bất phương trình $x^2 - (m-2)x - 2m + 4 \leq 0$ (2).

A. 2019.

B. 2020.

C. 2021.

D. 2018.

Lời giải

Chọn A

$$5^{2x+\sqrt{-x^2+2x+3}} - 5^{4+\sqrt{-x^2+2x+3}} + (x-2)^3 \leq x(x-3)^2 - 2 \quad (1).$$

Điều kiện $-1 \leq x \leq 3$.

$$(1) \Leftrightarrow 5^{2x+\sqrt{-x^2+2x+3}} - 5^{4+\sqrt{-x^2+2x+3}} + 3x - 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 5^{2x+\sqrt{-x^2+2x+3}} + \frac{3(2x+\sqrt{-x^2+2x+3})}{2} \leq 5^{4+\sqrt{-x^2+2x+3}} + \frac{3(4+\sqrt{-x^2+2x+3})}{2} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + \frac{3}{2}t$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 5^t \ln 5 + \frac{3}{2} > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(2x+\sqrt{-x^2+2x+3}) \leq f(4+\sqrt{-x^2+2x+3})$$

$$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{-x^2+2x+3} \leq 4+\sqrt{-x^2+2x+3} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Theo yêu cầu bài toán thì $x^2 - (m-2)x - 2m + 4 \leq 0, \forall x \in [-1; 2]$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}, \forall x \in [-1; 2] \Rightarrow m \geq \max_{x \in [-1; 2]} \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \right).$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}. \text{ Ta có } g'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = -4 \notin [-1; 2] \end{cases}$$

$$g(-1) = 3; g(0) = 2; g(2) = 3, \text{ suy ra } \max_{x \in [-1; 2]} \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \right) = 3.$$

$\Rightarrow m \geq 3$, vì $m \in [-2021; 2021] \Rightarrow 3 \leq m \leq 2021$. Vậy có 2019 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 14. Có bao nhiêu cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $(3x - y)^2 \cdot 3^{10x^2 - 8xy + 2y^2 - 4} \leq 4 - x^2 + 2xy - y^2$?

A. 8.

B. 6.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Từ } (3x - y)^2 \cdot 3^{10x^2 - 8xy + 2y^2 - 4} \leq 4 - x^2 + 2xy - y^2 \Leftrightarrow (3x - y)^2 \cdot 3^{(3x - y)^2 + (x - y)^2 - 4} \leq 4 - (x - y)^2 \quad (*).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = (3x - y)^2 \geq 0 \\ b = (x - y)^2 - 4 \geq -4 \end{cases} \text{ khi đó } (*) \text{ đưa về: } a \cdot 3^{a+b} \leq -b \Leftrightarrow a \cdot 3^a \leq (-b) \cdot 3^{-b}.$$

Vì $a \geq 0 \Rightarrow -b \geq 0$. Xét hàm số $f(t) = t \cdot 3^t$, $t \in [0; +\infty)$ có $f'(t) = 3^t + t \cdot 3^t \ln 3 > 0$, $\forall t \in [0; +\infty)$

Suy ra $f(a) \leq f(-b) \Leftrightarrow a \leq -b \Leftrightarrow a + b \leq 0$.

$$\text{Suy ra } (3x - y)^2 + (x - y)^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (3x - y)^2 + (x - y)^2 \leq 4.$$

Với giả thiết x, y là các số nguyên nên $(3x - y)^2$ và $(x - y)^2$ đều nguyên nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

$3x-y$	0	0	1	0	-1	1	-1	-1	1	2	0	-2	0
$x-y$	0	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0	2	0	-2
x	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	1	1	-1	-1	1
y	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	-2	2	1	-3	-1	3

Vậy có tất cả 9 cặp nghiệm thỏa mãn.

Câu 15. Tính tổng các nghiệm nguyên dương của bất phương trình sau

$$5^{x^2+1} + 2x^2 - 4x - 6 \leq 25^{x+2}$$

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

Chọn A

Ta có $5^{x^2+1} + 2x^2 - 4x - 6 \leq 25^{x+2} \Leftrightarrow 5^{x^2+1} + 2(x^2+1) \leq 5^{2(x+2)} + 4(x+2) \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 5^t + 2t$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$f'(t) = 5^t \ln 5 + 2 > 0$ với $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow f(x^2+1) \leq f(2(x+2)) \Leftrightarrow x^2+1 \leq 2(x+2) \Leftrightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy tổng các nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho bằng 6.

Câu 16. Hãy xác định số nghiệm nguyên âm của bất phương trình sau:

$$9 \cdot 3^{x^2-3x-7} - 3^{x+10} + 2x^2 - 8x \leq 30$$

A. 2.

B. 3.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$9 \cdot 3^{x^2-3x-7} - 3^{x+10} + 2x^2 - 8x \leq 30 \Leftrightarrow 3^{x^2-3x-5} + 2(x^2-3x-5) \leq 3^{x+10} + 2(x+10) \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 2t$.

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3^t \ln 3 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow f(x^2-3x-5) \leq f(x+10) \Rightarrow x^2-3x-5 \leq x+10 \Leftrightarrow 2-\sqrt{19} \leq x \leq 2+\sqrt{19}$.

$\Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; \dots; 5; 6\}$.

Số nghiệm nguyên âm của bất phương trình đã cho là 2.

Câu 17. Tích của nghiệm nguyên âm lớn nhất và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình $4^{x^2+1} + 2x^2 - 4x - 6 > 16^{x+2}$ bằng bao nhiêu?

A. -8.

B. -3.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4^{x^2+1} + 2x^2 - 4x - 6 > 16^{x+2} \Leftrightarrow 4^{x^2+1} + 2(x^2+1) > 4^{2x+4} + 2(2x+4) \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = 4^t + 2t$.

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$f'(t) = 4^t \ln 4 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 1) > f(2x + 4) \Leftrightarrow x^2 + 1 > 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}.$$

Do đó nghiệm nguyên âm lớn nhất là -2 và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là 4 . Tích của chúng bằng -8 .

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $2021^{|x^2 - 5x + 2|} - 2021^{5x + 2} + |x^2 - 5x + 2| \leq 5x + 2$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 55.

B. 5.

C. 6.

D. 25.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$2021^{|x^2 - 5x + 2|} - 2021^{5x + 2} + |x^2 - 5x + 2| \leq 5x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2021^{|x^2 - 5x + 2|} + |x^2 - 5x + 2| \leq 2021^{5x + 2} + 5x + 2 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2021^t + t \Rightarrow f'(t) = 2021^t \ln 2021 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) ta có $f(|x^2 - 5x + 2|) \leq f(5x + 2) \Leftrightarrow |x^2 - 5x + 2| \leq 5x + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 2 \leq 5x + 2 \\ x^2 - 5x + 2 \geq -5x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x^2 - 10x \leq 0 \\ x^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x \in [0; 10] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 10].$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 2 \leq 5x + 2 \\ x^2 - 5x + 2 \geq -5x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x^2 - 10x \leq 0 \\ x^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 10.$$

Yêu cầu của bài toán $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

Câu 19. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $2^{1 + \sqrt{x^2 - 3x - 10}} - 2^{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 2x - 4$. Số phần tử của S bằng

A. 9.

B. 5.

C. 4.

D. 15.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{1 + \sqrt{x^2 - 3x - 10}} - 2^{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 2x - 4$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2 - 3x - 10}} + \sqrt{x^2 - 3x - 10} < 2^{x-2} + x - 2 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 < 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Bất phương trình (1)} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x^2-3x-10}\right) < f(x-2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10} < x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \geq 0 \\ x-2 > 0 \\ x^2-3x-10 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 14$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $S = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$. Vậy số phần tử của S bằng 9.

Câu 20. Biết rằng bất phương trình $\sqrt{4x^3-3x^2} \cdot 2^{\frac{x^3-6x-4}{x^2}} < 24x+32$ có tập nghiệm là $S = (a; b + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d})$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4abcd$.

A. $T = 75$.

B. $T = 80$.

C. $T = 81$.

D. $T = 82$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sqrt{4x^3-3x^2} = \sqrt{x^2(4x-3)}.$$

Bất phương trình đã cho xác định với mọi $x \geq \frac{3}{4}$.

Với điều kiện xác định trên, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{4x-3} \cdot 2^{\frac{x^3-6x-4}{x^2}} &< 8 \left(\frac{3x+4}{x} \right) \Leftrightarrow \sqrt{4x-3} \cdot \left(\sqrt[4]{2} \right)^{4x - \frac{24x+16}{x^2}} < \left(\sqrt[4]{2} \right)^{12} \left(\frac{3x+4}{x} \right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{4x-3} \cdot \left(\sqrt[4]{2} \right)^{4x-3} &< \left(\frac{3x+4}{x} \right) \left(\sqrt[4]{2} \right)^{\frac{9x^2+24x+16}{x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{4x-3} \cdot \left(\sqrt[4]{2} \right)^{4x-3} < \left(\frac{3x+4}{x} \right) \left(\sqrt[4]{2} \right)^{\left(\frac{3x+4}{x} \right)^2}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t \left(\sqrt[4]{2} \right)^{t^2}$, với $t \geq 0$.

Ta có $f'(t) = \left(\sqrt[4]{2} \right)^{t^2} + \frac{1}{2} t^2 \left(\sqrt[4]{2} \right)^{t^2} \ln 2 > 0, \forall t \geq 0$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó

$$\begin{aligned} \sqrt{4x-3} \cdot \left(\sqrt[4]{2} \right)^{4x-3} &< \left(\frac{3x+4}{x} \right) \left(\sqrt[4]{2} \right)^{\left(\frac{3x+4}{x} \right)^2} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{4x-3}\right) < f\left(\frac{3x+4}{x}\right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{4x-3} &< \frac{3x+4}{x} \Leftrightarrow 4x-3 < \frac{9x^2+24x+16}{x^2} \quad \left(\text{do } x \geq \frac{3}{4} \right) \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 - 24x - 16 &< 0 \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 12x - 8 &< 0 \Leftrightarrow 3x^3 < x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \\ \Leftrightarrow 3x^3 < (x+2)^3 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{3}x < x+2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} \Leftrightarrow x < 1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện xác định, phương trình đã cho có nghiệm $S = \left[\frac{3}{4}; 1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \right)$.

Suy ra $a = \frac{3}{4}, b = 1, c = 3, d = 9$. Do đó $T = 4abcd = 81$.

Câu 21. Bất phương trình $x\sqrt{x+1} \leq (2x-3) \cdot 2^{\frac{-x^3+16x^2-48x+36}{x^2}}$ có tập nghiệm $S = [a; b + c\sqrt{d}]$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $c \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c + d$.

A. 17. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq -1$ và $x \neq 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} x\sqrt{x+1} &\leq (2x-3).2^{\frac{-x^3+16x^2-48x+36}{x^2}} \\ \Leftrightarrow 2x\sqrt{x+1} &\leq (4x-6).2^{\frac{16x^2-48x+36}{x^2}-x} \\ \Leftrightarrow 2x\sqrt{x+1}.2^x &\leq (4x-6).2^{\frac{(4x-6)^2}{x^2}} \quad (*) \end{aligned}$$

► TH-1: $x > 0$: để bất phương trình (*) có nghiệm thì $4x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}.2^{(\sqrt{x+1})^2} \leq \left(\frac{4x-6}{x}\right).2^{\left(\frac{4x-6}{x}\right)^2}$.

Xét hàm số $f(t) = t.2^{t^2}$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 2^{t^2} + 2t^2 \cdot 2^{t^2} \cdot \ln 2 > 0, \forall t > 0$.

Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$, từ bất phương trình ta có

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x+1}) &\leq f\left(\frac{4x-6}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \leq \frac{4x-6}{x} \\ \Leftrightarrow x\sqrt{x+1} &\leq 4x-6 \Leftrightarrow x^2(x+1) \leq 16x^2 - 48x + 36 \\ \Leftrightarrow x^3 - 15x^2 + 48x - 36 &\leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 12x + 12) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 - 2\sqrt{6} \\ 3 \leq x \leq 6 + 2\sqrt{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $x > \frac{3}{2}$ suy ra TH-1 có nghiệm là: $3 \leq x \leq 6 + 2\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{TH-2: } -1 \leq x < 0: (*) &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \cdot 2^{\left(\sqrt{x+1}\right)^2} \geq \left(\frac{4x-6}{x}\right) \cdot 2^{\left(\frac{4x-6}{x}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right) \geq f\left(\frac{4x-6}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq \frac{4x-6}{x} \\ &\Leftrightarrow x+1 \geq \frac{16x^2-48x+36}{x^2} \Leftrightarrow x^2(x+1) \geq 16x^2-48x+36 \\ &\Leftrightarrow x^3-15x^2+48x-36 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-12x+12) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-2\sqrt{6} \leq x \leq 3 \\ x \geq 6+2\sqrt{6} \end{cases}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $-1 \leq x < 0$ suy ra TH-2 vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [3; 6 + 2\sqrt{6}]$.

Suy ra $a = 3, c = 2, b = d = 6$. Do đó $a + b + c + d = 17$.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để phương trình $m + \sqrt{m+2^x} > 2^{2x}$ có nghiệm thực?

A. 2017.

B. 2018.

C. 2016.

D. 2015.

Lời giải

Chọn A

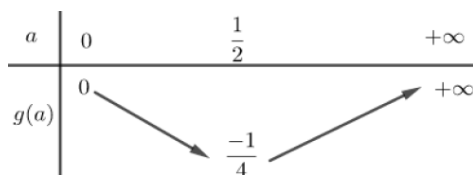
$$m + \sqrt{m+2^x} > 2^{2x} \Leftrightarrow (m+2^x) + \sqrt{m+2^x} > 2^{2x} + 2^x \quad (1)$$

Ta có $\sqrt{m+2^x} \geq 0$, $2^x > 0$. Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^2 + t$ trên $[0; +\infty)$.

$$f'(t) = 2t + 1 \geq 0, \forall t \in [0; +\infty)$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $[0; +\infty)$ do đó $(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{m+2^x}) > f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt{m+2^x} > 2^x$

$\Leftrightarrow m > 2^{2x} - 2^x$. Đặt $a = 2^x$, $a > 0$. Ta có $\Leftrightarrow m > g(a) = a^2 - a$.



Bất phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$ mà m nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên

$m \in \{1; 2; 3; \dots; 2017\}$. Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn

$$2^{x^2+y^2} < 2.2^{y-x} ?$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2+y^2} < 2.2^{y-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} < 2^{y-x+1} \Leftrightarrow x^2 + y^2 < y - x + 1 \Leftrightarrow y^2 - y < -x^2 - x + 1 \quad (*)$.

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} < y < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \quad (*)$$

Nhận xét: $x \in \mathbb{Z}; \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2}$ suy ra $x = -1$ hoặc $x = 0$

Thay vào thấy có tồn tại số thực $y > 0$.

Vậy có 2 số nguyên x thỏa mãn để phương trình $(*)$ có nghiệm thực $y > 0$.

GIẢI BPT MŨ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN (KHÔNG CHỨA THAM SỐ)

PHƯƠNG PHÁP

✚ **Đặt** $T = a^{u(x)}$ với $T > 0$.

Bất phương trình biến đổi về dạng $AT^2 + g(x)T + h(x) > 0$ hoặc $AT^2 + g(x)T + h(x) < 0$

➤ **Bước 1 : Giải phương trình** $AT^2 + g(x)T + h(x) = 0$

➤ **Bước 2 : Lập bảng xét dấu của** $AT^2 + g(x)T + h(x)$

➤ **Bước 3 : Từ bảng kết luận.**

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2(x+5).3^x + 9(2x+1) \geq 0$ là

A. $[0;1] \cup [2;+\infty)$.

B. $(-\infty;1] \cup [2;+\infty)$.

C. $[1;2]$.

D. $(-\infty;0] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $3^x = t$, $t > 0$ bất phương trình trở thành $t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) \geq 0$ (*).

Xét phương trình: $t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) = 0$ (1).

Ta có $\Delta' = (x+5)^2 - 9(2x+1) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.

Do đó phương trình (1) luôn có nghiệm $\begin{cases} t = 2x+1 \\ t = 9 \end{cases}$.

Khi đó (*) trở thành $(3^x - 9)(3^x - 2x - 1) \geq 0$ (**).

Xét các phương trình $3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$ (1) và $3^x = 2x+1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$ (2).

Đặt $f(x) = 3^x - 2x - 1$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$; ta có

$$f'(x) = 3^x \ln 3 - 2 \Rightarrow f''(x) = 3^x \ln^2 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra phương trình (2) có tối đa hai nghiệm phân biệt.

Lại có $f(0) = f(1) = 0$. Vậy phương trình (2) có đúng hai nghiệm phân biệt $x = 0$, $x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$3^x - 9$	-		-		+
$3^x - 2x - 1$	+	0	-	0	+
$(3^x - 9)(3^x - 2x - 1)$	-	0	+	0	+

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = [0;1] \cup [2;+\infty)$.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $25^x - (4x+6).5^x + 20x + 5 \leq 0$ là

A. $[0;1]$.

B. $[1;+\infty)$.

C. $(-\infty;0]$.

D. $(-\infty;1]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $5^x = t$, $t > 0$, bất phương trình trở thành $t^2 - (4x+6)t + 20x + 5 \leq 0$ (*).

Xét phương trình: $t^2 - (4x+6)t + 20x+5 = 0$ (1).

Ta có $\Delta' = (4x+6)^2 - 4(20x+5) = 16x^2 - 32x + 16 = 16(x-1)^2$.

Do đó phương trình (1) luôn có nghiệm $\begin{cases} t = 4x+1 \\ t = 5 \end{cases}$.

Khi đó (*) trở thành $(5^x - 5)(5^x - 4x - 1) \leq 0$ (**).

Xét các phương trình $5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$ (1) và $5^x = 4x+1 \Leftrightarrow 5^x - 4x - 1 = 0$ (2).

Đặt $f(x) = 5^x - 4x - 1$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$; ta có

$f'(x) = 5^x \ln 5 - 4 \Rightarrow f''(x) = 5^x \ln^2 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình (2) có tối đa hai nghiệm phân biệt.

Lại có $f(0) = f(1) = 0$ nên phương trình $5^x - 4x - 1 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt $x = 0$, $x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$5^x - 5$	-		-	+
$5^x - 4x - 1$	+	0	-	+
$(5^x - 5)(5^x - 4x - 1)$	-	0	+	+

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (-\infty; 0]$.

Câu 3. Cho bất phương trình $2^{2x} - x \cdot 2^x + 2x + 3 > 2^{x+2} - x$ (*) có tập nghiệm là $S = (a; b) \cup (c; +\infty)$ tính $T = a + 2b - c$.

A. $\log_2 \frac{4}{3}$.

B. $\log_2 \frac{2}{3}$.

C. $\log_2 \frac{8}{3}$.

D. $\log_2 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{2x} - x \cdot 2^x + 2x + 3 > 2^{x+2} - x \Leftrightarrow 2^{2x} - (x+4) \cdot 2^x + 3x + 3 > 0$. Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^2 - (x+4)t + 3(x+1) > 0$.

Xét phương trình: $t^2 - (x+4)t + 3(x+1) = 0$ (2).

Ta có $\Delta = (x+4)^2 - 12(x+1) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ nên phương trình (2) luôn có nghiệm.

$\begin{cases} t = x+1 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = x+1 \\ 2^x = 3 \end{cases}$.

+) $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$.

+) Xét hàm số $f(x) = 2^x - x - 1$, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 \Rightarrow f''(x) = 2^x \ln^2 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$, có không quá 2 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(0) = f(1) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x = 0, x = 1$.

Vậy phương trình (2) có 3 nghiệm là $x = 0, x = 1$ và $x = \log_2 3$.

Bảng xét dấu VT của bất phương trình đã là:

x	$-\infty$	0	1	$\log_2 3$	$+\infty$
$VT_{(*)}$	-	0	+	0	+

Tập nghiệm của bất phương trình (*) là $S = (0; 1) \cup (\log_2 3; +\infty)$.

Vậy $T = a + 2b - c = \log_2 \frac{4}{3}$.

Câu 4. Cho bất phương trình $3 \cdot 4^x - (7x + 9) \cdot 2^x + 14x + 6 \geq 0$ (1). Số nghiệm nguyên thuộc $(-2022; 2022)$ của bất phương trình (1) là

A. 1011.

B. 2022.

C. 4042.

D. 2021.

Lời giải

Chọn D

Đặt $2^x = t$, $t > 0$.

(1) trở thành $3t^2 - (7x + 9)t + 14x + 6 \geq 0$.

Xét phương trình: $3t^2 - (7x + 9)t + 14x + 6 = 0$ (2).

Ta có $\Delta = (7x + 9)^2 - 12(14x + 6) = 49x^2 - 42x + 9 = (7x - 3)^2$ nên phương trình (2) luôn có nghiệm.

$$\begin{cases} t = \frac{7}{3}x + 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{7}{3}x + 1 \\ 2^x = 2 \end{cases}$$

+) $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

+) Xét hàm số $f(x) = 2^x - \frac{7}{3}x - 1$, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 - \frac{7}{3} \Rightarrow f''(x) = 2^x \ln^2 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$, có không quá 2 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(0) = f(3) = 0$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x = 0, x = 3$.

Vậy phương trình (2) có 3 nghiệm là $x = 0, x = 1$ và $x = 3$.

Bảng xét dấu VT của BPT (1) đã cho là:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$VT(1)$	-	0	+	0	+

Ta được tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $T = [0; 1] \cup [3; +\infty)$.

Số nghiệm nguyên thuộc $(-2022; 2022)$ của BPT (1) là 2021.

Câu 5. Cho bất phương trình $e^{2x} - (2x + 1)e^x + x^2 + x \geq 0$ (1). Số nghiệm nguyên thuộc $[-20; 20]$ của bất phương trình (1) là

A. 41.

B. 40.

C. 20.

D. 19.

Lời giải

Chọn A

Đặt $e^x = t$, $t > 0$. Khi đó Bất phương trình (1) trở thành: $t^2 - (2x+1)t + x^2 + x \geq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(t, x) = t^2 - (2x+1)t + x^2 + x$.

Ta có $\Delta = (2x+1)^2 - 4(x^2 + x) = 1$.

$$f(t, x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = x+1 \end{cases}. \text{ Vậy } f(t, x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq x+1 \\ t \leq x \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} e^x \geq x+1 \\ e^x \leq x \end{cases}.$$

Xét hàm số $g(x) = e^x - x - 1$, liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

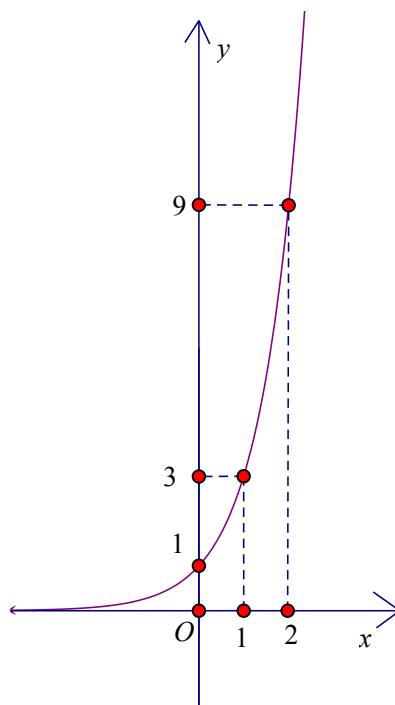
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $e^x \geq x+1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $T = \mathbb{R}$ nên số nghiệm nguyên thuộc $[-20; 20]$ của bất phương trình (1) là 41.

Câu 6. Cho hàm số $y = 3^{f^2(x)-f(x)}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $9^{f^2(x)-f(x)} - 2x \cdot 3^{f^2(x)-f(x)} + 18x \geq 10 \cdot 3^{f^2(x)-f(x)} - 9$ (*) có tập nghiệm là:

$S = [a; b] \cup [c; +\infty)$. Tính $a + b + c$.

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

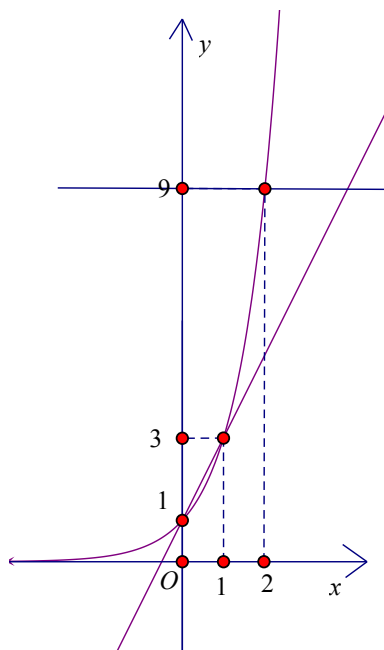
Chọn A

Đặt $t = 3^{f^2(x)-f(x)}$, $t > 0$. Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) \geq 0$.

Xét phương trình: $t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) = 0$ (**).

Ta có $\Delta' = (x+5)^2 - 9(2x+1) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$ nên phương trình (**) luôn có nghiệm.

$$\begin{cases} t = 2x+1 \\ t = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{f^2(x)-f(x)} = 2x+1 & (1) \\ 3^{f^2(x)-f(x)} = 9 & (2) \end{cases}.$$



+ Nghiệm của (2) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 3^{f^2(x)-f(x)}$ và đường thẳng có phương trình $y = 9$.

Dựa vào đồ thị có $3^{f^2(x)-f(x)} = 9 \Leftrightarrow x = 2$.

+) Nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 3^{f^2(x)-f(x)}$ và đường thẳng $y = 2x+1$.

Dựa vào đồ thị có $3^{f^2(x)-f(x)} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Khi đó (*) trở thành $(3^{f^2(x)-f(x)} - 9)(3^{f^2(x)-f(x)} - 2x - 1) \geq 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$3^{f^2(x)-f(x)} - 9$	-	-	-	0	+
$3^{f^2(x)-f(x)} - 2x - 1$	+	0	-	0	+
$VT_{(*)}$	-	0	+	0	+

Tập nghiệm của bất phương trình (*) là $S = [0; 1] \cup [2; +\infty)$.

Vậy $a + b + c = 3$.

Câu 7. Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ của bất phương trình sau:

$$2^{4x+2} - 18 \cdot 2^{3x+1} + (8\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 85) \cdot 2^{2x} - 9(4\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2)2^x + 8\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 0$$
 là

A. 36.

B. 38.

C. 18.

D. 17.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases}$.

Biến đổi bất phương trình đã cho về dạng:

$$(2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x)^2 + (4\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2)(2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x) + 8\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 0.$$

Đặt $t = 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x$ ta có:

$$t^2 + (4\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2)t + 8\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow (t + 4\sqrt{x^2 + 2x - 3})(t + 2) \geq 0 \quad (*).$$

+ TH1: Nếu $20 \geq x \geq 3$.

Khi đó $t = 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x = 2^x(2^{x+1} - 9) > 0 \Rightarrow t + 2 > 0$ và $t + 4\sqrt{x^2 + 2x - 3} > 0$. Suy ra (*) luôn đúng. Vậy trước mắt ta có được 18 nghiệm nguyên thỏa mãn bài toán.

+ TH2: Nếu $x = 1$, suy ra $t = -10$ thay vào (*) ta có $-10(-10 + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 80 \geq 0$ luôn đúng nên $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình ban đầu.

+ TH3: Với $x = 2$ suy ra $t = -4$ thay vào (*) ta có $8 - 8\sqrt{5} \geq 0$ vô lý nên $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

+ TH4: Với $-20 \leq x \leq -4$ ta có: $h(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow h'(x) = 2x + 2 < 0, \forall x \in [-20; -4]$ thì

$$\min_{[-20; -4]} h(x) = h(-4) = 5 \Rightarrow 4\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 4\sqrt{5}, \forall x \in [-20; -4].$$

$$\text{Mặt khác } t = 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x \Rightarrow t' = 2^x(4 \cdot 2^x - 9) \ln 2 < 0, \forall x \in [-20; -4].$$

$$\text{Suy ra } \min_{[-20; -4]} t = t(-4) = \frac{-71}{128}.$$

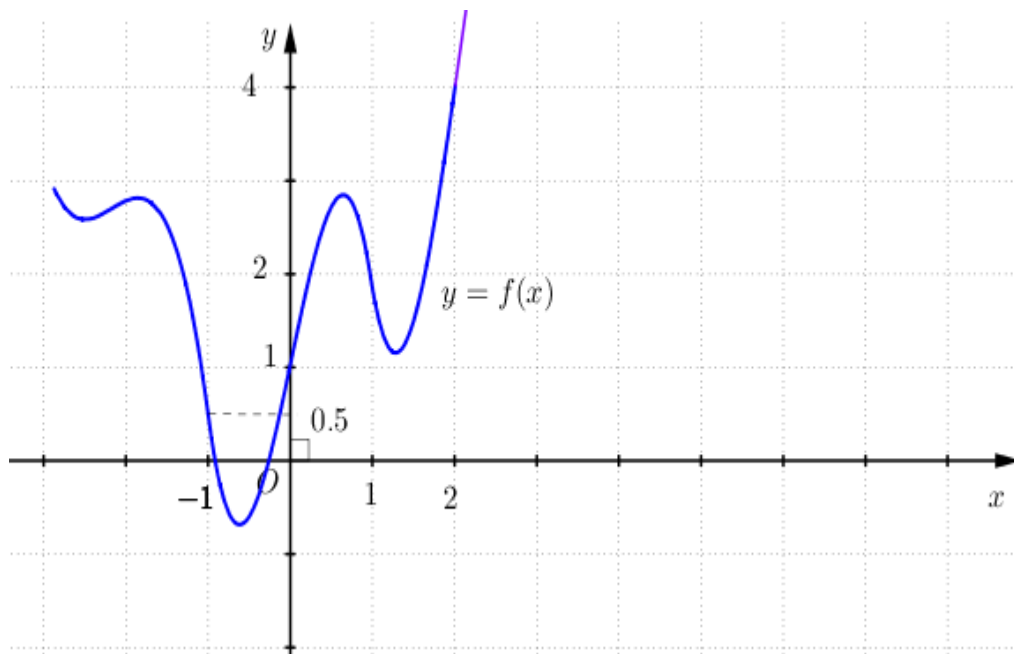
$$\text{Do đó } t + 4\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 4\sqrt{5} - \frac{71}{128} > 0 \text{ và } t + 2 > 2 - \frac{71}{128} = \frac{185}{128} > 0 \text{ nên } (*) \text{ đúng.}$$

Để thấy $x = -3$ không là nghiệm.

Suy ra có 17 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Vậy bất phương trình có $18 + 1 + 17 = 36$ nghiệm nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - (x + f(x) + 1) \cdot 2^x + (x + 1)f(x) \geq 0$ (*) là

- A. $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. B. $[0; 1]$. C. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. D. $[-1; 2]$.

Lời giải

Chọn D

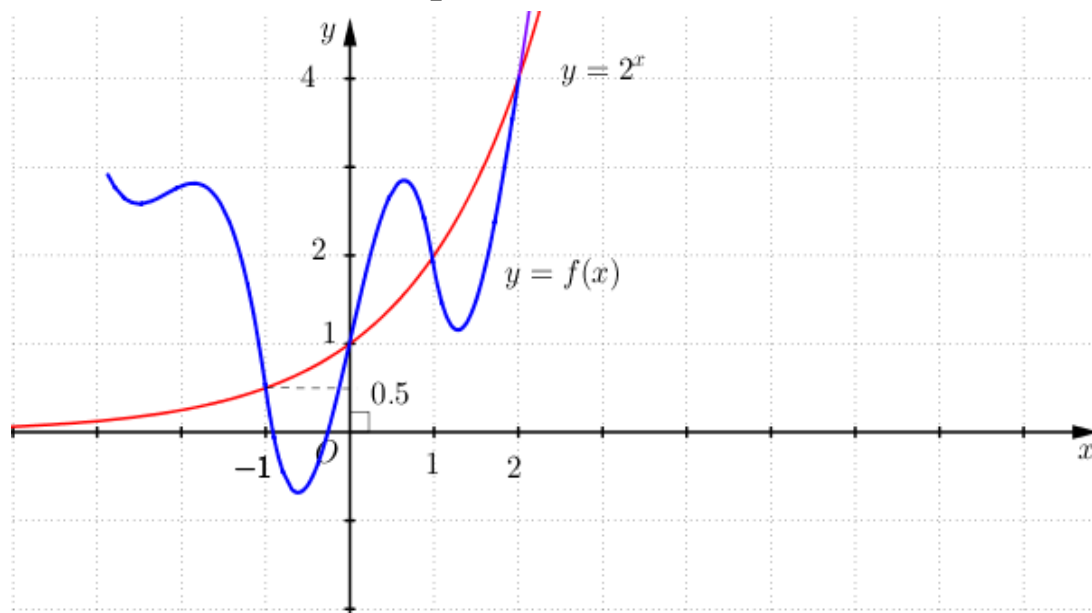
Đặt $t = 2^x$, $t > 0$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2 - (x + f(x) + 1)t + (x + 1)f(x) \geq 0$.

Xét phương trình: $t^2 - (x + f(x) + 1)t + (x + 1)f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = f(x) \\ t = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = f(x) & (1) \\ 2^x = x + 1 & (2) \end{cases}$

+ Nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2^x$ và đồ thị $y = f(x)$.

Dựa vào đồ thị có $2^x = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.



+) Xét hàm số $g(x) = 2^x - x - 1$, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 \Rightarrow g''(x) = 2^x \ln^2 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $g(x) = 0$, có không quá 2 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $g(0) = g(1) = 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x = 0, x = 1$.

Khi đó (*) trở thành $(2^x - x - 1)(2^x - f(x)) \geq 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$	
$2^x - f(x)$	-	0	+	0	-	0	-
$2^x - x - 1$	+		+	0	-	0	+
$VT_{(*)}$	-	0	+	0	+	0	-

Tập nghiệm của bất phương trình (*) là $S = [-1; 2]$.

_____ **TOANMATH.com** _____