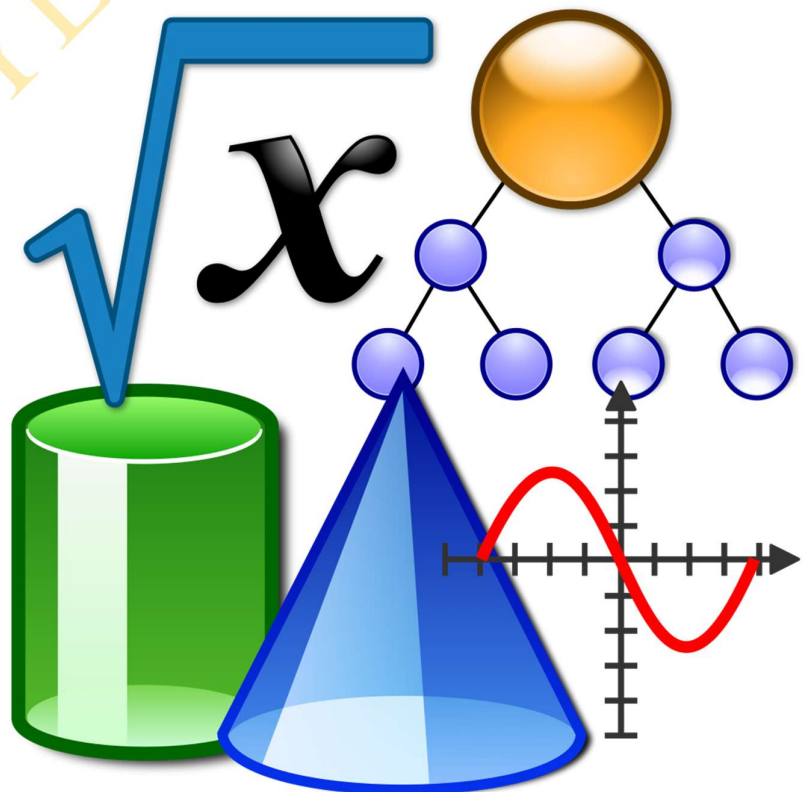




ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN MÔN TOÁN – KHỐI 12

CÂU HỎI & LỜI GIẢI CHI TIẾT



MỤC LỤC

□ DẠNG TOÁN 1: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG	3
Dạng 1.1: Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng (không có điều kiện)	3
Dạng 1.2: Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng (có điều kiện)	28
□ DẠNG TOÁN 2: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY	54
Dạng 2.1: Ứng dụng của tích phân tính thể tích khối tròn xoay (không có điều kiện)	54
Dạng 2.2: Ứng dụng của tích phân tính thể tích khối tròn xoay (có điều kiện)	68
□ DẠNG TOÁN 3: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG	73
Dạng 3.1: Bài toán cho biết hàm số của vận tốc, quãng đường của chuyển động	73
Dạng 3.2: Bài toán cho biết đồ thị của vận tốc, quãng đường của chuyển động	83
□ DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC THỂ	89
Dạng 4.1: Bài toán liên quan đến diện tích	89
Dạng 4.2: Bài toán liên quan đến thể tích	102
□ DẠNG TOÁN 5: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ	117

PHẦN

3

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ
TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

DẠNG TOÁN 1: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Dạng 1.1: Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng (không có điều kiện)

BÀI TẬP NỀN TẢNG & VẬN DỤNG

Câu 1: (THPT LÊ XOAY VĨNH PHÚC LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b |f(x)| dx$. B. $S = \int_a^b f(x) dx$. C. $S = -\int_a^b f(x) dx$. D. $S = \int_b^a |f(x)| dx$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 2: (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$ B. $S = \int_0^2 2^x dx$ C. $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$ D. $S = \int_0^2 2^{2x} dx$

Lời giải

Chọn B

$$S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx \quad (\text{do } 2^x > 0, \forall x \in [0; 2]).$$

Câu 3: (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

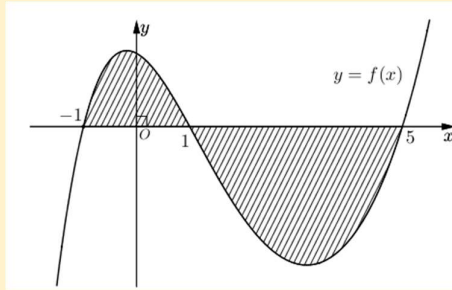
A. $S = \int_0^2 e^x dx$ B. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$ C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$ D. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là: $S = \int_0^2 e^x dx$.

Câu 4: (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

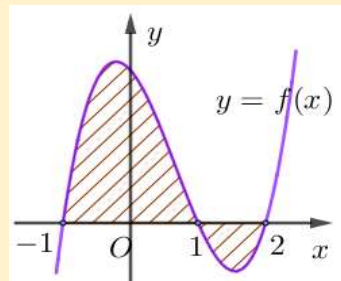
D. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S = \int_{-1}^1 |f(x)|dx + \int_1^5 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

Câu 5: (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$

B. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$

D. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$

Lời giải

Chọn D

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 |f(x)|dx + \int_1^2 |f(x)|dx$$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1; 1]$ nên

$$\int_{-1}^1 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 f(x)dx; \text{ hàm số } f(x) \text{ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn } [1; 2] \text{ nên}$$

$$\int_1^2 |f(x)|dx = -\int_1^2 f(x)dx$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

Câu 6: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $\frac{37}{12}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{81}{12}$

D. 13

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

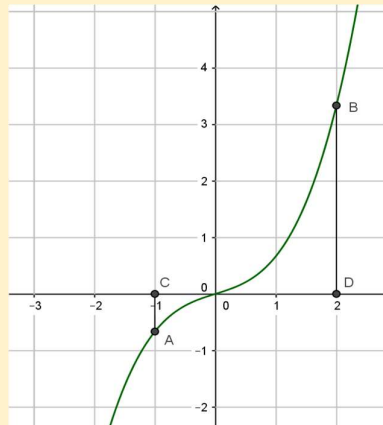
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 |x^3 - x - (x - x^2)| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_0^1 = \left| -\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) \right| = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

Câu 7: (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi

các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$,

$b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = b - a$

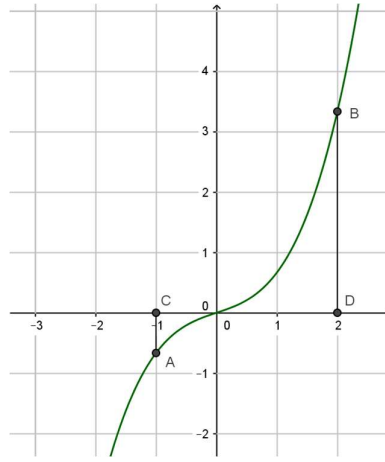
B. $S = b + a$

C. $S = -b + a$

D. $S = -b - a$

Lời giải

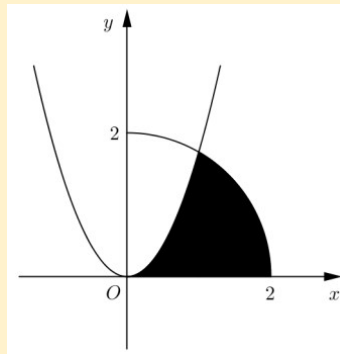
Chọn A



Ta có:

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b.$$

Câu 8: (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$

B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$

D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

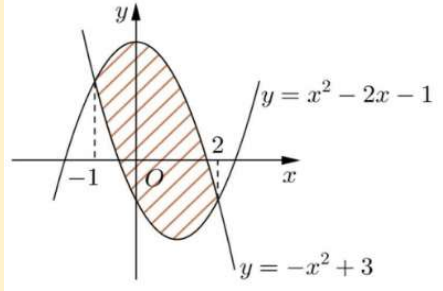
Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \pm 1$ với $0 \leq x \leq 2$ nên ta có $x = 1$

Ta có diện tích $S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_0^1 + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Đặt: $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$

Câu 9: (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$

B. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

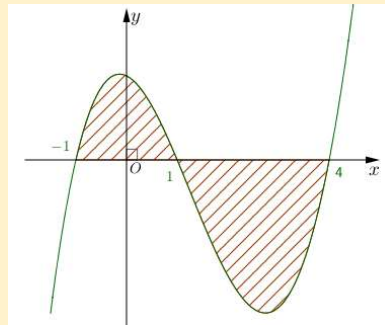
Lời giải

Chọn C

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^2 \left| (-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1) \right| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 10: (Mã đề 101 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

D. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.

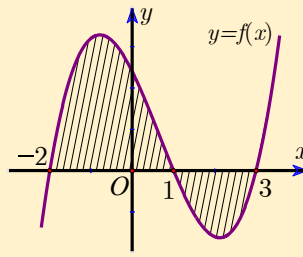
Lời giải

Chọn A

Ta có: hàm số $f(x) \geq 0 \forall x \in [-1; 1]$; $f(x) \leq 0 \forall x \in [1; 4]$, nên:

$$S = \int_{-1}^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx. \text{ Chọn đáp án A.}$$

Câu 11: (Mã đề 104 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = -\int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

C. $S = -\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

D. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

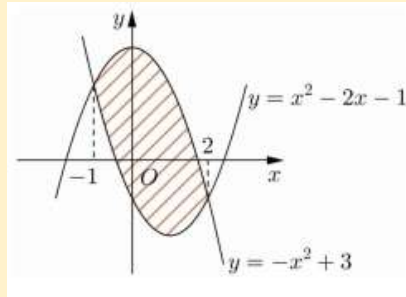
Lời giải

Chọn B

Ta có $S = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = S = \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx.$

Do $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [-2; 1]$ và $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in [1; 3]$ nên $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

Câu 12: (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

B. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx.$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$

Lời giải

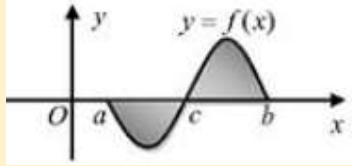
Chọn C

Từ đồ thị ta thấy $-x^2 + 3 \geq x^2 - 2x - 1, \forall x \in [-1; 2].$

Vậy diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

Câu 13: (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_a^b f(x) dx$.

B. $S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|$.

C. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Lời giải

Chọn B

Câu 14: (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x$, $y = x$. Tính S .

A. $S = 4$.

B. $S = 8$.

C. $S = 2$.

D. $S = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3 - 3x = x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy $S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = 4 + 4 = 8$.

Câu 15: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 3^x dx$.

B. $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx$.

C. $S = \pi \int_0^2 3^x dx$.

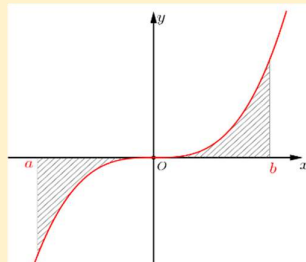
D. $S = \int_0^2 3^{2x} dx$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S = \int_0^2 3^x dx$

Câu 16: (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ dưới đây). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

B. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

C. $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

D. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_D = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^0 |f(x)| dx + \int_0^b |f(x)| dx.$

Vì $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; 0], f(x) \geq 0, \forall x \in [0; b]$ nên:

$$S_D = \int_a^0 (-f(x)) dx + \int_0^b f(x) dx = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$$

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}.$

B. $\frac{3}{2}.$

C. $\frac{1}{3}.$

D. $\frac{7}{3}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S = \int_1^2 |(x-2)^2 - 1| dx = \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{2}{3}.$

Câu 18: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

A. $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|.$ B. $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx.$ C. $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$ D.

$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

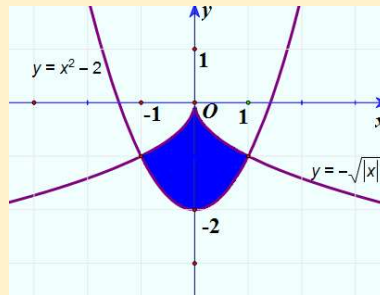
Lời giải

Chọn C

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y = f(x)$,

$y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

Câu 19: Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

B. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

C. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

D. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là:

$$\int_{-1}^1 |x^2 - 2 - (-\sqrt{|x|})| dx = \int_{-1}^1 (-\sqrt{|x|} - x^2 + 2) dx \quad (\text{vì } x \in [-1; 1] \Rightarrow -\sqrt{|x|} > x^2 - 2).$$

Câu 20: (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox

A. 11.

B. $\frac{34}{3}$.

C. $\frac{31}{3}$.

D. $\frac{32}{3}$.

Lời giải

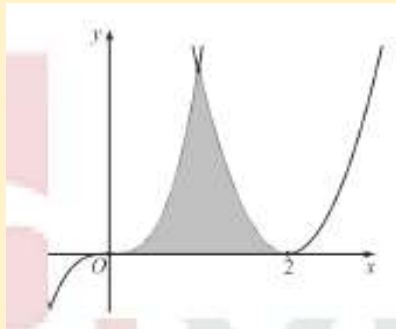
Chọn D

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox .

$$\text{Xét phương trình } 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } S = \int_0^4 |4x - x^2| dx = \left| \int_0^4 (4x - x^2) dx \right| = \left| \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 \right| = \frac{32}{3}.$$

Câu 21: (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = (x-2)^2$, đường cong $y = x^3$ và trục hoành (như hình vẽ) bằng:



A. $\frac{11}{2}$

B. $\frac{73}{12}$

C. $\frac{7}{12}$

D. $\frac{5}{2}$

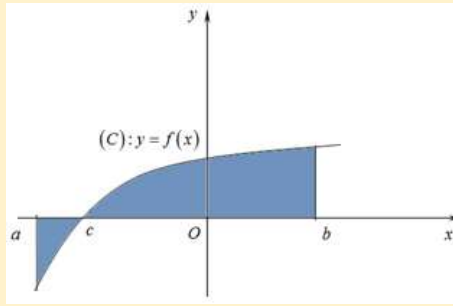
Lời giải

Chọn C

$$S = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{12}$$

Câu 22: (CHUYÊN NGUYỄN TẮT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$

, $x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

B. $S = \int_a^b f(x) dx$.

C. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

D. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Câu 23: (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành.

A. $S = 6$.

B. $S = 16$.

C. $S = \frac{13}{6}$.

D. $S = 13$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S = \int_{-1}^2 |x^2 + 1| dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = 6$.

Câu 24: (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5$, $y = 6x$, $x = 0$, $x = 1$. Tính S .

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{7}{3}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 5 = 6x \Leftrightarrow x = 5; x = 1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S = \int_0^1 |x^2 - 6x + 5| dx = \frac{7}{3}$.

Câu 25: (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S . Tính S ?

A. $S = 1 - \ln \frac{4}{3}$

B. $S = 4 \ln \frac{4}{3}$

C. $S = 4 \ln \frac{4}{3} - 1$

D. $S = \ln \frac{4}{3} - 1$

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là nghiệm của phương trình $\frac{-3x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Do đó diện tích hình phẳng là

$$S = \left| \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{-3x-1}{x-1} dx \right| = \left| \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(3 + \frac{4}{x-1} \right) dx \right| = \left| (3x + 4 \ln|x-1|) \right|_{-\frac{1}{3}}^0 = 4 \ln \frac{4}{3} - 1.$$

Câu 26: (THPT CẨM GIANG 2 NĂM 2018-2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$; $y = 2x$ và các đường $x = 1$; $x = -1$ được xác định bởi công thức:

A. $S = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^3) dx.$

B. $S = \int_{-1}^0 (3x - x^3) dx + \int_0^1 (x^3 - 3x) dx.$

C. $S = \left| \int_{-1}^1 (3x - x^3) dx \right|.$

D. $S = \int_{-1}^1 (3x - x^3) dx.$

Lời giải

Chọn A

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$; $y = 2x$ và các đường

$x = 1$; $x = -1$ là $S = \int_{-1}^1 |(x^3 - x) - (2x)| dx = \int_{-1}^1 |x^3 - 3x| dx.$

Bảng xét dấu $x^3 - 3x$

Do đó dựa vào bảng

x	-1	0	1
$x^3 - 3x$	+	0	-

ta có:

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^3) dx.$$

Câu 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$ bằng

A. $\frac{4}{3}.$

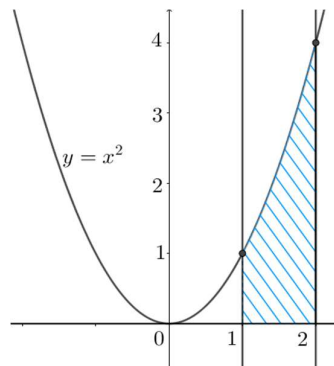
B. $\frac{7}{3}.$

C. $\frac{8}{3}.$

D. 1.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}.$

Câu 28: (THPT LÊ XOAY VĨNH PHÚC LẦN 1 NĂM 2018-2019) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $2\ln 2 - 1$. B. $\ln 2 + 1$. C. $\ln 2 - 1$. D. $2\ln 2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (H) và trục hoành $\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H) và các trục tọa độ là

$$S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \int_0^1 \frac{-x+1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{x+1} \right) dx = \left(-x + 2\ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Câu 29: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

B. $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

C. $S = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$.

D. $S = \pi \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi miền D gồm các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ là:

$$S = \int_1^e \left| \frac{\ln x}{x^2} \right| dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ vì } \frac{\ln x}{x^2} > 0, \forall x \in (1; e).$$

Câu 30: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là

A. 8. B. 5. C. 4. D. 10.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng là } S &= \left| \int_0^2 \left[(2x^2 - 4x + 1) - (-x^2 + 2x + 1) \right] dx \right| \\ &= \left| \int_0^2 (3x^2 - 6x) dx \right| = \left| (x^3 - 3x^2) \Big|_0^2 \right| = 4. \end{aligned}$$

Câu 31: (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét phương trình: } x^2 + 2x = x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là:

$$S = \int_{-2}^1 |x^2 + x - 2| dx = \left| \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 \right| = \left| -\frac{7}{6} - \frac{10}{3} \right| = \frac{9}{2}.$$

Câu 32: (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

A. $\frac{e^2 - 1}{2}$. B. $\frac{e^2 + 1}{2}$. C. $\frac{e^2 - 1}{4}$. D. $\frac{e^2 + 1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ của đường cong $y = x \ln x$ và trục hoành là

$$x \ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$

$$\text{là } S = \int_1^e |x \ln x| dx = \int_1^e x \ln x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } S = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Câu 33: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 3x - 2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

A. $\frac{2}{3}$ (đvdt) B. $\frac{1}{3}$ (đvdt) C. 1 (đvdt) D. $\frac{1}{6}$ (đvdt)

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường là:

$$S = \int_1^2 |x^2 - (3x - 2)| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right| = \frac{1}{6} \text{ (đvdt)}.$$

Câu 34: (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$ và đường thẳng $x = 1$ bằng

A. e^2 . B. $e + 2$. C. $2e$. D. $e - 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$ và đường thẳng $x = 1$ là:

$$S = \int_1^e |\ln x - 1| dx = \left| \int_1^e (\ln x - 1) dx \right| = \left| x(\ln x - 1) \Big|_1^e - \int_1^e dx \right| = \left| 1 - x \Big|_1^e = |1 - (e - 1)| = |2 - e| = e - 2$$

Câu 35: Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ bằng 10 là

- A. $m = \frac{7}{2}$. B. $m = 5$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $m > 0$ nên $2x + 3 > 0, \forall x \in [0; m]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ là:

$$S = \int_0^m (2x + 3) \cdot dx = \left(x^2 + 3x \right) \Big|_0^m = m^2 + 3m.$$

Theo giả thiết ta có:

$$S = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (do } m > 0 \text{)}.$$

Câu 36: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ bằng

- A. 4. B. $\frac{20}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{16}{3}$.

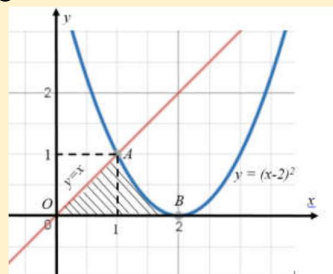
Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $4x - x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là } S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Câu 37: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.



- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $\frac{8}{15}$. D. $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{5}{6}.$$

Câu 38: (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

A. $S = \frac{2000}{3}$. B. $S = 2008$. C. $S = 2000$. D. $S = \frac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^2 - 2x$ và $(d): y = 0$ là:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

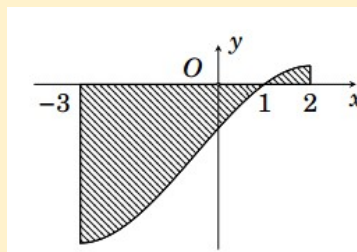
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
VT	+	0	-	+

$$\begin{aligned} \text{Diện tích cần tìm: } S &= \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx = \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-10}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^{10} = \frac{1300}{3} + \frac{4}{3} + \frac{704}{3} = \frac{2008}{3}. \end{aligned}$$

Câu 39: (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$ (như

hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx$, $b = \int_1^2 f(x) dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S = a + b$. B. $S = a - b$. C. $S = -a - b$. D. $S = b - a$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } S = \int_{-3}^2 |f(x)| dx = \int_{-3}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = -\int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -a + b.$$

Câu 40: (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ

thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là :

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{23}{15}$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $x^2 = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là :

$$S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \left| \int_0^1 (x^2 - x) dx \right| = \frac{4}{3}$$

Câu 41: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là

A. 8

B. 5

C. 4

D. 10

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là:

$$-x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Diện tích hình phẳng đã cho là } \int_0^2 |3x^2 - 6x| dx = \int_0^2 (6x - 3x^2) dx = (3x^2 - x^3) \Big|_0^2 = 4.$$

Câu 42: (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{ khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{ khi } x > 1 \end{cases}$.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

A. $\frac{16}{3}$.

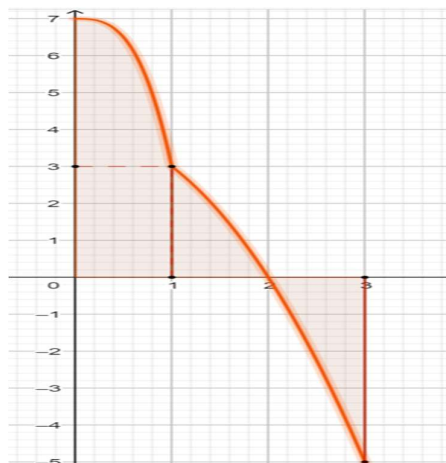
B. $\frac{20}{3}$.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn C



$$S = \int_0^1 (7-4x^3)dx + \int_1^2 (4-x^2)dx + \int_2^3 (x^2-4)dx$$

$$= (7x - x^4)\Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^3 = 6 + 4 - \frac{7}{3} - 3 - \frac{8}{3} + 8 = 10.$$

Câu 43: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \frac{937}{12}$

B. $S = \frac{343}{12}$

C. $S = \frac{793}{4}$

D. $S = \frac{397}{4}$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

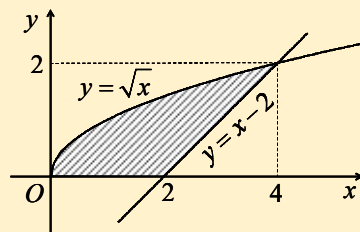
$$-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích cần tìm là: } S = \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx$$

$$= \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_{-3}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_0^4 \right|$$

$$= \left| \frac{-99}{4} \right| + \left| \frac{-160}{3} \right| = \frac{937}{12}.$$

Câu 44: (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{10}{3}$.

D. $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét các hình phẳng $(H_1): \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 0 \\ x = 0, x = 4 \end{cases}$ và $(H_2): \begin{cases} y = x - 2 \\ y = 0 \\ x = 2, x = 4 \end{cases}.$

Ta có $\begin{cases} (H) = (H_1) \setminus (H_2) \\ (H) \cup (H_2) = (H_1) \end{cases}.$

Do đó $S(H) = S(H_1) - S(H_2) = \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x - 2) dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^4 - \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^4 = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$

Cách khác: Ta có $(H): \begin{cases} x = y^2 \\ x = y + 2 \\ y = 0, y = 2 \end{cases}$. Suy ra $S(H) = \int_0^2 |y^2 - (y + 2)| dy = \frac{10}{3}$.

Câu 45: (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Gọi S là diện tích hình

phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S là

- A. $S = 1 + \ln 2$. B. $S = 2 \ln 2 - 1$. C. $S = 2 \ln 2 + 1$. D. $S = \ln 2 - 1$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành:

$$\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Khi đó } S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \left| \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) dx \right| = \left| \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \right| = \left| (x - 2 \ln |x+1|) \Big|_0^1 \right| = 2 \ln 2 - 1.$$

Câu 46: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là

- A. $\frac{8}{15}$. B. $\frac{7}{15}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{4}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là

$$x^2 + x - 1 = x^4 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S &= \int_{-1}^1 |x^2 - x^4| dx = \int_{-1}^0 |x^2 - x^4| dx + \int_0^1 |x^2 - x^4| dx \\ &= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x^4) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Câu 47: (THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019) Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

- A. $S = \ln 2 + 1$. B. $S = 2 \ln 2 + 1$. C. $S = \ln 2 - 1$. D. $S = 2 \ln 2 - 1$.

Lời giải

Chọn D

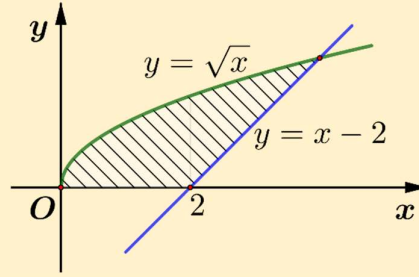
Phương trình trục (Ox) và (Oy) lần lượt là $y = 0$ và $x = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số (H) và trục Ox : $\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có: $S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx$. Vì $\frac{x-1}{x+1} \leq 0, \forall x \in [0;1]$ nên diện tích cần tìm là:

$$S = -\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{x+1} \right) dx = (-x + 2 \ln |x+1|) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

Câu 48: (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



A. $\frac{10}{3}$.

B. 4.

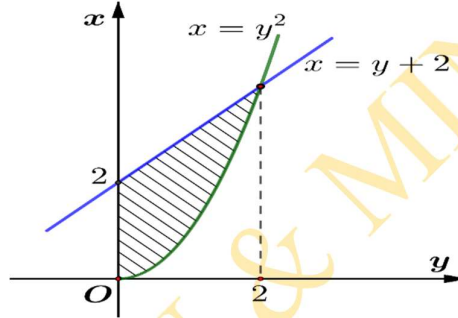
C. $\frac{13}{3}$.

D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Coi x là hàm số theo biến số y .



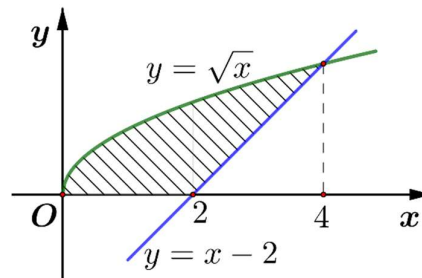
Hình phẳng đã cho giới hạn bởi các đường:

$x = y^2$ (với $y \geq 0$); $x = y + 2$; $y = 0$.

Ta có: $y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 & (\text{loại}) \\ y = 2 & (t/m) \end{cases}$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^2 |y + 2 - y^2| dy = \int_0^2 (y + 2 - y^2) dy = \frac{10}{3}$ (đvdt)

Cách 2:



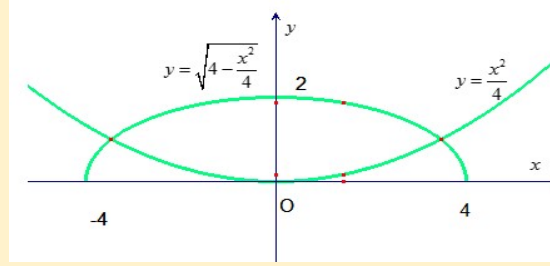
Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$:

$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x - 2) dx = \frac{10}{3}$ (đvdt)

Câu 49: (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{12}$ và

đường cong có phương trình $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ (tham khảo hình vẽ bên)



Diện tích hình phẳng (H) bằng:

- A. $\frac{2(4\pi + \sqrt{3})}{3}$ B. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3} + \pi}{6}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét phương trình } \frac{x^2}{12} = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow \frac{x^4}{144} = 4 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^4}{144} + \frac{x^2}{4} - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{12} \\ x = -\sqrt{12} \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng (H) bằng:

$$S = \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{12} \right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{12} \right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \right) dx - 2 \int_0^{\sqrt{12}} \frac{x^2}{12} dx$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \right) dx$$

$$\text{Đặt } x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$$

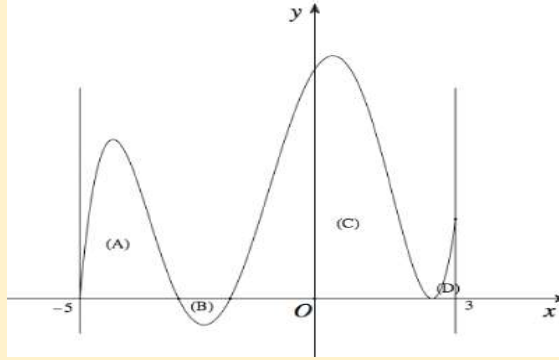
$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = \sqrt{12} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$I_1 = 8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_0^{\sqrt{12}} \frac{x^2}{12} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } S = 2I_1 - 2I_2 = \frac{2(4\pi + \sqrt{3})}{3}$$

Câu 50: (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích của hình phẳng (A), (B), (C), (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành lần lượt là 6; 3; 12; 2. Tính tích phân $\int_{-3}^1 [2f(2x+1)+1] dx$ bằng



A. 27.

B. 25.

C. 17.

D. 21.

Lời giải

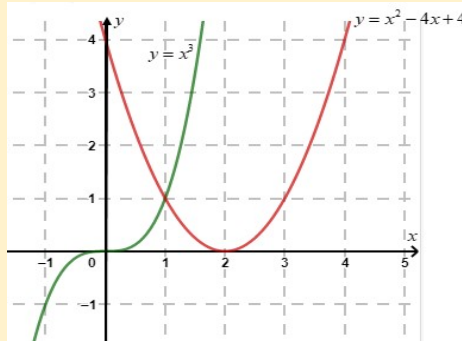
Chọn D

$$\text{Ta có } \int_{-3}^1 [2f(2x+1)+1]dx = 2 \int_{-3}^1 f(2x+1)dx + x \Big|_{-3}^1 = \int_{-5}^3 f(x)dx + 4$$

$$\text{Mà } \int_{-5}^3 f(x)dx = S_{(A)} - S_{(B)} + S_{(C)} + S_{(D)} = 6 - 3 + 12 + 2 = 17$$

$$\text{Vậy } \int_{-3}^1 [2f(2x+1)+1]dx = 21$$

Câu 51: (TT THANH TUỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^2 - 4x + 4$ và trục Ox (tham khảo hình vẽ) được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_0^2 |x^3 - (x^2 - 4x + 4)| dx$.

B. $-\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

C. $\int_0^1 x^3 dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

D. $\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox , $x = 0$, $x = 1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục Ox , $x = 1$, $x = 2$.

$$\text{Do đó diện tích cần tính là } S = \int_0^1 |x^3| dx + \int_1^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx.$$

Câu 52: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ - THÁNG 4 - 2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng?

A. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

B. $\frac{\pi-1}{2}$.

C. $\frac{\pi}{2} - 1$.

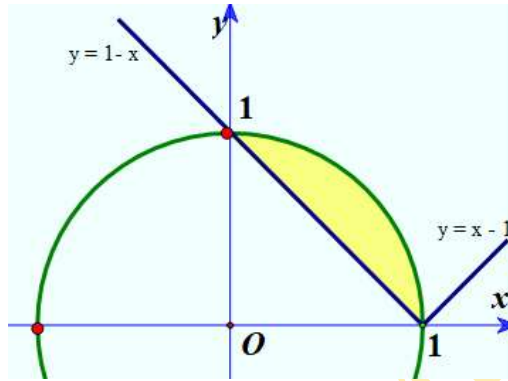
D. $\frac{\pi}{4} - 1$.

Lời giải

Chọn A

$$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1-x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2} \text{ do chỉ tính nửa trên của đường tròn nên ta lấy } y = \sqrt{1-x^2}.$$



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là phần tô màu vàng như hình vẽ.

$$\text{Diện tích hình phẳng trên là: } S = \int_0^1 [\sqrt{1-x^2} - (1-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 (x-1) dx$$

$$= I_1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 = I_1 - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]; dx = \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}.$$

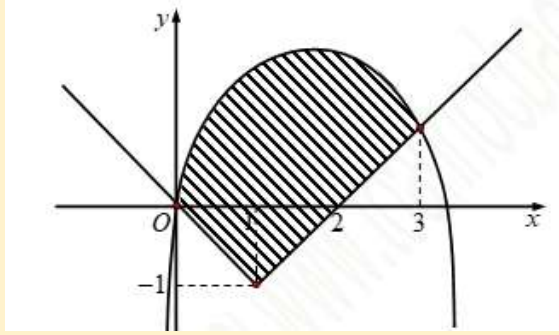
$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \text{ Vậy } S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Câu 53: [KIM LIÊN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018] Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ

và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq 1 \\ x-2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện

tích của (H) bằng?



A. $\frac{11}{6}$.

B. $\frac{13}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -x$ và $y = x - 2$ là: $-x = x - 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

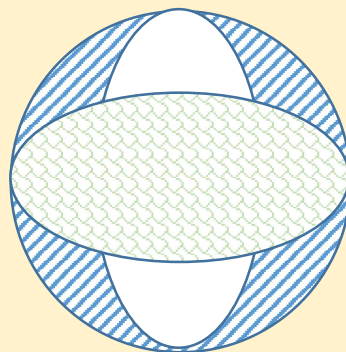
$$S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2 \right) dx.$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2 \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2 \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \left(\frac{13}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{7}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_1^3 = \frac{13}{2}.$$

Câu 54: (THCS&THPT NGUYỄN KHUYẾN - BÌNH DƯƠNG - 2018) Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip (phần gạch caro trên hình vẽ) gần với kết quả nào nhất trong 4 kết quả dưới đây?



A. $S = 4,8$.

B. $S = 3,9$.

C. $S = 3,7$.

D. $S = 3,4$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

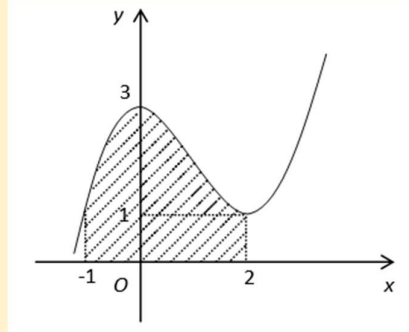
Hai Elip lần lượt có phương trình: $(E_1): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

Tọa độ giao điểm của hai Elip trong góc phần tư thứ nhất là nghiệm phương trình:

$$x^2 + \frac{1 - x^2}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm: } S = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 - 4 \int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \left(2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right) dx = 3,71$$

Câu 55: (THPT TRẦN QUỐC TUẤN - LẦN 1 - 2018) Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



A. $S = \frac{51}{8}$.

B. $S = \frac{52}{8}$.

C. $S = \frac{50}{8}$.

D. $S = \frac{53}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

+ Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và 3 $\Rightarrow S_1 = 3$.

$$+ \text{Miền } D_2 \text{ gồm: } \begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + c \\ y = 1 \\ x = -1; x = 2 \end{cases}.$$

Để thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình

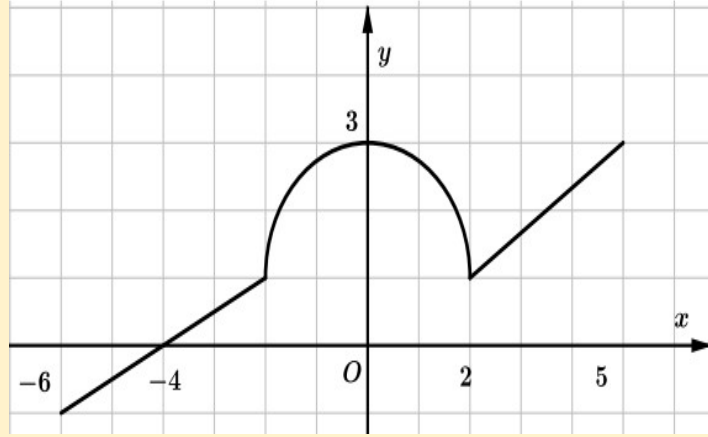
$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3.$$

$$\Rightarrow S_2 = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3 - 1 \right) dx = \frac{27}{8}.$$

$$\text{Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là } S = S_1 + S_2 = \frac{51}{8}.$$

Câu 56: (THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU - LẦN 3 - 2018) Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6; 5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị

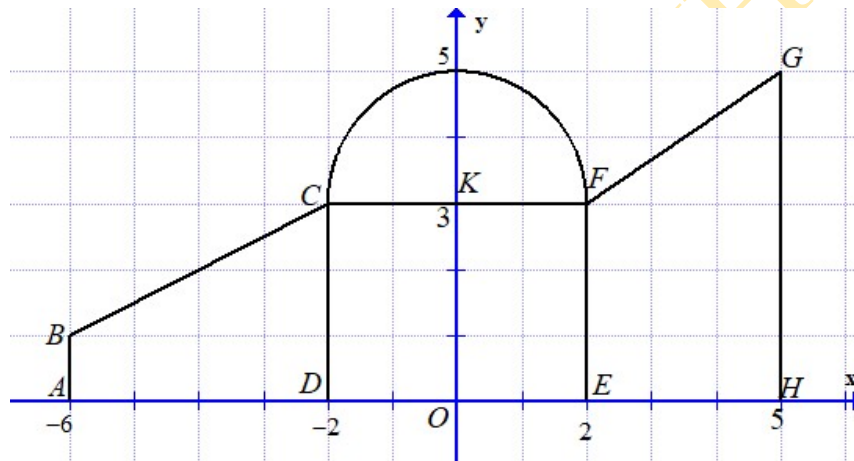
$$I = \int_{-6}^5 [f(x) + 2] dx.$$



- A. $I = 2\pi + 35$. B. $I = 2\pi + 34$. C. $I = 2\pi + 33$. D. $I = 2\pi + 32$.

Lời giải

Chọn D



$$I = \int_{-6}^5 [f(x) + 2] dx = \int_{-6}^5 g(x) dx \text{ với } g(x) = f(x) + 2 \text{ có đồ thị như hình vẽ.}$$

Có $I = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ trong đó:

$$S_1 \text{ là diện tích hình thang vuông } ABCD \Rightarrow S_1 = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(1 + 3) \cdot 4}{2} = 8,$$

$$S_2 \text{ là diện tích hình chữ nhật } CDEF \Rightarrow S_2 = 3 \cdot 4 = 12,$$

$$S_3 \text{ là diện tích hình tròn tâm } I, \text{ bán kính } R = 2 \Rightarrow S_3 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi,$$

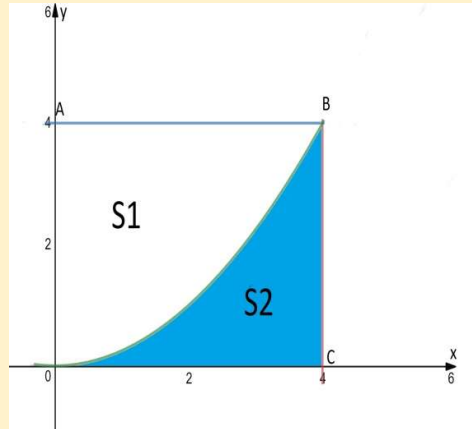
$$S_4 \text{ là diện tích hình thang vuông } EFGH \Rightarrow S_4 = \frac{(EF + GH) \cdot EH}{2} = \frac{(3 + 5) \cdot 3}{2} = 12.$$

$$\text{Suy ra } I = 8 + 12 + 2\pi + 12 = 2\pi + 32.$$

Dạng 1.2: Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng (có điều kiện)

◆ BÀI TẬP NỀN TẢNG ◆

Câu 57: Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{2}$.

B. 3.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng $S_1 + S_2$.

$$S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \left. \frac{x^3}{12} \right|_0^4 = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{16 - S_2}{S_2} = \frac{16 - \frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 2$$

Câu 58: (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t$ ($t > 1$). Tìm t để $S(t) = 10$.

A. $t = 3$.

B. $t = 4$.

C. $t = 13$.

D. $t = 14$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Ta có: $S(t) = \int_1^t |2x + 1| dx = \int_1^t (2x + 1) dx$.

Suy ra $S(t) = \left(x^2 + x \right) \Big|_1^t = t^2 + t - 2$.

Do đó $S(t) = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases} (L)$.

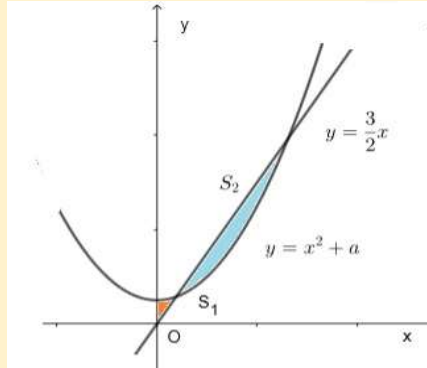
Vậy $t = 3$.

Cách 2. Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng $y(1) = 3$, đáy lớn bằng $y(t) = 2t + 1$ và chiều cao bằng $t - 1$.

$$\text{Ta có } \frac{(3+2t+1)(t-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}. \text{ Vì } t > 1 \text{ nên } t = 3$$

Do đó chọn đáp án **A**.

Câu 59: (Mã đề 104 - BGD - 2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0; \frac{2}{5}\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right)$

C. $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20}\right)$

D. $\left(\frac{9}{20}; \frac{1}{2}\right)$

Lời giải

Chọn C

Giải toán: Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + a = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2a = 0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{9}{16} \end{cases}.$

Gọi hai nghiệm đó là $0 < x_1 < x_2$ thì $x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}.$

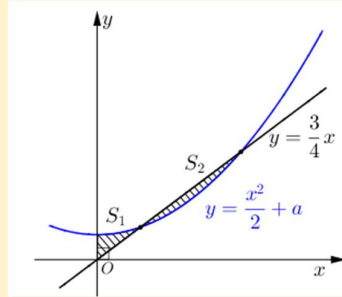
Để $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi $\int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x\right) dx = 0$

Ta có: $\int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x\right) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3} + ax_2 - \frac{3}{4}x_2^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}\right)^3}{3} + a \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}\right)^2 = 0$$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x = 0,421875$ thuộc khoảng $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20}\right).$

Câu 60: (Mã 102 - BGD - 2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$.

D. $\left(0; \frac{3}{16}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} & (*) \\ x_1 x_2 = 2a & (**) \end{cases}$.

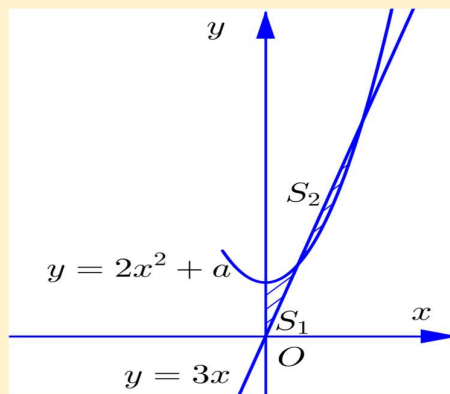
$$S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx + \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + ax \right|_0^{x_2} = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{8}x_2^2 + ax_2 \right| = 0 \Rightarrow a = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8} \quad (***)$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - x_2, \text{ thay vào } (**) \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - x_2\right)x_2 = -\frac{x_2^2}{3} + \frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3} - \frac{3x_2}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8}$$

$$\xrightarrow{(***)} a = \frac{27}{128}. \text{ Vậy } a \in \left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right).$$

Câu 61: (Mã 103 - BGD - 2019) Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1; \frac{9}{8}\right)$.

B. $\left(\frac{9}{10}; 1\right)$.

C. $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right)$.

D. $\left(0; \frac{4}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 + a = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + a = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ \frac{a}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{9}{8} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{8}.$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8a}}{4}$.

$$\text{Ta có } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx = - \int_{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}}^{\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx + \int_{\frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}}^{\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 + a - 3x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}} (2x^2 - 3x + a) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax \right) \Big|_0^{\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}} = 0$$

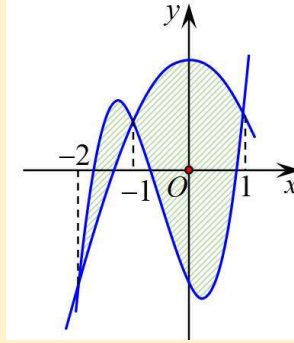
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^3 - \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^2 + a \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) + a \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} = 0 \text{ (vn)} \\ \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) + a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \right) + a = 0 \xrightarrow[\text{Shift Solve}]{\text{CASIO}} a = \frac{27}{32}$$

Câu 62: (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$

B. $\frac{37}{6}$

C. $\frac{13}{2}$

D. $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow a^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0. \quad (*)$$

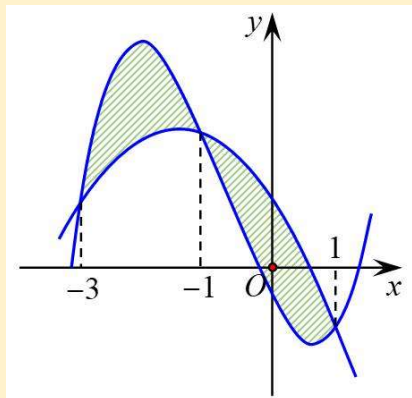
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$. Ta được

$$ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = k(x+2)(x+1)(x-1).$$

Khi đó $-4 = -2k \Rightarrow k = 2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^1 |2(x+2)(x+1)(x-1)| dx = \frac{37}{6}$.

Câu 63: (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5

B. $\frac{9}{2}$

C. 8

D. 4

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Xét phương trình $ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2} = dx^2 + ex + 1$ $\Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$ có 3

ng nghiệm lần lượt là $-3; -1; 1$ nên suy ra
$$\begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-d = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ c-e = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$$S = \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx = 2 + 2 = 4.$$

Cách 2: Ta có: $f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2}$

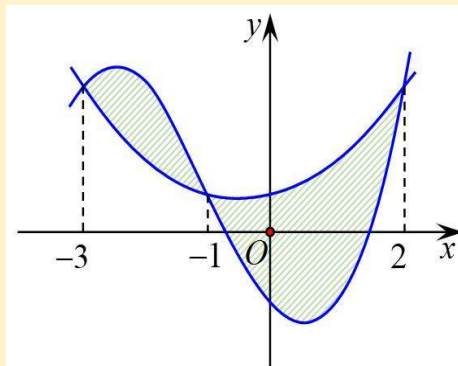
Xét hệ số tự do suy ra: $-3a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Do đó: $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng: $S = \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} (x+3)(x+1)(x-1) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+3)(x+1)(x-1) dx = 4.$$

Câu 64: (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$

B. $\frac{125}{12}$

C. $\frac{253}{48}$

D. $\frac{125}{48}$

Lời giải

Chọn C

Vì phương trình $f(x) - g(x) = 0$ có 3 nghiệm $-3; -1; 2$ nên

$$f(x) - g(x) = a(x+3)(x-2)(x+1).$$

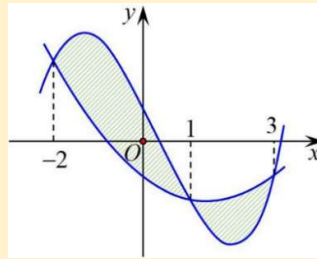
$$\text{So sánh hệ số tự do ta được } -6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Do đó } S = \int_{-3}^2 \left| \frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2) \right| dx = \frac{253}{48}.$$

Câu 65: (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và

$$g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}, (a, b, c, d, e \in \mathbb{R}). \text{ Biết rằng đồ thị của hàm số } y = f(x) \text{ và } y = g(x)$$

cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 3$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$

B. $\frac{125}{24}$

C. $\frac{125}{48}$

D. $\frac{253}{24}$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4} = dx^2 + ex - \frac{3}{4} \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2} = 0.$$

$$\text{Đặt } h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x = -2; x = 1; x = 3$.

$$\text{Với } x = -2 \text{ ta có } -8a + 4(b-d) - 2(c-e) = -\frac{3}{2}, (1).$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ ta có } a + (b-d) + (c-e) = -\frac{3}{2}, (2).$$

$$\text{Với } x = 3 \text{ ta có } 27a + 9(b-d) + 3(c-e) = -\frac{3}{2}, (3).$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta có } \begin{cases} -8a + 4(b-d) - 2(c-e) = -\frac{3}{2} \\ a + (b-d) + (c-e) = -\frac{3}{2} \\ 27a + 9(b-d) + 3(c-e) = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b-d = -\frac{1}{2} \\ c-e = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Hay ta có

$$S = \int_{-2}^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^1 \left| \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \right| dx + \int_1^3 \left| \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \right| dx = \frac{63}{16} + \frac{4}{3} = \frac{253}{48}.$$

Câu 66: Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

A. $T = 99$.

B. $T = 64$.

C. $T = 32$.

D. $T = 72$.

Lời giải

Chọn B

Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị.

Khi đó, phương trình các parabol mới là $(P_1): y = -x^2 + 4$, $(P_2): y = -\frac{a}{4}x^2 + a$.

Gọi A, B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-2; 0), B(2; 0) \Rightarrow AB = 4$.

Gọi A, B là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M(-\sqrt{4-a}; a), N(\sqrt{4-a}; a)$.

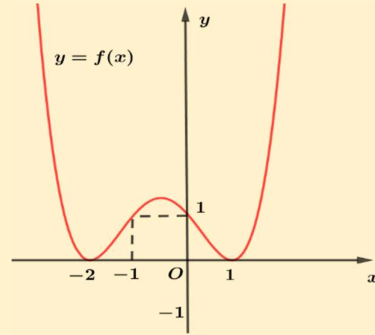
$$\text{Ta có } S_1 = 2 \int_a^4 \sqrt{4-y} dy = -\frac{4}{3} \left((4-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_a^4 = \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a}$$

$$S_2 = 2 \int_a^2 \left(-\frac{a}{4}x^2 + a \right) dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{12} + ax \right) \Big|_0^2 = \frac{8a}{3}.$$

$$\text{Theo giả thiết } S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64$$

Vậy $T = 64$.

Câu 67: (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng

- A. $\frac{127}{40}$. B. $\frac{127}{10}$. C. $\frac{107}{5}$. D. $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho có dạng $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Từ giả thiết đồ thị hàm số đã cho ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2; 0)$, $(-1; 1)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$ và có hai điểm cực tiểu là $(1; 0)$, $(-2; 0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-2) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ a + b + c + d = -1 \\ 16a - 8b + 4c - 2d = -1 \\ -32a + 12b - 4c + d = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{-3}{4} \\ d = -1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = f'(x)$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ là

$$S = \int_{-2}^4 |f(x) - f'(x)| dx$$

Vì biểu thức $f(x) - f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; 4)$ nên ta có

$$S = \left| \int_{-2}^{-1} [f(x) - f'(x)] dx \right| + \left| \int_{-1}^1 [f(x) - f'(x)] dx \right| + \left| \int_1^4 [f(x) - f'(x)] dx \right| = \frac{107}{5} (dvdt).$$

Câu 68: (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = 3$

D. $m = 4$

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} my = x^2 & (1) \\ mx = y^2 & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được: $mx = \left(\frac{x^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow m^3x - x^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m > 0 \end{cases}$

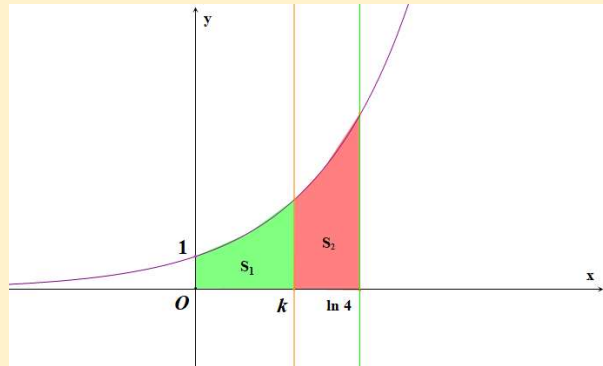
Vì $y = \frac{x^2}{m} > 0$ nên $mx = y^2 \xrightarrow{y>0} y = \sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_0^m \left| \sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right| dx = \left| \int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right) dx \right|$

$$= \left| \left(\frac{2\sqrt{m}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3m} \right) \right|_0^m = \left| \frac{1}{3} m^2 \right| = \frac{1}{3} m^2$$

Yêu cầu bài toán $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \xrightarrow{m>0} m = 3$

Câu 69: (THPT CẨM GIANG 2 NĂM 2018-2019) Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{4}{3} \ln 2$.

B. $k = \ln \frac{8}{3}$.

C. $k = \ln 2$.

D. $k = \ln 3$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$ là

$$S = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3 \text{ (đvdt)}.$$

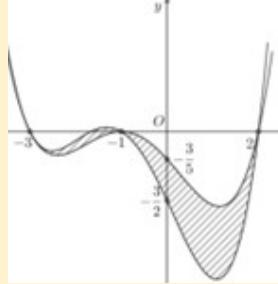
Ta có $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{3}{2} S_1$. Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$ (đvdt).

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ nên

$$2 = S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1.$$

$$\text{Do đó } e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3.$$

Câu 70: (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. 3,11

B. 2,45

C. 3,21

D. 2,95

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= a(x+3)(x+1)(x-2) = (ax+3a)(x^2-x-2) = ax^3 - ax^2 - 2ax + 3ax^2 - 3ax - 6a \\ &= ax^3 + 2ax^2 - 5ax - 6a \end{aligned}$$

$$f(0) - g(0) = -6a, \text{ quan sát hình vẽ ta có } f(0) - g(0) = -\frac{3}{5} + \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$$

$$\text{Nên } -6a = \frac{9}{10} \Rightarrow a = -\frac{3}{20} \quad S = \int_{-3}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-3}^2 \left| -\frac{3}{20}(x+3)(x+1)(x-2) \right| dx = \frac{253}{80} = 3.1625$$

Câu 71: (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Phương trình giao điểm của AB và (P) là: $x^2 - ax - b = 0$

$$\text{Để có 2 điểm } A, B \text{ thì } a^2 + 4b > 0. \text{ khi đó: } \begin{cases} A(x_1; ax_1 + b) \\ B(x_2; ax_2 + b) \\ x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = -b \end{cases}$$

$$\text{Nên } AB = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + 1)} |x_2 - x_1| = 2$$

$$\text{Giả sử } x_2 > x_1 \text{ ta có } |x_2 - x_1| = \frac{2}{\sqrt{(a^2 + 1)}} \leq 2$$

$$\text{Mặt khác: } |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{a^2 + 4b}$$

$$\text{Khi đó } S = \int_{x_1}^{x_2} ax + b - x^2 dx = \frac{a}{2}(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\frac{a}{2}(x_2 + x_1) + b - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) \right]$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\frac{a}{2} \cdot a + b - \frac{1}{3}(a^2 + b) \right] = (x_2 - x_1) \left[\frac{a^2}{2} + \frac{2b}{3} \right] = \frac{a^2 + 4b}{6}(x_2 - x_1) = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} \leq \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } S_{\max} = \frac{4}{3} \text{ khi } \begin{cases} a = 0 \\ x_2 - x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn vì } (P) \text{ có tính đối xứng)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(1;1) \\ B(-1;1) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(-1;1) \\ B(1;1) \end{cases}.$$

Câu 72: (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho Parabol $(P): y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

A. $(-\sqrt{2}; -\frac{1}{2})$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-1; \frac{1}{\sqrt{2}})$.

D. $(\frac{1}{2}; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ của (P) và d là $x^2 - mx - 1 = 0$ (1).

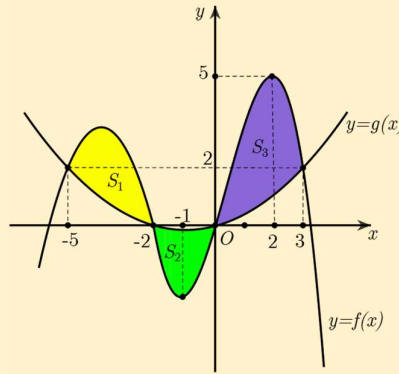
Dễ thấy (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi a, b ($a < b$) là các nghiệm của (1) thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b |x^2 - mx - 1| dx = \left| \int_a^b (x^2 - mx - 1) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} - x \right) \Big|_a^b \right| \\ &= \left| \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{m(b^2 - a^2)}{2} - (b - a) \right| = |b - a| \cdot \left| \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{m(b + a)}{2} - 1 \right| \\ &= \sqrt{(b + a)^2 - 4ab} \cdot \left| \frac{(b + a)^2 - ab}{3} - \frac{m(b + a)}{2} - 1 \right| \end{aligned}$$

$$\text{Mà } a + b = m, ab = -1 \text{ nên } S = \sqrt{m^2 + 4} \cdot \left(\frac{m^2}{6} + \frac{2}{3} \right) \geq \frac{4}{3}.$$

$$\text{Do đó } \min S = \frac{4}{3} \text{ khi } m = 0.$$

Câu 73: (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p .



Tích phân $\int_{-5}^3 f(x) dx$ bằng

A. $-m+n-p-\frac{208}{45}$.

B. $m-n+p+\frac{208}{45}$

C. $m-n+p-\frac{208}{45}$.

D. $-m+n-p+\frac{208}{45}$.

Lời giải

Chọn B

$$S_1 = \int_{-5}^{-2} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx - \int_{-5}^{-2} g(x) dx \Rightarrow \int_{-5}^{-2} f(x) dx = S_1 + \int_{-5}^{-2} g(x) dx.$$

$$S_2 = \int_{-2}^0 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-2}^0 g(x) dx - \int_{-2}^0 f(x) dx \Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 g(x) dx - S_2.$$

$$S_3 = \int_{-2}^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^3 f(x) dx - \int_{-2}^3 g(x) dx \Rightarrow \int_{-2}^3 f(x) dx = S_3 + \int_{-2}^3 g(x) dx.$$

$$\text{Do vậy: } \int_{-5}^3 f(x) dx = S_1 - S_2 + S_3 + \int_{-5}^3 g(x) dx.$$

Từ đồ thị ta thấy $\int_{-5}^3 g(x) dx$ là số dương. Mà 4 đáp án chỉ có B là phù hợp, nên ta chọn **B**.

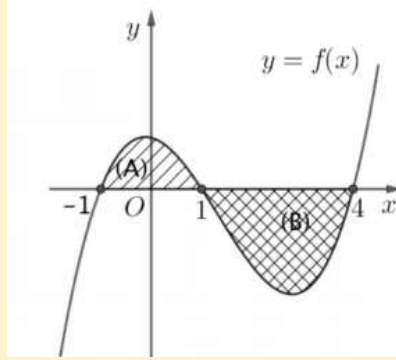
Chú ý: Có thể tính $\int_{-5}^3 g(x) dx$ như sau:

Từ đồ thị hàm số $y = g(x)$ ta thấy nó đi qua các điểm $(-5; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 25a - 5b + c = 2 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{15}, b = \frac{4}{15}, c = 0. \text{ Do đó: } \int_{-5}^3 g(x) dx = \int_{-5}^3 \left(\frac{2}{15}x^2 + \frac{4}{15}x \right) dx = \frac{208}{45}.$$

Câu 74: (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các phần $(A), (B)$ lần lượt bằng 3 và 7. Tích

phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx$ bằng



A. $-\frac{4}{5}$

B. 2

C. $\frac{4}{5}$

D. -2

Lời giải

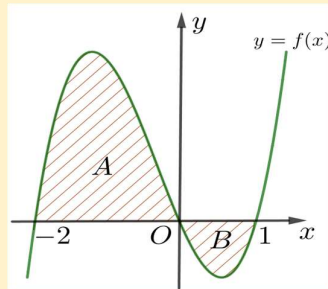
Chọn A

Theo giả thiết ta có $\int_{-1}^1 f(x) dx = 3$ và $\int_1^4 f(x) dx = -7$ suy ra $\int_{-1}^4 f(x) dx = -4$.

Đặt $t = 5 \sin x - 1 \Rightarrow dt = 5 \cos x dx$.

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^4 f(t) dt = \frac{1}{5} \int_{-1}^4 f(x) dx = -\frac{4}{5}.$$

Câu 75: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2.



Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx$ bằng

A. 3.

B. $\frac{13}{3}$.

C. 9.

D. 13.

Lời giải

Chọn A

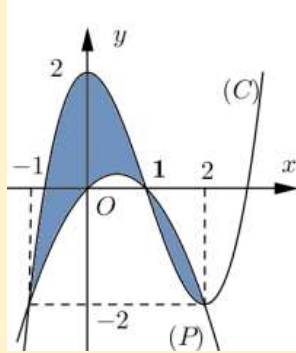
+) Xét $I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx$, đặt $(3x+1) = t \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

+) Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = -2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \left[\int_{-2}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt \right] = \frac{1}{3} (S_A - S_B) = \frac{1}{3} (11 - 2) = 3$$

Câu 76: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol

(P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{11}{12}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Gọi hàm số bậc ba là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị (C) đi qua các điểm $(1; 0), (2; -2)$ và đạt cực trị tại $x = 0; x = 2$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = a + b + c + d \\ -2 = 8a + 4b + 2c + d \\ 0 = c \\ 0 = 12a + 4b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc ba là $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Gọi hàm bậc hai là $y = mx^2 + nx + p$. Đồ thị (P) đi qua các điểm $(1; 0), (2; -2), (-1; -2)$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = m + n + p \\ -2 = 4m + 2n + p \\ -2 = m - n + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ p = 0 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc hai là $y = -x^2 + x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là :

$$x^3 - 3x^2 + 2 = -x^2 + x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy diện tích phần tô đậm là : $S = \int_{-1}^2 |(x^3 - 2x^2 - x + 2)| dx$.

$$S = \left| \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$

Cách 2: (Võ Thanh Hải)

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2, y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2, y = mx^2 + nx$.

* Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1; x = 1; x = 2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2) = 0$. Với $x = 0$ ta được $2a = 2 \rightarrow a = 1$.

*Vậy diện tích phân tô đậm là: $S = \int_{-1}^2 |(x+1)(x-1)(x-2)| dx = \frac{37}{12}$.

Câu 77: (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 , trong đó $S_1 < S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{12\pi}$.

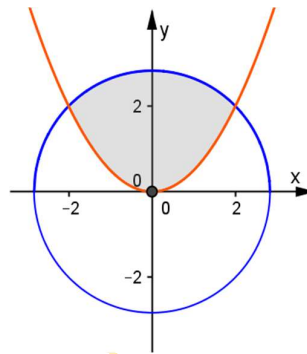
B. $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$.

C. $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

D. $\frac{3\pi+2}{21\pi-2}$.

Lời giải

Chọn C



Diện tích hình tròn là $S = \pi R^2 = 8\pi$.

Phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ là $x^2 + y^2 = 8$.

Hoành độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm của phương trình $x^2 + \frac{x^4}{4} = 8$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Phương trình nửa phía trên trục Ox của đường tròn là: $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Diện tích miền giới hạn bởi Parabol và nửa phía trên trục Ox của đường tròn là:

$$\int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x^2 dx$$

$$\text{Ta có } \int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \frac{16}{3}.$$

$$I = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = 2\sqrt{2} \sin t \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \Rightarrow dx = 2\sqrt{2} \cos t dt$$

$$+) x = -2 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$$

$$+) x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8-8\sin^2 t} \cdot 2\sqrt{2} \cos t dt = 8 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= 4 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4.$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

$$\text{Diện tích phần còn lại là } 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3} \right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_1 = 2\pi + \frac{4}{3}; S_2 = 6\pi - \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$$

Câu 78: Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^6}$ và

$$y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^6} \text{ có diện tích lớn nhất.}$$

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

B. 1.

C. 2.

D. $\sqrt[3]{3}.$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$\frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^6} = \frac{a^2 - ax}{1 + a^6} \Leftrightarrow x^2 + 3ax + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow (x + a)(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ x = -2a \end{cases}$$

□ □ Nếu $a = 0$ thì diện tích hình phẳng $S = 0$.

$$+ \text{ Nếu } a > 0 \text{ thì } S = \int_{-2a}^{-a} \left| \frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{1 + a^6} \right| dx = - \int_{-2a}^{-a} \frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{1 + a^6} dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{1 + a^6}.$$

$$+ \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } S = \int_{-a}^{-2a} \left| \frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{1 + a^6} \right| dx = - \int_{-a}^{-2a} \frac{x^2 + 3ax + 2a^2}{1 + a^6} dx = - \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{1 + a^6}.$$

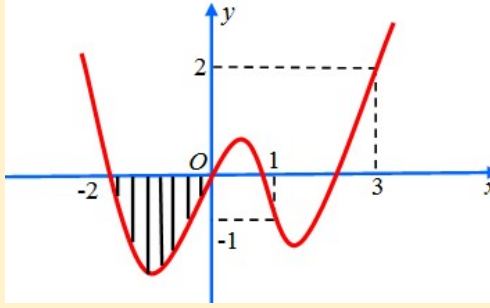
$$\text{Do đó, với } a \neq 0 \text{ thì } S = \frac{1}{6} \cdot \frac{|a|^3}{1 + |a|^6} \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{|a|^3}{2|a|^3} = \frac{1}{12}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|a|^3 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm đã cho có diện tích lớn nhất khi $a = 1$.

Câu 79: (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T = \int_1^2 f'(x+1) dx + \int_2^3 f'(x-1) dx + \int_3^4 f(2x-8) dx$$



A. $T = \frac{9}{2}$.

B. $T = 6$.

C. $T = 0$.

D. $T = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

+Diện tích phần kẻ sọc là: $S = \int_{-2}^0 |f(x)| dx = 3$.

Vì $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-2; 0] \Rightarrow 3 = \int_{-2}^0 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 [-f(x)] dx \Leftrightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx = -3$.

+Tính $I = \int_3^4 f(2x-8) dx$.

Đặt $t = 2x - 8 \Rightarrow dt = 2dx$; $x = 3 \Rightarrow t = -2$; $x = 4 \Rightarrow t = 0$.

Suy ra: $I = \int_{-2}^0 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f(x) dx = -\frac{3}{2}$.

Vậy $T = \int_1^2 f'(x+1) dx + \int_2^3 f'(x-1) dx + \int_3^4 f(2x-8) dx$

$= f(x+1) \Big|_1^2 + f(x-1) \Big|_2^3 + I = f(3) - f(2) + f(2) - f(1) - \frac{3}{2} = 2 - (-1) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Câu 80: (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a + b$ là:

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 6x^2 + m = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) (1) trở thành $t^2 - 6t + m = 0$ (2).

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt hay

phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (-3)^2 - m > 0 \\ P = m > 0 \\ S = 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 9$ (*).

Gọi t_1, t_2 ($0 < t_1 < t_2$) là hai nghiệm của phương trình (2). Lúc đó phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt theo thứ tự tăng dần là: $x_1 = -\sqrt{t_2}$; $x_2 = -\sqrt{t_1}$; $x_3 = \sqrt{t_1}$; $x_4 = \sqrt{t_2}$.

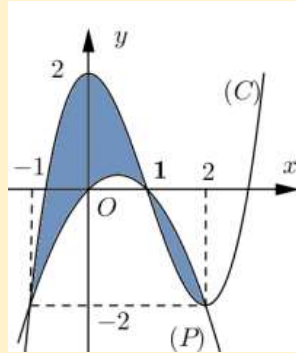
Do tính đối xứng của đồ thị (C_m) nên có $\int_0^{x_3} (x^4 - 6x^2 + m) dx = \int_{x_3}^{x_4} (-x^4 + 6x^2 - m) dx$
 $\Rightarrow \frac{x_4^5}{5} - 2x_4^3 + mx_4 = 0 \Leftrightarrow x_4^5 - 10x_4^3 + 5mx_4 = 0$.

Từ đó có x_4 là nghiệm của hệ phương trình: $\Leftrightarrow \begin{cases} x_4^4 - 6x_4^2 + m = 0 & (3) \\ x_4^4 - 10x_4^2 + 5m = 0 & (4) \end{cases}$

Lấy (3) - (4) $\Rightarrow x_4^2 = m$, thay $x_4^2 = m$ vào (3) có: $m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 5$.

Đối chiếu điều kiện (*) ta có $m = 5 \Rightarrow a = 5$ và $b = 1$. Vậy $S = 6$.

Câu 81: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{11}{12}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

+) Gọi (C): $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Do (C) cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 2 nên $d = 2$

(C) đi qua 3 điểm $A(-1; -2)$, $B(1; 0)$ và $C(2; -2)$ nên ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -a + b - c = -4 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases} \text{ Do đó } (C): y = x^3 - 3x^2 + 2$$

+) Gọi (P): $y = mx^2 + nx + r$ ($m \neq 0$)

Do (P) đi qua 3 điểm $A(-1; -2)$, $O(0; 0)$ và $C(2; -2)$ nên ta được

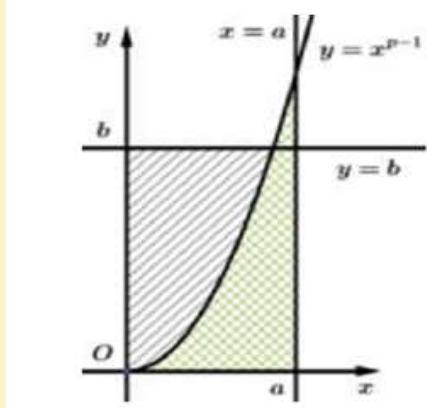
$$\begin{cases} m - n + r = -2 \\ r = 0 \\ 4m + 2n + r = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ r = 0 \\ n = 1 \end{cases} \text{ Do đó } (P): y = -x^2 + x$$

Vậy $S_{(H)} = \int_{-1}^2 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx \stackrel{MTCT}{=} \frac{37}{12}$

Câu 82: (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 2 - 2018) Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện:

$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b . Xét hàm số: $y = x^{p-1} (x > 0)$ có đồ thị là (C) .

Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a, y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



- A. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$ B. $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$ C. $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$ D. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S \leq S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_0^a (x^{p-1}) dx = \left(\frac{x^p}{p} \right) \Big|_0^a = \frac{a^p}{p}; \quad S_2 = \int_0^b \left(y^{\frac{1}{p-1}} \right) dy = \left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1} \right) \Big|_0^b = \left(\frac{y^q}{q} \right) \Big|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

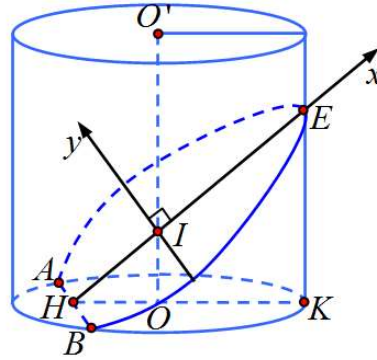
Vì: $\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q$. Vậy $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Câu 83: (SGD&ĐT HÀ NỘI - 2018) Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc 60° , (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

- A. $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2$ B. $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$ C. $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$ D. $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Gọi I, H, K, E là các điểm như hình vẽ.

* Ta có: $\widehat{IHO} = 60^\circ$

$$OH^2 = OB^2 - BH^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \Rightarrow OI = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

$$IH = \frac{OH}{\cos 60^\circ} = R, \Delta IOH \sim \Delta EKH \text{ nên ta có: } \frac{IE}{IH} = \frac{OK}{OH} = 2 \Rightarrow IE = 2R.$$

* Chọn hệ trục tọa độ Ixy như hình vẽ ta có elip (E) có bán trục lớn là $a = IE = 2R$ và (E) đi

qua $A\left(-R; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ nên (E) có phương trình là $(E): \frac{x^2}{4R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$.

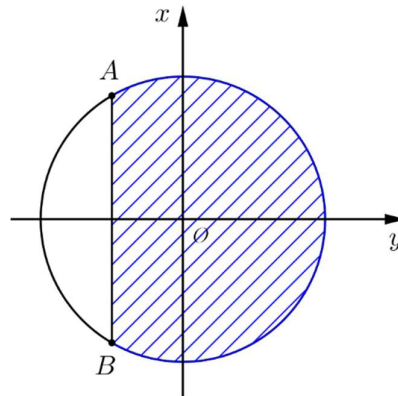
* Diện tích của thiết diện là $S = 2 \int_{-R}^{2R} R \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} dx = 2R \int_{-R}^{2R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} dx$

* Xét tích phân: $I = \int_{-R}^{2R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} dx$, đặt $x = 2R \cdot \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ta được

$$I = \frac{R}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{R}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) R \Rightarrow S = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2.$$

Cách 2: $\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow OH = \frac{R}{2}.$

Chọn hệ trục tọa độ *Oxy* như hình vẽ



$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn đáy là $x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S = 2 \int_{-\frac{R}{2}}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$. Đặt $x = R \cdot \sin t \Rightarrow S = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S' .

Theo công thức hình chiếu, ta có $S' = \frac{S}{\cos 60^\circ} = 2S = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2$.

Câu 84: (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI - LẦN 2 - 2018) Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{2018^3 + 1}{6}$. B. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$. C. $S_{\max} = \frac{2018^3 - 1}{6}$. D. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(a; a^2); B(b; b^2) (b > a)$ sao cho $AB = 2018$.

Phương trình đường thẳng d là: $y = (a+b)x - ab$. Khi đó

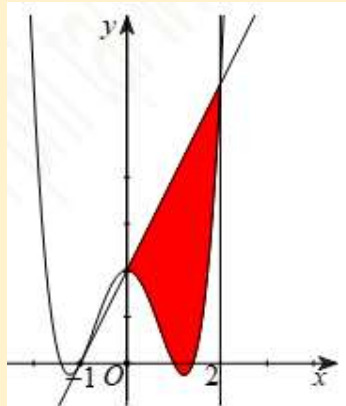
$$S = \int_a^b |(a+b)x - ab - x^2| dx = \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx = \frac{1}{6}(b-a)^3.$$

$$\text{Vì } AB = 2018 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 2018^2 \Leftrightarrow (b-a)^2 (1 + (b+a)^2) = 2018^2.$$

$$\Rightarrow (b-a)^2 \leq 2018^2 \Rightarrow |b-a| = b-a \leq 2018 \Rightarrow S \leq \frac{2018^3}{6}.$$

$$\text{Vậy } S_{\max} = \frac{2018^3}{6} \text{ khi } a = -1009 \text{ và } b = 1009.$$

Câu 85: (CHUYÊN KHTN - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$ có diện tích bằng

A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx \Rightarrow d : y = (-4a - 2b)(x + 1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $(-4a - 2b)(x + 1) = ax^4 + bx^2 + c(1)$.

Phương trình (1) phải cho 2 nghiệm là $x = 0, x = 2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - 2b = c \\ -12a - 6b = 16a + 4b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - c = 0(2) \\ 28a + 10b + c = 0(3) \end{cases}$$

Mặt khác, diện tích phần tô màu là $\frac{28}{5} = \int_0^2 [(-4a - 2b)(x + 1) - ax^4 - bx^2 - c] dx$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{5} = 4(-4a - 2b) - \frac{32}{5}a - \frac{8}{3}b - 2c \Leftrightarrow \frac{112}{5}a + \frac{32}{3}b + 2c = -\frac{28}{5}(4).$$

Giải hệ 3 phương trình (2), (3) và (4) ta được $a = 1, b = -3, c = 2$.

Khi đó, $(C): y = x^4 - 3x^2 + 2, d : y = 2(x + 1)$.

Diện tích cần tìm là $S = \int_{-1}^0 [x^4 - 3x^2 + 2 - 2(x + 1)] dx = \int_{-1}^0 (x^4 - 3x^2 - 2x) dx = \frac{1}{5}$.

Câu 86: (THPT TỨ KỲ - HẢI DƯƠNG - LẦN 2 - 2018) Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4 - x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = -2, x = m$, $(-2 < m < 2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S = \frac{25}{3}$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S = \int_{-2}^m |4 - x^2| dx = \frac{25}{3}$.

Phương trình $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bài ra $-2 < m < 2$ nên trên $(-2; m)$ thì $4 - x^2 = 0$ vô nghiệm.

$$\int_{-2}^m |4 - x^2| dx = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| \int_{-2}^m (4 - x^2) dx \right| = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^m \right| = \frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left| \left(4m - \frac{m^3}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right| = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} \right| = \frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} = \frac{25}{3} \\ 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}m^3 - 4m + 3 = 0 \\ \frac{1}{3}m^3 - 4m - \frac{41}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 12m + 9 = 0 \\ m^3 - 12m - 41 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(m) = m^3 - 12m$, với $m \in (-2; 2)$ có

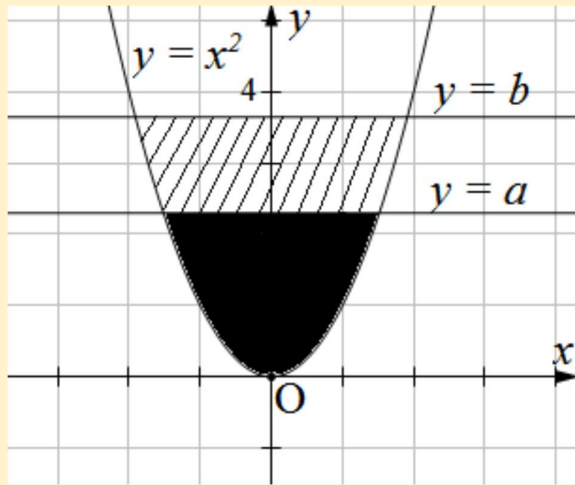
$$f'(m) = 3m^2 - 12 = 3(m^2 - 4) < 0, \forall m \in (-2; 2).$$

Do đó $f(m)$ nghịch biến trên $(-2; 2) \Rightarrow f(m) < f(-2) = 16 \Rightarrow m^3 - 12m - 41 < 0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow m^3 - 12m + 9 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m^2 + 3m - 3) = 0 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy chỉ có $m = \frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 87: (THPT MỘ ĐỨC - QUẢNG NGÃI - 2018) Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a, y = b$ ($0 < a < b$) (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



A. $b = \sqrt[3]{4}a$.

B. $b = \sqrt[3]{2}a$.

C. $b = \sqrt[3]{3}a$.

D. $b = \sqrt[3]{6}a$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = b$ là

$$x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = a$ là

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = b$ là

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{b}} (b - x^2) dx = 2 \left(bx - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{b}} = 2 \left(b\sqrt{b} - \frac{b\sqrt{b}}{3} \right) = \frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = a$ (phần tô màu đen) là

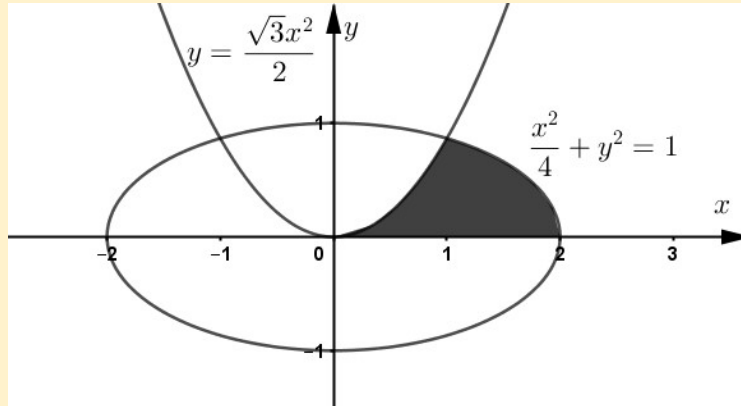
$$S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = 2 \left(ax - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = 2 \left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} \right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

$$\text{Do đó } S = 2S_1 \Leftrightarrow \frac{4b\sqrt{b}}{3} = 2 \cdot \frac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{b})^3 = 2(\sqrt{a})^3 \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4}a.$$

Câu 88: (THPT YÊN KHÁNH A - LẦN 2 - 2018) Cho hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) có diện tích $T = \frac{a}{b}\pi + \frac{c}{d}\sqrt{3}$

(với $a, c \in \mathbb{Z}$; $b, d \in \mathbb{N}^*$; $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $S = a + b + c + d$.



A. $S = 32$.

B. $S = 10$.

C. $S = 15$.

D. $S = 21$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

Hoành độ giao điểm (E') $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ và parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ là

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \Rightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ (theo hình vẽ thì } x > 0 \text{)}$$

$$\text{Vậy } T = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$$

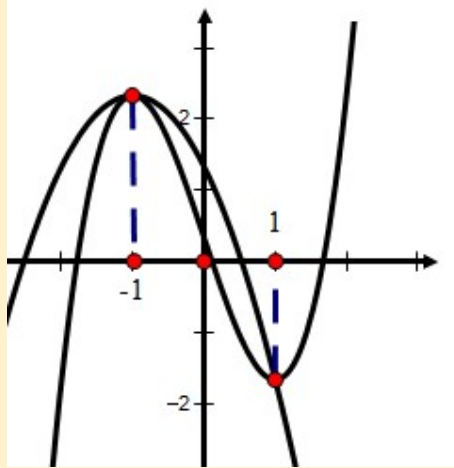
$$\text{Mà } \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 dx = \left. \frac{\sqrt{3}x^3}{6} \right|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Ta có: $I = \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$. Đặt $x = 2 \cos t$ ta có:

$$\int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sqrt{4 \sin^2 t} \cdot (-2 \sin t) dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó $T = \frac{1}{3}\pi + \frac{-1}{12}\sqrt{3}$ nên $S = 15$

Câu 89: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị (C) và $y = mx^2 + nx + p$ ($m, n, p \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. (0;1).

B. (1;2).

C. (2;3).

D. (3;4).

Lời giải

Chọn B

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị tại $x = \pm 1$ nên ta có

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 3 = 0 \\ -2a + b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$$

+ Hàm số $y = mx^2 + nx + p$ đạt cực đại tại $x = -1$ và (P) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ $x = \pm 1$ nên ta có

$$\begin{cases} -2m + n = 0 \\ 1 + a + b + c = m + n + p \\ -1 + a - b + c = m - n + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ m = -1 \\ p - c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S = \int_{-1}^1 (mx^2 + nx + p - x^3 - ax^2 - bx - x) dx = \int_{-1}^1 (-x^3 - x^2 + x + 1) dx = \frac{4}{3} \in (1; 2)$$

□ DẠNG TOÁN 2: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

Dạng 2.1: Ứng dụng của tích phân tính thể tích khối tròn xoay (không có điều kiện)

◆ BÀI TẬP NỀN TẢNG & VẬN DỤNG ◆

Câu 90: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \int_a^b |f(x)| dx$ B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ C. $V = \int_a^b f^2(x) dx$ D. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$

Lời giải

Chọn B

Câu 91: (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$). Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$ B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ C. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$ D. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$

Lời giải

Chọn B

Câu 92: (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$ B. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$
C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$ D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$$

Câu 93: (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$

B. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$

C. $V = \frac{\pi e^2}{3}$

D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left. \frac{e^{2x}}{2} \right|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$$

Câu 94: (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2$

B. $V = \frac{4\pi}{3}$

C. $V = 2\pi$

D. $V = \frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}$$

Câu 95: (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = (\pi + 1)\pi$

B. $V = \pi - 1$

C. $V = \pi + 1$

D. $V = (\pi - 1)\pi$

Lời giải

Chọn A

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2 + \cos x})^2 dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1).$$

Câu 96: MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2\pi(\pi + 1)$

B. $V = 2\pi$

C. $V = 2(\pi + 1)$

D. $V = 2\pi^2$

Lời giải

Chọn A

A Ta có: $V = \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{2 + \sin x})^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (2 + \sin x) dx = \pi (2x - \cos x) \Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi + 1).$

Câu 97: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x - 1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V = (e^2 - 5)\pi$

B. $V = (4 - 2e)\pi$

C. $V = e^2 - 5$

D. $V = 4 - 2e$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^1 [2(x-1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = (x-1)^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x-1)dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 2(x-1) \frac{e^{2x}}{2} dx = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx$$

$$\text{Gọi } I_1 = \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = 4\pi (x-1) \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = 2\pi - \pi e^{2x} \Big|_0^1 = 2\pi - \pi e^2 + \pi = 3\pi - \pi e^2$$

$$\text{Vậy } V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - I_1 = -2\pi - (3\pi - \pi e^2) = \pi(e^2 - 5).$$

Câu 98: (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$

B. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$

C. $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$

D. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.

Câu 99: (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $V = \frac{124}{3}$

B. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$

C. $V = 32 + 2\sqrt{15}$

D. $V = \frac{124\pi}{3}$

Lời giải

Chọn A

Diện tích thiết diện là: $S(x) = 3x \cdot \sqrt{3x^2 - 2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V = \int_1^3 3x \cdot \sqrt{3x^2 - 2} dx = \frac{124}{3}$

Câu 100: (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox .

- A. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$. B. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$. C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

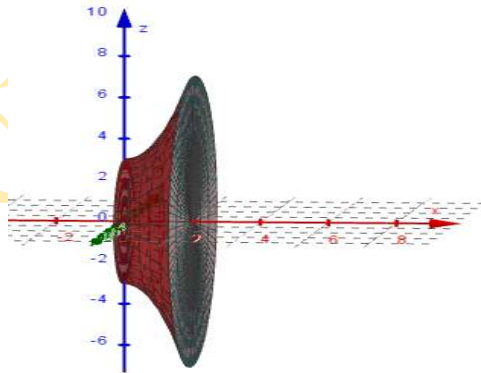
Vậy thể tích khối tròn xoay được tính $V = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

Câu 101: (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. B. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.
C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích của vật thể được tạo nên là $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

Câu 102: (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ B. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ C. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ D. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Lời giải

Chọn C

Công thức tính: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Câu 103: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục hoành bằng

- A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) = \frac{8\pi}{15}$.

Câu 104: (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

- A. 3π . B. $\frac{3\pi}{2}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$V = \pi \int_1^2 x dx = \frac{\pi x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Câu 105: (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

- A. $\int_0^2 (2x - x^2) dx$ B. $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$ C. $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$ D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

Lời giải

Chọn B

Theo công thức ta chọn $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$

Câu 106: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\tan x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

- A. $\frac{\pi \ln 2}{2}$. B. $\frac{\pi \ln 3}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\pi \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{\tan x})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x}$
 $= -\pi (\ln |\cos x|) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\pi \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi \ln 2}{2}.$

Câu 107: (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550 B. 400 C. 670 D. 335

Lời giải

Chọn d

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$$H = \left\{ y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}, y = 0, x = -5, x = 5 \right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_{-5}^5 \left(16 - \frac{16x^2}{25} \right) dx = \pi \left(16x - \frac{16x^3}{75} \right) \Big|_{-5}^5 = \frac{320\pi}{3} \approx 335,1$$

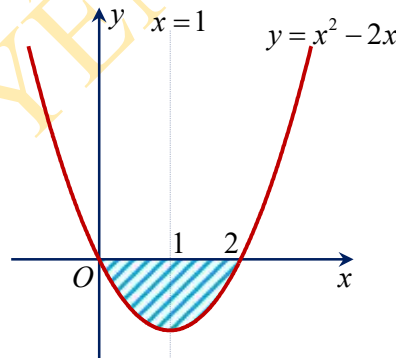
Câu 108: (THPT CẨM GIANG 2 NĂM 2018-2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

A. $V = \frac{4\pi}{3}$. B. $V = \frac{16\pi}{15}$. C. $V = \frac{7\pi}{8}$. D. $V = \frac{15\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề, ta có hình vẽ sau:



Nhận xét: Khi nhìn vào hình vẽ. Đường thẳng $x = 1$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường $y = x^2 - 2x$ và trục hoành làm 2 phần. Dễ thấy lúc này hình phẳng (H) không thể xác định vì phần hình giới hạn bởi $x = 0$ đến $x = 1$ và $x = 1$ đến $x = 2$ chưa rõ ràng.

Nếu xét phần tròn xoay khi xoay hình phẳng quanh trục Ox khi $x = 0$ đến $x = 2$ thì không có đáp án trong bài, đồng thời đề cho thêm đường thẳng $x = 1$ là không cần thiết.

Do đó để bài toán có đáp án và rõ ràng hơn ta điều chỉnh đề như sau:

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

$$\text{Hình phẳng } (H) \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 - 2x$ và $y = 0$ (trục hoành) là:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi đó thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V_{Ox} = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 109: (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Thể tích khối

tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox là

- A. $\frac{81\pi}{35}$. B. $\frac{81}{35}$. C. $\frac{71\pi}{35}$. D. $\frac{71}{35}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + x^4 \right) dx = \frac{81\pi}{35}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là: $V = \frac{81\pi}{35}$.

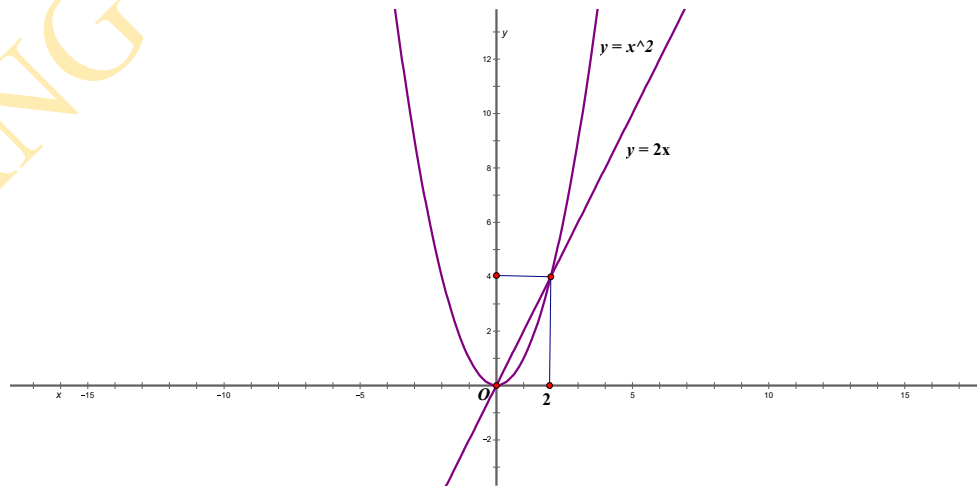
Câu 110: (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Thể tích khối

tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng d : $y = 2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

- A. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$. B. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.
C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. D. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

Lời giải

Chọn D



Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } V_{Ox} = \pi \int_0^2 (2x)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$$

Câu 111: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1)$; $y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox .

A. $\frac{64\pi}{15}$.

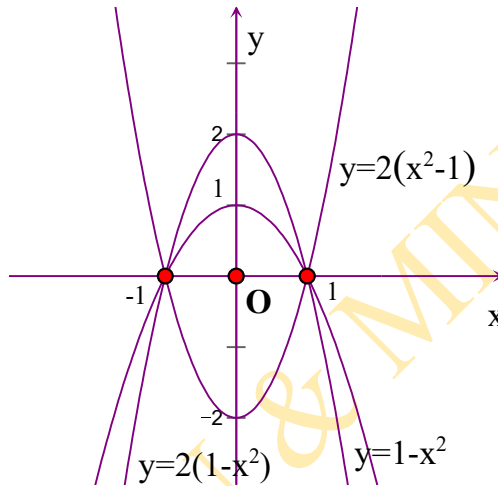
B. $\frac{32}{15}$.

C. $\frac{32\pi}{15}$.

D. $\frac{64}{15}$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ và $y = 1 - x^2$ là

$$2(x^2 - 1) = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y = 2(1 - x^2)$.

Ta có $2(1 - x^2) \geq 1 - x^2, \forall x \in [-1; 1]$. Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_{-1}^1 [2(x^2 - 1)]^2 dx = \frac{64\pi}{15}.$$

Câu 112: (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 5

B. $\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

C. $\frac{3\pi}{2}$

D. $\pi \left(\frac{1}{2} + \pi\right)$

Lời giải

Chọn B

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x d(\tan x) = \pi \int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Câu 113: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2$, $y = 0$ và $x = 9$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V = \frac{7}{6}$.

B. $V = \frac{5\pi}{6}$.

C. $V = \frac{7\pi}{11}$.

D. $V = \frac{11\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x} - 2$ và trục hoành: $\sqrt{x} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_4^9 (\sqrt{x} - 2)^2 dx = \pi \int_4^9 (x - 4\sqrt{x} + 4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{8x\sqrt{x}}{3} + 4x \right) \Big|_4^9 \\ &= \pi \left(\frac{81}{2} - 72 + 36 \right) - \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{64}{3} + 16 \right) = \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

Câu 114: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LÀN 3 NĂM 2018-2019) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$.

B. $\frac{32\pi}{3}$.

C. $\frac{34\pi}{3}$.

D. $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành

$$\sqrt{4x - x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4x - x^2})^2 dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2) dx = \frac{32}{3} \pi.$$

Vậy thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là $\frac{32}{3} \pi$.

Câu 115: (CHUYÊN NGUYỄN TẮT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox .

A. $V = \frac{4}{3} \pi$.

B. $V = \frac{16}{15} \pi$.

C. $V = \frac{16}{15}$.

D. $V = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với trục hoành: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra do (H) quay quanh Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{15} \pi.$$

Câu 116: (THPT NGHĨA HƯNG ND- GK2 - 2018 - 2019) Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$ và trục Ox bằng:

A. $V = \frac{19\pi}{15}$.

B. $V = \frac{13\pi}{15}$.

C. $V = \frac{17\pi}{15}$.

D. $V = \frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

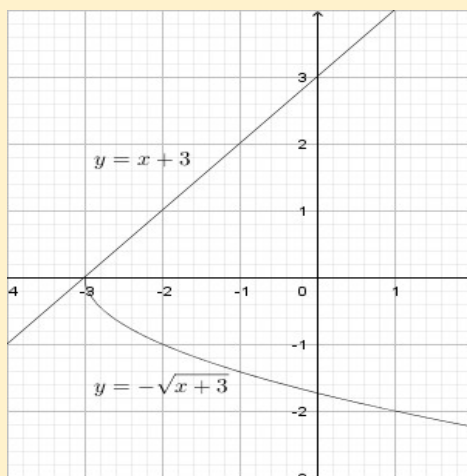
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox :

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$$

Câu 117: Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 3$, $y = -\sqrt{x+3}$, $x = 1$ xoay quanh trục Ox .



A. $\frac{41}{2}\pi$.

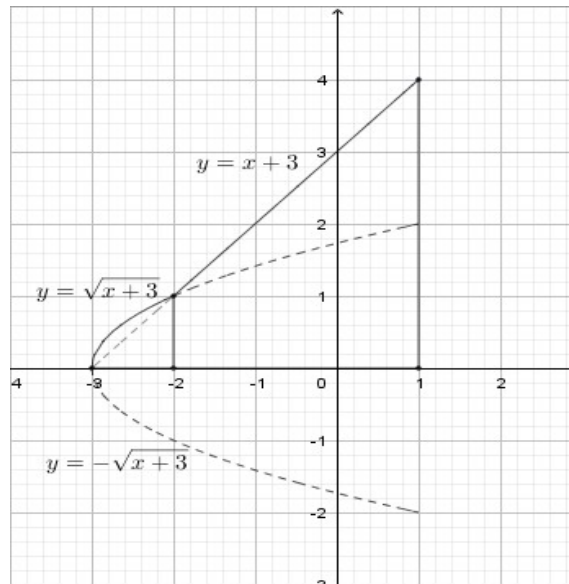
B. $\frac{43}{2}\pi$.

C. $\frac{41}{3}\pi$.

D. $\frac{40}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Xét phương trình $x+3 = -\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 0 \\ \sqrt{x+3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$

Xét hình (H) giới bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x+3}$ ($-3 \leq x \leq -2$), $y = x+3$ ($-2 \leq x \leq 1$), $y = 0$ và $x = 1$.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm chính bằng thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay quanh hình (H) quanh trục Ox . Do đó

$$V = \pi \int_{-3}^{-2} [\sqrt{x+3}]^2 dx + \pi \int_{-2}^1 (x+3)^2 dx = \frac{43\pi}{2}.$$

Câu 118: (THPT QUANG TRUNG ĐỒNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

- A. $V = e^2 - 1$. B. $V = \pi(e^2 - 1)$. C. $V = \frac{1}{4}\pi e^2 - 1$. D. $V = \frac{1}{4}\pi(e^2 - 1)$.

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x} \cdot e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Khi đó thể tích của khối tròn xoay được tạo thành là:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} \cdot e^{x^2})^2 dx = \pi \int_0^1 x e^{2x^2} dx = \pi \frac{1}{4} \int_0^1 e^{2x^2} d(2x^2) = \pi \frac{1}{4} e^{2x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \pi (e^2 - 1).$$

Câu 119: (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0; x = 2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x ($0 \leq x \leq 2$) ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

- A. $\frac{\pi(13e^4 - 1)}{4}$. B. $\frac{13e^4 - 1}{4}$. C. $2e^2$. D. $2\pi e^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích thiết diện là $S(x) = (x+1)^2 e^{2x}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 (x+1)^2 e^{2x} dx$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (x+1)^2 e^{2x} \Big|_0^2 - \int_0^2 (x+1) e^{2x} dx = \frac{9e^4 - 1}{2} - \left(\frac{x+1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x} dx \right) \\ &= \frac{9e^4 - 1}{2} - \frac{3e^4 - 1}{2} + \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^2 = 3e^4 + \frac{1}{4} e^4 - \frac{1}{4} = \frac{13e^4 - 1}{4}. \end{aligned}$$

Câu 120: (TT HOÀNG HOA THÁM - 2018-2019) Cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng bán kính $R = 3$ thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1), (S_2)$.

A. $V = \frac{45\pi}{8}$.

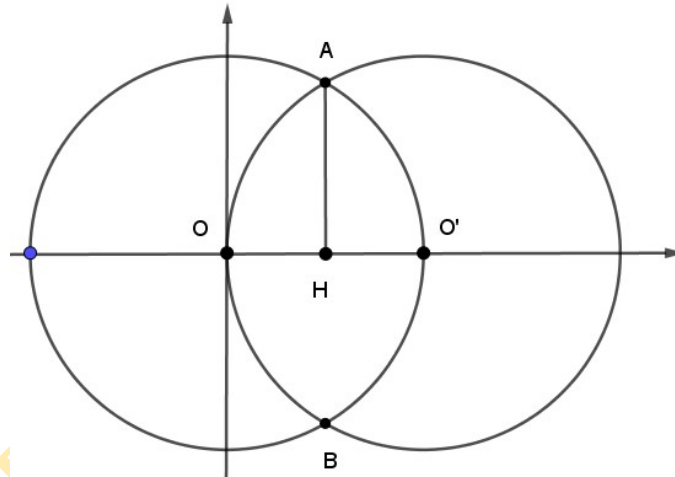
B. $V = \frac{45\pi}{4}$.

C. $V = \frac{45}{4}$.

D. $V = \frac{45}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1), (S_2)$ là một khối tròn xoay, tương đương phần hình phẳng OAO' quay quanh trục OO' hay bằng hai lần phần mặt phẳng tạo bởi AHO' quay quanh trục OO' .

Đặt hệ trục như hình khi đó phương trình đường tròn (O) là $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$, điểm

H có hoành độ bằng $\frac{3}{2}$; O' có hoành độ là 3 nên thể tích:

$$V = \pi \int_{\frac{3}{2}}^3 \left(\sqrt{9 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{\frac{3}{2}}^3 (9 - x^2) dx = \frac{45}{8} \pi.$$

Câu 121: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ - THÁNG 4 - 2018) Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$.

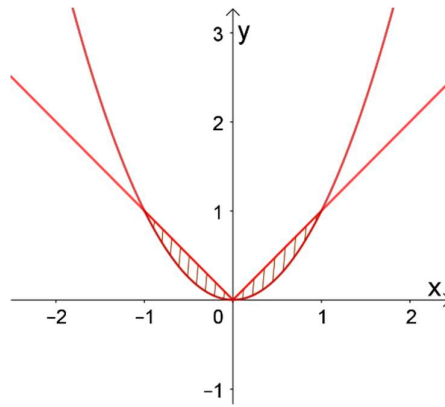
B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{2\pi}{15}$.

D. $\frac{4\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm $|x| = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$.

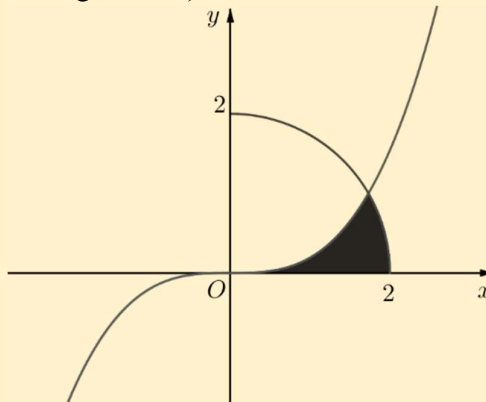
Ta có đồ thị hai hàm số $y = |x|$ và $y = x^2$ đều đối xứng qua Oy nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $x = y$ và $x = \sqrt{y}$ quay xung quanh trục Oy .

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^1 |y - y^2| dy = \pi \int_0^1 (y - y^2) dy = \pi \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 122: (THPT CHUYÊN NGUYỄN THỊ MINH KHAI - SÓC TRĂNG - 2018) Cho hình (H)

giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9} x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là

$V = \left(-\frac{a}{b} \sqrt{3} + \frac{c}{d} \right) \pi$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính

$P = a + b + c + d$.

A. $P = 52$.

B. $P = 40$.

C. $P = 46$.

D. $P = 34$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{\sqrt{3}}{9} x^3 = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$$V = \pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{9} x^3 \right)^2 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\sqrt{4-x^2} \right)^2 dx \right]$$

$$= \pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{27} x^6 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (4-x^2) dx \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{27} \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_0^{\sqrt{3}} + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\sqrt{3}}^2 \right]$$

$$= \left(-\frac{20\sqrt{3}}{7} + \frac{16}{3} \right) \pi.$$

$$\Rightarrow a = 20, b = 7, c = 16, d = 3$$

$$\Rightarrow P = a + b + c + d = 46.$$

Dạng 2.2: Ứng dụng của tích phân tính thể tích khối tròn xoay (có điều kiện)

◆ BÀI TẬP NỀN TẢNG & VẬN DỤNG ◆

Câu 123: (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000\pi$.

A. 18.

B. 20.

C. 19.

D. 21.

Lời giải

Chọn A

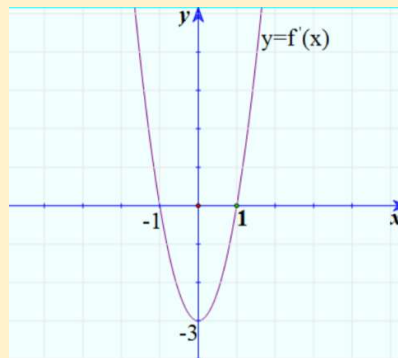
Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V = \pi \int_{-|m|}^{|m|} (m^2 - x^2) dx = \pi \left(m^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-|m|}^{|m|} = \frac{4\pi m^2 |m|}{3}$

Ta có: $V < 1000\pi \Leftrightarrow \frac{4\pi m^2 |m|}{3} < 1000\pi \Leftrightarrow |m|^3 < 750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750} < m < \sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750} \approx 9,08$ và $m \neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của m .

Câu 124: (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox .



A. $\frac{725}{35}\pi$.

B. $\frac{1}{35}\pi$.

C. 6π .

D. đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 1)$.

Khi đó $f(x) = \int f'(x) dx = x^3 - 3x + C$.

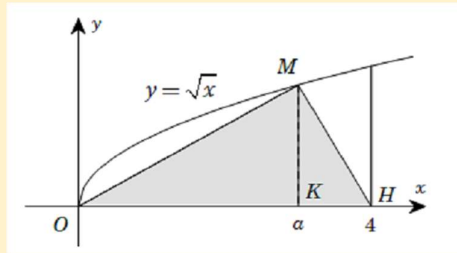
Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ là:

$$\begin{cases} f(x) = 4 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + C = 4 \\ 3(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ C = 2 \end{cases} \text{ suy ra } f(x) = x^3 - 3x^2 + 2(C).$$

$+(C) \cap Ox \Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x = -2; x = 1$.

$$+\text{Khi đó } V = \pi \int_{-2}^1 (x^3 - 3x^2 + 2)^2 dx = \frac{729}{35} \pi.$$

Câu 125: (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



A. $a = 2$.

B. $a = 2\sqrt{2}$.

C. $a = \frac{5}{2}$.

D. $a = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi. \text{ Mà } V = 2V_1 \Rightarrow V_1 = 4\pi.$$

Gọi K là hình chiếu của M trên $Ox \Rightarrow OK = a, KH = 4 - a, MK = \sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK , hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là

$$OH = 4 \text{ nên thể tích của khối tròn xoay đó là } V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}, \text{ từ đó suy ra } a = 3.$$

Câu 126: (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , $(H_1): \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = -\frac{x^2}{4} \\ x = -4, x = 4 \end{cases}$,

$$(H_2): \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x^2 + (y-2)^2 \geq 4 \\ x^2 + (y+2)^2 \geq 4 \end{cases}.$$

Cho $(H_1), (H_2)$ xoay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt V_1, V_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $V_1 = V_2$.

B. $V_1 = \frac{1}{2} V_2$.

C. $V_1 = 2V_2$.

D. $V_1 = \frac{3}{2} V_2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } V_1 = 8 \cdot (\pi \cdot 4^2) - 2 \left(\pi \int_0^4 (\sqrt{4y})^2 dy \right) = 96\pi$$

$$V_2 = \frac{4\pi \cdot 4^3}{3} - 2 \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} = 64\pi$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{3}{2} V_2$$

Câu 127: (THPT CHU VĂN AN - THÁI NGUYÊN - 2018) Cho hình thang $ABCD$ có AB song song CD và $AB = AD = BC = a$, $CD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục là đường thẳng AB .

A. $\frac{5}{4}\pi a^3$.

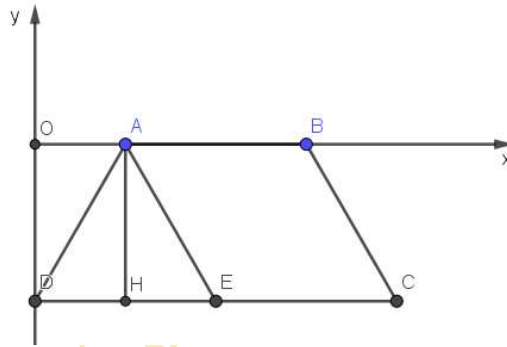
B. $\frac{5}{2}\pi a^3$.

C. $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

D. πa^3 .

Lời giải

Chọn A



Để thấy $ABCE$ là hình bình hành nên $AE = BC = a$. Vậy ADE là tam giác đều.

$$\text{Có } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Có phương trình $CD: y = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $x_D = 0, x_C = 2a$;

$$A\left(\frac{a}{2}; 0\right).$$

$$\text{Phương trình } AD: y = \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = \pi \int_0^{2a} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{4} \cdot 2a - 2\pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(3x^2 - 3ax + \frac{3a^2}{4}\right)$$

$$\frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi \left(x^3 - \frac{3a}{2}x^2 + \frac{3a^2}{4}x\right) \Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{5}{4}\pi a^3.$$

Cách 2: Thể tích khối tròn xoay được tạo ra theo đề bài là thể tích khối trụ có chiều cao $2a$ bán kính đáy bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trừ đi thể tích hai khối nón cùng có chiều cao $\frac{a}{2}$ bán kính đáy $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy

$$V = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 2a - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{5}{4} \pi a^3.$$

Câu 128: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y = x - \pi$, $y = \sin x$ và $x = 0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục hoành và $V = p\pi^4$, $(p \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

A. 8.

B. 4.

C. 24.

D. 12.

Lời giải

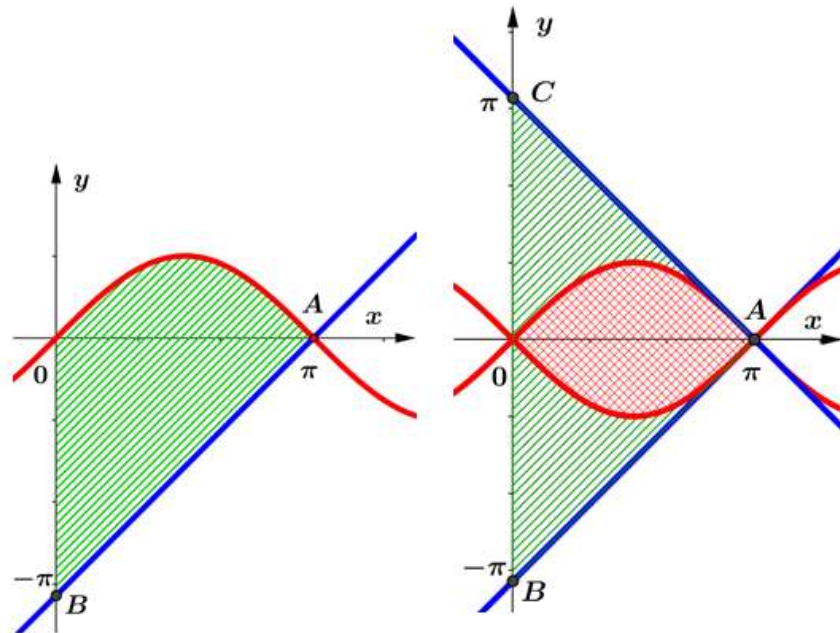
Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - \pi$ và $y = \sin x$:

$x - \pi = \sin x \Leftrightarrow x - \pi - \sin x = 0$ (1). Ta thấy $x = \pi$ là một nghiệm của phương trình (1).

Xét hàm số $f(x) = x - \pi - \sin x \Rightarrow f'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x = \pi$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$.



Cách 1:

Xét hàm số $g(x) = \pi - x - \sin x, x \in (0; \pi)$.

$g'(x) = -1 - \cos x < 0, \forall x \in (0; \pi)$, suy ra hàm số $g(x) = \pi - x - \sin x$ nghịch biến trên $(0; \pi)$.

$\forall x \in (0; \pi): g(x) > g(\pi) \Rightarrow \pi - x - \sin x > \pi - \pi - \sin \pi = 0 \Rightarrow \pi - x > \sin x$ (2).

Do đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành là thể tích của khối nón khi quay tam giác vuông OAB quanh trục hoành.

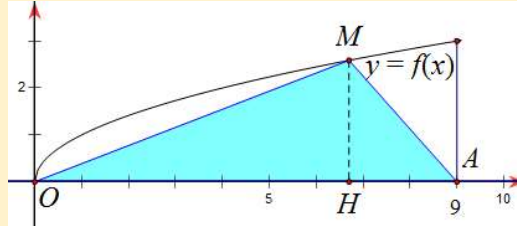
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OB^2 \cdot OA = \frac{1}{3} \pi \cdot \pi^2 \cdot \pi = \frac{1}{3} \pi^4 \Rightarrow p = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } 24p = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8.$$

Cách 2: Từ (2) ta có $V = \pi \int_0^\pi (x - \pi)^2 dx = \pi \int_0^\pi (x - \pi)^2 d(x - \pi)$

$$= \pi \cdot \frac{(x - \pi)^3}{3} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^4}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

Vậy $24p = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8.$

Câu 129: (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - TPHCM - 2018) Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , đường thẳng $x = 9$ và trục Ox . Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox . Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM .



A. $S = 3.$

B. $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$

C. $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

D. $S = \frac{4}{3}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $V_1 = \pi \int_0^9 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{81\pi}{2}.$

Gọi H là hình chiếu của M lên trục Ox , đặt $OH = m$ (với $0 < m \leq 9$), ta có $M(m; \sqrt{m})$, $MH = \sqrt{m}$ và $AH = 9 - m$.

Suy ra $V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot MH^2 \cdot OH + \frac{1}{3} \pi \cdot MH^2 \cdot AH = \frac{1}{3} \pi \cdot MH^2 \cdot OA = 3m\pi.$

Theo giả thiết, ta có $V_1 = 2V_2$ nên $\frac{81\pi}{2} = 6m\pi \Leftrightarrow m = \frac{27}{4}$. Do đó $M\left(\frac{27}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$

Từ đó ta có phương trình đường thẳng OM là $y = \frac{2\sqrt{3}}{9}x.$

Diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM là

$$S = \int_0^{\frac{27}{4}} \left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x \right) dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{9}x^2 \right) \Big|_0^{\frac{27}{4}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

□ DẠNG TOÁN 3: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Dạng 3.1: Bài toán cho biết hàm số của vận tốc, quãng đường của chuyển động

◆ BÀI TẬP NỀN TẢNG & VẬN DỤNG ◆

Câu 130: (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 15 (m/s) B. 9 (m/s) C. 42 (m/s) D. 25 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Ta có $v_B(t) = \int a \cdot dt = at + C$, $v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \right) dt = \left(\frac{1}{300}t^3 + \frac{13}{60}t^2 \right) \Big|_0^{25} = \frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B = \int_0^{15} at \cdot dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{15} = \frac{225a}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{375}{2} = \frac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}.$$

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15) = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25$ (m/s).

Câu 131: (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 21 (m/s) B. 25 (m/s) C. 36 (m/s) D. 30 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên

$$v_B(t) = at.$$

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45} \right) dt = \int_0^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30 (m/s)$.

Câu 132: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 0,2m B. 2m C. 10m D. 20m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10m.$$

Câu 133: (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t (m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a (m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. $15(m/s)$ B. $20(m/s)$ C. $16(m/s)$ D. $13(m/s)$

Lời giải

Chọn C

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C$.

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

$$S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a(m).$$

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} (m/s^2)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16(m/s)$.

Câu 134: (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng

với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 15 (m/s) B. 10 (m/s) C. 7 (m/s) D. 22 (m/s)

Lời giải

Chọn A

Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường đi được tới lúc đó là $\int_0^{15} v(t) dt = \int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t \right) dt = \left(\frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2 \right) \Big|_0^{15} = 75 \text{ (m)}$.

Vận tốc của chất điểm B là $y(t) = \int a \cdot dt = at + C$ (C là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $y(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$;

Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t) dt = 75 \Leftrightarrow \int_0^{10} at dt = 75 \Leftrightarrow \frac{at^2}{2} \Big|_0^{10} = 75 \Leftrightarrow 50a = 75 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vậy có $y(t) = \frac{3t}{2}$; suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $y(10) = 15 \text{ (m/s)}$.

Câu 135: (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t

(giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s \text{ (m)}$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 18 (m/s) B. 108 (m/s) C. 64 (m/s) D. 24 (m/s)

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của vật chuyển động là $v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = f(t)$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0; 6]$

Ta có $f'(t) = -3t + 12 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in [0; 6]$

$$f(0) = 0; f(4) = 24; f(6) = 18$$

Vậy vận tốc lớn nhất là 24 (m/s) .

Câu 136: (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 (m/s) thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A. 20 m .

B. 30 m .

C. 10 m .

D. 40 m .

Lời giải

Chọn D

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4(s)$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $s = \int_0^4 (-5t + 20) dt = 40(m)$.

Câu 137: (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Một ô tô đang chạy với vận tốc là $12 (m/s)$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12 (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 8m .

B. 12m .

C. 15m .

D. 10m .

Lời giải

Chọn B

Lấy mốc thời gian ($t = 0$) là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t) = 0$, tức là $v(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là

$$\int_0^2 (-6t + 12) dt = \left(-3t^2 + 12t \right) \Big|_0^2 = 12 (m).$$

Câu 138: (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(m/s)$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 38m.

B. 37,2m.

C. 37,5m.

D. 37m.

Lời giải

Chọn C

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó quãng đường xe đi được tính từ lúc bắt đầu hãm phanh đến khi dừng hẳn là:

$$S = \int_0^5 (-3t + 15) dt = \left(-\frac{3t^2}{2} + 15t \right) \Big|_0^5 = 37,5 m$$

Vậy ta chọn đáp án **C**.

Câu 139: (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Một ô tô đang chạy với vận tốc $20 m/s$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20 (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 m

B. 20 m

C. 40 m

D. 10 m

Lời giải

Chọn B

Lúc bắt đầu đạp phanh, ô tô có vận tốc $20 m/s \Rightarrow v(t_0) = -10t_0 + 20 = 20 \Leftrightarrow t_0 = 0$

Ô tô dừng hẳn khi đó vận tốc $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow 20 - 10t_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2$.

Do đó ô tô di chuyển được thêm là: $\int_0^2 (20 - 10t) dt = (20t - 5t^2) \Big|_0^2 = 20(m)$

Câu 140: (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

- A. $55m$. B. $25m$. C. $50m$. D. $16m$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S = 3.10 + \int_0^5 (-2t + 10) dt = 30 + 25 = 55m$.

Câu 141: (THPT THỰC HÀNH - TPHCM - 2018) Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a (m/s)$, ($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì chất điểm đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0 .

- A. $v_0 = 35m/s$. B. $v_0 = 25m/s$. C. $v_0 = 10m/s$. D. $v_0 = 20m/s$.

Lời giải

Chọn C

- Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có $v(6) = v_0$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}.6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15, \text{ suy ra } v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15.$$

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}.(v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6$.

- Tổng quãng đường vật đi được là $80 = 6.v_0 + \int_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15\right) dt$

$$\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0.t + 15t\right) \Big|_6^k$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 - \frac{5}{4}(k^2 - 6^2) + v_0.(k - 6) + 15(k - 6)$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 - \frac{5}{4}\left(\frac{4(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5}\right) + v_0.\frac{2v_0}{5} + 15.\frac{2v_0}{5}$$

$$\Leftrightarrow (v_0)^2 + 36.v_0 - 400 = 0 \Leftrightarrow v_0 = 10$$

Câu 142: (THPT LƯƠNG THẾ VINH - HN - LẦN 1 - 2018) Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t (m/s)$. Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh

gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

- A. 87.5 mét. B. 96.5 mét. C. 102.5 mét. **D. 105 mét.**

Lời giải

Chọn D

Quãng đường ô tô đi được trong 5 (s) đầu là $s_1 = \int_0^5 7 dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5 \text{ (mét)}$.

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t) = 35 - 35t \text{ (m/s)}$. Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t) = 0 \Leftrightarrow 35 - 35t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là $s_2 = \int_0^1 (35 - 35t) dt = \left(35t - 35 \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 17,5 \text{ (mét)}$.

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $s = s_1 + s_2 = 87,5 + 17,5 = 105 \text{ (mét)}$.

Câu 143: (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - NĐ - LẦN 1 - 2018) Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- A. 70,25 m. B. 68,25 m. C. 67,25 m. **D. 69,75 m.**

Lời giải

Chọn D

$$a(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Mà } v(0) = C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15.$$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15 \right) dt = 69,75 \text{ m}.$$

Câu 144: (THPT HOÀNG HOA THÁM - HƯNG YÊN - 2018) Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu) là

- A. $t = 6(\text{s})$. B. $t = 3(\text{s})$. C. $t = 2(\text{s})$. **D. $t = 5(\text{s})$.**

Lời giải

Chọn B

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t + 1.$$

Để thấy hàm số $v(t)$ là hàm bậc hai có đồ thị dạng parabol với hệ số $a = -3 < 0$.

Do đó $v_{\max}$ đạt tại đỉnh $I(3; 28)$ của parabol.

Vậy Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất $t = 3(\text{s})$.

Câu 145: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 4 - 2018) Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s²). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 96,25$ (m). B. $S = 87,5$ (m). C. $S = 94$ (m). D. $S = 95,7$ (m)

Lời giải

Chọn A

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau 5s ô tô đạt vận tốc là $v(5) = 35$ (m/s).

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t) = 35 - 70(t - 5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t = 5,5$ s.

Quãng đường ô tô đi được là $S = \int_0^5 7t dt + \int_5^{5,5} [35 - 70(t - 5)] dt = 96,25$ (m).

Câu 146: (SGD THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s²). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

A. $s = 168$ (m). B. $s = 166$ (m). C. $s = 144$ (m). D. $s = 152$ (m).

Lời giải

Chọn A

+ Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

Quãng đường xe đi được là:

$$S_1 = \int_0^{12} v_1(t) dt = \int_0^{12} 2t dt = t^2 \Big|_0^{12} = 144 \text{ (m)}.$$

+ Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t) = \int a dt = -12t + c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0) = v_1(12) = 2 \cdot 12 = 24$ (m/s).

$$\Rightarrow -12 \cdot 0 + c = 24 \Rightarrow c = 24 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 24.$$

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:

$$-12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$$S_2 = \int_0^2 v_2(t) dt = \int_0^2 (-12t + 24) dt = (-6t^2 + 24t) \Big|_0^2 = 24 \text{ (m)}.$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là: $S = S_1 + S_2 = 168$ (m).

Câu 147: (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 5 - 2018) Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33.

B. 12.

C. 31.

D. 32.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $v_A(0) = 16 \text{ m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s = \int_0^4 (16 - 4t) dt = 32 \text{ m}$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33m.

Câu 148: (THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. 136m.

B. 126m.

C. 276m.

D. 216m.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(0) = 10 \text{ m/s}$ và $v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t (t^2 + 3t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2$.

Quãng đường vật đi được là $S = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_0^6 = 216 \text{ m}$.

Câu 149: (THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018) Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(\text{m/s})$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}(\text{m})$.

B. $2000(\text{m})$.

C. $500(\text{m})$.

D. $\frac{4000}{3}(\text{m})$.

Lời giải

Chọn A

Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200(\text{m/s})$ là $v(t) = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -20 \end{cases} \Leftrightarrow t = 10$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$s = \int_0^{10} (t^2 + 10t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + 5t^2 \right) \Big|_0^{10} = \frac{2500}{3}(\text{m})$.

Câu 150: (THPT QUỐC GIA 2018 - MÃ ĐỀ 102) Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(\text{m/s}^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20(m/s)$.

B. $16(m/s)$.

C. $13(m/s)$.

D. $15(m/s)$.

Lời giải

Chọn B

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C$.

Tại thời điểm $t=3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

$$S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a(m).$$

$$\text{Vậy } 72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} (m/s^2).$$

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16(m/s)$.

Câu 151: (THPTQG 2018 - MÃ ĐỀ 104) Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với

vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t (m/s)$, trong đó t (giây) là

khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $25(m/s)$.

B. $36(m/s)$.

C. $30(m/s)$.

D. $21(m/s)$.

Lời giải

Chọn C

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t \right) dt = \int_0^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30(m/s)$.

Câu 152: (SỐ GD&ĐT LÀO CAI - 2018) Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một

đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

A. $18m$.

B. $36m$.

C. $22,5m$.

D. $6,75m$.

Lời giải

Chọn A

$$a(t) = 6 - 2t \text{ (m/s}^2\text{)} \Rightarrow v(t) = \int (6 - 2t) dt = 6t - t^2 + C$$

Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t = 0$ thì $v = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = 6t - t^2$.

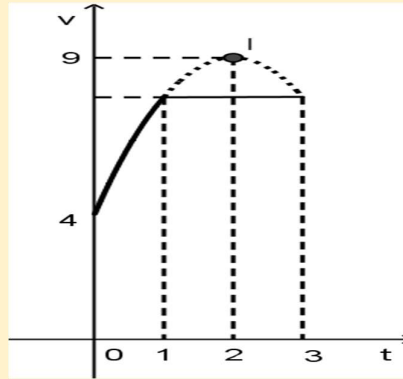
$$v(t) = 6t - t^2 \text{ là hàm số bậc 2 nên đạt GTLN khi } t = -\frac{b}{2a} = 3 \text{ (s)}$$

$$\text{Quãng đường xe đi trong 3 giây đầu là: } S = \int_0^3 (6t - t^2) dt = 18m.$$

Dạng 3.2: Bài toán cho biết đồ thị của vận tốc, quãng đường của chuyển động

◆ BÀI TẬP NỀN TẢNG & VẬN DỤNG ◆

Câu 153: (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 21,58(\text{km})$

B. $s = 23,25(\text{km})$

C. $s = 13,83(\text{km})$

D. $s = 15,50(\text{km})$

Lời giải

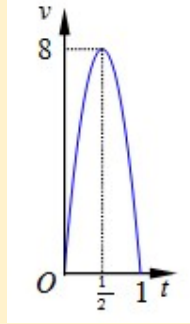
Chọn A

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,583$

Câu 154: (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



A. $s = 2,3$ (km)

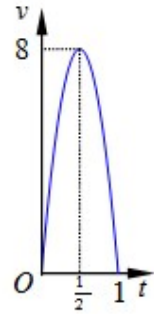
B. $s = 4,5$ (km)

C. $s = 5,3$ (km)

D. $s = 4$ (km)

Lời giải

Chọn B



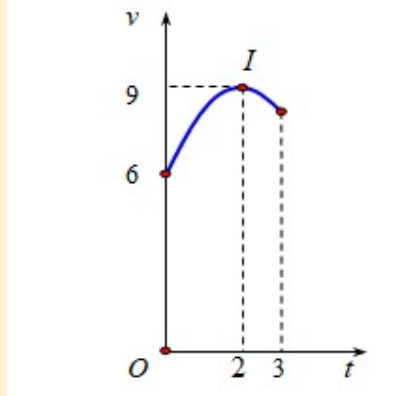
Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $(P): y = -32x^2 + 32x$.

Vậy quãng đường người đó đi được là $s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32x^2 + 32x) dx = 4,5$ (km).

Câu 155: (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật đi chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. $s = 25,25(\text{km})$ B. $s = 24,25(\text{km})$ C. $s = 24,75(\text{km})$ D. $s = 26,75(\text{km})$

Lời giải

Chọn C

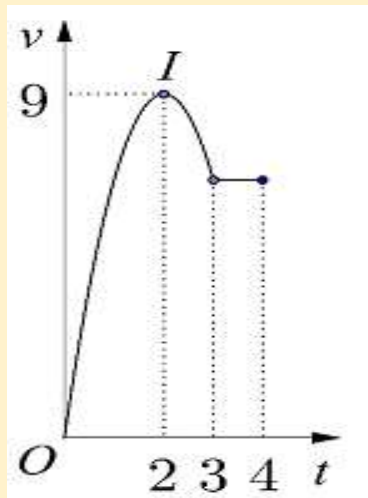
Gọi $v(t) = at^2 + bt + c$.

Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3}{4} \\ b = 3 \\ c = 6 \end{cases} \text{ . Tìm được } v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6 \right) dt = 24,75 \text{ (km)}$$

Câu 156: (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



- A. $s = 24 \text{ (km)}$ B. $s = 28,5 \text{ (km)}$ C. $s = 27 \text{ (km)}$ D. $s = 26,5 \text{ (km)}$

Lời giải

Chọn B

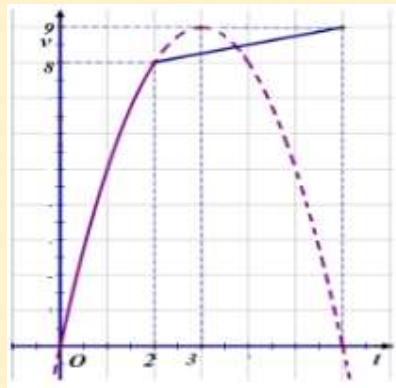
Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y = \frac{-9}{4}x^2 + 9x$.

Ngoài ra tại $x=3$ ta có $y = \frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S = \int_0^3 \left(\frac{-9}{4}x^2 + 9x \right) dx + \int_3^4 \frac{27}{4} dx = 27 \text{ (km)}$.

Câu 157: (KTNL GV THPT LÝ THÁI TÔ NĂM 2018-2019) Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



A. $\frac{130}{3}(\text{km})$.

B. $9(\text{km})$.

C. $40(\text{km})$.

D. $\frac{134}{3}(\text{km})$.

Lời giải

Chọn A

+ Vì Parabol đi qua $O(0; 0)$ và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên thiết lập được phương trình Parabol là $(P): y = v(t) = -t^2 + 6t; \forall t \in [0; 2]$

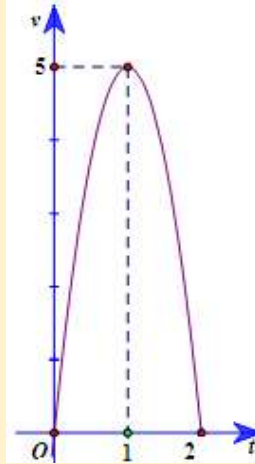
+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y = \frac{1}{4}t + m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m = \frac{15}{2}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $y = \frac{1}{4}t + \frac{15}{2}; \forall t \in [2; 6]$

+ Quãng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 (-t^2 + 6t) dt + \int_2^6 \left(\frac{1}{4}t + \frac{15}{2} \right) dt = \frac{130}{3}(\text{km}).$$

Câu 158: (THPT THỰC HÀNH - TPHCM - 2018) Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



A. 2,11km.

B. 6,67 km.

C. 5,63 km.

D. 5,63 km.

Lời giải

Chọn C

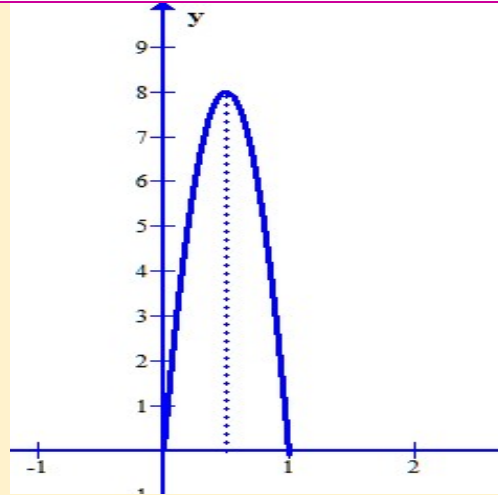
Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow S = \int_0^{1,5} v(t)dt$.

Đồ thị $v = v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t) = at^2 + bt$.

Đồ thị $v = v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -5t^2 + 10t$

$$S = \int_0^{1,5} (-5t^2 + 10t) dt = \frac{45}{8} \approx 5,63.$$

Câu 159: (SGD&ĐT ĐỒNG THÁP - HKII - 2018) Một người chạy trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



- A. 5,3 (km). B. 4,5 (km). C. 4 (km). D. 2,3 (km).

Lời giải

Chọn B

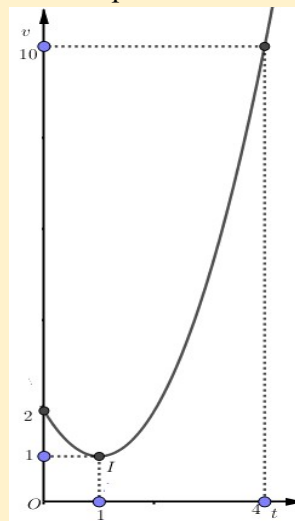
Trước hết ta tìm công thức biểu thị vận tốc theo thời gian, giả sử $v(t) = at^2 + bt + c$.

Khi đó dựa vào hình vẽ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 0 \\ a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + c = 8 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Do đó quãng đường người đó đi được sau 45 phút là $S = \int_0^{\frac{45}{60}} (32t - 32t^2) dt = 4,5 \text{ (km)}.$

Câu 160: (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018) Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật đi chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



- A. $s = 6$ (km). B. $s = 8$ (km). C. $s = \frac{40}{3}$ (km). D. $s = \frac{46}{3}$ (km).

Lời giải

Chọn C

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} c = 2 \\ \frac{-b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = t^2 - 2t + 2.$$

Với $t = 4 \Rightarrow v(4) = 10$ (thỏa mãn).

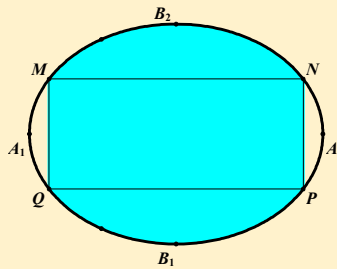
$$\text{Từ đó } s = \int_0^4 (t^2 - 2t + 2) dt = \frac{40}{3} \text{ (km)}.$$

□ DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC THỂ

Dạng 4.1: Bài toán liên quan đến diện tích

◇ BÀI TẬP NỀN TẢNG & VẬN DỤNG ◇

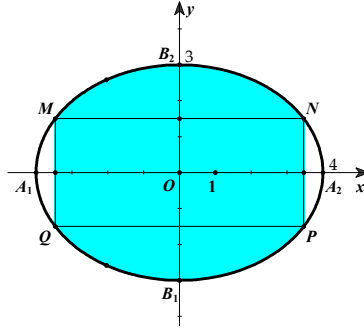
Câu 161: (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phân tô đậm là $200.000 \text{ VNĐ} / \text{m}^2$ và phần còn lại $100.000 \text{ VNĐ} / \text{m}^2$. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{m}$, $B_1B_2 = 6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3\text{m}$?



- A. 5.526.000 đồng. B. 5.782.000 đồng C. 7.322.000 đồng. D. 7.213.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Với $\begin{cases} A_1A_2 = 8 = 2a \\ B_1B_2 = 6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Suy ra diện tích của hình elip là $S_{(E)} = \pi a.b = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}$.

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ = 3 \rightarrow M\left(x; \frac{3}{2}\right) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 12 \rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right); N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$$

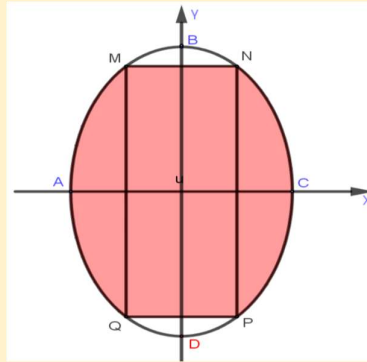
Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

Ta có: $S_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx = 3 \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx \xrightarrow{x=4\sin t} S_2 = 4\pi - 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$

Suy ra: $S_1 = S_{(E)} - S_2 = 8\pi + 6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$$T = (4\pi - 6\sqrt{3}) \cdot 100 + (8\pi + 6\sqrt{3}) \cdot 200 = 7.322.000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 162: (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Một biển quảng cáo với 4 đỉnh A, B, C, D như hình vẽ.



Biết chi phí để sơn phần tô đậm là $200.000(\text{đ/m}^2)$ sơn phần còn lại là 100.000đ/m^2 . Cho $AC = 8\text{m}; BD = 10\text{m}; MN = 4\text{m}$ Hỏi số tiền sơn gần với số tiền nào sau đây:

- A.** 12204000đ. **B.** 14207000đ.. **C.** 11503000đ.. **D.** 10894000đ.

Lời giải

Chọn A

elip có phương trình là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$. Vì $MN = 4 \Rightarrow x_N = 2 \Rightarrow \begin{cases} y_N = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y_N = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

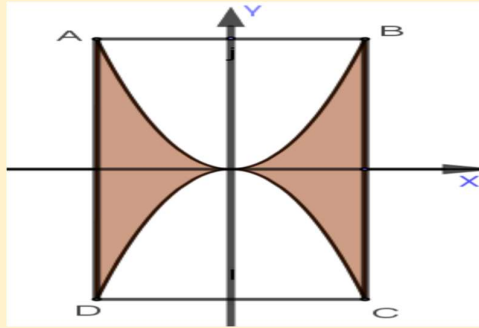
Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 2 \int_{-\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} \frac{4}{5} \sqrt{25 - y^2} dy \approx 59,21 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích elip là $S = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 \approx 3,622 \text{ (m}^2\text{)}$

Tổng chi phí trang trí là: $T = 59,21 \cdot 200000 + 3,622 \cdot 100000 = 12204200đ$.

Câu 163: Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đánh đá với giá thành

500.000đ/m². Phần còn lại được tô màu với giá thành 250.000đ / m².

Cho $AB = 4dm$; $BC = 8dm$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

- A. 105660667đ. B. 106666667đ. C. 107665667đ. D. 108665667đ.

Lời giải

Chọn B

Vì $AB = 4dm$; $BC = 8dm$. $\Rightarrow A(-2; 4)$, $B(2; 4)$, $C(2; -4)$, $D(-2; -4)$.

parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4 \int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3} \text{ (dm}^2\text{)}$

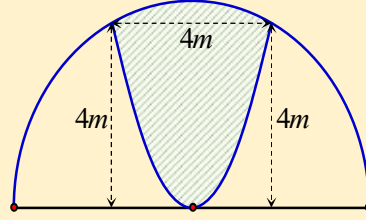
Diện tích hình chữ nhật là $S = 4 \cdot 8 = 32 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \text{ (dm}^2\text{)}$

Tổng chi phí trang trí là: $T = \left(\frac{32}{3} \cdot 5000 + \frac{64}{3} \cdot 2500 \right) \cdot 1000 \approx 106666667đ$

Câu 164: (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng 4(m). Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m² và 100.000

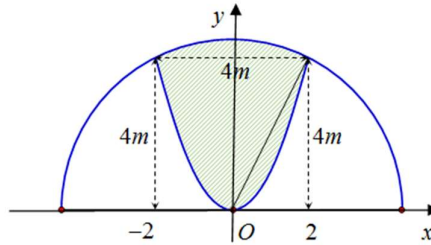
đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



- A. 3.738.574 (đồng). B. 1.948.000 (đồng). C. 3.926.990 (đồng). D. 4.115.408 (đồng).

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, ta có bán kính của đường tròn là $R = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

Phương trình của nửa đường tròn (C) là: $x^2 + y^2 = 20, y \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{20 - x^2}$.

Parabol (P) có đỉnh $O(0;0)$ và đi qua điểm $(2;4)$ nên có phương trình: $y = x^2$.

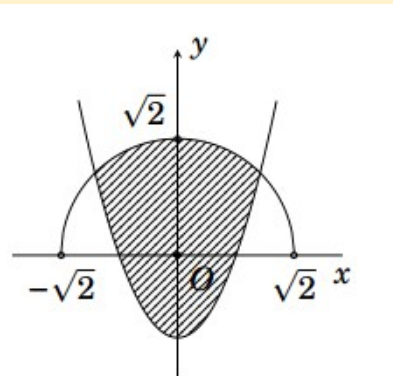
Diện tích phần tô màu là: $S_1 = \int_{-2}^2 [\sqrt{20 - x^2} - x^2] dx \approx 11,94 \text{ (m}^2\text{)}.$

Diện tích phần không tô màu là: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{5})^2 - S_1 \approx 10\pi - 11,94 \text{ (m}^2\text{)}.$

Số tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó là:

$150000 \cdot 11,94 + 100000 \cdot (10\pi - 11,94) \approx 3.738.593.$

Câu 165: (THPT NGŨ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu (phần được gạch chéo trên hình vẽ). Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2x^2 - 1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}(m)$ Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



A. $\frac{3\pi-2}{6} \times 250000$. B. $\frac{3\pi+10}{6} \times 250000$. C. $\frac{3\pi+10}{3} \times 250000$. D. $\frac{3\pi+2}{6} \times 250000$

Lời giải

Chọn B

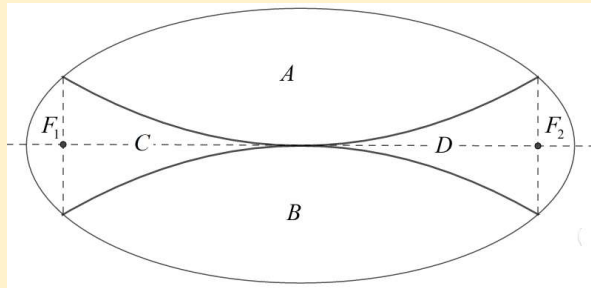
Ta có phương trình đường tròn tâm gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}$ (m) $x^2 + y^2 = 2$.

Tọa độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm hệ $\begin{cases} y = \sqrt{2-x^2} \\ y = 2x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 1 \\ x = 1, y = 1 \end{cases}$

Diện tích vườn hoa là $S = \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - 2x^2 + 1) dx = \frac{3\pi+10}{6}$.

số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu là $\frac{3\pi+10}{6} \times 250000$.

Câu 166: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên.



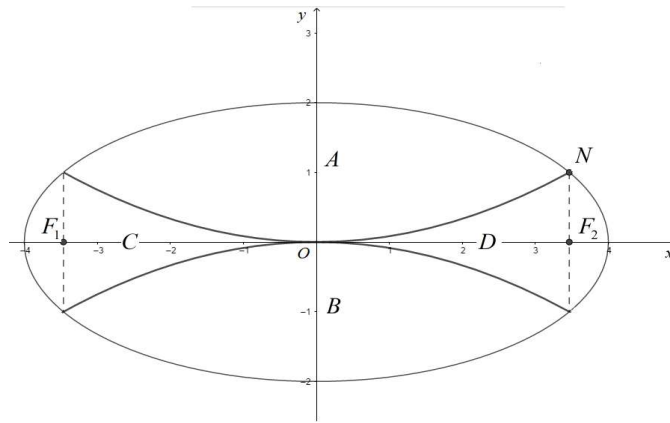
Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250.000 đ và 150.000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 5.676.000 đ. B. 4.766.000 đ. C. 4.656.000 đ. D. 5.455.000 đ.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do elip có độ dài trục lớn $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$, độ dài trục nhỏ $2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$.

Diện tích của (E) là: $S_{(E)} = \pi ab = 8\pi$.

Phương trình chính tắc (E) là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Suy ra $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Ta có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow F_2(2\sqrt{3}; 0)$.

Do N và F_2 có cùng hoành độ $\Rightarrow N(2\sqrt{3}; 1)$.

Gọi (P): $y = kx^2$ là parabol nằm ở phía trên trục Ox .

Do $N \in (P)$ ta có $1 = k(2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{12}$. Suy ra (P): $y = \frac{1}{12}x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Diện tích phần } A \text{ là } S_A &= \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12}x^2 \right) dx = 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12}x^2 \right) dx \\ &= \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx - \frac{1}{6} \int_0^{2\sqrt{3}} x^2 dx. \end{aligned}$$

* Xét $I_1 = \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx$. Đặt $x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$.

Đổi cận:

x	0	$2\sqrt{3}$
t	0	$\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = 8 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 8 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\text{* Ta có } I_2 = \frac{1}{6} \int_0^{2\sqrt{3}} x^2 dx = \frac{1}{18} x^3 \Big|_0^{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } S_A = I_1 - I_2 = \frac{8\pi + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_A + S_B = 2S_A = \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Tổng diện tích phần } C, D \text{ là: } S_C + S_D = S_{(E)} - (S_A + S_B) = \frac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3}.$$

Khi đó tổng số tiền để hoàn thành vườn hoa trên là:

$$\frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3} \cdot 250000 + \frac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3} \cdot 150000 \approx 5676000 \text{ đ.}$$

Câu 167: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN LẦN 1 NĂM 2018-2019) Người ta xây một sân khấu với mặt sân có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 mét và 15 mét. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 mét. Chi phí làm mỗi mét vuông phân giao nhau của hai hình tròn là 300 ngàn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 ngàn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân của sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

- A. 202 triệu đồng. B. 208 triệu đồng. C. 218 triệu đồng. D. 200 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi O, I lần lượt là tâm của các đường tròn bán kính bằng 20 mét và bán kính bằng 15 mét. Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ, vì $OI = 30$ mét nên $I(0; 30)$. Phương trình hai đường tròn lần lượt là

$x^2 + y^2 = 20^2$ và $x^2 + (y - 30)^2 = 15^2$. Gọi A, B là các giao điểm của hai đường tròn đó.

Tọa độ A, B là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20^2 \\ x^2 + (y - 30)^2 = 15^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5\sqrt{455}}{12} \\ y = \frac{215}{12} \end{cases}.$$

Tổng diện tích hai đường tròn là $\pi(20^2 + 15^2) = 625\pi$ (mét vuông).

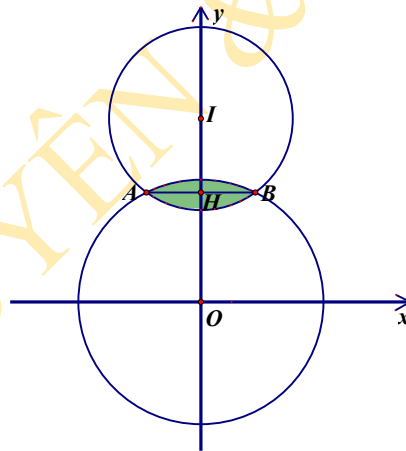
Phần giao của hai hình tròn chính là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = 30 - \sqrt{15^2 - x^2}$ và $y = \sqrt{20^2 - x^2}$. Do đó diện tích phần giao giữa hai hình tròn là

$$S = \int_{-\frac{5\sqrt{455}}{12}}^{\frac{5\sqrt{455}}{12}} \left(\sqrt{20^2 - x^2} + \sqrt{15^2 - x^2} - 30 \right) dx \approx 60,2546 \text{ (mét vuông)}.$$

Số tiền để làm phần giao giữa hai hình tròn là $300.000 \times 60,2546 \approx 18.076.386$ (đồng).

Số tiền để làm phần còn lại là $100.000 \times (625\pi - 2 \times 60,2546) = 184.299.220$ (đồng).

Vậy tổng số tiền làm sân khấu là $184.299.220 + 18.076.386 \approx 202.375.606$ (đồng).

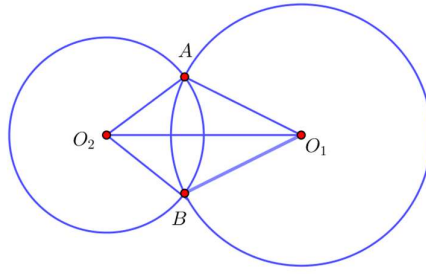


Câu 168: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

- A. 218 triệu đồng. B. 202 triệu đồng. C. 200 triệu đồng. D. 218 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn bán kính 20 m và 15 m. A, B là hai giao điểm của hai đường tròn.

Ta có $O_1A = O_1B = 20$ m; $O_2A = O_2B = 15$ m; $O_1O_2 = 30$ m.

$$\cos \widehat{BO_1O_2} = \frac{O_1B^2 + O_1O_2^2 - O_2B^2}{2O_1B.O_1O_2} = \frac{43}{48} \Rightarrow \widehat{BO_1O_2} \approx 26^\circ 23'.$$

Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có O_1O_2 là tia phân giác $\widehat{AO_1B}$
 $\Rightarrow \widehat{AO_1B} = 2\widehat{BO_1O_2} = 52,77^\circ$.

Suy ra diện tích hình quạt tròn O_1AB là $S_{O_1AB} = \pi.20^2 \cdot \frac{52,77}{360} \approx 184,2 (\text{m}^2)$.

$$S_{\Delta O_1AB} = \frac{1}{2} O_1A.O_1B.\sin \widehat{AO_1B} \approx 159,2 (\text{m}^2).$$

Gọi S_1 là diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung $\widehat{AmB}$ trong đường tròn (O_1) .

$$\Rightarrow S_1 = S_{O_1AB} - S_{\Delta O_1AB} = 25 (\text{m}^2).$$

Chứng minh tương tự ta được diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung $\widehat{AmB}$ trong đường tròn (O_2) là $S_2 \approx 35 (\text{m}^2)$.

Suy ra diện tích phần giao nhau là $S = S_1 + S_2 = 60 (\text{m}^2)$.

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần giao nhau $60.300000 = 18000000$ (nghìn đồng).

Tổng diện tích của hai hình tròn là $S' = \pi 20^2 + \pi 15^2 \approx 1963 (\text{m}^2)$.

Diện tích phần không giao nhau là $S' - S = 1903 (\text{m}^2)$.

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần không giao nhau $1903.100000 = 190300000$ (nghìn đồng).

Số tiền làm mặt sân là $18000000 + 190300000 = 208300000$ (nghìn đồng)

$= 208,3$ (triệu đồng).

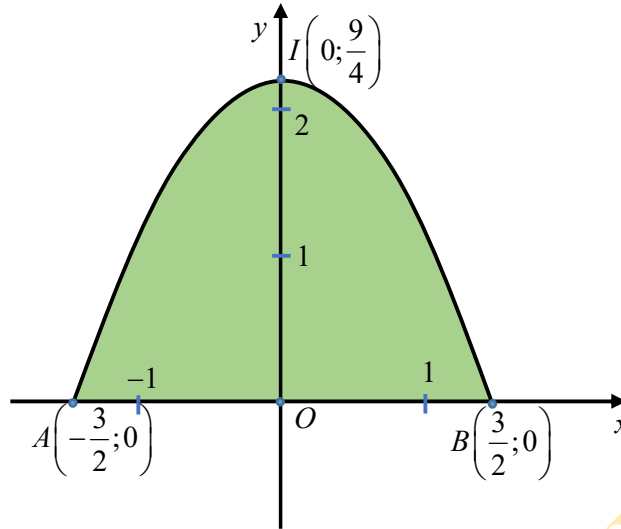
Câu 169: (TT DIỆU HIỀN - CẦN THƠ - 2018) Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

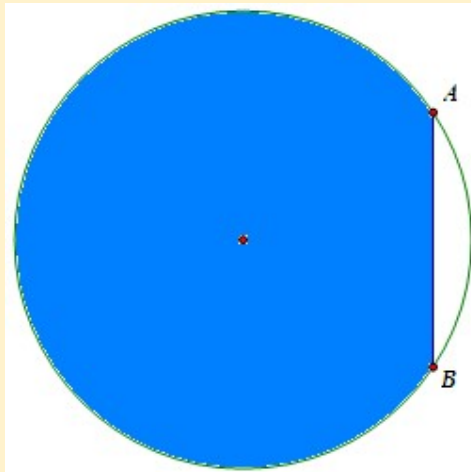
Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích của parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

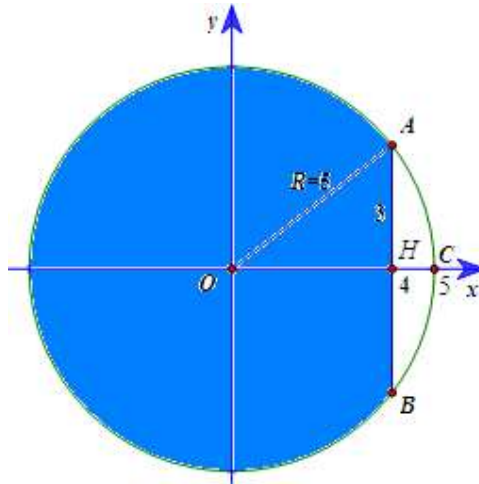
Câu 170: (THPT NGÔ QUYỀN - QUẢNG NINH - HKII - 2018) Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có 1 khoảng trống để dựng 1 cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại 1 phần đất nhỏ không trồng cây (phần màu trắng như hình vẽ), trong đó $AB = 6\text{ m}$. Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền?



- A. 3722 nghìn đồng. B. 7445 nghìn đồng. C. 7446 nghìn đồng. D. 3723 nghìn đồng.

Lời giải

Chọn B



Diện tích miếng đất là $S_1 = \pi R^2 = 25\pi$ (m²).

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Ta có phương trình của đường tròn biên là $x^2 + y^2 = 25$.

$$R = 5, AH = 3 \Rightarrow OH = 4.$$

$\Rightarrow$ Phương trình của cung tròn nhỏ $\widehat{AC}$ là $y = \sqrt{25 - x^2}$, với $4 \leq x \leq 5$.

$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trồng là $S_2 = 2 \int_4^5 \sqrt{25 - x^2} dx$ (m²).

$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trồng cây là $S = S_1 - S_2 = 25\pi - 2 \int_4^5 \sqrt{25 - x^2} dx$.

$\Rightarrow$ Số tiền thu được là $T = 100S = 100(25\pi - 2 \int_4^5 \sqrt{25 - x^2} dx) \approx 7445$ (nghìn đồng).

Câu 171: (THPT YÊN LẠC - LẦN 4 - 2018) Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100(m) và trục nhỏ bằng 80(m) được chia làm hai phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m² trồng cây con và 4000 mỗi m² trồng rau. Hỏi thu nhập của cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến phần nghìn).

A. 31904000.

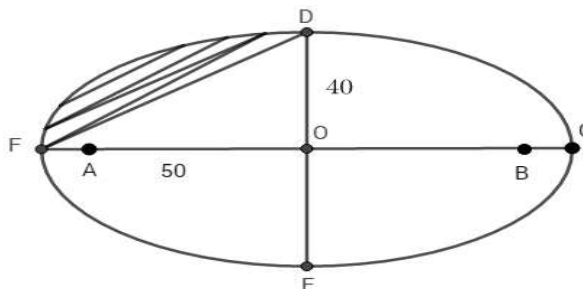
B. 23991000.

C. 10566000.

D. 17635000.

Lời giải

Chọn B



Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết, ta có $2a = 100 \Rightarrow a = 50$; $2b = 80 \Rightarrow b = 40$.

Diện tích phần trồng cây con (phần gạch sọc) bằng $\frac{1}{4}$ diện tích của elip trừ đi diện tích tam

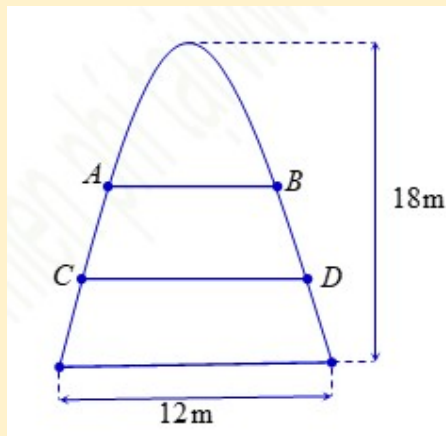
giác DOF . Do đó diện tích phần trồng cây con là $S_1 = \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2} \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích phần trồng rau (phần không gạch sọc) bằng $\frac{3}{4}$ diện tích elip cộng với diện tích tam

giác DOF . Do đó diện tích phần trồng rau là $S_2 = \frac{3\pi ab}{4} + \frac{ab}{2} \text{ (m}^2\text{)}$.

Thu nhập của cả mảnh vườn là $\left(\frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}\right) \cdot 2000 + \left(\frac{3\pi ab}{4} + \frac{ab}{2}\right) \cdot 4000 \approx 23991000$.

Câu 172: (CHUYÊN VINH - LẦN 2 - 2018) Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{4}{5}$.

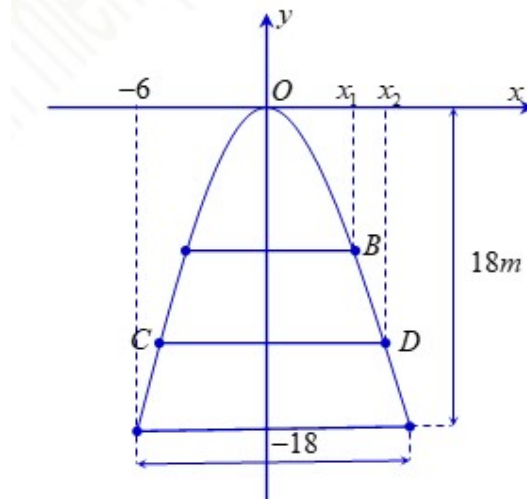
C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

D. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = ax^2 \text{ (P)}$.

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra: $-18 = a \cdot (-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

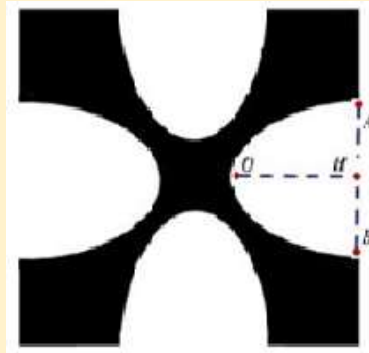
$$S_1 = 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD: y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x \right) \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3.$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 173: (THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018) Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

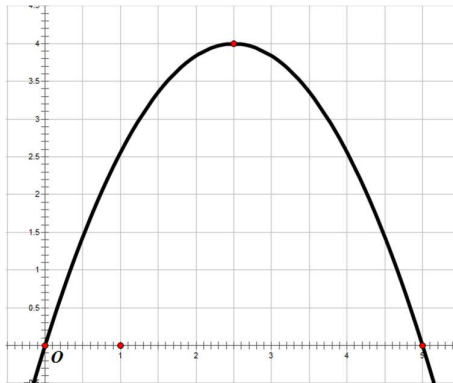
B. $\frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

C. $\frac{14}{3} \text{ cm}^2$.

D. 50 cm^2 .

Lời giải

Chọn B



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng

$$x = 0, x = 5 \text{ là: } S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x \right) dx = \frac{40}{3}.$$

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100 \text{ cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

Câu 174: (CHUYÊN VINH - LẦN 1 - 2018) Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên).

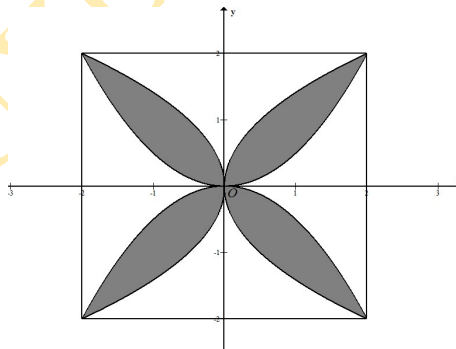


Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

- A. 800 cm^2 . B. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$. C. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$. D. 250 cm^2 .

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10 \text{ cm} = 1 \text{ dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$, $x = -\frac{y^2}{2}$, $x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$.

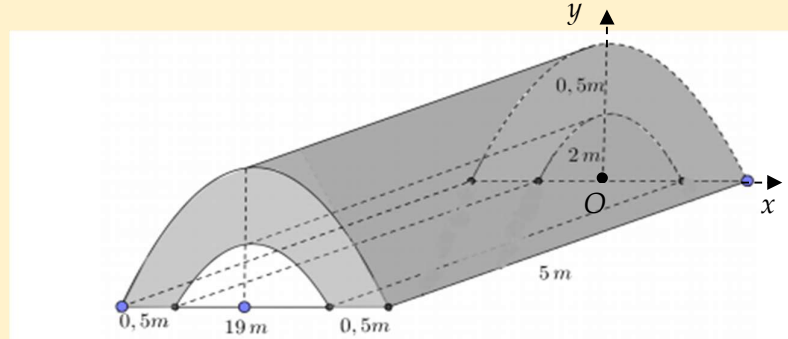
Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2) = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2).$$

Dạng 4.2: Bài toán liên quan đến thể tích

◆ BÀI TẬP NỀN TẢNG & VẬN DỤNG ◆

Câu 175: (THPT CẨM GIANG 2 NĂM 2018-2019) Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



A. 19m^3 .

B. 21m^3 .

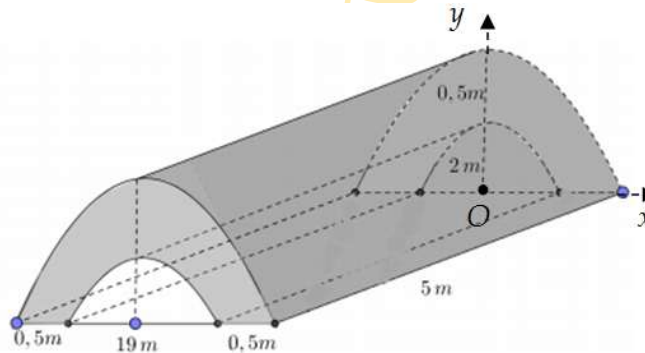
C. 18m^3 .

D. 40m^3 .

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

$$\text{Nên ta có hệ phương trình sau: } \begin{cases} 0 = a_1 \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2.$$

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

$$\text{Nên ta có hệ phương trình sau: } \begin{cases} 0 = a_2 \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}.$$

$$\text{Ta có thể tích của bê tông là: } V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40\text{m}^3.$$

Câu 176: (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn

12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

A. $30 m^3$

B. $36 m^3$

C. $40 m^3$

D. $41 m^3$

Lời giải

Chọn B

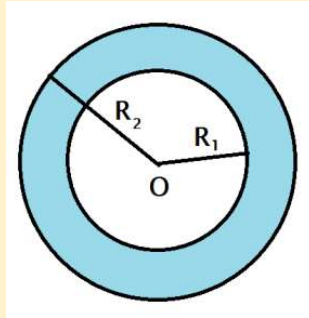
Giả sử nền trại là hình chữ nhật ABCD có AB = 3 mét, BC = 6 mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol

có dạng $y = ax^2 + b$, $a \neq 0$. Do I, A, B thuộc nên ta có $y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

$$V = 6.2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 3\right) dx = 36$$

Câu 177: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20cm$, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30cm$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



A. $1250\pi^2 cm^3$.

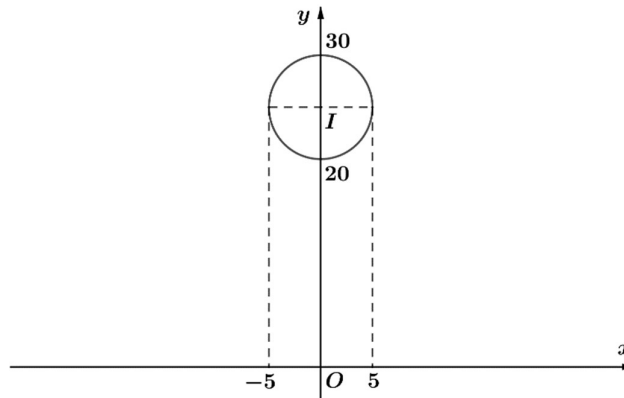
B. $1400\pi^2 cm^3$.

C. $2500\pi^2 cm^3$.

D. $600\pi^2 cm^3$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích săm xe bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình tròn tâm $I(0; 25)$ bán kính bằng 5 quay quanh trục Ox .

Ta có phương trình đường tròn là $x^2 + (y - 25)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 25 + \sqrt{25 - x^2} \\ y = 25 - \sqrt{25 - x^2} \end{cases}, x \in [-5; 5].$

$$\text{Vậy } V = \pi \cdot \left[\int_{-5}^5 (25 + \sqrt{25 - x^2})^2 dx - \int_{-5}^5 (25 - \sqrt{25 - x^2})^2 dx \right] = 100\pi \cdot \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx.$$

Ta có $\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx$ là diện tích nửa hình tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính bằng 5

$$\Rightarrow \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25\pi}{2}.$$

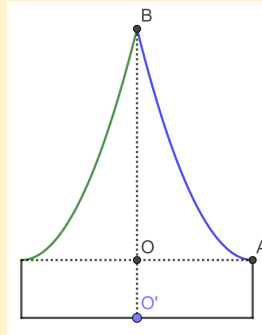
$$\text{Suy ra } V = 100\pi \cdot \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = 100\pi \cdot \frac{25\pi}{2} = 1250\pi^2 \text{ cm}^3$$

Chú ý: Có thể bấm máy tích phân, ta được

$$V = \pi \left[\int_{-5}^5 (25 + \sqrt{25 - x^2})^2 dx - \int_{-5}^5 (25 - \sqrt{25 - x^2})^2 dx \right] \approx 3927\pi \text{ cm}^3.$$

Kiểm tra các đáp án ta chọn đáp án **A**.

Câu 178: (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\frac{2750\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

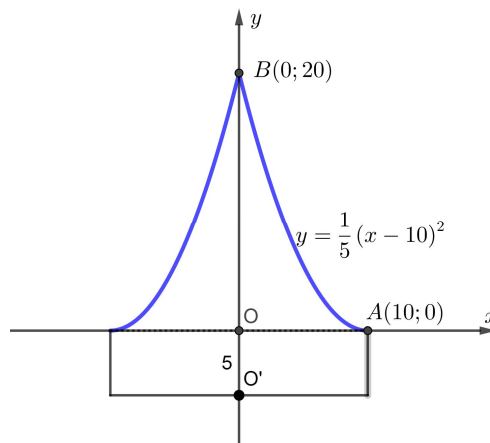
B. $\frac{2500\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

C. $\frac{2050\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

D. $\frac{2250\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

Lời giải

Chọn B



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

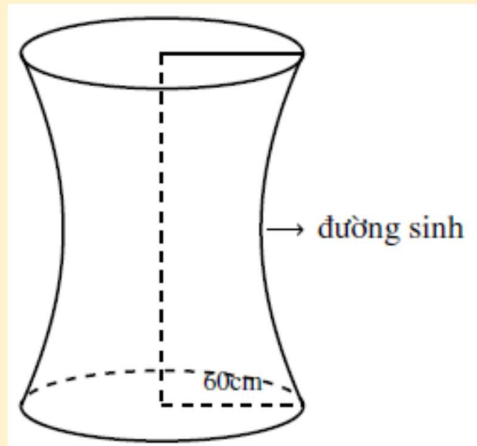
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

$$\text{Suy ra } V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi \left(3000 - \frac{8000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Do đó } V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3} \pi + 500\pi = \frac{2500}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 179: Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của chiếc trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $V = 344963 \text{ cm}^3$

B. $V = 344964 \text{ cm}^3$

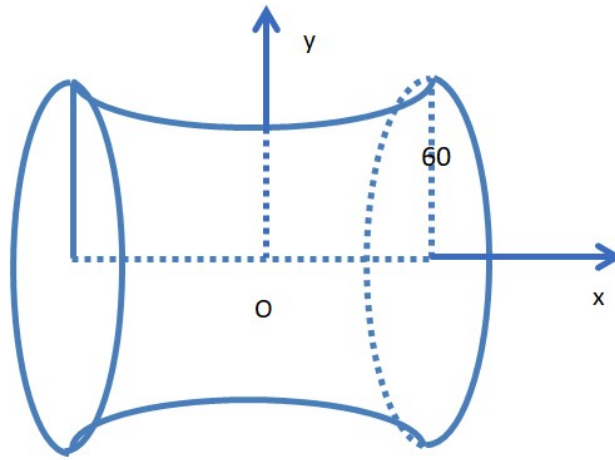
C. $V = 208347 \text{ cm}^3$

D. $V = 208346 \text{ cm}^3$

Lời giải

Chọn B

Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ (trục hoành là trục của chiếc trống, gốc tọa độ là trung điểm của đường cao chiếc trống, đơn vị: dm).



Gọi (E) là elip có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ thì ảnh của (E) qua phép tịnh tiến theo vectơ

$\vec{u}(0;6)$ là elip (E') có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$.

Suy ra, phương trình của đường sinh là: $y = 6 - \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Do đó, thể tích của chiếc trống là: $V = \pi \int_{-4}^4 \left(6 - \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)^2 dx \approx 344,964 \text{ (dm}^3\text{)}.$

Câu 180: (SỞ GD&ĐT YÊN BÁI - 2018) Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

- A. 2 giờ 36 giây. B. 2 giờ 34 giây. C. 2 giờ 35 giây. D. 2 giờ 36 giây.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây).

$$\text{Ta có: } \int_0^x \frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3} dt = 210 \Rightarrow \frac{3}{4}(t+3)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^x = 105000 \Rightarrow (x+3)\sqrt[3]{x+3} - 3\sqrt[3]{3} = 140000$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+3)^4} = 3\sqrt[3]{3} + 140000 \Rightarrow x+3 = \sqrt[4]{(3\sqrt[3]{3} + 140000)^3} \Rightarrow x = \sqrt[4]{(3\sqrt[3]{3} + 140000)^3} - 3$$

$$\Rightarrow x \approx 7234,8256.$$

Câu 181: (THPT NGÔ QUYỀN - QUẢNG NINH - HKII - 2018) Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

- A. $1458m^3$. B. $600m^3$. C. $2200m^3$. D. $4200m^3$.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases} . \text{ Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:}$$

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 (m^3).$$

Câu 182: Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R . Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2 , với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng?

A. $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$.

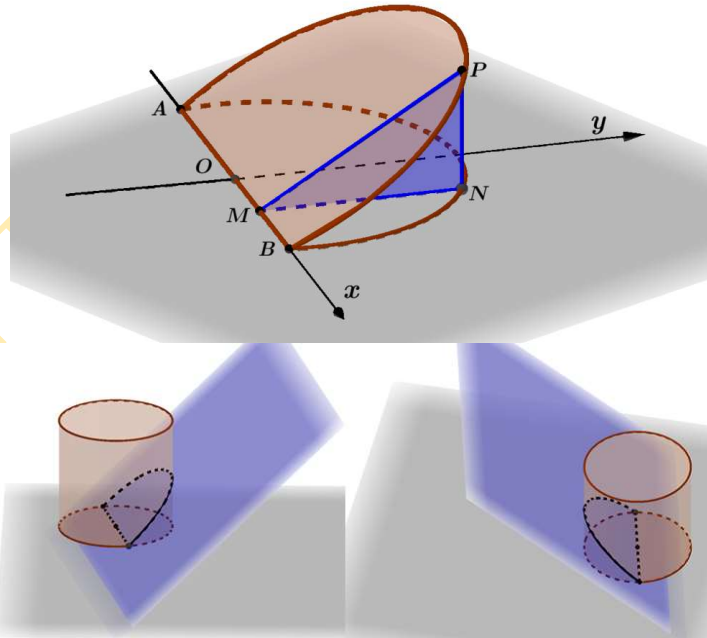
B. $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.

C. $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$.

D. $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R; R]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x , cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có $\widehat{PMN} = 30^\circ$.

$$\text{Ta có } NM = y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow NP = MN \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{3}}.$$

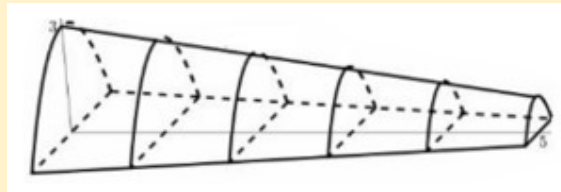
$$\Delta MNP \text{ có diện tích } S(x) = \frac{1}{2} NM \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Thể tích hình nêm là } V_1 = \int_{-R}^R S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-R}^R = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}.$$

* **Chú ý:** Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm:

$$V_1 = \frac{2}{3} R^2 h = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha, \text{ trong đó } R = \frac{AB}{2}, \alpha = \widehat{PMN}.$$

Câu 183: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Cho một mô hình 3-D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 (cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



A. 29.

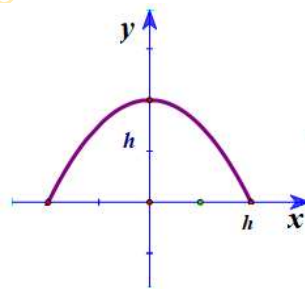
B. 27.

C. 31.

D. 33.

Lời giải

Chọn A



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, (a < 0)$

$$\text{Có } B(h; 0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} \text{ (do } h > 0)$$

$$\text{Diện tích } S \text{ của thiết diện: } S = \int_{-h}^h \left(-\frac{1}{h}x^2 + h \right) dx = \frac{4h^2}{3}, \quad h = 3 - \frac{2}{5}x$$

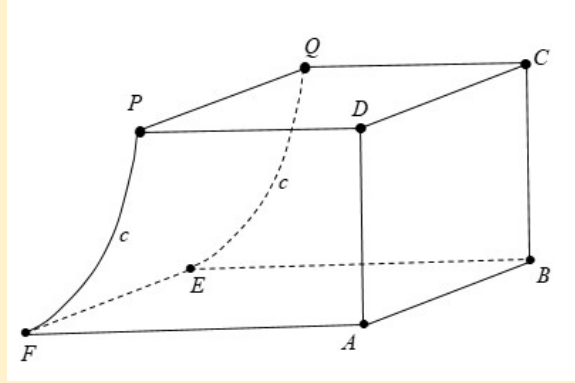
$$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2$$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$$\Rightarrow V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2 dx \approx 28,888$$

$$\Rightarrow V \approx 29 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 184: (TT THANH TUỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5 \text{ cm}$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5 \text{ cm}$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF . Thể tích của chi tiết máy bằng

A. $\frac{395}{24} \text{ cm}^3$.

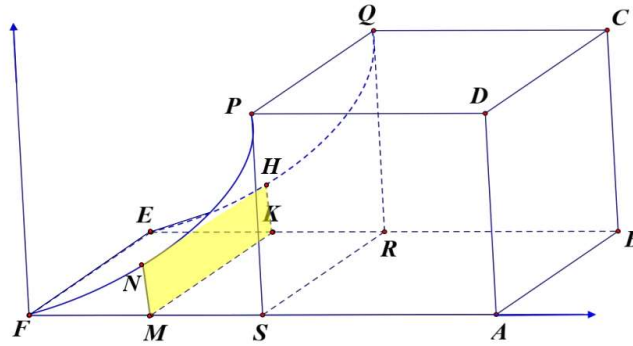
B. $\frac{50}{3} \text{ cm}^3$.

C. $\frac{125}{8} \text{ cm}^3$.

D. $\frac{425}{24} \text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi hình chiếu của P, Q trên AF và BE là R và S . Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5 \text{ cm}$, thể tích $V_1 = \frac{125}{8} \text{ cm}^3$ và phần còn lại có thể tích V_2 . Khi đó thể

$$\text{tích vật thể } V = V_1 + V_2 = \frac{125}{8} + V_2.$$

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F , Ox trùng với FA , Oy trùng với tia Fy song song với AD . Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1; \frac{5}{2}\right)$ do đó

$$a = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x^2.$$

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x; 0; 0), 0 \leq x \leq 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNKH$ có cạnh là $MN = \frac{5}{2}x^2$ và $MK = \frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \int_0^1 \frac{25}{4} x^2 dx = \frac{25}{12}$

Từ đó $V = \frac{125}{8} + \frac{25}{12} = \frac{425}{24} cm^3$

Câu 185: (THPT LỤC NGẠN - LẦN 1 - 2018) Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm³ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Đường elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm có phương trình $\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1$

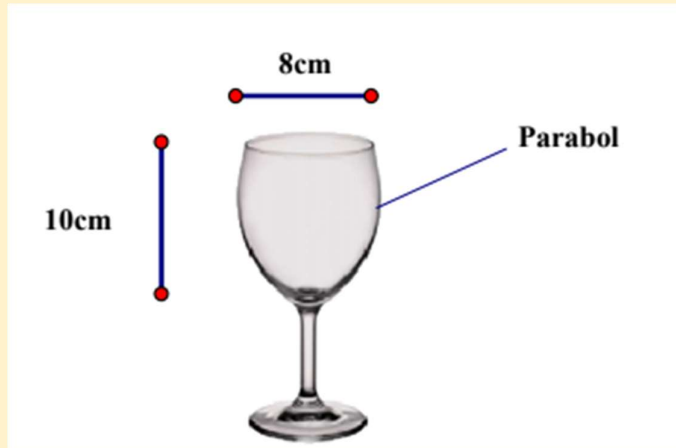
$\Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm \frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}$

Do đó thể tích quả dưa là $V = \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) dx$

$= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Big|_{-14}^{14} = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} = \frac{8750\pi}{3} cm^3$

Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259$ đồng.

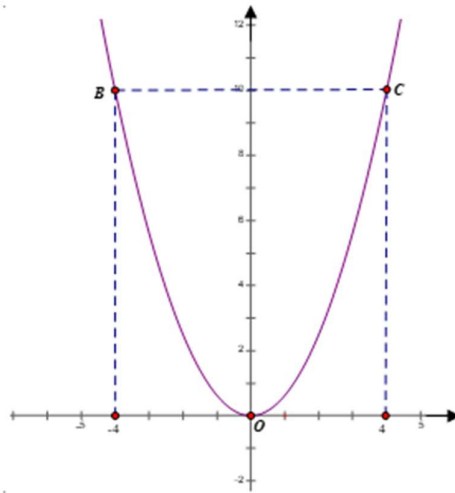
Câu 186: (THPT THỰC HÀNH - TPHCM - 2018) Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bỏ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



A. $V \approx 320cm^3$. **B.** $V \approx 1005,31cm^3$. **C.** $V \approx 251,33cm^3$. **D.** $V \approx 502,65cm^3$.

Lời giải

Chọn C

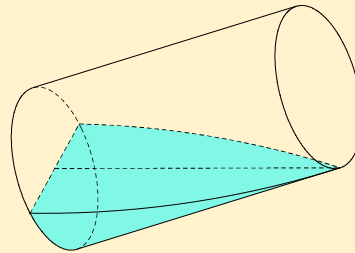
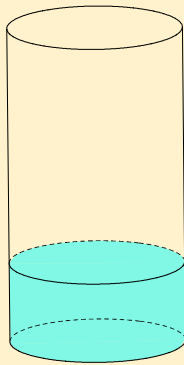


Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc:

$$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) dy \approx 251,33.$$

Câu 187: (THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU - LẦN 3 - 2018) Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. 240 cm^3 .

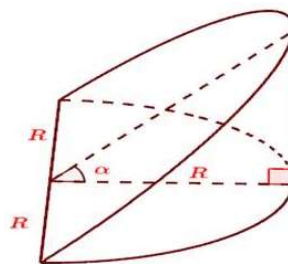
B. $240\pi \text{ cm}^3$.

C. 120 cm^3 .

D. $120\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

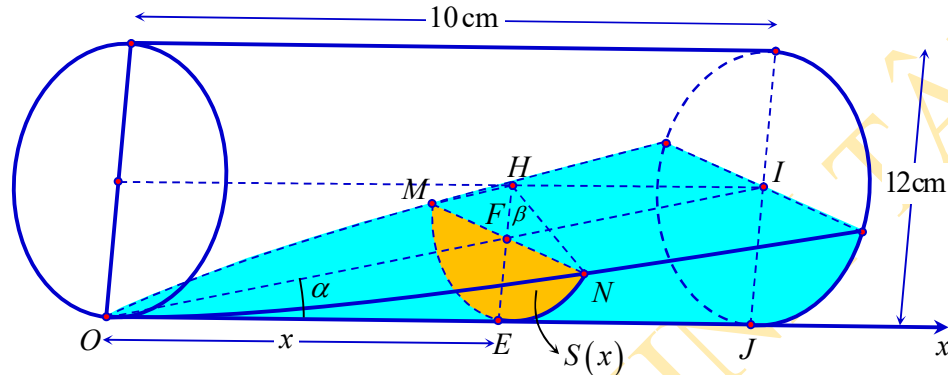
$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha.$$

Thể tích hình cái nêm là: $V = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$.

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$.

$$\Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 240 \text{ cm}^3.$$

Cách 2. Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \geq x \geq 0$.

Gọi $\widehat{IOJ} = \alpha, \widehat{FHN} = \beta, OE = x$

$$\tan \alpha = \frac{IJ}{OJ} = \frac{6}{10} = \frac{EF}{OE} \Rightarrow EF = \frac{6x}{10} \Rightarrow HF = 6 - \frac{6x}{10}.$$

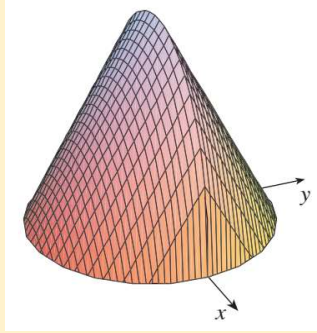
$$\cos \beta = \frac{HF}{HN} = \frac{6 - \frac{6x}{10}}{6} = 1 - \frac{x}{10}; \quad \beta = \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right)$$

$$S(x) = S_{\text{(hình quạt)}} - S_{HMN} = \frac{1}{2} HN^2 \cdot 2\beta - \frac{1}{2} HM \cdot HN \cdot \sin 2\beta$$

$$\Rightarrow S(x) = 6^2 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{10} S(x) dx = \int_0^{10} \left(36 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - 36 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2} \right) dx = 240.$$

Câu 188: (THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU - LẦN 3 - 2018) Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



A. $V = \sqrt{3}$.

B. $V = 3\sqrt{3}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \pi$.

Lời giải

Chọn C

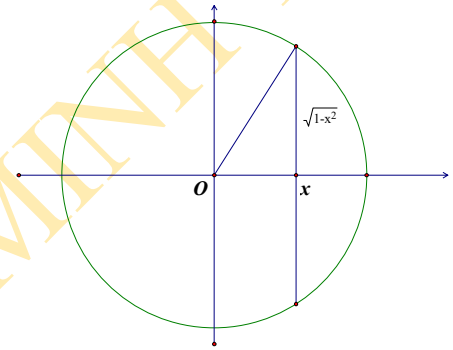
Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O .

Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1-x^2}$.

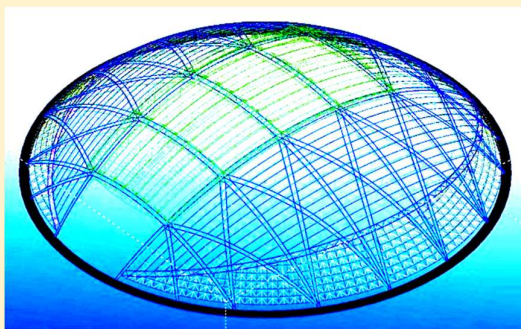
Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = (1-x^2)\sqrt{3}$.

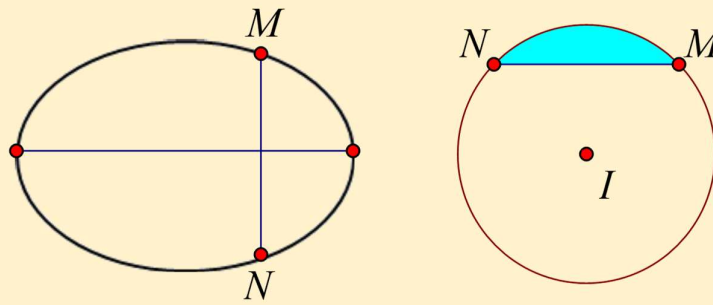
Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2 \int_0^1 S dx = 2 \int_0^1 \sqrt{3} (1-x^2) = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



Câu 189: (THPT BÌNH GIANG - HẢI DƯƠNG - 2018) Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình 3) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?





Hình 3

A. $57793m^3$.

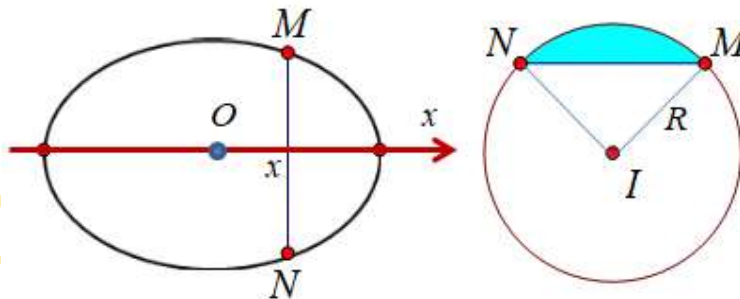
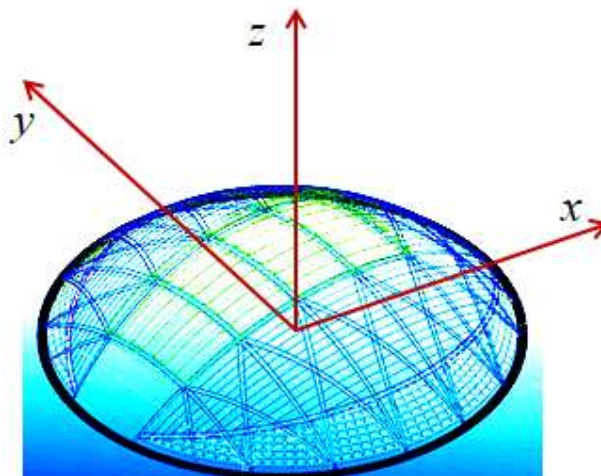
B. $115586m^3$.

C. $32162m^3$.

D. $101793m^3$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O, MN) = x$

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$\text{Lúc đó } MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Thể tích khoảng không cần tìm là

$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \approx 115586m^3.$$

Câu 190: (TRẦN PHÚ - HÀ TĨNH - LẦN 2 - 2018) Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng 0,8m, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6m. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).



A. $V = 1,52m^3$.

B. $V = 1,31m^3$.

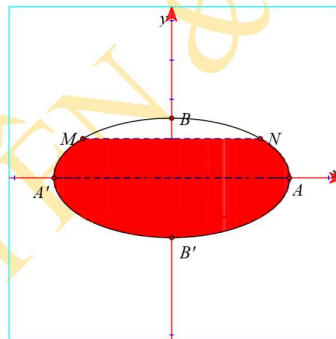
C. $V = 1,27m^3$.

D. $V = 1,19m^3$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1 = \pi ab = \pi \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN .

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6m nên

ta có phương trình của đường thẳng MN là $y = \frac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$ ta có $y = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$.

Do đường thẳng $y = \frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2 = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\frac{4}{5} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} - \frac{1}{5} \right) dx = \frac{4}{5} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{10}.$$

$$\text{Tính } I = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{2} \sin t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận: Khi } x = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ thì } t = -\frac{\pi}{3}; \text{ Khi } x = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ thì } t = \frac{\pi}{3}.$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos^2 t dt = \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

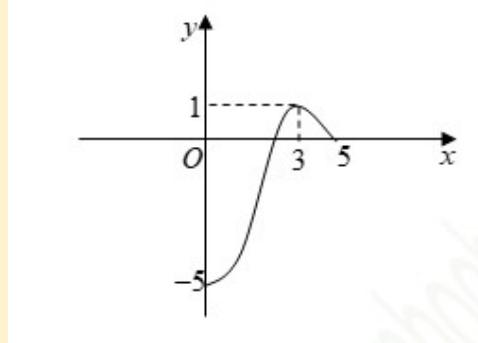
$$\text{Vậy } S_2 = \frac{4}{5} \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{\pi}{15} - \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

$$\text{Thể tích của dầu trong thùng là } V = \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{15} + \frac{\sqrt{3}}{20} \right) \cdot 3 = 1,52.$$

□ DẠNG TOÁN 5: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

◆ BÀI TẬP NỀN TẢNG & VẬN DỤNG ◆

Câu 191: (PTNK CƠ SỞ 2 - TPHCM - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0) = f(5) < f(3)$.

B. $f(3) < f(0) = f(5)$.

C. $f(3) < f(0) < f(5)$.

D. $f(3) < f(5) < f(0)$.

Lời giải

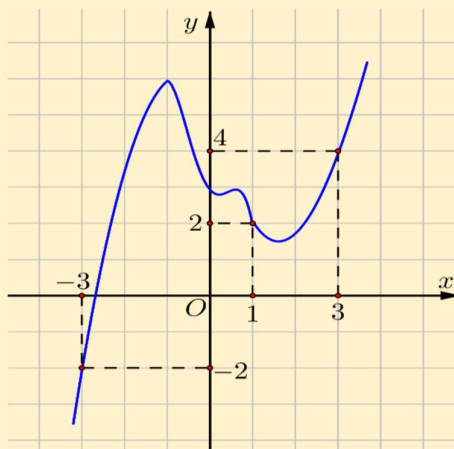
Chọn C

Ta có $\int_3^5 f'(x) dx = f(5) - f(3) > 0$, do đó $f(5) > f(3)$.

$\int_0^3 f'(x) dx = f(3) - f(0) < 0$, do đó $f(3) < f(0)$

$\int_0^5 f'(x) dx = f(5) - f(0) < 0$, do đó $f(5) < f(0)$

Câu 192: (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1) > g(-3) > g(3)$

B. $g(1) > g(3) > g(-3)$

C. $g(3) > g(-3) > g(1)$

D. $g(-3) > g(3) > g(1)$

Lời giải

Chọn B

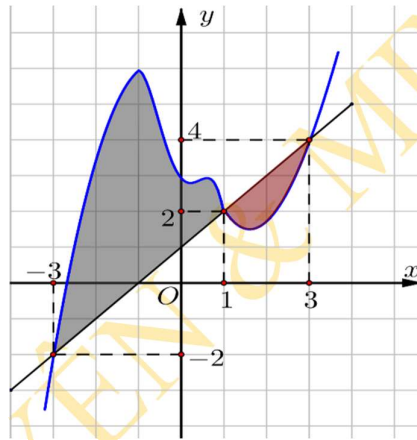
Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\pm 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-3)$	$g(1)$	$g(3)$	$+\infty$

Suy ra $g(-3) < g(1)$ và $g(3) < g(1)$. (1)



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = f'(x)$, $y = x+1$, $x = -3$, $x = 1$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x+1$, $y = f'(x)$, $x = 1$, $x = 3$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy: $S_1 > S_2 > 0$.

Suy ra: $S_1 - S_2 > 0$

$$\Rightarrow \int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)] dx - \int_1^3 [(x+1) - f'(x)] dx > 0$$

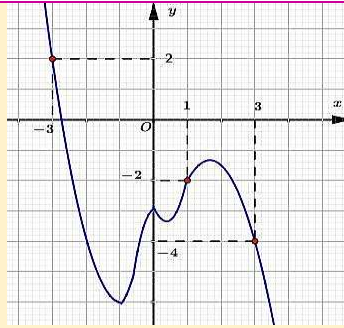
$$\Rightarrow \int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)] dx + \int_1^3 [f'(x) - (x+1)] dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^3 [f'(x) - (x+1)] dx > 0.$$

$$\text{Khi đó: } g(3) - g(-3) = \int_{-3}^3 g'(x) dx = 2 \int_{-3}^3 [f'(x) - (x+1)] dx > 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Câu 193: (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ của hàm số như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3) < g(-3) < g(1)$

B. $g(1) < g(-3) < g(3)$

C. $g(-3) < g(3) < g(-1)$

D. $g(1) < g(3) < g(-3)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 2x \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-3; 1; 3\}$.

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	 The graph shows the function $g(x)$ with arrows indicating its behavior. It starts at $-\infty$, increases to a local minimum at $x = -3$, then decreases to a local maximum at $x = 3$, and finally decreases towards $-\infty$.						

Suy ra $g(3) > g(1)$.

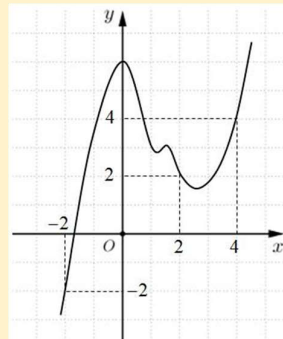
Kết hợp với BBT ta có:

$$\int_{-3}^1 (-g'(x)) dx > \int_1^3 g'(x) dx \Leftrightarrow \int_1^{-3} g'(x) dx > \int_1^3 g'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow g(-3) - g(1) > g(3) - g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3)$$

Vậy ta có $g(-3) > g(3) > g(1)$.

Câu 194: (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(4) = h(-2) < h(2)$

B. $h(2) > h(-2) > h(4)$

C. $h(4) = h(-2) > h(2)$

D. $h(2) > h(4) > h(-2)$

Lời giải

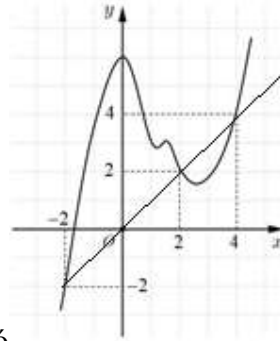
Chọn D

Ta có $h'(x) = 2[f'(x) - x]$; $h'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-2; 2; 4\}$.

Bảng biến thiên

x	-2			2		4	
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$							

Suy ra $h(2) > h(4)$.

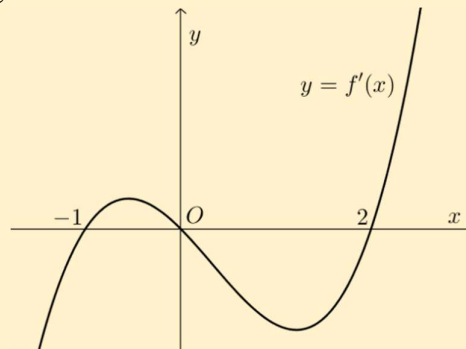


Kết hợp với đồ thị hàm số $y=x$ ta có

$$\int_{-2}^4 h'(x) dx > 0 \Leftrightarrow h(4) - h(-2) > 0 \Leftrightarrow h(4) > h(-2).$$

Vậy ta có $h(2) > h(4) > h(-2)$.

Câu 195: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới.
Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $f(0) > f(2) > f(-1)$.

B. $f(0) > f(-1) > f(2)$.

C. $f(2) > f(0) > f(-1)$.

D. $f(-1) > f(0) > f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Theo đồ thị, ta có: $f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x) dx > 0$

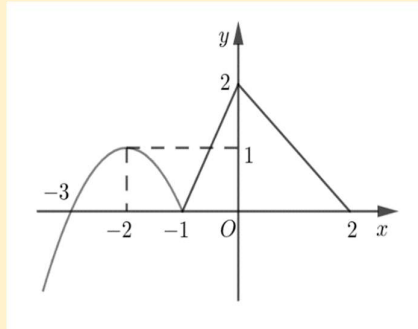
$\Rightarrow f(0) > f(-1)$ (1),

$f(2) - f(-1) = \int_{-1}^2 f'(x) dx = \int_{-1}^0 f'(x) dx + \int_0^2 f'(x) dx < 0$

$\Rightarrow f(-1) > f(2)$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(0) > f(-1) > f(2)$.

Câu 196: (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3; 2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$.)



Biết $f(-3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$

B. $\frac{31}{6}$

C. $\frac{35}{3}$

D. $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(-2; 1)$ và đi qua điểm $(-3; 0)$ nên ta có

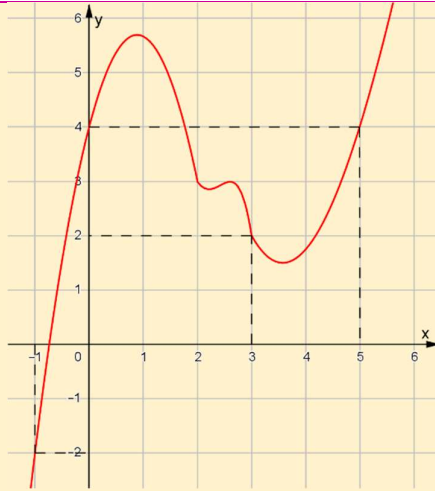
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + c = 1 \\ 9a - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Do } f(-3) = 0 \text{ nên } f(-1) + f(1) &= [f(1) - f(0)] + [f(0) - f(-1)] + 2[f(-1) - f(-3)] \\ &= \int_0^1 f'(x) dx + \int_{-1}^0 f'(x) dx + 2 \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx = S_1 + S_2 + 2 \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx = 1 + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}. \end{aligned}$$

Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 0$ và $x = 0, x = 1$.

$$\text{Dễ thấy } S_1 = 1; S_2 = \frac{3}{2}.$$

Câu 197: (THPT LƯƠNG VĂN CAN - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-1) < g(3) < g(5)$.

B. $g(-1) < g(5) < g(3)$.

C. $g(5) < g(-1) < g(3)$.

D. $g(3) < g(5) < g(-1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2[f'(x) - (x-1)]$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x-1$.

Dựa vào đồ thị ta có các nghiệm sau: $\begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 5 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

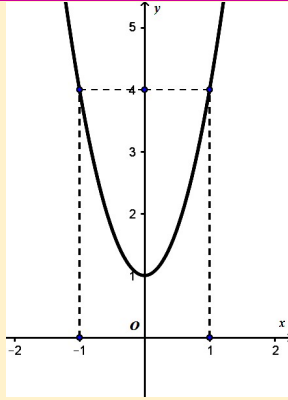
x	$-\infty$	-1		3		5	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$				$g(3)$			
				$g(-1)$		$g(5)$	

Ngoài ra dựa vào đồ thị ta có $\frac{1}{2} \int_{-1}^3 g'(x) dx > -\frac{1}{2} \int_3^5 g'(x) dx \Leftrightarrow g(x) \Big|_{-1}^3 > -g(x) \Big|_3^5$

$$\Leftrightarrow g(3) - g(-1) > g(3) - g(5) \Leftrightarrow g(5) > g(-1).$$

Vậy $g(3) > g(5) > g(-1)$.

Câu 198: (THPT HẠ LỘC 2 - TH - 2018) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C) . Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên.



Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

A. $H = 45$.

B. $H = 64$.

C. $H = 51$.

D. $H = 58$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) do đó $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y = f'(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có: } \begin{cases} c' = 1 \\ a' - b' + c' = 4 \\ a' + b' + c' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases} \Rightarrow y = f'(x) = 3x^2 + 1.$$

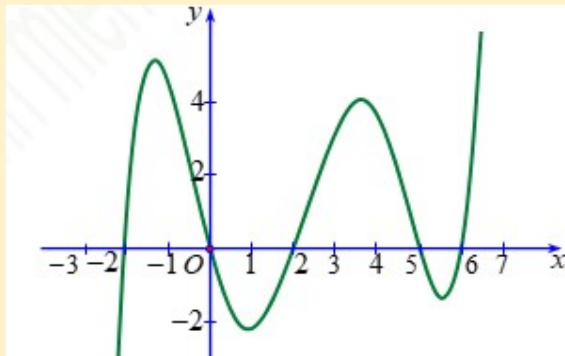
Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox , $x = 4$, $x = 2$.

$$\text{Ta có } S = \int_2^4 (3x^2 + 1) dx = 58.$$

$$\text{Lại có: } S = \int_2^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^4 = f(4) - f(2).$$

$$\text{Do đó: } H = f(4) - f(2) = 58.$$

Câu 199: (SGD THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M = \max_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min_{[-2;6]} f(x)$, $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $T = f(0) + f(-2)$.

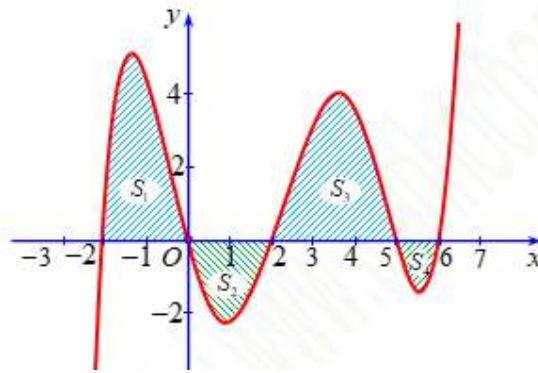
B. $T = f(5) + f(-2)$.

C. $T = f(5) + f(6)$.

D. $T = f(0) + f(2)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

$$\begin{aligned} \diamond \int_{-2}^0 f'(x) dx &> \int_0^2 -f'(x) dx \Leftrightarrow f(x) \Big|_{-2}^0 > f(x) \Big|_2^0 \\ \Leftrightarrow f(0) - f(-2) &> f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \int_0^2 -f'(x) dx &< \int_2^5 f'(x) dx \Leftrightarrow f(x) \Big|_2^0 < f(x) \Big|_2^5 \\ \Leftrightarrow f(0) - f(2) &< f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \int_2^5 f'(x) dx &> \int_5^6 -f'(x) dx \Leftrightarrow f(x) \Big|_2^5 > f(x) \Big|_6^5 \\ \Leftrightarrow f(5) - f(2) &> f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6) \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2		5		6
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	$f(-2)$		$f(0)$		$f(2)$		$f(5)$		$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = \max_{[-2;6]} f(x) = f(5)$ và $m = \min_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$

Khi đó $T = f(5) + f(-2)$.