

Câu 1 (2,0 điểm) .

- a) Khảo sát hàm số và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$
- b) Tìm tọa độ của điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng (d) : $6x - y - 4 = 0$

Câu 2 (1,0 điểm).

- a). Cho hàm số $y = e^{-x}(x^2 - x - 1)$. Tính $y'(\ln \frac{1}{2})$
- b) Giải bất phương trình sau $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} (2x-1)\sin x dx$.

Câu 4(1,0 điểm). Trong không gian Oxyz, cho mp(P) và mặt cầu (S) lần lượt có phương trình (P) : $x - 2y + 2z + 1 = 0$ và (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0$. Chứng minh mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng.

Câu 5(1,0 điểm).

- a) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $A = \frac{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\sin^3 \alpha + 4\cos^3 \alpha}$.
- b) Cho đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật.

Câu 6(1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABC có mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SBC).

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $\widehat{BAD} = 135^\circ$, trực tâm tam giác ABD là H(-1;0). Đường thẳng đi qua D và H có phương trình $x - 3y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành biết điểm $G(\frac{5}{3}; 2)$

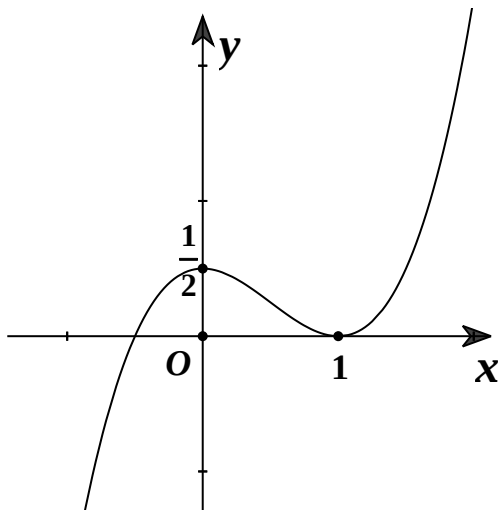
là trọng tâm tam giác ADC.

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3y^2 + 3x - 6y - 4 = 0 \\ y(\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7y+13}) = 3(x+1) \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm). Cho $x, y, z > 0$ và $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3}$.

Câu 1	Nội dung	1,0																
1a. (1,0 điểm)	Hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ ▪ TXĐ: $D = \mathbb{R}$ ▪ Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 3x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$	0,25																
	Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ - Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CD} = \frac{1}{2}$, đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = 0$. - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$	0,25																
	- Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	y	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$													
	y'	+	0	-	0	+												
y	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$														
▪ Đồ thị: 	0,25																	
1b. (1 đ)	+ Đường thẳng $6x - y - 4 = 0$ có hệ số góc bằng 6 + Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là điểm mà tại đó tiếp tuyến song song đường thẳng $6x - y - 4 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 6$	0,25																
		0,25																

	$\Rightarrow 3x_0^2 - 3x_0 = 6$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 2 \end{cases}$ + Với $x_0 = 2 \rightarrow y_0 = 5/2 \rightarrow M_0(2; 5/2)$ $x_0 = -1 \rightarrow y_0 = -2 \rightarrow M_0(-1; -2)$ + Kiểm tra lại $M_0(2, 5/2)$ tiếp tuyến tại M_0 có pt là $y = 6(x - 2) + 5/2$ (nhận) $M_0(-1; -2) \rightarrow$ tiếp tuyến tại M_0 có pt là $y = 6(x + 1) - 2 = 6x + 4$ (nhận)	0,25 0,25
Câu 2(1,0 điểm)		
2a(0,5 điểm)	TXĐ: $D = \mathbb{R}$ $y' = (e^{-x})'(x^2 - x - 1) + e^{-x}(x^2 - x - 1)' = -e^{-x}(x^2 - x - 1) + e^{-x}(2x - 1)$ $= e^{-x}(-x^2 + 3x)$ $y'(\ln \frac{1}{2}) = 2(-\ln^2 2 - 3 \ln 2)$	0,25 0,25
2b(0,5 điểm)	Điều kiện $x > \frac{3}{4}$ Bất phương trình tương đương $\log_3 \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 2$ $\Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 18 \leq 0$ $\Leftrightarrow \frac{-3}{8} \leq x \leq 3$ Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{3}{4}; 3 \right]$	0,25 0,25
Câu 3(1)		
	Đặt $\begin{cases} u = 2x - 1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = -\cos x \end{cases}$	0,25
	$I = -(2x - 1) \cos x \Big _0^\pi - \int_0^\pi (-2 \cos x) dx$	0,25
	$= (2\pi - 1) - 1 + 2 \sin x \Big _0^\pi$	0,25
	$= 2\pi - 2$	0,25

Câu 4(1,0 đ)	Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-3;-3)$, bán kính $R = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-3)^2 - 17} = \sqrt{5}$	0,25
	Khoảng cách từ tâm I đến mp(P): $d = d(I, (P)) = \frac{ 2 - 2(-3) + 2(-3) + 1 }{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1 < R$ • Vì $d(I, (P)) < R$ nên (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C)	0,25
	Gọi d là đường thẳng qua tâm I của mặt cầu và vuông góc mp(P) thì d có vtcp $\vec{u} = (1; -2; 2) \text{ nên có PPTS } d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \text{ (*)} \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ Thay (*) vào pt mặt phẳng (P) ta được $(2 + t) - 2(-3 - 2t) + 2(-3 + 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 9t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$ • Vậy, đường tròn (C) có tâm $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{11}{3}\right)$	0,25
	Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$	0,25
Câu 5a(0,5 điểm)	$A = \frac{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\sin^3 \alpha + 4\cos^3 \alpha} = \frac{3\tan \alpha - 2}{\cos^2 \alpha (5\tan^3 \alpha + 4)}$	0,25
	$= \frac{3\tan \alpha - 2}{5\tan^3 \alpha + 4} (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{70}{139}$	0,25
Câu 5b(0,5đ)	-Có 10 đường kính của đường tròn được nối bởi 2 đỉnh của đa giác đều. - Một hình chữ nhật có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác được tạo bởi 2 đường kính nối trên. -Số cách chọn 4 đỉnh của đa giác là: $C_{20}^4 = 4845$ -Số cách chọn 4 đỉnh của đa giác tạo thành hình chữ nhật là $C_{10}^2 = 45$ -Xác suất cần tìm là : $P = \frac{45}{4845} = \frac{3}{323}$	0,25
		0,25

	Nếu $a=-2b$. Chọn $a=2, b=-1$. Phương trình đường thẳng HB: $2x-y+2=0$ $B(b;2b+2), D(3d-1;d)$ Do G là trọng tâm tam giác ADC nên $BG=2GD \Rightarrow \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GD} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow B(1;4), D(2;1)$ Phương trình đường thẳng AB: $3x+y-7=0$; phương trình đường thẳng AD: $x+2y-4=0$ Suy ra $A(2;1)$(loại) Nếu $b=2a$. Phương trình HB: $x+2y+1=0$ $B(-2b-1;b), D(3d-1;d) \Rightarrow \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GD} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow B(-5;2), D(5;2)$ Phương trình AB: $3x+y+13=0$; Phương trình AD: $2x-y-8=0$. Suy ra $A(-1;-10)$ Do ABCD là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ suy ra $C(1;14)$ Thử lại: $\cos \widehat{ABD} = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BAD} = 45^\circ$ (LOẠI)	0,25 0,25 0,25
Câu 8(1,0 đ)	Điều kiện $x \geq \frac{-3}{2}$ Từ phương trình (1) ta có $x^3 + 3x = (y+1)^3 + 3(y+1)$ Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ $f'(t) = 3t^2 + 3$ $f'(t) > 0$ với mọi t suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. $f(x) = f(y+1) \Leftrightarrow x = y+1$	0,25 0,25
	Thế $x=y+1$ vào phương trình (2) ta được: $(x-1)(\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7x+6}) = 3(x+1)$ (3) Ta có $x=1$ không là nghiệm phương trình. Từ đó $(\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7x+6}) = \frac{3(x+1)}{x-1}$ Xét hàm số $g(x) = (\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7x+6}) - \frac{3(x+1)}{x-1}$ TXĐ: $D = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$ $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{(7x+6)^2}} + \frac{6}{(x-1)^2}$ $g'(x) > 0 \forall x > -\frac{3}{2}; x \neq 1, g'(-\frac{3}{2})$ không xác định. Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\frac{3}{2}; 1)$ và $(1; +\infty)$. Ta có $g(-1)=0; g(3)=0$. Từ đó phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm $x=-1$ và $x=3$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(-1;-2)$ và $(3;2)$	0,25 0,25

Câu 9	Đặt $y+z=t$ ($t>0$); $y^2 + z^2 \geq \frac{t^2}{2}$; $yz \leq \frac{t^2}{4}$. $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + xz)$ $\Leftrightarrow 5x^2 + 5(y+z)^2 - 9x(y+z) = 28yz$ $\Rightarrow 5x^2 + 5t^2 - 9xt \leq 7t^2$ $\Leftrightarrow (5x+t)(x-2t) \leq 0$ $\Leftrightarrow x \leq 2t$	0,25
	$P \leq \frac{2x}{t^2} - \frac{1}{27t^3} \leq \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3}$ Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3}$ với $t>0$ $f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{1}{9t^4}$ $\begin{cases} f'(t) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$ Lập bảng biến thiên từ đó suy ra GTLN của P bằng 16 đạt được tại $x = \frac{1}{3}; y = z = \frac{1}{12}$	0,25 0,25