

Họ và tên:; Trường:; Lớp:

Phương pháp hàm số đặc trưng thường xuyên xuất hiện trong đề thi THPT Quốc Gia và nó cũng là một trong những câu phân loại của đề:

- Câu 47 mã đề 101 – THPT QG năm 2017.
- Câu 35 đề tham khảo – BGD&ĐT năm 2018.
- Câu 46 mã đề 101 – THPT QG năm 2018.
- Câu 47 đề tham khảo – BGD&ĐT năm 2020.

Sau đây, tôi xin trình bày cơ sở lý thuyết và giới thiệu một số ví dụ áp dụng của nó trong các đề thi thử THPT Quốc Gia cũng như đề chính thức của BGD&ĐT qua các năm.

I. Cơ sở lý thuyết: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập D .

- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên D thì $\forall u, v \in D, f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.
- Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên D thì $\forall u, v \in D, f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v$.
- Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến trên D thì $\forall u, v \in D, f(u) < f(v) \Leftrightarrow u > v$.

II. Áp dụng

1. Giải phương trình, bất phương trình mũ và logarit

Câu 1. (Chuyên Thái Bình 18) Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\log \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 5}{x^2 + 1} + (x+1)^3 = x^2 + 6x + 7.$$

A. $-2 + \sqrt{3}$.

B. -2 .

C. 0 .

D. $-2 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện $\frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 5}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x - 5 > 0$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương $\log \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 5}{x^2 + 1} + (x+1)^3 = x^2 + 6x + 7$

$$\Leftrightarrow \log(x^3 + 3x^2 - 3x - 5) - \log(x^2 + 1) = x^2 + 6x + 7 - (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \log(x^3 + 3x^2 - 3x - 5) + x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = \log(x^2 + 1) + x^2 + 1 \quad (*)$$

Xét hàm số $y = f(t) = \log t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow f(x^3 + 3x^2 - 3x - 5) = f(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, ta được $x = \pm\sqrt{3}$ thỏa mãn.

Vậy $S = \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$.

Câu 2. (SGD Bắc Ninh 18) Cho phương trình $\frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

A. $S = -2$.

B. $S = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$.

C. $S = 2$.

D. $S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Chọn D.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -2 < x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\log_2 \sqrt{x+2} + \left(\sqrt{x+2} - 1\right)^2 = \log_2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left[\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 1\right]^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $y = f(t) = \log_2 t + (t-1)^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2(t-1) = \frac{2 \ln 2 \cdot t^2 - 2 \ln 2 \cdot t + 1}{t \cdot \ln 2} > 0, \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2 + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Câu 3. (Nguyễn Trãi - Đà Nẵng 18) Gọi $x_0 = \frac{a+b\sqrt{3}}{c}$ là một nghiệm lớn hơn 1 của phương trình

$$2x \left[\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \right] + 1 = 2x^2 - 1. \text{ Giá trị của } P = a + b + c \text{ là}$$

A. $P = 6$.

B. $P = 0$.

C. $P = 2$.

D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn D.

Với $x > 1$ ta có

$$2x \left[\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \right] + 1 = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{x-1} + 1 = x - \frac{1}{2x} \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}} + \frac{1}{2x} = 3^{x-1} + x - 1 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t > 0.$$

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2x}\right) = f(x-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=1, b=1, c=2.$$

Vậy $P = 4$.

Câu 4. (THTT 18) Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b}) \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tính } a + b.$$

A. $a + b = 16$.

B. $a + b = 11$.

C. $a + b = 14$.

D. $a + b = 13$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 \left(\frac{(2x-1)^2}{2x} \right) + 4x^2 - 4x + 1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_7 (2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7 2x + 2x(1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_7 t + t \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \text{ với } t > 0$$

Vậy hàm số đồng biến

$$\text{Phương trình (1) trở thành } f((2x-1)^2) = f(2x) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x_1 + 2x_2 = \begin{cases} \frac{9-\sqrt{5}}{4} & (l) \\ \frac{9+\sqrt{5}}{4} & (tm) \end{cases} \Rightarrow a=9; b=5 \Rightarrow a+b=9+5=14.$$

Câu 5. (Lương Thế Vinh 19) Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của b là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1) \Leftrightarrow \log_3 (2x-1) + (2x-1) = \log_3 (3(x-1)^2) + 3(x-1)^2 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t) + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow f(2x-1) = f(3(x-1)^2).$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b=3$.

Câu 6. (Lê Xoay - Vĩnh phúc 18) Số nghiệm của phương trình $\sin 2x - \cos x = 1 + \log_2(\sin x)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Vì $\sin x > 0$ và $\cos x > 0$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình đã cho tương đương

$$\sin 2x - \cos x + \log_2(\cos x) = 1 + \log_2(\sin x) + \log_2(\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(\cos x) - \cos x = \log_2(\sin 2x) - \sin 2x \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - t$, với $t \in (0; 1)$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - 1 > 0$, $\forall t \in (0; 1)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

$$(*) \Leftrightarrow f(\cos x) = f(\sin 2x) \Leftrightarrow \cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ hay } x = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 7. (CỔ LOA - HÀ NỘI 19) Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + e^x - e^{-x}$. Hỏi phương trình $f(3^x) + f(2x-1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{x^2+1}+x > \sqrt{x^2}+x = |x|+x \geq -x+x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) + e^{-x} - e^x = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) + e^{-x} - e^x = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) - e^x + e^{-x} = -f(x).$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

$$\text{Mà } f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1}+x} + e^x + e^{-x} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+x} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } f(3^x) + f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow f(3^x) = -f(2x-1) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1-2x) \Leftrightarrow 3^x = 1-2x$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 2x - 1 = 0 (*)$$

Xét hàm số $g(x) = 3^x + 2x - 1$ trên $\mathbb{R}$.

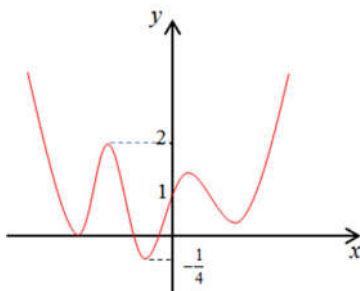
$$g'(x) = 3^x \ln 3 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(*)$ nếu có nghiệm thì có nghiệm duy nhất.

Mà $x = 0$ là một nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $(*)$ là $S = \{0\}$.

Câu 8. (TỰ NGHĨA 19) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số nghiệm của phương trình $\frac{f^3(x) + 3f^2(x) + 4f(x) + 2}{\sqrt{3f(x)+1}} = 3f(x) + 2$ là

A. 6.

B. 9.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x) \geq -\frac{1}{4}$ nên $3f(x)+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = f(x)$ ta được $\frac{t^3 + 3t^2 + 4t + 2}{\sqrt{3t+1}} = 3t + 2 \Leftrightarrow (t+1)^3 + (t+1) = (\sqrt{3t+1})^3 + \sqrt{3t+1} \quad (*)$

Xét hàm đặc trưng $g(u) = u^3 + u$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow g(t+1) = g(\sqrt{3t+1}) \Leftrightarrow t+1 = \sqrt{3t+1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ t^2 + 2t + 1 = 3t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \quad (1) \\ f(x) = 1 \quad (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 6 nghiệm phân biệt (không trùng nhau).

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 9. (Nguyễn Du - DakLak 19) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > 0$). Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(2;-3)$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $f^3(x) + f(x) - 2\sqrt[3]{f(x)} = 0$ có bao nhiêu phần tử?

A. 2019.

B. 2018.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo giả thiết ta có hệ $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(2) = 0 \\ f(2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \\ 12a + 4b = 0 \\ 8a + 4b + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

+ Xét phương trình:

$f^3(x) + f(x) - 2\sqrt[3]{f(x)} = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + 2.f(x) = (\sqrt[3]{f(x)})^3 + 2.\sqrt[3]{f(x)} \quad (*)$.

Xét hàm số đặc trưng $h(t) = t^3 + 2t \Rightarrow h'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{f(x)} \Leftrightarrow f^3(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \quad (1) \\ x^3 - 3x^2 = 0 \quad (2) \\ x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \quad (3) \end{cases}$

Bấm máy, phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt, phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt (**không trùng nhau**).

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt.

2. Tìm điều kiện để phương trình, bất phương trình có nghiệm

Câu 10. (Đề Chính Thức 18 - Mã 103) Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9.

B. 25.

C. 24.

D. 26.

Hướng dẫn giải

Chọn C

ĐK: $x - m > 0$ (a).

Đặt $t = \log_7(x-m)$ ta có hệ $\begin{cases} 7^x + m = t \\ 7^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 7^x + x = 7^t + t \quad (1)$.

Do hàm số $f(u) = 7^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$.

Khi đó: $7^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 7^x$ (thỏa điều kiện a).

Xét hàm số $g(x) = x - 7^x \Rightarrow g'(x) = 1 - 7^x \ln 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_7(\ln 7)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_7(\ln 7)$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(-\log_7(\ln 7))$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq g(-\log_7(\ln 7)) \approx -0,856$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(-25; 25)$, nên $m \in \{-24; -16; \dots; -1\}$.

Câu 11. (Đề tham khảo BGD 18) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt[3]{m+3\sqrt{m+3\sin x}} = \sin x \text{ có nghiệm thực?}$$

A. 5.

B. 7.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \sqrt[3]{m+3\sqrt{m+3\sin x}} = \sin x \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{m+3\sin x} = \sin^3 x - m.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin x (-1 \leq u \leq 1) \\ v = \sqrt[3]{m+3\sin x} \rightarrow v^3 = m+3\sin x = m+3u \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} 3v = u^3 - m \\ v^3 = m+3u \end{cases} \rightarrow u^3 + 3u = v^3 + 3v (*).$$

Xét hàm số $y = f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

$$\text{Suy ra } u^3 = m+3u \Leftrightarrow m = u^3 - 3u (1).$$

Xét hàm số $g(u) = u^3 - 3u$ trên đoạn $[-1; 1]$.

$$\text{Ta có } g'(u) = 3u^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1.$$

$$g(-1) = 2; g(1) = -2.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-1;1]} g(u) = 2; \min_{[-1;1]} g(u) = -2.$$

Do đó phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $-2 \leq m \leq 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình

$$\log_2(m + \sqrt{m+2^x}) = 2x \text{ có nghiệm thực?}$$

A. 2017.

B. 2016.

C. 1005.

D. 1004.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} m+2^x \geq 0 & (a) \\ m+\sqrt{m+2^x} > 0 & (b) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \log_2(m + \sqrt{m+2^x}) = 2x \Leftrightarrow m + \sqrt{m+2^x} = (2^x)^2 \Leftrightarrow m + 2^x + \sqrt{m+2^x} = (2^x)^2 + 2^x (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Vì $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(\sqrt{m+2^x}) = f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt{m+2^x} = 2^x \Leftrightarrow m = 4^x - 2^x$.

Xét hàm số $g(x) = 4^x - 2^x$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 4^x \ln 4 - 2^x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

YCBT $\Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4}$.

Vậy $m \in \{1; 2; \dots; 2017\}$.

Câu 13. (KHTN Hà Nội 19) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($|m| < 10$) để phương trình $2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m$ có nghiệm?

A. 9.

B. 10.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

ĐK: $x+2m > 0$

Ta có $2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m \Leftrightarrow 2^x = \log_2(x+2m) + 2m$

Đặt $t = \log_2(x+2m)$ ta có $\begin{cases} 2^x = t + 2m \\ 2^t = x + 2m \end{cases} \Rightarrow 2^x + x = 2^t + t \quad (1)$

Do hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó:

$$2^x = x + 2m \Leftrightarrow 2m = 2^x - x.$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - x \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_2(\ln 2)$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$	$g(-\log_2(\ln 2))$	$+\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $2m \geq g(-\log_2(\ln 2)) \Leftrightarrow m \geq \frac{g(-\log_2(\ln 2))}{2}$

$\approx 0,457$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x+2m = 2^x > 0$)

Do m nguyên và $|m| < 10$, nên $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị $x \in [2; 4]$.

A. 4037.

B. 2021.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) \geq (mx)^3 + mx \quad (1).$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$, có $g'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow g(x+1) \geq g(mx) \Leftrightarrow x+1 \geq mx \Leftrightarrow m \leq \frac{x+1}{x}, \forall x \in [2;4].$$

Vì hàm số $h(x) = \frac{x+1}{x}$ nghịch biến trên đoạn $[2;4]$ nên $\min_{[2;4]} h(x) = h(4) = \frac{5}{4}$.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow m \leq \min_{[2;4]} h(x) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}.$$

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-2018;2018]$ nên có 2020 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 15. (Chuyên Vĩnh Phúc 18) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\ln(m + \ln(m+x)) = x$ có nhiều nghiệm nhất.

A. $m \geq 0$.

B. $m > 1$.

C. $m < e$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện} \begin{cases} m+x > 0 & (a) \\ m+\ln(m+x) > 0 & (b) \end{cases}.$$

Phương trình đã cho tương đương với $m + \ln(m+x) = e^x$ (thỏa điều kiện b).

$$\text{Đặt } \ln(m+x) = y \rightarrow m+x = e^y \text{ (thỏa điều kiện a)} \Leftrightarrow e^y - m = x.$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} e^x - m = y \\ e^y - m = x \end{cases} \Rightarrow e^x - e^y = y - x \Rightarrow e^x + x = e^y + y \quad (*).$$

Vì hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

$$\rightarrow m+x = e^x \Leftrightarrow m = e^x - x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = e^x - x; \quad g'(x) = e^x - 1; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

BBT

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Suy ra phương trình có nhiều nhất là hai nghiệm $\Leftrightarrow m > 1$.

Câu 16. (SỞ CÀ MAU 19) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019;2019]$ để bất phương trình $(1-m^3)x^3 + 3(2-m^3)x^2 + (13-m-3m^3)x + 10-m-m^3 \geq 0$ đúng

với mọi $x \in [1;3]$. Số phần tử của tập S là

A. 4038.

B. 2021.

C. 2022.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

$$(1-m^3)x^3 + 3(2-m^3)x^2 + (13-m-3m^3)x + 10-m-m^3 \geq 0, \forall x \in [1;3].$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 + x + 2 \geq [m(x+1)]^3 + m(x+1), \forall x \in [1;3]. \quad (*)$$

$$\text{Xét: } f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}, \text{ ta có } f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(x+2) \geq f(m(x+1)) \Leftrightarrow x+2 \geq m(x+1) \Leftrightarrow m \leq \frac{x+2}{x+1}.$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow m \leq \min_{[1;3]} \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2019; -2018; \dots; 1\}$.

Vậy có 2021 giá trị cần tìm.

Câu 17. (ĐỀ 17 VTED 19) Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $x^6 + 6x^4 - mx^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi số thực x .

A. 4.

B. 3.

C. Vô số.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^6 + 6x^4 - mx^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 10 \geq m^3x^3 + 3m^2x^2 + 6mx$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 + 3(x^2 + 2) \geq (mx + 1)^3 + 3(mx + 1) \Leftrightarrow f(x^2 + 2) \geq f(mx + 1)$$

Trong đó $f(x) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$f(x^2 + 2) \geq f(mx + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2 \geq mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Câu 18. (SỞ QUẢNG BÌNH 19) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình sau $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2 \geq m^3x^3 + mx$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1) \geq (mx)^3 + mx \quad (1)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 1) \geq f(mx) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq mx$$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình $x^2 + 1 \geq mx$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$

$$x^2 + 1 \geq mx \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x} = g(x), \forall x \in [1; 3]$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \forall x \in [1; 3] \Rightarrow \min_{x \in [1; 3]} g(x) = g(1) = 2$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2\} \rightarrow S = 1 + 2 = 3$.

Câu 19. (Chuyên Thái Bình 19) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm $x \in [1; 2]$ biết $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$.

A. 16.

B. 15.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x) + m} \rightarrow t^3 = f(x) + m$. Ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ t = f(x) + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) + t^3 = f(x) + x^3 (*) \\ f(x) = t^3 - m \end{cases}.$$

Vì $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m, f'(x) = 5x^4 + 9x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $h(x) = f(x) + x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó: $(*) \Leftrightarrow x = t$.

$$\text{Khi đó ta được: } f(x) = x^3 - m = x^5 + 3x^3 - 4m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^3 = m(**).$$

Dễ thấy $g(x) = \frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^3$ đồng biến trên $[1; 2]$ nên phương trình $(**)$ có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$ khi

$$\text{và chỉ khi: } g(1) \leq m \leq g(2) \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16.$$

Vì m thuộc số nguyên nên có 16 số thỏa mãn bài toán.

- Câu 20. (Tập huấn Bắc Ninh 19)** Cho phương trình $2x^3 \cdot \sqrt{6x+4m} \cdot (3x+2m+1) = 8x^6 + 20x^4 + 10x^2 + 1$. Biết $\left(\frac{a}{b}; +\infty\right)$ (với a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản) là tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt. Tính $S = a^2 + b^2$.
- A. 17. B. 5. **C. 25.** D. 10.

Lời giải

Chọn C

Với $x > 0$ phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{6x+4m} \cdot (6x+4m+2) = 8x^3 + 20x + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{6x+4m}\right)^3 + 2\sqrt{6x+4m} = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^3 + 2\left(2x + \frac{1}{x}\right) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(\sqrt{6x+4m}) = f\left(2x + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{6x+4m} = 2x + \frac{1}{x} \rightarrow 4m = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6x.$$

Xét hàm số $g(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6x$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$g'(x) = 2\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{x} \cdot \frac{2x^2-1}{x^2} = 3 \Leftrightarrow 4x^4 - 1 = 3x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-0,57... < 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow m > \frac{3}{4} \rightarrow S = 3^2 + 4^2 = 25.$$

- Câu 21. (TRẦN NHÂN TÔNG - QUẢNG NINH 18)** Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$. Tính $T = b^2 - a^2$.
- A. $T = 36$. **B. $T = 48$.** C. $T = 64$. D. $T = 72$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-2)^3 + 8 + m - 3x = 2^3 + 2^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3 (*)$$

Xét hàm số $g(t) = 2^t + t^3$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow g(\sqrt[3]{m-3x}) = g(2-x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 2-x \Leftrightarrow m-3x = (2-x)^3 \Leftrightarrow m = 8-9x+6x^2-x^3.$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{có } f'(x) = -3x^2 + 12x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 4 8

Dựa vào bảng biến thiên ta có, phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4 < m < 8$.

Suy ra $a = 4$; $b = 8 \Rightarrow T = b^2 - a^2 = 48$.

Câu 22. (SGD Bà Rịa Vũng Tàu 18) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa

$$e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y \text{ và } \log_3^2(3x+2y-1) - (m+6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0.$$

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ 3x+2y-1 > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y} + (3x+5y) = e^{x+3y+1} + (x+3y+1) \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(3x+5y) = f(x+3y+1) \Leftrightarrow 3x+5y = x+3y+1 \Leftrightarrow 2y = 1-2x.$$

$$\text{Thế vào phương trình còn lại ta được } \log_3^2 x - (m+6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x, \text{ phương trình trở thành } t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 23. (SỞ BÀ RIÀ VŨNG TÀU 19) Cho phương trình $3^{x^3+x^2-2x+m} - 3^{x^2+x+5} + x^3 - 3x + m - 5 = 0$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có ba nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } 3^{x^3+x^2-2x+m} + (x^3 + x^2 - 2x + m) = 3^{x^2+x+5} + (x^2 + x + 5). \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$, $t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó phương trình (1) } \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x + m = x^2 + x + 5 \Leftrightarrow m = -x^3 + 3x + 5. \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = -x^3 + 3x + 5 \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 3; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$					$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 3 7

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3 < m < 7$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 4; 5; 6$. Vậy có 3 giá trị m nguyên.

Câu 24. Cho phương trình $e^{m \cos x - \sin x} - e^{2(1-\sin x)} = 2 - \sin x - m \cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính $T = 10a + 20b$.

A. $T = 10\sqrt{3}$.

B. $T = 0$.

C. $T = 1$.

D. $T = 3\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $e^{m \cos x - \sin x} - e^{2(1 - \sin x)} = 2 - \sin x - m \cos x$

$$\Leftrightarrow e^{m \cos x - \sin x} + m \cos x - \sin x = e^{2(1 - \sin x)} + 2(1 - \sin x)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ ($t \in \mathbb{R}$), $f'(t) = e^t + 1 > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $e^{m \cos x - \sin x} + m \cos x - \sin x = e^{2(1 - \sin x)} + 2(1 - \sin x) \Leftrightarrow m \cos x - \sin x = 2(1 - \sin x)$

$$\Leftrightarrow m \cos x + \sin x = 2.$$

Phương trình có nghiệm khi $m^2 + 1 \geq 4 \Leftrightarrow m^2 \geq 3$.

$$\Rightarrow S = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty). \text{ Vậy } T = 10a + 20b = 10\sqrt{3}.$$

Câu 25. (Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai 18) Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m \text{ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.}$$

A. 3.

B. Vô số.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$ (a).

Ta có:

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} \right) - 1 = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = (4x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Suy ra: $(1) \Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1 \text{ (thỏa điều kiện a)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2). \text{ Điều này đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y			-4		$-\frac{25}{4}$		

Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi

$$-\frac{25}{4} < m - 1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26. (SGD Phú Thọ 18) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2 \text{ có hai nghiệm thực phân biệt?}$$

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2x^2 + mx + 1 > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = \log_2 (x + 2) + x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) = f(x + 2) \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_2 t + t \text{ với } t \in (0; +\infty) \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty).$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty) \text{ nên } (1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2.$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} x > -2 \\ 2x^2 + mx + 1 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m - 4)x - 3 = 0 \end{cases} \quad (2).$$

YCBT $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 4)^2 + 12 > 0 \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ x_1 + x_2 + 4 > 0 \\ x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ 4 - m + 4 > 0 \\ -3 + 2(4 - m) + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{2} \text{ mà } m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Câu 27. (SGD Bắc Ninh 18) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1 - x^2})(1 + x\sqrt{1 - x^2}) \text{ có nghiệm là}$$

A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right).$

B. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right].$

C. $\left(0; \frac{1}{e}\right).$

D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right).$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{1 - x^2} \rightarrow t^2 = 1 + 2x\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x\sqrt{1 - x^2} = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}}; t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$t(-1) = -1; t(1) = 1; t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \rightarrow -1 \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Phương trình trở thành } e^{3m} + e^m = 2t \cdot \left(1 + \frac{t^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t(*).$$

Xét hàm $f(u) = u^3 + u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(e^m) = f(t) \Leftrightarrow e^m = t.$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2} \ln 2$.

Câu 28. (SỞ NAM ĐỊNH 19) Cho hàm số $f(x) = 2019^x - 2019^{-x}$. Tìm số nguyên m lớn nhất để $f(m) + f(2m+2019) < 0$

- A. -673. B. -674. C. 673. D. 674.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x) = 2019^x - 2019^{-x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(-x) = 2019^{-x} - 2019^x = -(2019^x - 2019^{-x}) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$.

Mà $f'(x) = 2019^x \ln 2019 + 2019^{-x} \ln 2019 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do vậy: $f(m) + f(2m+2019) < 0 \Leftrightarrow f(2m+2019) < -f(m)$

$\Leftrightarrow f(2m+2019) < f(-m) \Leftrightarrow 2m+2019 < -m \Leftrightarrow m < -673$

Do đó giá trị m nguyên lớn nhất thỏa mãn là -674.

Câu 29. (Đặng Thành Nam 19) Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thỏa

mãn bất phương trình $f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0$

- A. 65. B. 66. C. 64. D. 63.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $m > 1$.

Hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x$, nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó ta có

$f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f(\log m) \leq -f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \Leftrightarrow f(\log m) \leq f\left(-\log_m \frac{1}{2019}\right)$

$\Leftrightarrow \log m \leq -\log_m \frac{1}{2019} \Leftrightarrow \log m \leq \frac{\log 2019}{\log m} \Leftrightarrow m \leq 10^{\sqrt{\log 2019}} \approx 65,77$.

Suy ra $m \in \{2; 3; \dots; 65\}$. Vậy có tất cả 64 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 30. (Đặng Thành Nam 19) Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2 + 1}}(e^x - e^{-x})$. Có bao nhiêu số nguyên dương m thỏa mãn bất phương trình $f(m-7) + f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq 0$?

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = e^{\sqrt{x^2 + 1}}(e^{-x} - e^x) = -f(x)$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

$f(x) = e^{x+\sqrt{x^2+1}} - e^{-x+\sqrt{x^2+1}} \rightarrow f'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)e^{x+\sqrt{x^2+1}} + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)e^{-x+\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$f(m-7) + f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f(m-7) \leq -f\left(\frac{12}{m+1}\right) = f\left(-\frac{12}{m+1}\right).$$

$$\Leftrightarrow m-7 \leq -\frac{12}{m+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 5 \\ m < -1 \end{cases}.$$

Vì m là số nguyên dương nên $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Câu 31. (ĐỀ 08 VTED 19) Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) + f(2x - x^2 - 5) < 0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 1)$.

A. 7.

B. 3.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(-x) = 2^{-x} - 2^x = -f(x)$ và $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) + f(2x - x^2 - 5) < 0 \Leftrightarrow f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) < f(x^2 - 2x + 5)$

$$\Leftrightarrow |x^3 - 2x^2 + 3x - m| < x^2 - 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 3x - m < x^2 - 2x + 5 \\ x^3 - 2x^2 + 3x - m > -x^2 + 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x - 5 < m \\ x^3 - x^2 + x + 5 > m \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 5, x \in (0; 1)$ có $\max_{[0;1]} g(x) = -2$

$h(x) = x^3 - x^2 + x + 5, x \in (0; 1)$ có $\min_{[0;1]} h(x) = 5$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x - 5 < m \\ x^3 - x^2 + x + 5 > m \end{cases}, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \\ 5 \geq m \end{cases}.$$

Vậy có 8 nguyên thỏa mãn.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+x^2} + x$. Tìm các giá trị của m để bất phương trình $(x-m)f(x-m) + \frac{x^3 + 2019x}{f(x^3 + 2019x)} \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [4; 16]$.

A. $m \geq 35228$.

B. $m \geq 36416$.

C. $m \leq 38421$.

D. $m \leq 34662$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} + (-x) = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{f(x)}$$

$$\text{Ta có } (x-m)f(x-m) + \frac{x^3 + 2019x}{f(x^3 + 2019x)} \leq 0 \Leftrightarrow (x-m)f(x-m) \leq -\frac{x^3 + 2019x}{f(x^3 + 2019x)}$$

$$\Leftrightarrow (x-m)f(x-m) \leq (-x^3 - 2019x)f(-x^3 - 2019x)(1) \quad (\text{Vì } f(-x) = \frac{1}{f(x)}).$$

Xét hàm số $g(t) = t.f(t) = t(\sqrt{1+t^2} + t)$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + 2t \stackrel{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{\sqrt{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}} + 2t = 2\sqrt{t^2} + 2t$$

$$\Rightarrow g'(t) \geq 2|t| + 2t \geq 0.$$

Vậy hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow g(x-m) \leq g(-x^3 - 2019x) \Leftrightarrow x-m \leq -x^3 - 2019x \Leftrightarrow m \geq x^3 + 2020x.$$

$$(1) \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [4; 16] \Leftrightarrow m \geq \max_{[4;16]} (x^3 + 2020x) = 36416.$$

Câu 33. (Yên Mô A – Ninh Bình 19) Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$ có ba nghiệm phân biệt bằng

A. 45.

B. 38.

C. 34.

D. 27.

Lời giải

Chọn D

Phương trình tương đương với

$$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1 \Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (m-3x) = 3^{3-x} + (3-x)^3 (*).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t + t^3$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t) = 3^t \ln 3 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{m-3x}) = f(3-x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 3-x \Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x \Leftrightarrow m = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27.$$

$$\text{Đặt } g(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 7 < m < 11$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \rightarrow m \in \{8; 9; 10\} \rightarrow S = 8 + 9 + 10 = 27$.

Câu 34. (YÊN LẠC 19) Cho phương trình $27^x + 3x \cdot 9^x + (3x^2 + 1)3^x = (m^3 - 1)x^3 + (m-1)x$, m là tham số.

Biết rằng giá trị m nhỏ nhất để phương trình đã cho có nghiệm trên $(0; +\infty)$ là $a + e \ln b$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $17a + 3b$ bằng

A. 26.

B. 54.

C. 48.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương $x^3 + 3x^2 3^x + 3x \cdot (3^x)^2 + (3^x)^3 + x + 3^x = (mx)^3 + mx$

$$\Leftrightarrow (x + 3^x)^3 + x + 3^x = (mx)^3 + mx (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (*) suy ra $x + 3^x = mx$. Vì $x > 0$ suy ra $1 + \frac{3^x}{x} = m$.

Xét hàm số $f(x) = 1 + \frac{3^x}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(3^x \ln 3)x - 3^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3^x (x \ln 3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 3} = \log_3 e.$$

Dấu của $f'(x)$ cũng là dấu của nhị thức bậc nhất $x \ln 3 - 1$, do đó ta có bảng biến thiên:

x	0	$\log_3 e$			$+\infty$
f'		-	0	+	
f	$+\infty$	$1+e \cdot \ln 3$			$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của m để phương trình có nghiệm là $m = 1 + e \ln 3$.
Suy ra $a = 1, b = 3 \Rightarrow 17a + 3b = 17 + 9 = 26$.

- Câu 35. (Sơn Tây Hà Nội 19)** Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.
A. 4036. **B.** 4034. **C.** 4038. **D.** 4040.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ với $t \geq 0$.

$$\text{Ta có } y' = 2^t \cdot \log_2(t+2) \cdot \ln 2 + \frac{2^t}{(t+2) \ln 2} > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Vậy hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow f((x-1)^2) = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ -(x-1)^2 = 2(x-m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ 2m = x^2 + 1 & (2) \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{TH1: (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

$$\text{TH2: (2) có 2 nghiệm phân biệt và (1) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

$$\text{TH3: (1) có nghiệm } x = 2 \text{ và (2) có nghiệm } x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } m \text{ thuộc đoạn } [-2019; 2019] \text{ ta có } m \in \left[-2019; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2019\right].$$

Vì m nguyên nên ta có 4038 giá trị của m .

- Câu 36. (Thanh Chương Nghệ An 19)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng
A. 20. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định:

$$\frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 > 0 \text{ (vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x). (*)$$

Khi đó:

$$\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} - 1 \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{3(x^2 + x + 1)} \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) - \log_3 3(x^2 + x + 1) \geq -2(2x^2 + x + m + 1) + 6(x^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) + 2(2x^2 + x + m + 1) \geq \log_3 3(x^2 + x + 1) + 6(x^2 + x + 1). (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + 2t$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 2 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(2x^2 + x + m + 1) \geq f(3(x^2 + x + 1)) \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 \geq 3(x^2 + x + 1)$ (thỏa mãn (*))

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 \leq m.$$

BPT $x^2 + 2x + 2 \leq m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \min g(x)$ với $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + 2$ với $x \in \mathbb{R}$ có $g'(x) = 2x + 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min g(x) = 1$. Do đó $m \geq 1$.

Vì $m \in [-10; 10]$ nên tập $S = \{1; 2; \dots; 10\}$. Vậy S có 10 phần tử.

Câu 37. (PHỤ DỤC – THÁI BÌNH 19) Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20; 20]$ để phương trình

$$\log_2 (x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4} \text{ có nghiệm?}$$

A. 12.

B. 23.

C. 25.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4} > 0$.

$$\log_2 (x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(x(\sqrt{x^2 + 4} + x) + m \right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} + m \right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + 1 = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t, t \in (0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \text{ nên hàm số luôn đồng biến trên khoảng } (0; +\infty).$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow 8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx = \sqrt{x^2 + 4} - x \Leftrightarrow 2m(\sqrt{x^2 + 4} - x) = (\sqrt{x^2 + 4} - x) - 8x$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 - 2x(\sqrt{x^2 + 4} + x) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 4} + x^2 = \frac{1 - 2m}{2}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x\sqrt{x^2 + 4} + x^2 \text{ với } x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x(\sqrt{x^2 + 4} + x) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 1} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 1 \right) \right] = +\infty.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-2	$+\infty$

$$\text{Để phương trình có nghiệm thì } \frac{1 - 2m}{2} > -2 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}.$$

Do m nguyên thuộc $[-20; 20]$ nên số giá trị m là 23.

- Câu 38. (CHUYÊN THÁI NGUYỄN 19)** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để phương trình $2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3 \cos x}} + (\cos^3 x + 6 \sin^2 x + 9 \cos x + m - 6) 2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1$ có nghiệm thực. Khi đó tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của tập S bằng
- A. 28. B. 21. C. 24. D. 4.**

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3 \cos x}} + [(\cos x - 2)^3 + m - 3 \cos x] 2^{\cos x - 2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m - 3 \cos x}} + (\sqrt[3]{m - 3 \cos x})^3 = 2^{2 - \cos x} + (2 - \cos x)^3 \quad (*).$$

Xét hàm số đặc trưng $f(u) = 2^u + u^3$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(u) = 2^u \ln 2 + 3u^2 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{m - 3 \cos x}) = f(2 - \cos x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{m - 3 \cos x} = 2 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow -\cos^3 x + 6 \cos^2 x - 9 \cos x + 8 = m.$$

Đặt $\cos x = t$ với điều kiện $t \in [-1; 1]$, suy ra $f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 8 = m$.

Dễ thấy $\min_{t \in [-1; 1]} f(t) = 4$ và $\max_{t \in [-1; 1]} f(t) = 24$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [4; 24]$. Suy ra $S = \{4; 5; \dots; 24\}$ nên tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của S bằng 28.

Câu 39. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh 19) Gọi S là tập chứa các giá trị nguyên của m để phương trình $e^{3x^3-18x+30-m} + e^{x^3-6x+10-m} - e^{2m} = 1$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập S .

A. 110.

B. 106.

C. 126.

D. 24.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^3 - 6x + 10$.

Ta có phương trình $e^{3t-m} + e^{t-m} - e^{2m} = 1 \Leftrightarrow e^{3t} + e^t = e^{3m} + e^m$ (1).

Xét hàm số $f(x) = e^{3x} + e^x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3e^{3x} + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1), ta có $f(t) = f(m)$, suy ra $t = m$ hay $x^3 - 6x + 10 = m$ (2).

Phương trình $e^{3x^3-18x+30-m} + e^{x^3-6x+10-m} - e^{2m} = 1$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có 3 nghiệm thực phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 6x + 10$ với $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	$10 + 4\sqrt{2}$		$10 - 4\sqrt{2}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (2) có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

$$10 - 4\sqrt{2} < m < 10 + 4\sqrt{2}.$$

Ta có $10 - 4\sqrt{2} \approx 4,34$ và $10 + 4\sqrt{2} \approx 15,66$. Suy ra $S = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$.

Tổng các phần tử của S là $\frac{11}{2}(5+15) = 110$.

Câu 40. (CHUYÊN THÁI NGUYÊN 19) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2} \quad \text{có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn}$$

$$2018^{2x+\sqrt{x+1}} - 2018^{2+\sqrt{x+1}} + 2019x \leq 2019.$$

A. $m \in \left(2\sqrt{6}; \frac{11\sqrt{3}}{3}\right).$

B. $m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}].$

C. $m \in [2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}].$

D. $m \in \left(3\sqrt{3}; \frac{11\sqrt{3}}{3}\right) \cup \{2\sqrt{6}\}.$

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $2018^{2x+\sqrt{x+1}} - 2018^{2+\sqrt{x+1}} + 2019x \leq 2019$ (1). Điều kiện: $x \geq -1$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 2x + \sqrt{x+1} \\ b = 2 + \sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow a - b = 2(x-1) \Rightarrow x-1 = \frac{a-b}{2}.$$

$$(1) \text{ trở thành } 2018^a - 2018^b + 2019 \frac{a-b}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 2(2018)^a + 2019a \leq 2(2018)^b + 2019b \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = 2(2018)^t + 2019t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f'(t) = 2 \cdot 2018^t \ln 2018 + 2019 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x+1} \leq 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Với $-1 \leq x \leq 1$, ta có: $5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$

$$\Leftrightarrow 3(x+2)^2 + 2(x^2+2) = m(x+2)\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow 3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} + 2 \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2} = m \quad (3).$$

Đặt $t = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ với $x \in [-1; 1]$.

$t' = \frac{2-2x}{(\sqrt{x^2+2})^3} \geq 0, \forall x \in [-1; 1]$ nên hàm t đồng biến trên $[-1; 1]$, suy ra $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$.

Do hàm t đơn điệu trên $[-1; 1]$ nên ứng với mỗi giá trị của $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$ ta tìm được đúng một giá trị của $x \in [-1; 1]$ và ngược lại.

Viết lại phương trình (3) theo ẩn t : $3t + \frac{2}{t} = m \quad (4)$ với $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$.

(3) có 2 nghiệm thực phân biệt $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow (4)$ có 2 nghiệm thực phân biệt $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right] \quad (*)$.

Xét hàm số $g(t) = 3t + \frac{2}{t}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$.

$$g'(t) = 3 - \frac{2}{t^2}. \text{ Cho } g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2}{3}} \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right].$$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{3}$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $(*) \Leftrightarrow m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$

Vậy $m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 41. (KIM LIÊN - HÀ NỘI 19) Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m} - \sqrt[3]{2x^2+1} + x^2(x^2-1) > 1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x > 1$.

A. $m \geq \frac{1}{2}$.

B. $m > 1$.

C. $m > \frac{1}{2}$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt[3]{x^4+x^2+m} - \sqrt[3]{2x^2+1} + x^2(x^2-1) > 1-m$

$$\Leftrightarrow (x^4+x^2+m) + \sqrt[3]{x^4+x^2+m} - \sqrt[3]{2x^2+1} - (2x^2+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4+x^2+m) + \sqrt[3]{x^4+x^2+m} > \sqrt[3]{2x^2+1} + (2x^2+1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$.

Có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (1) có dạng $f(\sqrt[3]{x^4 + x^2 + m}) > f(\sqrt[3]{2x^2 + 1}) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 + x^2 + m} > \sqrt[3]{2x^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 + m > 2x^2 + 1 \Leftrightarrow m > -x^4 + x^2 + 1.$$

Xét hàm số $g(x) = -x^4 + x^2 + 1$ với $x \in (1; +\infty)$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x > 1 \Leftrightarrow m > g(x), \forall x > 1$.

$$g'(x) = -4x^3 + 2x = -2x(2x^2 - 1) < 0, \forall x > 1.$$

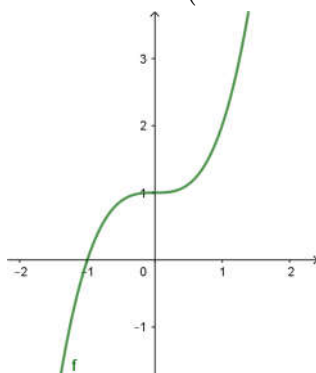
Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	1	$-\infty$

Tập giá trị của hàm số $g(x)$ trên $(1; +\infty)$ là $(-\infty; 1)$.

Vậy $m > g(x), \forall x > 1 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Câu 42. (Nguyễn Du 19) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình sau có nghiệm $x \in \mathbb{R}$. $f(-16\sin^2 x + 6\sin 2x + 8) = f(n(n+1))$



A. 10.

B. 6.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó

$$f(-16\sin^2 x + 6\sin 2x + 8) = f(n(n+1)) \Leftrightarrow -16\sin^2 x + 6\sin 2x + 8 = n(n+1)$$

Ta xét

$$-16\sin^2 x + 6\sin 2x + 8 = n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow -8(1 - \cos 2x) + 6\sin 2x + 8 - n(n+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\cos 2x + 6\sin 2x - n(n+1) = 0$$

Để phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ thì $8^2 + 6^2 \geq (n^2 + n)^2 \Leftrightarrow (n^2 + n)^2 \leq 100 \Leftrightarrow -10 \leq n^2 + n \leq 10$

$$\Leftrightarrow n^2 + n \leq 10 \Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} \leq n \leq \frac{-1 + \sqrt{41}}{2} \text{ (do } n^2 + n \geq -10, \forall n).$$

Vì n nguyên nên $n \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Câu 43. (Ngô Quyền - Hà Nội 19) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m + \sqrt{m+1} + \sqrt{1+\sin x} = \sin x$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = 4a - \frac{1}{b} - \sqrt{2}$

bằng

A. -4.

B. -5.

C. -3.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1 + \sin x} \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sqrt{1 + \sin x}$. Ta có $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ và $\sin x = t^2 - 1$.

Khi đó phương trình có dạng: $m + \sqrt{m+1+t} = t^2 - 1 \Leftrightarrow m+1+t + \sqrt{m+1+t} = t^2 + t (*)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t, t > 0$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số $f(t) = t^2 + t$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì thế $(*) \Leftrightarrow t = \sqrt{m+1+t} \Leftrightarrow m = t^2 - t - 1 (**)$

Xét hàm số $g(t) = t^2 - t - 1, t \in [0; \sqrt{2}]$.

$g'(t) = 2t - 1; g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t) = t^2 - t - 1, t \in [0; \sqrt{2}]$

t	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	-1	$-\frac{5}{4}$	$1 - \sqrt{2}$

Phương trình đề bài có nghiệm $\Leftrightarrow (**) \text{ có nghiệm } t \in [0; \sqrt{2}] \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq m \leq 1 - \sqrt{2}$.

Vậy $m \in \left[-\frac{5}{4}; 1 - \sqrt{2}\right]$ nên $a = -\frac{5}{4}; b = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow T = -4$.

Câu 44. (TT Thanh Trường - Nghệ An 19) Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{7+3x} - \sqrt[3]{7-3x} + 2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) + f(2x - 2x^2 - 5) < 0, \forall x \in (0; 1)$. Số phần tử của S là

A. 7.

B. 3.

C. 9.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(x) = \sqrt[3]{7+3x} - \sqrt[3]{7-3x} + 2019x$ là hàm số lẻ và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) < -f(2x - 2x^2 - 5) \Leftrightarrow f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) < f(2x^2 - 2x + 5)$$

$$\Leftrightarrow |x^3 - 2x^2 + 3x - m| < 2x^2 - 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 3x - m < 2x^2 - 2x + 5 \\ x^3 - 2x^2 + 3x - m > -2x^2 + 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 5x - 5 < m \\ x^3 + x + 5 > m \end{cases}$$

Xét $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 5$ và $h(x) = x^3 + x + 5$ trên $(0; 1)$ có bảng biến thiên là

x	0	1
$g'(x)$		+
$g(x)$	-5	-3

x	0	1
$h'(x)$		+
$h(x)$	5	7

Từ bảng biến thiên suy ra $f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) + f(2x - 2x^2 - 5) < 0, \forall x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \geq -3 \\ m \leq 5 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq m \leq 5.$$

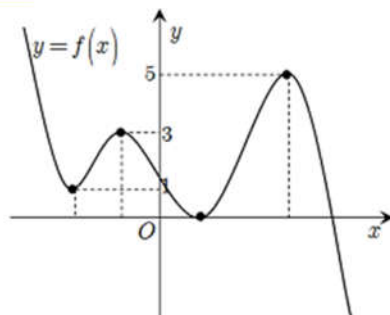
Câu 45. (Thị Xã Quảng Trị 19) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\frac{m^3 + m}{\sqrt{f^2(x) + 1}} = f^2(x) + 2$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = \sqrt{26}$.

C. $m = \sqrt{10}$.

D. $m = 1$.



Lời giải

Chọn B

Phương trình tương đương $m^3 + m = (\sqrt{f^2(x) + 1})^3 + \sqrt{f^2(x) + 1} (*)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ phương trình $(*) \Rightarrow m = \sqrt{f^2(x) + 1}$ (Đk $m \geq 1$). Khi đó phương trình

$$m = \sqrt{f^2(x) + 1} \Leftrightarrow f^2(x) = m^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{m^2 - 1} (1) \\ f(x) = -\sqrt{m^2 - 1} (2) \end{cases}$$

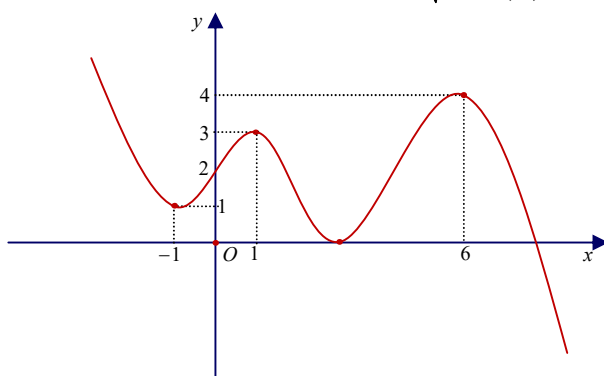
Nếu $m = 1$ ta có $f(x) = 0$ phương trình có 2 nghiệm nên $m = 1$ (loại).

Nếu $m > 1$ phương trình (2) có đúng một nghiệm. Như vậy để phương trình đã cho có ba nghiệm phân

biệt thì phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt suy ra $\sqrt{m^2 - 1} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{26} \\ m = -\sqrt{26} \end{cases}$, do $m > 1$

nên ta chọn $m = \sqrt{26}$.

Câu 46. (Yên Phong 19) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt $\frac{4m^3 + m}{\sqrt{2f^2(x) + 5}} = f^2(x) + 3$.



A. 0.

B. 1.

C. 2

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương $4m^3 + m = [f^2(x) + 3]\sqrt{2f^2(x) + 5}$

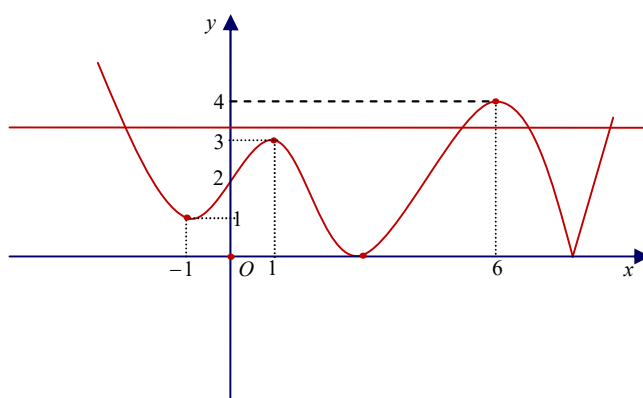
$$\Leftrightarrow 8m^3 + 2m = [2f^2(x) + 5 + 1] \sqrt{2f^2(x) + 5} \Leftrightarrow (2m)^3 + 2m = (\sqrt{2f^2(x) + 5})^3 + \sqrt{2f^2(x) + 5}.$$

Xét hàm số $g(a) = a^3 + a$, $a \in \mathbb{R}$. Ta có $g'(a) = 3a^2 + 1 > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Do đó, $g(a)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, $g(2m) = g(\sqrt{2f^2(x) + 5}) \Leftrightarrow 2m = \sqrt{2f^2(x) + 5}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2f^2(x) = 4m^2 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 4m^2 - 5 \geq 0 \\ |f(x)| = \sqrt{\frac{4m^2 - 5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \\ |f(x)| = \sqrt{\frac{4m^2 - 5}{2}} \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = \sqrt{\frac{4m^2 - 5}{2}}$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại ba điểm phân biệt.

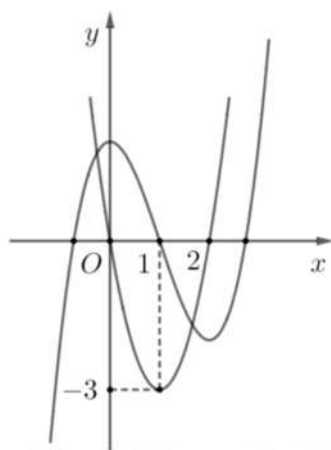


$$\text{Từ đó, } \sqrt{\frac{4m^2 - 5}{2}} = 4 \Leftrightarrow 4m^2 - 5 = 32 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

$$\text{Đối chiếu với điều kiện, ta thu được } m = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Vậy có đúng 1 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47. (ĐỀ 16 VTED 19) Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của các hàm số $y = f(x)$; $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(x) - m) + 2f(x) = 3(x + m)$ có đúng 3 nghiệm thực. Tổng các phần tử của S bằng



A. 0.

B. -6.

C. -7.

D. -5.

Lời giải

Chọn C

$$f(f(x) - m) + 2f(x) = 3(x + m) \Leftrightarrow f(f(x) - m) + 3(f(x) - m) = f(x) + 3x. \quad (1)$$

Xét hàm $g(t) = f(t) + 3t$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } g'(t) = f'(t) + 3.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra $f'(x) \geq -3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu “=” chỉ xảy ra khi $x = 1$.

Do đó $g'(t) = f'(t) + 3 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Dấu “=” chỉ xảy ra khi $t = 1$.

Vậy hàm $g(t) = f(t) + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow g(f(x) - m) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - m = x$ (Vì hàm $g(t) = f(t) + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$)
 $\Leftrightarrow f(x) - x = m$. (*)

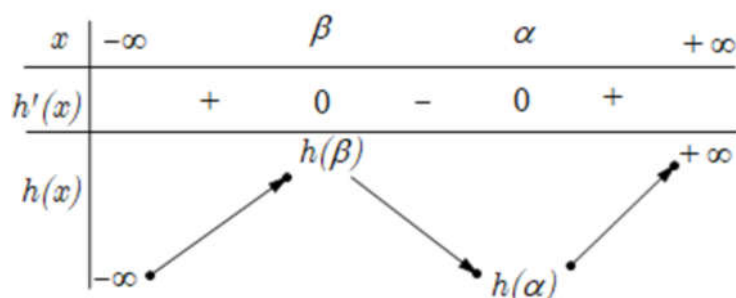
Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f'(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Vậy (*) $\Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - x + 2 = h(x)$.

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} = \alpha \\ x = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} = \beta \end{cases}$.

Bảng biến thiên



Phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow h(\alpha) < m < h(\beta) \Rightarrow m \in \{-4; \dots; 2\}$. Tổng các phần tử của S bằng $\sum_{-4}^2 m = -7$.

3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

Câu 48. (MĐ 102 - BGD&ĐT 17) Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

A. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **B.** $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}-7}{2}$. **C.** $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. **D.** $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $ab < 1$.

Ta có $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2 [2(1-ab)] + 2(1-ab) = \log_2 (a+b) + (a+b)$ (*).

Xét hàm số $y = f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

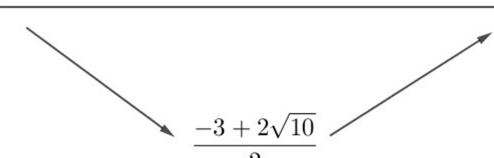
Do đó (*) $\Leftrightarrow f[2(1-ab)] = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b \Leftrightarrow a(2b+1) = 2-b \Leftrightarrow a = \frac{-b+2}{2b+1}$.

Do $a > 0, b > 0$ nên $\frac{-b+2}{2b+1} > 0 \Rightarrow 0 < b < 2$.

Khi đó: $P = a + 2b = \frac{-b+2}{2b+1} + 2b$. Xét hàm số $g(b) = \frac{-b+2}{2b+1} + 2b$ trên khoảng $(0; 2)$.

$$g'(b) = \frac{-5}{(2b+1)^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow (2b+1)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-2-\sqrt{10}}{4} \notin (0; 2) \\ b = \frac{-2+\sqrt{10}}{4} \in (0; 2) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

x	0	$\frac{-2+\sqrt{10}}{4}$	2
$g'(b)$	-	0	+
$g(b)$			
		$\frac{-3+2\sqrt{10}}{2}$	

Vậy $P_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{10}-2}{4}\right) = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Câu 49. (Chuyên Vĩnh Phúc 18) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right) = 3x + y - 1$. Tìm giá trị

nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

A. $P_{\min} = 8$.

B. $P_{\min} = 4$.

C. $P_{\min} = 2$.

D. $P_{\min} = 16$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $0 < x < \frac{1}{2}$.

Từ giả thiết $\ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right) = 3x + y - 1 \Leftrightarrow \ln(1-2x) + (1-2x) = \ln(x+y) + (x+y)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > 0$ do đó hàm $f(t)$ đơn điệu.

Vậy (1) $\Leftrightarrow 1-2x = x+y \Leftrightarrow 3x+y=1$ (2)

Có $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}$

Đặt $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}$, ta có $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(1-2x)^2}$ suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Do đó $\min_{\left(0; \frac{1}{2}\right)} g(x) = 8$. Vậy $P_{\min} = 8$.

Câu 50. (Lê Văn Thịnh - Bắc Ninh 18) Cho $0 \leq x; y \leq 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019}$. Gọi M, m

lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{136}{3}$.

B. $\frac{391}{16}$.

C. $\frac{383}{16}$.

D. $\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019} \Leftrightarrow \frac{2017^{1-y}}{2017^x} = \frac{x^2 + 2018}{(1-y)^2 + 2018}$

$$\Leftrightarrow 2017^{1-y} \left[(1-y)^2 + 2018 \right] = 2017^x (x^2 + 2018)$$

Xét hàm số $f(t) = 2017^t (t^2 + 2018)$, với $0 \leq t \leq 1$.

$$\Rightarrow f'(t) = (t^2 + 2018) \cdot 2017^t \cdot \ln 2017 + 2t \cdot 2017^t = 2017^t \left[(t^2 + 2018) \cdot \ln 2017 + 2t \right] > 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $0 \leq t \leq 1$

$$\Rightarrow 1 - y = x \Leftrightarrow y = 1 - x$$

Theo giả thiết $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

$$= [4x^2 + 3(1-x)] \cdot [4(1-x)^2 + 3x] + 25x(1-x)$$

$$= (4x^2 - 3x + 3)(4x^2 - 5x + 4) + 25x(1-x)$$

$$= 16x^4 - 20x^3 + 16x^2 - 12x^3 + 15x^2 - 12x + 12x^2 - 15x + 12 + 25x - 25x^2$$

$$= 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$$

Xét hàm số $S(x) = 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$, với $0 \leq x \leq 1$.

$$\Rightarrow S'(x) = 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2. \text{ Cho } S'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	1
y'	-	0	+	0	+
y	12	$\frac{191}{16}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{191}{16}$	12

Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} M = \max_{[0,1]} S(x) = \frac{25}{2} \\ m = \min_{[0,1]} S(x) = \frac{191}{16} \end{cases}$.

$$\text{Vậy } M + m = \frac{25}{2} + \frac{191}{16} = \frac{391}{16}.$$

Câu 51. (Trần Phú – Đà Nẵng 18) Cho hai số thực x, y thỏa mãn:

$$2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1). \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = x + 2y.$$

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn B

$$2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + (y - 1) = 2(1 - x)\sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x}.$$

$$\Leftrightarrow 2(y - 1)^3 + (y - 1) = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0$ với $\forall t \geq 0 \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{1-x}.$$

$$\Rightarrow P = x + 2y = x + 2 + 2\sqrt{1-x} \text{ với } (x \leq 1).$$

Xét hàm số $g(x) = 2 + x + 2\sqrt{1-x}$ trên $(-\infty; 1]$.

Ta có: $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}$. $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên $g(x)$:

x	$-\infty$	0	1
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$		4	

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ suy ra giá trị lớn nhất của P là: $\max_{(-\infty; 1]} g(x) = 4$.

Câu 52. (TRẦN NHÂN TÔNG - QUẢNG NINH 18) Cho hai số thực x, y thỏa mãn:

$$9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$.

A. $\frac{296\sqrt{15}-18}{9}$. B. $\frac{36+296\sqrt{15}}{9}$. C. $\frac{36-4\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{-4\sqrt{6}+18}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 6x = (3xy-5)\sqrt{3xy-5} + 2\sqrt{3xy-5}.$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 2t$ với $t \in (0; +\infty)$

có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó ta có $3x = \sqrt{3xy-5} \Rightarrow x \geq 0$ và $9x^2 = 3xy - 5$.

Với $x = 0$ thì $0 = -5(l)$.

với $x > 0$ thì $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2) = x^3 + y^3 + 6xy + (9x^2 + 3)(x + y - 2)$

$$= x^3 + y^3 + 6xy + (3xy - 2)(x + y - 2) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 2(x + y) + 4$$

$$= (x + y)^3 - 2(x + y) + 4$$

Mà $x + y = x + \frac{9x^2 + 5}{3x} = 4x + \frac{5}{3x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{5}{3x}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Đặt $t = x + y$ thì $t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Xét $f(t) = t^3 - 2t + 4$ với $t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Khi đó $f'(t) = 3t^2 - 2 > 0$ với $\forall t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $f(t) \geq f\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$

Suy ra $P \geq \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$. Vậy GTNN của P là $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$.

Câu 53. (Đô Lương 4 - Nghệ An 18) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của } P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}.$$

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y) + 3(x+y) + 2 = \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) + (x^2 + y^2 + xy + 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y) + 3(x+y) + \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) + (x^2 + y^2 + xy + 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}[3(x+y)] + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) + (x^2 + y^2 + xy + 2) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$, với $t > 0$.

$$\text{có } f'(t) = \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0.$$

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } f(3(x+y)) = f(x^2 + y^2 + xy + 2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2 + y^2 + xy + 2 \quad (1).$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2.$$

$$\text{Ta có } x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\frac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.

$$\text{Do đó từ (1), suy ra: } x \leq \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2.$$

Đặt $t = x + y$, $t > 0$.

$$\text{Suy ra: } P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t).$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (nhận).}$$

Bảng biến thiên

t	0	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Dựa vào BBT, ta có $\max P = \max_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y+1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

Câu 54. (SỞ HÀ TỈNH 19) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\log_{16} \left(\frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1} \right) = x(x-2) + y(y-2) + z(z-2). \text{ Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu}$$

thức $F = \frac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\bullet \text{ Ta có: } \log_{16} \left(\frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1} \right) = x(x-2) + y(y-2) + z(z-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_4 (x+y+z) - \frac{1}{2} \log_4 (2x^2+2y^2+2z^2+1) = (x^2+y^2+z^2) - 2(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \log_4 (x+y+z) - \log_4 (2x^2+2y^2+2z^2+1) + \log_4 4 = (2x^2+2y^2+2z^2+1) - 4(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+2y^2+2z^2+1) + \log_4 (2x^2+2y^2+2z^2+1) = 4(x+y+z) + \log_4 4(x+y+z) (*)$$

• Xét hàm số $f(t) = t + \log_4 t$ trên $(0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t \cdot \ln 4} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1 = 4(x + y + z)$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + \frac{1}{2} = 0 \quad (S)$$

$\Rightarrow (S)$ là mặt cầu tâm $I(1; 1; 1)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

• Ta có: $F = \frac{x + y - z}{x + y + z}$

$$\Leftrightarrow (1 - F)x + (1 - F)y - (1 + F)z = 0 \quad (P)$$

• Điều kiện tương giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) :

$$d(I; (P)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|1 - 3F|}{\sqrt{(1 - F)^2 + (1 - F)^2 + (1 + F)^2}} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |2 - 6F| \leq \sqrt{10(3F^2 - 2F + 3)}$$

$$\Leftrightarrow 6F^2 - 4F - 26 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2\sqrt{10}}{3} \leq F \leq \frac{1 + 2\sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow F_{\max} = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{3}, F_{\min} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow F_{\max} + F_{\min} = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{3} + \frac{1 - 2\sqrt{10}}{3} = \frac{2}{3}$$

Câu 55. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 18) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x - 2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + y$.

A. $T_{\min} = 2 + 3\sqrt{2}$.

B. $T_{\min} = 3 + 2\sqrt{3}$.

C. $T_{\min} = 1 + \sqrt{5}$.

D. $T_{\min} = 5 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Theo đề ra ta có

$$5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x+2y} - \frac{1}{3^{x+2y}} + x + 2y = 5^{xy-1} - \frac{1}{3^{xy-1}} + xy - 1$$

$$\text{Xét } f(t) = 5^t - \frac{1}{3^t} + t \Rightarrow f'(t) = 5^t \ln 5 + 3^{-t} \ln 3 + 1 > 0$$

$$\Rightarrow x + 2y = xy - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-2}$$

Vì $y > 0$ nên $x > 2$.

$$\text{Ta có: } T = x + y = x + \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2 - x + 1}{x-2}$$

$$T' = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \in (2; +\infty) \\ x = 2 - \sqrt{3} \notin (2; +\infty) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta được $T_{\min} = 3 + 2\sqrt{3}$ tại $x = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 56. (THTT 18) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$.

Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3(x+y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}} (x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$, $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0$. Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng

biến và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } f(3(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \quad (1)$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2.$$

$$\text{Ta có } x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\frac{x+y+1}{2} \right)^2 - xy$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.

$$\text{Do đó từ (1), suy ra: } x \leq \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2.$$

Đặt $t = x + y$, $t > 0$.

$$\text{Suy ra: } P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t).$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (nhận)}$$

Bảng biến thiên

t	0	3	$+\infty$
$f'(t)$		0	-
$f(t)$			

Dựa vào BBT, ta có $\max P = \max_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y + 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Câu 57. (Trần Hưng Đạo - TP HCM 18) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Tìm

giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = 2y - 3x$.

A. $P_{\min} = \frac{1}{2}$.

B. $P_{\min} = \frac{7}{8}$.

C. $P_{\min} = \frac{3}{4}$.

D. $P_{\min} = \frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 2(x^2-y+1) = \log_{2018} \frac{2x+y}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 2(2x+y) = \log_{2018} (2x+y) - \log_{2018} (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log_{2018}(x+1)^2 = 2(2x+y) + \log_{2018}(2x+y)$$

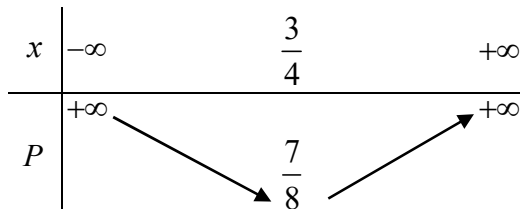
Có dạng $f\left[(x+1)^2\right] = f(2x+y)$ với $f(t) = 2t + \log_{2018} t$, ($\forall t > 0$).

Xét hàm số $f(t) = 2t + \log_{2018} t$, ($\forall t > 0$), ta có $f'(t) = 2 + \frac{1}{t \cdot \ln 2018} > 0$ ($\forall t > 0$) nên hàm số $f(t)$

đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Khi đó $f\left[(x+1)^2\right] = f(2x+y) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+y \Leftrightarrow y = x^2 + 1$.

Ta có $P = 2y - 3x = 2(x^2 + 1) - 3x = 2x^2 - 3x + 2$.

Bảng biến thiên



Vậy $P_{\min} = \frac{7}{8}$ khi $x = \frac{3}{4}$.

Câu 58. (Mộ Đức - Quảng Ngãi 18) Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1) \cdot 2^{2xy-1} = (x^2+y) \cdot 2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y .

A. $y_{\min} = 3$.

B. $y_{\min} = 2$.

C. $y_{\min} = 1$.

D. $y_{\min} = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $(xy-1)2^{2xy-1} = (x^2+y)2^{x^2+y} \Leftrightarrow (2xy-1-1)2^{2xy-1} = (x^2+y)2^{x^2+y+1}$ (1)

Xét hàm $f(t) = (t-1) \cdot 2^t$ với $t \geq 1$.

Khi đó $f'(t) = 2^t + (t-1) \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0$ với $\forall t \geq 1$.

Từ (1) $\Leftrightarrow 2xy-1 = x^2+y+1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2+2}{2x-1}$

$$y' = \frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Loại $x = -1$ vì điều kiện của t nên $f(2) = 2$.

Câu 59. (Chuyên Thái Bình 18) Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ là

A. $P_{\min} = \frac{11}{2}$.

B. $P_{\min} = \frac{27}{5}$.

C. $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$.

D. $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$

$$\Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1)] + (x-1)(y+1) = 9$$

$$\Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1) + x - 1] = 9$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x - 1 = \frac{9}{y+1} - \log_3(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 - 2 = \frac{9}{y+1} - 2 + \log_3 \frac{9}{y+1} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t - 2$ với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ với mọi $t > 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0; +\infty)$.

Từ (*) suy ra $x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{9}{y+1} - 1 = \frac{8-y}{y+1}$, do $x > 0$ nên $y \in (0; 8)$.

$$\text{Vậy } P = x + 2y = \frac{8-y}{y+1} + 2y = 2y - 1 + \frac{9}{y+1} = 2(y+1) + \frac{9}{y+1} - 3 \geq -3 + 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2} \text{ khi } 2(y+1) = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1.$$

Câu 60. (Thăng Long - Hà Nội 18) Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5 (4a+2b+5) - \log_5 5(a+b) = 5(a+b) - (4a+2b+5)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (4a+2b+5) + (4a+2b+5) = \log_5 5(a+b) + 5(a+b) (*)$$

$$\text{Hàm số } f(t) = \log_5 t + t (t > 0) \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0$$

$$f(t) \text{ đồng biến nên } (*) \Leftrightarrow f(4a+2b+5) = f(5(a+b)) \Leftrightarrow 4a+2b+5 = 5(a+b).$$

$$4a+2b+5 = 5(a+b) \Leftrightarrow a = 5-3b$$

$$T = a^2 + b^2 \Rightarrow T = (5-3b)^2 + b^2 = 10b^2 - 30b + 25 = 10 \left(b - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy GTNN } T = \frac{5}{2}.$$

Câu 61. (Chuyên Bắc Ninh 18) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$.

A. $3 + \sqrt{3}$.

B. 4.

C. $3 + 2\sqrt{3}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y \Leftrightarrow \log_3 (2x+y+1) - \log_3 (x+y) = x+2y$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x+y+1) = \log_3 (3x+3y) + x+2y-1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x+y+1) + 2x+y+1 = \log_3 (3x+3y) + 3x+3y (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_3 t + t \text{ với } t > 0.$$

$$\text{Khi đó } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0, \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ liên tục và đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 2x+y+1 = 3x+3y \Leftrightarrow x+2y=1 \Leftrightarrow x=1-2y.$$

$$\text{Vì } x, y > 0 \Rightarrow 0 < y < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Xét } T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1-2y} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{1-2y} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có } T \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{y(1-2y)}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{2y(1-2y)}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{8} = 6.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 1-2y=\sqrt{y} \\ 2y=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Câu 62. (Chuyên Nguyễn Du - Đắk Lắk 19) Cho các số dương x, y thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{x+y-1}{2x+3y} \right) + 3x+2y \leq 4$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 6x+2y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ bằng

A. $\frac{31\sqrt{6}}{4}$.

B. $11\sqrt{3}$.

C. $\frac{27\sqrt{2}}{2}$.

D. 19.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} \frac{x+y-1}{2x+3y} > 0 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y > 1$.

Ta có: $\log_5 \left(\frac{x+y-1}{2x+3y} \right) + 3x+2y \leq 4$

$$\Leftrightarrow (\log_5(x+y-1)+1)+5(x+y-1) \leq \log_5(2x+3y)+2x+3y$$

$$\Leftrightarrow \log_5[5(x+y-1)]+5(x+y-1) \leq \log_5(2x+3y)+2x+3y (*).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_5(t) + t$ trên $(0; +\infty)$ ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty).$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t) = \log_5(t) + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow 5(x+y-1) \leq 2x+3y \Leftrightarrow 3x+2y \leq 5.$$

Mặt khác, ta có:

$$A = 6x+2y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \left(9x + \frac{4}{x}\right) + \left(4y + \frac{9}{y}\right) - (3x+2y) \geq 2.6 + 2.6 - 5 = 19$$

Vậy GTNN của $A=19$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = \frac{4}{x} \\ 4y = \frac{9}{y} \\ 3x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} (N).$

Câu 63. (Ba Đình 19) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2019^{\frac{2(x^2-y+1)}{(x+1)^2}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của

biểu thức $P = 2y-x$ bằng

A. $P_{\min} = \frac{1}{4}$.

B. $P_{\min} = \frac{1}{2}$.

C. $P_{\min} = \frac{7}{8}$.

D. $P_{\min} = \frac{15}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2019^{\frac{2(x^2-y+1)}{(x+1)^2}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x^2-y+1)} = (2x+y) \cdot 2019^{2y}$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x+1)^2-4x} = (2x+y) \cdot 2019^{2y} \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x+1)^2} = (2x+y) \cdot 2019^{2(2x+y)}. (1)$$

Đặt $u = (x+1)^2, v = 2x+y, (u > 0, v > 0)$, khi đó (1) trở thành $u \cdot 2019^{2u} = v \cdot 2019^{2v}$. (2)

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t \cdot 2019^{2t}, (t > 0)$, ta có

$f'(t) = 2019^{2t} + 2t \cdot 2019^{2t} \cdot \ln 2019 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x + y \Leftrightarrow y = x^2 + 1$.

Suy ra $P = 2y - x = 2x^2 - x + 2$.

Do P là hàm bậc hai có hệ số $a = 2 > 0$ nên $\min P = P\left(-\frac{b}{2a}\right) = P\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2 = \frac{15}{8}$.

Câu 64. (Lý Nhân Tông 19) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$.

B. $\frac{37-\sqrt{249}}{94}$.

C. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$.

D. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0 \Leftrightarrow x+y > 0$.

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) + 2 - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy+2-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y) + (3x+3y) = 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2\log_3 t + t, t \in (0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{2}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow f(3x+3y) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2 = 3x+3y$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}, \text{ Khi đó } P = \frac{3a-b+3}{2a+6} \text{ và (2) là: } 3(a-1)^2 + b^2 = 1.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{3}(a-1) = \cos t, \\ b = \sin t, \end{cases} (t \in [0; 2\pi]), \text{ khi đó}$$

$$P = \frac{3\cos t - \sqrt{3}\sin t + 6\sqrt{3}}{2\cos t + 8\sqrt{3}} \Leftrightarrow (2P-3) \cdot \cos t + \sqrt{3}\sin t = 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P$$

Do phương trình luôn có nghiệm t nên ta có

$$(2P-3)^2 + 3 \geq (6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P)^2 \Leftrightarrow 47P^2 - 69P + 24 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{69-\sqrt{249}}{94} \leq P \leq \frac{69+\sqrt{249}}{94}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Câu 65. (Chuyên Thái Nguyên 19) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm

giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

B. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$.

C. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$.

D. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Đề $\frac{1-y}{x+3xy} > 0$ mà từ giả thiết $x, y > 0$ suy ra $1-y > 0 \Leftrightarrow y < 1$.

Vậy ĐKXD: $x > 0; 0 < y < 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4 &\Leftrightarrow \frac{1-y}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-3} \\ &\Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = \frac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y) \cdot 3^{3-3y} = (3xy+x) \cdot 3^{3xy+x} (*) \end{aligned}$$

Xét $f(t) = t \cdot 3^t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 3^t + t \cdot 3^t \cdot \ln 3 > 0$ với $\forall t > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y) = f(3xy+x)$ với $3-3y > 0, 3xy+x > 0$ nên $3-3y = 3xy+x \Leftrightarrow y = \frac{3-x}{3(x+1)}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P = x + y = x + \frac{3-x}{3(x+1)} &= (x+1) + \left(\frac{3-x}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3} \\ P = (x+1) + \frac{4}{3(x+1)} - \frac{4}{3} &\geq 2 \sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{3(x+1)}} - \frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{4}{3(x+1)} \\ y = \frac{3-x}{3(x+1)} \\ x > 0; 0 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ y = \frac{2\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}.$$

Câu 66. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG - QUẢNG NAM 19) Cho hai số dương $x; y$ thỏa $\log_2(4x+y+2xy+2)^{y+2} = 8 - (2x-2)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2x+y$ là số có dạng $M = a\sqrt{b} + c$ với $a, b \in \mathbb{N}, a > 2$. Tính $S = a+b+c$.

A. $S = 17$.

B. $S = 7$.

C. $S = 19$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn D

Với hai số dương $x; y$ thỏa $\log_2(4x+y+2xy+2)^{y+2} = 8 - (2x-2)(y+2)$

Ta có $(y+2)\log_2(4x+y+2xy+2) = 8 - (2x-2)(y+2)$

$$\Leftrightarrow (y+2)\log_2(2x+1)(y+2) = 8 - (2x+1)(y+2) + 3(y+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+1) + \log_2(y+2) = \frac{8}{y+2} - (2x+1) + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+1) + (2x+1) = \log_2\left(\frac{8}{y+2}\right) + \frac{8}{y+2}.$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$f(2x+1) = f\left(\frac{8}{y+2}\right) \Rightarrow 2x+1 = \frac{8}{y+2} \Leftrightarrow y = \frac{8}{2x+1} - 2.$$

$$P = 2x + y = 2x + \frac{8}{2x+1} - 2 = (2x+1) + \left(\frac{8}{2x+1}\right) - 3 \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt{2} - 3.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } 2x+1 = \frac{8}{2x+1} \Leftrightarrow (2x+1)^2 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $S = a+b+c = 3$.

Câu 67. (Gia Lộc - Hải Dương 19) Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log\left(\frac{x+3y}{xy}\right) = xy - x - 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{9y^2}{1+x}$.

- A. 10. B. $\frac{71}{7}$. **C. $\frac{72}{7}$.** D. $\frac{73}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log\left(\frac{x+3y}{xy}\right) = xy - x - 3y \Leftrightarrow \log(x+3y) - \log(xy) = xy - (x+3y)$.

$\Leftrightarrow \log(x+3y) + (x+3y) = \log(xy) + xy \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = \log t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$; $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 10} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (1) tương đương $f(x+3y) = f(xy) \Leftrightarrow x+3y = xy$.

Theo bất đẳng thức Schwarz ta có

$P = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{9y^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{(3y)^2}{1+x} \geq \frac{(x+3y)^2}{2+(x+3y)} \quad (2)$.

Theo bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có

$xy = x+3y \geq 2\sqrt{x \cdot 3y} \Leftrightarrow (xy)^2 - 12xy \geq 0 \Leftrightarrow xy(xy-12) \geq 0$.

Vì $xy > 0$ nên $xy \geq 12 \Rightarrow x+3y \geq 12$.

Đặt $u = x+3y \Rightarrow u \geq 12$.

Từ (2) ta có $P \geq f(u) = \frac{u^2}{u+2}, u \geq 12$

$f'(u) = \frac{u^2 + 4u}{(u+2)^2} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -4 \end{cases}$ (không thỏa mãn).

$\Rightarrow \text{Min } f(u) = f(12) = \frac{72}{7}$.

Vậy $P \geq \frac{72}{7} \Rightarrow \text{Min } P = \frac{72}{7}$ khi

$u = 12 \Rightarrow \begin{cases} x+3y = 12 \\ \frac{x}{1+3y} = \frac{3y}{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 12 \\ (-3y+12)^2 - 3y+12 = 3y+9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$.

Câu 68. (CỤM TRẦN KIM HƯNG - HƯNG YÊN 19) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn

$\log_2\left(\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}\right) = a(a-2) + b(b-2) + c(c-2)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c}$.

- A. $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{8+2\sqrt{2}}{3}$. **C. $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.** D. $\frac{4+2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1} = a(a-2) + b(b-2) + c(c-2)$

$$\Leftrightarrow \log_2(a+b+c) + 2(a+b+c) + 1 = \log_2(a^2+b^2+c^2+1) + a^2+b^2+c^2+1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2a+2b+2c) + 2a+2b+2c = \log_2(a^2+b^2+c^2+1) + a^2+b^2+c^2+1 (*)$$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$,

Ta có, $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó, $(*) \Leftrightarrow f(2a+2b+2c) = f(a^2+b^2+c^2+1)$

$$\Leftrightarrow 2a+2b+2c = a^2+b^2+c^2+1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 2$$

Ta lại có, $P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c} \Leftrightarrow (P-3)(a-1) + (P-2)(b-1) + (P-1)(c-1) = 6-3P (**)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$(6-3P)^2 = ((P-3)(a-1) + (P-2)(b-1) + (P-1)(c-1))^2 \leq 2 \cdot [(P-3)^2 + (P-2)^2 + (P-1)^2]$$

$$\Leftrightarrow 3P^2 - 12P + 8 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \leq P \leq \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy, $P_{\max} = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ khi $a = \frac{\sqrt{3}+1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$.

Câu 69. (Hội các trường chuyên 19) Cho $x, y \in (0; 2)$ thỏa mãn $(x-3)(x+8) = ey(ey-11)$. Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{1+\ln y}$ bằng

A. $\sqrt{1+\ln 3} - \ln 2$.

B. $2\sqrt{\ln 3} - \ln 2$.

C. $1 + \sqrt{\ln 3} - \ln 2$.

D. $1 + \sqrt{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 1, y \geq \frac{1}{e}$.

Ta có: $(x-3)(x+8) = ey(ey-11) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 24 = e^2 y^2 - 11ey$

$\Leftrightarrow e^2 y^2 - 11ey - (x^2 + 5x - 24) = 0 (*)$, có $\Delta = (2x+5)^2 > 0, \forall x \geq 1$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} ey = \frac{11+(2x+5)}{2} \\ ey = \frac{11-(2x+5)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ey = x+8 \\ ey = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+8}{e} \\ y = \frac{3-x}{e} \end{cases}$$

+) Do $y = \frac{x+8}{e} > \frac{9}{e} > 2$ nên loại $y = \frac{x+8}{e}$.

+) Với $y = \frac{3-x}{e}, 1 \leq x < 2$:

Khi đó, ta được: $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)}$ trên $[1; 2)$.

$$\text{Ta có } P' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2(3-x)\sqrt{\ln(3-x)}}$$

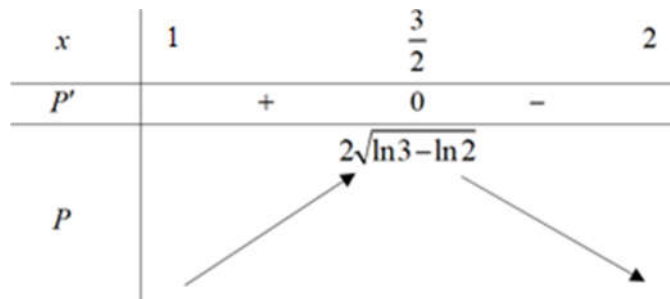
$$P' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2(3-x)\sqrt{\ln(3-x)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)\sqrt{\ln(3-x)} - x\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow (3-x)\sqrt{\ln(3-x)} = x\sqrt{\ln x} (**)$$

Xét hàm $f(t) = t\sqrt{\ln t}$ trên $[1; +\infty)$, có $f'(t) = \sqrt{\ln t} + \frac{1}{2\sqrt{\ln t}} > 0, \forall t \in (1; +\infty)$.

Khi đó $(**) \Leftrightarrow f(3-x) = f(x) \Leftrightarrow 3-x = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:



Từ đó $P_{\max} = 2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$ tại $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2e}$.

Câu 70. (THTT 19) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) \geq \log_2(6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$ bằng

A. $\frac{59}{3}$.

B. 19.

C. $\frac{53}{3}$.

D. $8 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 6 \end{cases}$.

Từ giả thiết ta có: $\log_2 x + x(x+y) \geq \log_2(6-y) + 6x \Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 \geq \log_2[x(6-y)] + x(6-y) (*)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$, Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x^2) \geq f[x(6-y)] \Leftrightarrow x^2 \geq x(6-y) \Leftrightarrow x \geq 6-y \Leftrightarrow x+y \geq 6 (**)$ (do $x > 0$)

Áp dụng Bất đẳng thức Cô si cho các cặp số dương và bất đẳng thức $(**)$, ta có:

$$P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{3}{2}(x+y) + \left(\frac{3x}{2} + \frac{6}{x}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{8}{y}\right) \geq \frac{3}{2} \cdot 6 + 2\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{6}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{2} \cdot \frac{8}{y}} = 19.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=6 \\ \frac{3x}{2} = \frac{6}{x} \\ \frac{y}{2} = \frac{8}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 19.

Câu 71. (Sở Quảng Nam 19) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{e + \ln 2}{2}$.

B. $\frac{e - \ln 2}{2}$.

C. $\frac{e \ln 2}{2}$.

D. $\frac{e}{2 \ln 2}$.

Lời giải

Chọn C

Có $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1}) \Leftrightarrow 2^y + y = 2x + \log_2(2x + 2^y) - 1$. (1)

Đặt $t = \log_2(2x + 2^y) \Rightarrow 2x + 2^y = 2^t \Rightarrow 2x = 2^t - 2^y$.

(1) trở thành: $2^y + y = 2^t - 2^y + t - 1 \Leftrightarrow 2^{y+1} + y + 1 = 2^t + t$. (2)

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) = 2^x + x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (2) ta có: $t = y + 1 \Leftrightarrow \log_2(2x + 2^y) = y + 1 \Leftrightarrow 2x + 2^y = 2^{y+1} \Leftrightarrow x = 2^{y-1}$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{x}{y} = \frac{2^{y-1}}{y} \Rightarrow P' = \frac{2^{y-1} y \ln 2 - 2^{y-1}}{y^2}.$$

$$\text{Cho } P' = 0 \Leftrightarrow y \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln 2}.$$

Bảng biến thiên:

y	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$	
P'		-	0	+
P	$+\infty$		$\frac{e \ln 2}{2}$	$+\infty$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{e \ln 2}{2} \text{ khi } x = \frac{e}{2} \text{ và } y = \frac{1}{\ln 2}.$$

- Câu 72. (Chuyên Lam Sơn 19)** Cho x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-9) + y(y-9) + xy$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x, y thay đổi.
- A. 2. B. 3. **C. 1.** D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện xác định; } \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0 \Leftrightarrow (x+y) > 0.$$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 + xy + 2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2 > 0 \text{ với } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } \log_3 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-9) + y(y-9) + xy.$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-9(x+y).$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_3(x+y) + 9(x+y) = \log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 9(x+y) + 9(x+y) = \log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } f(t) = \log_3 t + t \quad (\forall t > 0).$$

$$\text{Có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \text{ với } (\forall t > 0) \Rightarrow f \text{ là hàm đồng biến với } (\forall t > 0). \text{ Khi đó:}$$

$$f(9(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 9(x+y) = x^2+y^2+xy+2.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2-9x-9y=0.$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4xy+8-36x-36y=0.$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^2 - 18(2x+y) + 3(y-3)^2 - 19 = 0.$$

$$\text{Mà } \Leftrightarrow 3(y-3)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x+y)^2 - 18(2x+y) - 19 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 2x+y \leq 19.$$

$$\text{Mặt khác } P-1 = \frac{2x+y-19}{x+y+10} \leq 0 \Rightarrow P \leq 1 \text{ Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} 2x+y=19 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}.$$

- Câu 73. (Hải Hậu 19)** Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{9x^3+x}{y+1} = \sqrt{3y+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = 6x - y \text{ là}$$

A. $\frac{89}{12}$. **B. $\frac{11}{3}$.** C. $\frac{17}{12}$. D. $\frac{82}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết $y > 0$ nên ta có:

$$\frac{9x^3 + x}{y+1} = \sqrt{3y+2} \Leftrightarrow 9x^3 + x = \sqrt{3y+2}(y+1) \Leftrightarrow [(3x)^3 + 3x] = [\sqrt{(3y+2)^3} + \sqrt{3y+2}]$$

$$\Leftrightarrow f(3x) = f(\sqrt{3y+2}) \text{ với } f(t) = t^3 + t.$$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra $3x = \sqrt{3y+2}$

$$\text{hay } y = 3x^2 - \frac{2}{3}. \text{ Do } y > 0 \text{ và } 3x = \sqrt{3y+2} \text{ nên } x > \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Khi đó } S = 6x - y = 6x - 3x^2 + \frac{2}{3} = -3x^2 + 6x + \frac{2}{3} = -3(x-1)^2 + \frac{11}{3} \leq \frac{11}{3}.$$

$$\text{Do đó } \max S = \frac{11}{3} \text{ khi } x = 1.$$

4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

Câu 74. (ĐỀ THAM KHẢO – BGD&ĐT 20) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \log_3(3x+3) \Leftrightarrow 3x+3 = 3^t \Leftrightarrow x = 3^{t-1} - 1.$$

$$\text{Phương trình trở thành } (t-1) + 3^{t-1} = 2y + 3^{2y} (*).$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(u) = u + 3^u \text{ trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } f'(u) = 1 + 3^u \ln 3 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số } f(u) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(t-1) = f(2y) \Leftrightarrow t-1 = 2y \rightarrow x = 3^{2y-1} - 1 = 9^y - 1.$$

$$\text{Vì } 0 \leq x \leq 2020 \text{ nên } 0 \leq 9^y - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021.$$

$$y \in \mathbb{Z} \rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa YCBT.

Câu 75. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 19) Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019.

B. 2018.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

$$\text{Ta có } \log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 3y - 2^{3y}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2^{\log_2(x+1)} = 3y + 2^{3y} \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t + 2^t.$$

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \text{ và } f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 \Rightarrow f'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}. \text{ Do đó } (1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x+1 = 2^{3y}$$

$$\Leftrightarrow y = \log_8(x+1).$$

$$\text{Ta có } 0 \leq x \leq 2020 \text{ nên } 1 \leq x+1 \leq 2021 \text{ suy ra } 0 \leq \log_8(x+1) \leq \log_8 2021.$$

$$\text{Lại có } \log_8 2021 \approx 3,66 \text{ nên nếu } y \in \mathbb{Z} \text{ thì } y \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0; 0), (7; 1), (63; 2), (511; 3)$.

Câu 76. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa $0 \leq y \leq 2017$ và $\log_2 \frac{2x^2 - 3x + y}{5x^2 + 2x + 3} = x^2 + 8x + 2 - 2y$.

A. 44.

B. 22.

C. 42.

D. 21.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 2x^2 - 3x + y \\ b = 5x^2 + 2x + 3 \end{cases} (a, b > 0) \rightarrow x^2 + 8x + 2 - 2y = b - 2a - 1.$$

Phương trình đã cho trở thành $\log_2 a - \log_2 b = b - 2a - 1 \Leftrightarrow 2a + \log_2(2a) = b + \log_2 b (*)$.

Xét hàm số $y = f(t) = t + \log_2 t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow f(2a) = f(b) \Leftrightarrow 2a = b \rightarrow 2(2x^2 - 3x + y) = 5x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow 2y = x^2 + 8x + 3.$$

$$0 \leq 2y = x^2 + 8x + 3 \leq 2034 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x + 3 \geq 0 \\ x^2 + 8x - 1014 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -49 \leq x \leq -8 \\ 0 \leq x \leq 41 \end{cases} \xrightarrow{y = \frac{x^2 + 8x + 3}{2}} 42 \text{ GTN}.$$

5. Tính tích phân

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và

$$\left[f'(x) \right]^3 + \frac{3}{x^2} [f'(x) - 2] = 1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}, \forall x \in (0; +\infty). \text{ Tính } I = \int_2^3 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{3}{2} + 3 \ln 5 - 2 \ln 7.$

B. $I = \frac{5}{2} + 3 \ln 3 - 2 \ln 2.$

C. $I = \frac{15}{2} - 2 \ln 7 + 3 \ln 5.$

D. $I = \frac{13}{2} - 2 \ln 3 + 3 \ln 2.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \left[f'(x) \right]^3 + \frac{3}{x^2} [f'(x) - 2] = 1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} \Leftrightarrow [xf'(x)]^3 + 3[xf'(x)] = (x+1)^3 + 3(x+1)(*).$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $g'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow g[xf'(x)] = g(x+1) \Leftrightarrow xf'(x) = x+1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow f(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = x + \ln x + C.$$

Do $f(1) = 2$ nên $1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$.

$$\text{Vậy } I = \int_2^3 (x + 1 + \ln x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + x(\ln x - 1) \right) \Big|_2^3 = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 + \frac{5}{2}.$$

--- HẾT ---

Facebook: Nguyễn Văn Rin

...

Đừng bao giờ để đến ngày mai những việc bạn có thể làm ngày hôm nay!

Benjamin Franklin

CHÚC CÁC BẠN HỌC TỐT!