

MOON.VN

CÔNG LUYỆN THI TRỰC TUYẾN SỐ 1 VIỆT NAM

Thầy **ĐẶNG VIỆT HÙNG**

TUYỂN CHỌN

CÁC BÀI TOÁN ĐẶC SẮC

HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HÌNH PHẪNG OXY



(Sách quý, chỉ bán chứ không tặng)

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN ĐẶC SẮC VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Thầy Đặng Việt Hùng [ĐVH]

Câu 1. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = (x+y)(xy+2) - 1 \\ x + \sqrt{2(x^2+y)} = 1 + \sqrt{1-y} \end{cases}$$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} x^2 + y \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$. Ta có: $PT(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 + xy = (x+y)xy + 2(x+y) - 1$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = xy(x+y-1) \Leftrightarrow (x+y-1)^2 = xy(x+y-1)$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x+y-1-xy) = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x-1)(y-1) = 0$$

• Với $x=1 \Rightarrow \sqrt{2+2y} = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}$

• Với $y=1 \Rightarrow x + \sqrt{2x^2+2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$

• Với $x+y=1 \Rightarrow x + \sqrt{2(x^2-x+1)} = \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)} = (1-x) + \sqrt{x}$

Đặt $a=1-x; b=\sqrt{x}$ ta có: $\sqrt{2(a^2+b^2)} = a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a-b)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b \geq 0.$

Khi đó $1-x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Vậy HPT có 3 nghiệm $(x; y) = \left\{ (-1; 1); \left(1; -\frac{1}{3}\right); \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \right\}$

Câu 2. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} = \sqrt{(x+3y)(y-1)} \\ \sqrt{6y-7} + \sqrt{4-2x} = \sqrt{\frac{9x^2+16}{8}} \end{cases}$$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} y \geq \frac{7}{6}; x \leq 2 \\ x+3y \geq 0 \end{cases}$. Khi đó: $PT(1) \Leftrightarrow x+3y-3(y-1) = 2\sqrt{(x+3y)(y-1)}$.

Đặt $u = \sqrt{x+3y}; v = \sqrt{y-1} \ (u; v \geq 0)$

Ta có: $u^2 - 2uv - 3v^2 = 0 \Leftrightarrow (u+v)(u-3v) = 0 \Rightarrow u = 3v \Leftrightarrow x+3y = 9y-9 \Leftrightarrow x = 6y-9$

Thay vào (2) ta có: $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16} \Leftrightarrow 4(2x+4) + 16 - 16x + 16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2+16$

$$\Leftrightarrow 8(4-x^2) + 16\sqrt{2(4-x^2)} = x^2 + 8x. \text{ Đặt } t = \sqrt{2(4-x^2)} \geq 0 \text{ ta có: } 4t^2 + 16t = x^2 + 8x$$

$$\Leftrightarrow (2t-x)(2t+x+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = x \\ 2t = -x-8 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } 2t = x \Rightarrow \sqrt{2(4-x^2)} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}+27}{18}$$

Câu 3. [ĐVH]: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{3} \\ \sqrt{x(x^2 + y^2)} = \frac{2y^2}{3} \end{cases}$$

Lời giải:

ĐK: $x \geq 0$. Thế PT(2) vào PT(1) ta có: $x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x(x^2 + y^2)}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}(2 - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + y^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 4x = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Với $x = 4 \Rightarrow \sqrt{(16 + y^2)} = \frac{y^2}{3} \Leftrightarrow 9(16 + y^2) = y^4 \Leftrightarrow y^4 - 9y^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{9 + \sqrt{657}}{2}}$

Với $4x = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} 4x = x^2 + y^2 \\ 2x = \frac{2y^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{4y^2}{3} \\ x = \frac{y^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{y^2}{3} \\ x = \frac{y^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = 1; y = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Kết luận: Vậy HPT có nghiệm $(x; y) = \left\{ (0; 0); (1; \pm\sqrt{3}); \left(4; \pm\sqrt{\frac{9 + \sqrt{657}}{2}} \right) \right\}$

Câu 4. [ĐVH]: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + 3y + 1)\sqrt{2xy + 2y} = y(3x + 4y + 3) & (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{2y-2})(x - 3 + \sqrt{x^2 + x + 2y - 4}) = 4 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 1 \\ x^2 + x + 2y - 4 \geq 0 \end{cases}$ (*) Khi đó (1) $\Leftrightarrow (x + 3y + 1)\sqrt{y}\sqrt{2(x+1)} = y(3x + 4y + 3)$

Đặt $\sqrt{2(x+1)} = a; \sqrt{y} = b \ (a, b \geq 0) \Rightarrow \left(\frac{a^2}{2} + 3b^2 \right) ab = b^2 \left(\frac{3a^2}{2} + 4b^2 \right)$

$$\Leftrightarrow ab(a^2 + 6b^2) = b^2(3a^2 + 8b^2) \Leftrightarrow b(a^3 + 6ab^2 - 3a^2b - 8b^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow b(a - 2b)(a^2 - ab + 4b^2) = 0 \quad (3)$$

Vì $y \geq 1 \Rightarrow b = \sqrt{y} > 0$ và $a^2 - ab + 4b^2 = \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{15b^2}{4} > 0$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b \Rightarrow \sqrt{2(x+1)} = 2\sqrt{y} \Rightarrow x+1 = 2y$.

Thế $2y = x+1$ vào (2) ta được $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1-2})(x - 3 + \sqrt{x^2 + x + x+1-4}) = 4$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})(x - 3 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) = 4 \quad (4)$$

$$\text{Do } x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} > 0 \text{ nên } (4) \Leftrightarrow (x+3-x+1)\left(x-3+\sqrt{x^2+2x-3}\right) = 4\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow x-3+\sqrt{x^2+2x-4} = \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1} \quad (5)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = t \quad (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 2x+2+2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1} = 2x+2+2\sqrt{x^2+2x-3}$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x^2+2x-3} = \frac{t^2-2}{2}. \text{ Khi đó (5) trở thành } \frac{t^2-2}{2}-3=t \Leftrightarrow t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=4 \end{cases}$$

$$\text{Do } t \geq 0 \text{ nên chỉ có } t=4 \text{ thỏa mãn } \Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 4-\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-\sqrt{x-1} \geq 0 \\ x+3 = x+15-8\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} \leq 4 \\ 2\sqrt{x-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 17 \\ 4(x-1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 17 \\ x = \frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow 2y = \frac{13}{4} + 1 = \frac{17}{4} \Rightarrow y = \frac{17}{8}. \text{ Thử lại } (x; y) = \left(\frac{13}{4}; \frac{17}{8}\right) \text{ thỏa mãn hệ đã cho.}$$

$$\text{Đ/s: } (x; y) = \left(\frac{13}{4}; \frac{17}{8}\right).$$

Câu 5. [ĐVH]: Giải hệ phương trình	$\begin{cases} \frac{1+4(x-y+1)^2}{\sqrt{2(x-y+2)}} = 1 + \frac{3}{2(x-y+1)} & (1) \\ (x+2)(\sqrt{x+y+3}-2\sqrt{y+1}) = 1 - \sqrt{x^2+y^2+5x+3} & (2) \end{cases}$
--	--

Lời giải:

$$\text{ĐK: } x-y+2 > 0; x+y+3 \geq 0; y+1 \geq 0; x^2+y^2+5x+3 \geq 0 \quad (*).$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2(x-y+2)} = t \geq 0. \text{ Khi đó (1) trở thành}$$

$$\frac{1+(t^2-2)^2}{t} = 1 + \frac{3}{t^2-2} \Leftrightarrow (t^2-2)^3 + t^2 - 2 = t^3 + t \Leftrightarrow f(t^2-2) = f(t) \quad (3)$$

$$\text{Xét hàm số } g(u) = u^3 + u \text{ với } u \in \mathbb{R} \text{ có } g'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(u) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}. \text{ Do đó (3) } \Leftrightarrow t^2 - 2 = t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với } t \geq 0 \Rightarrow \text{chỉ có } t = 2 \text{ thỏa mãn } \Rightarrow \sqrt{2(x-y+2)} = 2 \Leftrightarrow 2(x-y+2) = 4 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{Thế } y = x \text{ vào (2) ta được } (x+2)(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}) = 1 - \sqrt{2x^2+5x+3}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}) = 1 - \sqrt{(x+1)(2x+3)} \quad (4)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2x+3} = a; \sqrt{x+1} = b \quad (a, b \geq 0). \text{ Khi đó (4) trở thành}$$

$$(a^2 - b^2)(a - 2b) = a^2 - 2b^2 - ab \Leftrightarrow (a+b)(a-b)(a-2b) - (a+b)(a-2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-2b)(a-b-1) = 0 \quad (5)$$

Với $x \geq -1 \Rightarrow a + b = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} > 0$. Do đó (5) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = b + 1 \end{cases}$

$$\bullet \quad a = 2b \Rightarrow \sqrt{2x+3} = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 = 4(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$. Thử lại $x = y = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn hệ đã cho.

$$\bullet \quad a = b + 1 \Rightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{x+1} + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x+3 = x+2+2\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2\sqrt{x+1} = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (x; y) = (-1; -1) \\ x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (x; y) = (3; 3) \end{cases}$$

Thử lại $(x; y) = \{(-1; -1), (3; 3)\}$ thỏa mãn hệ đã cho.

$$\text{Đ/s: } (x; y) = \left\{(-1; -1), (3; 3), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Câu 6. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y & (1) \\ 3\sqrt{6xy-x-1} = 5-8y+\sqrt{2x-1}+4\sqrt{x+2y+1} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Lời giải:

ĐK: $2x-1 \geq 0$; $x+2y+1 \geq 0$; $6xy-x-1 \geq 0$ (*). Khi đó có

$$2(x^2+y^2) - (x+y)^2 = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{1}{2}|x+y| \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad (3)$$

$$4(x^2+xy+y^2) - 3(x+y)^2 = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow 4(x^2+xy+y^2) \geq 3(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+xy+y^2}{3} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \geq \frac{1}{2}|x+y| \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \geq x+y$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y \geq 0$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x = y \geq 0$. Thế $y = x$ vào (2) ta được $3\sqrt{6x^2-x-1} = 5-8x+\sqrt{2x-1}+4\sqrt{3x+1}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1}\sqrt{3x+1} = 5-8x+\sqrt{2x-1}+4\sqrt{3x+1} \quad (5)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{3x+1} = a \geq 0 \\ \sqrt{2x-1} = b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 8x-5 = 2a^2+b^2-6. \text{ Khi đó (5) trở thành } 3ab = -2a^2-b^2+6+b+4a$$

$$\Leftrightarrow b^2 + (3a-1)b + 2a^2 - 4a - 6 = 0. \text{ Coi đây là phương trình bậc hai ẩn } b \text{ với } a \text{ là tham số.}$$

$$\text{Xét } \Delta = (3a-1)^2 - 4(2a^2 - 4a - 6) = a^2 + 10a + 25 = (a+5)^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1-3a+a+5}{2} = -a+3 \\ b = \frac{1-3a-a-5}{2} = -2a-2 \end{cases}$$

$$\bullet \quad b = -a+3 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 3 - \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+1} = 3 \quad (6)$$

$$\text{Với } x > 1 \Rightarrow \text{VT (6)} > \sqrt{2 \cdot 1 - 1} + \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = 3 \Rightarrow \text{Loại.}$$

$$\text{Với } \frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow \text{VT (6)} < \sqrt{2 \cdot 1 - 1} + \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = 3 \Rightarrow \text{Loại.}$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ thế vào (6) ta thấy thỏa mãn. Do đó (6)} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1. \text{ Đã thỏa mãn (*).}$$

$$\bullet \quad b = -2a-2 \Leftrightarrow 2a+b+2=0 \Rightarrow 2\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-1} + 2 = 0. \text{ Phương trình vô nghiệm.}$$

$$\text{Đ/s: } (x; y) = (1; 1).$$

$$\text{Câu 7. [ĐVH]: Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x^2+x)\sqrt{x-y+8} = 3x^2+2x+y+1 & (1) \\ (x-2)\sqrt{x^2+x+1} + (y+2)\sqrt{y^2+y+2} = x+y & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải:

$$\text{ĐK: } x-y+8 \geq 0 \text{ (*). Khi đó (1)} \Leftrightarrow (x^2+x)\sqrt{x-y+8} - 3(x^2+x) + (x-y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)(\sqrt{x-y+8}-3) + (x-y-1) = 0 \Leftrightarrow (x^2+x) \cdot \frac{(x-y+8)-9}{\sqrt{x-y+8}+3} + (x-y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1) \left(\frac{x^2+x}{3+\sqrt{x-y+8}} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow (x-y-1)(x^2+x+3+\sqrt{x-y+8}) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Ta có } x^2+x+3+\sqrt{x-y+8} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} + \sqrt{x-y+8} > 0.$$

$$\text{Do đó (3)} \Leftrightarrow x-y-1=0 \Leftrightarrow y=x-1.$$

$$\text{Thế } y=x-1 \text{ vào (2) ta được } (x-2)\sqrt{x^2+x+1} + (x-1+2)\sqrt{(x-1)^2+(x-1)+2} = x+(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)\sqrt{x^2-x+2} = 2x-1 \quad (4)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2+x+1} = a; \sqrt{x^2-x+2} = b \quad (a, b \geq 0).$$

$$\text{Khi đó (4) trở thành } a \left(\frac{a^2+1-b^2}{2} - 2 \right) + b \left(\frac{a^2+1-b^2}{2} + 1 \right) = a^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow a(a^2-b^2-3) + b(a^2-b^2+3) = 2(a^2-b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^3-b^3) + ab(a-b) - 3(a-b) - 2(a^2-b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+ab-3-2a-2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)[(a+b)^2 - 2(a+b) - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+1)(a+b-3)=0 \quad (5)$$

Do $a, b \geq 0 \Rightarrow a+b+1 > 0$ nên $(5) \Leftrightarrow (a-b)(a+b-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=3-b \end{cases}$

$$\bullet \quad a=b \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x^2+x+1=x^2-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$. Thử lại $(x; y)=\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ thỏa mãn hệ đã cho.

$$\bullet \quad a=3-b \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}=3-\sqrt{x^2-x+2} \Rightarrow x^2+x+1=x^2-x+11-6\sqrt{x^2-x+2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-x+2}=5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 9(x^2-x+2)=(5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 8x^2+x-7=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x=-1 \\ x=\frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=-1-1=-2 \Rightarrow (x; y)=(-1; -2) \\ x=\frac{7}{8} \Rightarrow y=\frac{7}{8}-1=-\frac{1}{8} \Rightarrow (x; y)=\left(\frac{7}{8}; -\frac{1}{8}\right) \end{cases}$$

Thử lại $(x; y)=\left\{(-1; -2), \left(\frac{7}{8}; -\frac{1}{8}\right)\right\}$ thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: $(x; y)=\left\{(-1; -2), \left(\frac{7}{8}; -\frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Câu 8. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+(x+y)\sqrt{x+2y-1}=y(y+2\sqrt{3y-1}) & (1) \\ (y^3+6x^2+4)\sqrt{y^3+y^2+4}=2x(2y^3+3x^2+8) & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Lời giải:

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x+2y-1 \geq 0 \\ 3y-1 \geq 0 \\ y^3+y^2+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y \geq 1 \\ y \geq \frac{1}{3} \end{cases} \quad (*) \Rightarrow y^3+6x^2+4 > 0; \quad 2y^3+3x^2+8 > 0; \quad \sqrt{y^3+y^2+4} > 0.$$

Khi đó từ $(2) \Rightarrow x > 0$. Xét phương trình (1) ta có

Với $x > y \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \text{VT (1)} > y^2 + (y+y)\sqrt{y+2y-1} = y(y+2\sqrt{3y-1}) = \text{VP (1)} \Rightarrow \text{Loại.}$

Với $0 < x < y \Rightarrow \text{VT (1)} < y^2 + (y+y)\sqrt{y+2y-1} = y(y+2\sqrt{3y-1}) = \text{VP (1)} \Rightarrow \text{Loại.}$

Với $x = y$ thế vào (1) ta thấy đã thỏa mãn. Do đó $(1) \Leftrightarrow x = y$.

Thế $y = x$ vào (2) ta được $(x^3+6x^2+4)\sqrt{x^3+x^2+4}=2x(2x^3+3x^2+8) \quad (3)$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^3+x^2+4}=a > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3+6x^2+4=a^2+5x^2 \\ 2x(2x^3+3x^2+8)=2x(2a^2+x^2) \end{cases}$$

Khi đó (3) trở thành $a(a^2 + 5x^2) = 2x(2a^2 + x^2) \Leftrightarrow 2x^3 - 5ax^2 + 4a^2x - a^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2(2x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ 2x=a \end{cases}$$

- $x=a \Rightarrow x = \sqrt{x^3 + x^2 + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x^3 + x^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$
- $2x=a \Rightarrow 2x = \sqrt{x^3 + x^2 + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x^3 + x^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-2)^2(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

$\Rightarrow y=2 \Rightarrow (x; y) = (2; 2)$. Thử lại $x=y=2$ thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: $(x; y) = (2; 2)$.

Câu 9. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - y = x^2y + y^3 - x, \\ \sqrt{x + \frac{3}{y}} = \frac{2x^2 - y^2 + 7}{2(x+1)}. \end{cases}$$

Lời giải.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 + xy^2 + x - x^2y - y^3 - y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{x + \frac{3}{x}} = \frac{x^2 + 7}{2(x+1)} \Leftrightarrow (2x+2)\sqrt{x^2+3} = (x^2+7)\sqrt{x}.$

Đặt $\sqrt{x^2+3} = u; \sqrt{x} = v$ ($u > 0; v > 0$) ta thu được

$$(2v^2 + 2)u = (u^2 + 4)v \Leftrightarrow uv(2v - u) = 2(2v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 2 \\ 2v = u \end{cases}$$

- $uv = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $2v = u \Leftrightarrow x^2 + 3 = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Phương trình ẩn x có nghiệm $S = \{1; 3\}$ dẫn đến $(x; y) = (1; 1), (3; 3)$. Thử lại nghiệm đúng hệ ban đầu.

Câu 10. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 2, \\ 8\sqrt{1-2x} + y^2 = 9. \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(2x+y)^2 + 2x+y-2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=t \\ t^2+t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=t \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases}$$

- Xét $t=1 \Rightarrow 8\sqrt{y} + y^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = u; u \geq 0 \\ 8u + u^4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = u; u \geq 0 \\ (u-1)(u^3 + u^2 + u + 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u=1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$
- Xét $t=-2 \Rightarrow 2x+y=-2 \Leftrightarrow 1-2x=y+3 \Rightarrow y+3 \geq 0.$

Ta có $8\sqrt{y+3} + y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 8\sqrt{y+3} + (y+3)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ 8+(y-3)\sqrt{y+3} = 0 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{y+3} = v, v \geq 0 \Rightarrow v^3 - 6v + 8 = 0$ (1).

Xét hàm số $f(v) = v^3 - 6v + 8; v \geq 0 \Rightarrow f'(v) = 3v^2 - 6$.

Ta có $f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \pm\sqrt{2}$. Khảo sát hàm số có $f(0) < f(\sqrt{2}) \Rightarrow f(v) > f(0) = 8 - 4\sqrt{2} > 0$.

Do đó (1) vô nghiệm. Kết luận hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 1), \left(\frac{1}{2}; -3\right)$.

Câu 11. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2xy^2 - 2y^3 + 3x = 3y, \\ 2\sqrt{2y-3} + \sqrt{x^2+3y-4} = \sqrt{y^2+19x-28}. \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2xy^2 + 3x - 2y^3 - 3y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(2y^2+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2y^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $2\sqrt{2x-3} + \sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{x^2+19x-28}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3} + \sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{8(2x-3) + x^2+3x-4}$$

Đặt $\sqrt{2x-3} = a; \sqrt{x^2+3x-4} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) ta thu được

$$2a+b = \sqrt{8a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2+4ab+b^2 = 8a^2+b^2 \Leftrightarrow a(a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=b \end{cases}$$

- $a=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

- $a=b \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = \sqrt{x^2+3x-4} \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$

Đối chiếu điều kiện và thử trực tiếp suy ra nghiệm duy nhất $x = y = \frac{3}{2}.$

Câu 12. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y+1)\sqrt{2y-1} + xy + x + 1 = y^2 \\ 9(y-1)^2 - 5x = (3-y)\sqrt{3x^2-8x+3} \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq \frac{1}{2}; 3x^2 - 8x + 3 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\begin{aligned} (x-y+1)\sqrt{2y-1} + xy + x + 1 &= y^2 - 1 \Leftrightarrow (x-y+1)\sqrt{2y-1} + (x-y+1)(y+1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-y+1)(\sqrt{2y-1} + y+1) &= 0 \Leftrightarrow y = x+1 \end{aligned}$$

Phương trình thứ hai khi đó trở thành

$$9x^2 - 5x = (2-x)\sqrt{3x^2-8x+3} \Leftrightarrow (3x-1)^2 + x-1 = (2-x)\sqrt{(2-x)(1-3x) - (x-1)}.$$

Đặt $1-3x=t; \sqrt{3x^2-8x+3} = y$ ($y \geq 0$) ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2 + x - 1 = (2-x)y \\ y^2 + x - 1 = (2-x)t \end{cases} \Rightarrow t^2 - y^2 = (2-x)(y-t) \Leftrightarrow (t-y)(t+y+2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=y \\ t+y = x-2 \end{cases}$$

- $t=y \Leftrightarrow 1-3x = \sqrt{3x^2-8x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 3x^2-8x+3 = 9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 3x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1+\sqrt{13}}{6}.$

$$\bullet \quad t + y = x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 8x + 3} = 4x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ 13x^2 - 16x + 6 = 0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}).$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = -\frac{\sqrt{13}+1}{6}; y = \frac{-\sqrt{13}+5}{6}$.

Câu 13. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y+2)\sqrt{x+y+1} + x(4+x) = y^2 - 4, \\ \sqrt[4]{x+y-3} + \sqrt[4]{15x+1} = 3\sqrt[4]{y-2}. \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $x+y \geq 3; y \geq 2; x \geq -\frac{1}{15}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-y+2)\sqrt{x+y+1} + x^2 + 4x + 4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y+2)\sqrt{x+y+1} + (x+2)^2 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+2)\sqrt{x+y+1} + (x+y+2)(x-y+2) = 0 \Leftrightarrow (x-y+2)(\sqrt{x+y+1} + x+y+2) = 0 \Leftrightarrow y = x+2$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[4]{15x+1} = 3\sqrt[4]{x}$. Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt[4]{2x-1}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt[4]{15x+1}}{\sqrt[4]{x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{2-\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{15+\frac{1}{x}} = 3$.

Đặt $\sqrt[4]{2-\frac{1}{x}} = a; \sqrt[4]{15+\frac{1}{x}} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^4+b^4=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ a^4+(a-3)^4=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ a^4-6a^3+27a^2-54a+32=0 \end{cases} (*)$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow a^4 - 6a^3 + 9a^2 + 18a^2 - 54a + 32 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 3a)^2 + 18(a^3 - 3a) + 32 = 0$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 3a + 2)(a^2 - 3a + 16) = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2)(a^2 - 3a + 16) = 0 \Rightarrow a \in \{1; 2\} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \{-14; 1\} \Rightarrow x = 1$$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=1; y=3$.

Câu 14. [ĐVH]: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)^2 + \frac{4xy}{x+y} = 1 \\ 4x + \sqrt{3x+y} = (3x+y-6)^2 + 4\sqrt{x+y} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+y > 0 \\ 3x+y \geq 0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 + \frac{4xy}{x+y} - (x+y) = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x-y)^2 + x+y\right] = 0 \Leftrightarrow x+y=1 \text{ (Do } x+y > 0)$$

Thay vào (2) ta được

$$\sqrt{2x+1} = 4x^2 - 24x + 29 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - 2 = 4x^2 - 24x + 27 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2} = (2x-3)(2x-9)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}+2} = 2x-9 (*) \end{cases}$$

$$\text{Xét (*) : Đặt } t = \sqrt{2x+1} (t \geq 0) \text{ ta được } \frac{1}{t+2} = t^2 - 10 \Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - 10t - 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ t = \frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do } t \geq 0 \text{ nên } t = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x = \frac{13+\sqrt{29}}{4} \Rightarrow y = \frac{-9-\sqrt{29}}{4}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{13+\sqrt{29}}{4}, -\frac{9+\sqrt{29}}{4}\right).$$

Câu 15. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{y} = 2 + \sqrt[3]{1-x} \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} + x + 5 = 2y + \sqrt{y-2} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -1, y \geq 2$

$$(2) \Leftrightarrow x+1 + \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} - 2(y-2) - \sqrt{y-2} = 0$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{y-2} (a, b \geq 0) \text{ ta được } a^2 + a + ab - 2b^2 - b = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+2b+1) = 0 \\ \Leftrightarrow a = b \text{ (Do } a, b \geq 0)$$

$$\text{Với } a = b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow x+1 = y-2 \Leftrightarrow y = x+3 \text{ thay vào (1) được } \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{1-x} = 2$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+3}, v = \sqrt[3]{1-x} \text{ với } u \geq 0 \text{ ta có } \begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 + v^3 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v^3 + (v+2)^2 = 4 \Leftrightarrow v^3 + v^2 + 4v = 0 \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow y = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1; 4)$.

Câu 16. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^2 + 1 - x - y = \frac{1-4xy}{x+y} \\ 2x^2 + y - 2x = (x-y)\sqrt{y^2+2} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x + y \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy + 1 - (x+y) = \frac{1-4xy}{x+y} \Leftrightarrow (x+y)^2 - (x+y) + (1-4xy) \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x+y) + \frac{(1-4xy)(x+y-1)}{x+y} = 0 \Leftrightarrow (x+y-1) \left(x+y + \frac{1-4xy}{x+y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^2 + 1 - 4xy = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + 1 = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } x+y=1 \text{ thay vào (2) ta được } 2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x + 3} \text{ ta được } t^2 - (2x-1)t + x^2 - x - 2 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = (2x-1)^2 - 4(x^2 - x - 2) = 9 \text{ nên } \begin{cases} t = \frac{2x-1+3}{2} = x+1 \\ t = \frac{2x-1-3}{2} = x-2 \end{cases}$$

- Với $t = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$
 - Với $t = x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ vô nghiệm.
- Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Câu 17. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 2x - y = 0 & (1) \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+2} = 3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ y + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$

Phương trình (1) của hệ phương trình tương đương

$$(2x + y)(x - y) - (2x + y) = 0 \Leftrightarrow (2x + y)(x - y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Vì $x \geq 2, y \geq -2 \Rightarrow 2x + y \geq 2 \cdot 2 - 2 = 2 > 0$

Với $x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$ thay vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3 &\Leftrightarrow 2x - 1 + 2\sqrt{(x-2)(x+1)} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 2 - x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - x - 2 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 2)$

Câu 18. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = x^2 + y^2 + (x - y)^2 & (1) \\ \frac{x^2 - 3y + 10}{x + 1} = 2\sqrt{5 - y} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 5 - y \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 5 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Phương trình (1) của hệ phương trình tương đương

$$x^3 + y^3 = 2x^2 + 2y^2 - 2xy \Leftrightarrow (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 2(x + y)^2 - 6xy$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2(x + y - 2) - 3xy(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow (x + y - 2)(x^2 - xy + y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

Ta có $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$

Với $x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x$ thay vào phương trình (2) ta được

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1} = 2\sqrt{x + 3} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 2(x + 1)\sqrt{x + 3} \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 2(x + 1)\sqrt{x + 3} + (\sqrt{x + 3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1 - \sqrt{x + 3})^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x + 1)^2 = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$

Câu 19. [ĐVH]: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2(x-y) = xy + \sqrt{y}(3x^2 - y\sqrt{y} - y) & (1) \\ 3x^2 + x = \sqrt{y} + y & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $y \geq 0$

Phương trình (1) của hệ phương trình tương đương

$$3x^2(x-y) = xy + 3x^2\sqrt{y} - y^2 - y\sqrt{y} \Leftrightarrow 3x^2(x-y-\sqrt{y}) - y(x-y-\sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow (x-y-\sqrt{y})(3x^2-y) = 0$$

▪ Với $x-y-\sqrt{y} = 0 \Rightarrow x = y + \sqrt{y}$ thay vào phương trình (2) ta được

$$3x^2 + y + \sqrt{y} = y + \sqrt{y} \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

▪ Với $3x^2 - y = 0 \Rightarrow y = 3x^2$ thay vào phương trình (2) ta được

$$3x^2 + x = \sqrt{3x^2} + 3x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}|x| \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$

Câu 20. [ĐVH]: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x} + x + 1 = \sqrt{xy} + y \\ \frac{y^2 - 5x}{y - 2} = \sqrt{-x^2 + 2x + 1} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ -x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ xy \geq 0 \\ y \geq 2 \end{cases}$ và $x^2 + x + (-x^2 + 2x + 1) \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow x \geq 0$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 1$ không thỏa mãn hệ.

Nếu $x \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{xy} + x + 1 - y = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1-y)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{xy}} + (x+1-y) = 0$

$\Leftrightarrow x+1-y = 0$ (do $x > 0$) thay vào (2) được

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \sqrt{-x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 - (x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 1} = 0$$

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 2x + 1}$ ta được $x^2 - 3x + 1 = x^2 - 2x - 1 - (x-2)t$

Ta được $-t^2 - (x-1)t - (x-2) = 0 \Leftrightarrow t^2 + (x-1)t + (x-2) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-x+2) = 0$

Với $t = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (do $x > 0$)

Với $t = x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 1} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}; \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Câu 21. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\left(\frac{1}{y} + \sqrt{y}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{y^2} \\ \sqrt{\frac{x}{y} + x + 2} + 2 = \sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{y} - 8} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ \frac{x}{y} + x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x}{y} - \frac{1}{y^2} + x\sqrt{y} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{xy-1}{y^2} + \frac{x(xy-1)}{x\sqrt{y} + \sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow (xy-1)\left(\frac{1}{y^2} + \frac{x}{x\sqrt{y} + \sqrt{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$$

Thay vào (2) được $\sqrt{x^2 + x + 2} + 2 = \sqrt[3]{x^2 + x - 8} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{x^2 + x - 8} = -2$

Đặt
$$\begin{cases} a = \sqrt{x^2 + x + 2} \\ b = \sqrt[3]{x^2 + x - 8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^3 = 10 \\ a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow (b-2)^2 - b^3 = 0 \Leftrightarrow (b+1)(b^2 - 2b + 6) = 0 \Leftrightarrow b = -1$$

Với $b = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 8 = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{29}-1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{29}-1}$ (do $x, y \geq 0$)

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{29}-1}{2}, \frac{2}{\sqrt{29}-1}\right)$.

Câu 22. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{2y^2 + 1} = \sqrt{y+1}, \\ \sqrt{x+8} + \frac{9x}{\sqrt{2x-y+8}} - 5\sqrt{y} = \sqrt{x}. \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} + \frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + \sqrt{2y^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} + \frac{(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + \sqrt{2y^2 + 1}} \right] = 0 \Rightarrow x = y$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+8} + \frac{9x}{\sqrt{x+8}} - 6\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+8+9x-6\sqrt{x^2+8x} = 0 \Leftrightarrow 5x+4 = 3\sqrt{x^2+8x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4 \geq 0 \\ 25x^2 + 40x + 16 = 9(x^2 + 8x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{5} \\ 16x^2 - 32x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{5} \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 23. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)(\sqrt{2y+3}+1)+\sqrt{x+y+4}+1=0, \\ 2x^3+5x^2+4x+1=x(x+y+4)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}. \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện căn thức xác định.

$$(1) \Leftrightarrow x-y+1+\sqrt{x+y+4}+(x-y)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1+\sqrt{x+y+4}-\sqrt{2y+3}+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1+\frac{x-y+1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+\sqrt{2y+3}\right)=0 \Rightarrow y=x+1$$

$$(2) \Leftrightarrow 2x^3+5x^2+4x+1=x(2x+5)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2x^2+\frac{1}{x}+5x+4=(2x+5)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x}-2x\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}+x^2-5\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}+5x+4=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-x\right)^2-5\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-x\right)+4=0$$

Câu 24. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x-y+1+(4x-2y+5)\sqrt{3x+y+1}=3\sqrt{x+2y}, \\ \frac{2}{3\sqrt{-9x^2+y+9x-3}}=\frac{y+2}{19x+6}. \end{cases}$$

Lời giải:

$$(1) \Leftrightarrow 2x-y+1+3(\sqrt{3x+y+1}-\sqrt{x+2y})+2(2x-y+1)\sqrt{3x+y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-y+1+\frac{3(2x-y+1)}{\sqrt{3x+y+1}+\sqrt{x+2y}}+2(2x-y+1)\sqrt{3x+y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y+1)\left(1+\frac{3}{\sqrt{3x+y+1}+\sqrt{x+2y}}+2\sqrt{3x+y+1}\right)=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{-9x^2+11x-2}}=\frac{2x+3}{19x+6} \Leftrightarrow 38x+12=(6x+9)\sqrt{-9x^2+11x-2}$$

$$\Leftrightarrow -9x^2+11x-2-6x\sqrt{-9x^2+11x-2}+9x^2-9\sqrt{-9x^2+11x-2}+27x+14=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-9x^2+11x-2}-3x\right)^2-9\left(\sqrt{-9x^2+11x-2}-3x\right)+14=0$$

Câu 25. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-2)(x-y)}+\sqrt{xy}=2y & (1) \\ \sqrt{xy+x+5}-\frac{6x-5}{4}=\frac{1}{4}(\sqrt{2y+1}-2)^2 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải:

$$\text{ĐK: } \begin{cases} xy \geq 0 \\ y \geq -\frac{1}{2} \\ x^2+(y-2)(x-y) \geq 0 \end{cases} \quad (*).$$

Khi đó từ (1) $\Rightarrow y \geq 0$. Kết hợp với $xy \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có (1)} &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)(x-y)} - y + \sqrt{xy} - y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - y^2 + (y-2)(x-y)}{\sqrt{x^2 + (y-2)(x-y)} + y} + \frac{xy - y^2}{\sqrt{xy} + y} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-y)(x+y+y-2)}{\sqrt{x^2 + (y-2)(x-y)} + y} + \frac{y(x-y)}{\sqrt{xy} + y} = 0 \Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{x+2y-2}{\sqrt{x^2 + (y-2)(x-y)} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} + y} \right) = 0 \\ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có (2)} &\Leftrightarrow \sqrt{xy+x+5} - \frac{6x-5}{4} = \frac{1}{4}(2y+5-4\sqrt{2y+1}) \Leftrightarrow \sqrt{2y+1} + \sqrt{xy+x+5} = \frac{1}{2}(3x+y) \\ (4) \end{aligned}$$

$$\text{Do } x, y \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(3x+y) = \sqrt{2y+1} + \sqrt{xy+x+5} \geq 1 + \sqrt{5} \Rightarrow x + \frac{y}{3} \geq \frac{2+2\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Với } x, y \geq 0 \Rightarrow x+2y \geq x + \frac{y}{3} \Rightarrow x+2y \geq \frac{2+2\sqrt{5}}{3} > 2 \Rightarrow x+2y-2 > 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{x+2y-2}{\sqrt{x^2 + (y-2)(x-y)} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} + y} > 0 \text{ với } \forall x, y \geq 0. \text{ Khi đó (3)} \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow y=x.$$

$$\text{Thế vào (4) ta được } \sqrt{2x+1} + \sqrt{x^2+x+5} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{\frac{1}{4}(2x+1)^2 + \frac{19}{4}} = (2x+1) - 1$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2x+1} = t \ (t \geq 0). \text{ Phương trình mới } t + \sqrt{\frac{1}{4}t^4 + \frac{19}{4}} = t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2t + \sqrt{t^4 + 19} = 2(t^2 - 1) \Leftrightarrow \sqrt{t^4 + 19} = 2(t^2 - t - 1) \Rightarrow t^4 + 19 = 4(t^2 - t - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t + 1) - t^4 - 19 = 0 \Leftrightarrow 3t^4 - 8t^3 - 4t^2 + 8t - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^3(t-3) + t^2(t-3) - t(t-3) + 5(t-3) = 0 \Leftrightarrow (t-3)(3t^3 + t^2 - t + 5) = 0$$

(5)

$$\text{Với } x \geq 0 \text{ có } t = \sqrt{2x+1} \geq 1 \Rightarrow 3t^3 + t^2 - t + 5 = 3t^3 + 5 + t(t-1) > 0.$$

$$\text{Khi đó (5)} \Leftrightarrow t-3=0 \Leftrightarrow t=3 \Rightarrow \sqrt{2x+1}=3 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=4.$$

Thử lại $x=y=4$ thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: Hệ có nghiệm là $(x; y) = (4; 4)$.

Câu 26. [ĐVH]: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+2y)(x-y-1) + \sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} = 0 & (1) \\ 3\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{2x+y-2} = 5\sqrt{x+5y+2} - 3 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Lời giải:

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 2x^2 + 3xy + 4y^2 \geq 0 \\ x \geq \frac{2}{3} \\ 2x + y \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (x+2y)(x-y) + \sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} - (x+2y) = 0$

$$\Rightarrow (x-y)(x+2y) + \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2 - x^2 - 4y^2 - 4xy}{\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + x + 2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y) + \frac{x(x-y)}{\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + x + 2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(x+2y + \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + x + 2y} \right) = 0 \quad (3)$$

Từ (2) $\Rightarrow 5\sqrt[3]{x+5y+2} - 3 \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x+5y+2} \geq \frac{3}{5} > 0 \Rightarrow x+5y+2 > 0$.

Kết hợp với $2x + y \geq 2 \Rightarrow (x+5y+2) + (2x+y) > 2 \Rightarrow 3(x+2y) > 0 \Rightarrow x+2y > 0$.

Mặt khác $x \geq \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow x+2y + \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + x + 2y} > 0$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow y=x$.

Thế $y=x$ vào (2) ta được $3\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{3x-2} = 5\sqrt[3]{6x+2} - 3 \Leftrightarrow 5\sqrt[3]{6x+2} - 7\sqrt{3x-2} - 3 = 0$.

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{6x+2} = a; \sqrt{3x-2} = b \Rightarrow \begin{cases} 5a - 7b - 3 = 0 \\ a^3 - 2b^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5a-3}{7} \\ a^3 - 2\left(\frac{5a-3}{7}\right)^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Ta có $a^3 - 2\left(\frac{5a-3}{7}\right)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 49a^3 - 2(25a^2 - 30a + 9) - 294 = 0$

$$\Leftrightarrow 49a^3 - 50a^2 + 60a - 312 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(49a^2 + 48a + 156) = 0 \quad (4)$$

Với $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{6x+2} > 0 \Rightarrow 49a^2 + 48a + 156 > 0$. Khi đó (4) $\Leftrightarrow a-2=0 \Leftrightarrow a=2$

$\Rightarrow \sqrt[3]{6x+2} = 2 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$. Thử lại $x=y=1$ đã thỏa mãn hệ đã cho.

Đ/s: Hệ có nghiệm là $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 27. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + x^2 - y^2} = 2x - y + 1 & (1) \\ 1 + \sqrt{x-y} + 2\sqrt{x+2y-2} = 3\sqrt[3]{x+3y-3} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải:

$$\text{ĐK: } \begin{cases} (x+1)^2 + x^2 - y^2 \geq 0 \\ x+2y-2 \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + x^2 - y^2} - x = x - y + 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2 + x^2 - y^2 - x^2}{\sqrt{(x+1)^2 + x^2 - y^2} + x} = x - y + 1 \Leftrightarrow \frac{(x-y+1)(x+y+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + x^2 - y^2} + x} = x - y + 1 \quad (3)$$

$$\text{Do } x-y \geq 0 \Rightarrow x-y+1 \geq 1 > 0 \text{ nên } (3) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + x^2 - y^2} + x = x + y + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1 \geq 0 \\ (x+1)^2 + x^2 - y^2 = (y+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ 2x^2 + 2x = 2y^2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ (x-y)(x+y+1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} 2x-y+1 \geq 0 \\ x+2y-2 \geq 0 \\ \sqrt[3]{x+3y-3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+1 \geq 0 \\ x+2y-2 \geq 0 \\ x+3y-3 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2x-y+1) + (x+2y-2) + (x+3y-3) > 0 \Rightarrow 4(x+y) > 4 \Rightarrow x+y+1 > 2 > 0.$$

$$\text{Do đó } (4) \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y=x \end{cases}$$

$$\text{Thế } y=x \text{ vào (2) ta được } 1+2\sqrt{3x-2} = 3\sqrt[3]{4x-3}.$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{3x-2} \geq 0; b = \sqrt[3]{4x-3} \Rightarrow \begin{cases} 1+2a=3b \\ 4a^2-3b^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3b-1}{2} \\ 4\left(\frac{3b-1}{2}\right)^2 - 3b^3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 4\left(\frac{3b-1}{2}\right)^2 - 3b^3 \Leftrightarrow 13b^3 - 9b^2 + 6b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{ Với } b=0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Loại vì } a \geq 0.$$

$$\blacksquare \text{ Với } b=1 \Rightarrow \sqrt[3]{4x-3}=1 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1. \text{ Với } b=2 \Rightarrow \sqrt[3]{4x-3}=2 \Leftrightarrow x=\frac{11}{4} \Rightarrow y=\frac{11}{4}.$$

$$\text{Thử lại } (x;y) = \left\{ (1;1), \left(\frac{11}{4}; \frac{11}{4} \right) \right\} \text{ đều thỏa mãn hệ đã cho.}$$

$$\text{Đ/s: Hệ có nghiệm là } (x;y) = \left\{ (1;1), \left(\frac{11}{4}; \frac{11}{4} \right) \right\}.$$

Câu 28. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3x-2y} = \sqrt{x+y^2} + \frac{x+1}{2} \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = 1 + \sqrt{xy-5y+1} \end{cases}$$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} x \geq 1; y \geq 2 \\ xy - 5x + 1 \geq 0 \end{cases}$

Khi đó:

PT (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x-2y} = 2\sqrt{x+y^2} + x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x-2y} - 2\sqrt{x+y^2} + \sqrt{x^2+3x-2y} - x-1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2y-4y^2}{\sqrt{x^2+3x-2y}+2\sqrt{x+y^2}} + \frac{x-2y}{\sqrt{x^2+3x-2y}+x+1} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2y) \left[\frac{x+2y-1}{\sqrt{x^2+3x-2y}+2\sqrt{x+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-2y}+x+1} \right] = 0 \quad (1)$

Do $x \geq 1; y \geq 2$: (1) $\Leftrightarrow x = 2y$ thế vào PT (2) ta có: $\sqrt{2y-1} + \sqrt{y-2} = 1 + \sqrt{2y^2-5y+1}$

Đặt $a = \sqrt{2y-1}; b = \sqrt{y-2} \Rightarrow a+b=1+ab \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2y-1}=1 \\ \sqrt{y-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ (loại)} \\ y=3; x=6 \end{cases}$

Vậy $x=6; y=3$ là nghiệm của PT đã cho

Câu 29. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+3} = 3y \\ 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+3} = 2x \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có: PT (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} - 2x = \sqrt{y^2+3} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \sqrt{y^2+3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} + 2x = \frac{4}{\sqrt{y^2+3}}$

$\Rightarrow 4\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+3} + \frac{4}{\sqrt{y^2+3}}$ thế vào PT(1) ta có: $\frac{5\sqrt{y^2+3}}{4} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3}} = 3y$

$\Leftrightarrow 5(y^2+3) + 4 = 8y\sqrt{y^2+3} \Leftrightarrow 5y^2 + 19 = 8y\sqrt{y^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 25y^4 + 190y^2 + 361 = 144y^4 + 432y^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=0$ là nghiệm của HPT đã cho.

Câu 30. [ĐVH]: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x-4y+3\sqrt{y} = \sqrt{2x+y} \\ \sqrt{y-1} + \sqrt{x+1} + y^2 + y = 10 \end{cases}$$

Lời giải:

ĐK: $\begin{cases} y \geq 1; x \geq -1 \\ 2x+y \geq 0 \end{cases}$. Khi đó: PT (1) $\Leftrightarrow (x-4y) + \frac{8y-2x}{3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}} = 0 \Leftrightarrow (x-4y) \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}} \right) = 0$

Do $y \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}} \leq \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$ nên PT (1) $\Leftrightarrow x=4y$ thế vào PT(2) ta có:

$\sqrt{y-1} + \sqrt{4y+1} + y^2 + y = 10 \Leftrightarrow \sqrt{y-1} - 1 + \sqrt{4y+1} - 3 + y^2 + y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2) \left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+1} + \frac{4}{\sqrt{4y+1}+3} + y+3 \right) = 0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=8$ là nghiệm của PT

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = (8; 2)$

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN ĐẶC SẮC VỀ HÌNH PHẪNG OXY

Thầy Đặng Việt Hùng [ĐVH]

Câu 1. [ĐVH]: Trong mặt phẳng cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ và điểm $A(-1; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (C) và có diện tích bằng 10.

Lời giải:

Tâm $I(1; 2); R = \sqrt{5}$.

Do hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp (C) tâm I nên I cũng là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD .

Suy ra $C(3; 1)$.

Gọi α là góc hợp bởi 2 đường chéo AC và BD suy ra $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = 10$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sin \alpha = 10 \Leftrightarrow \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ.$$

Nên $ABCD$ là hình vuông. Phương trình $AC: x + 2y - 5 = 0$.

Suy ra phương trình BD là $2x - y = 0$.

$$\text{Tọa độ của B và D là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5x^2 - 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$ là $(3; 1); (0; 0)$ và $(2; 4)$.

Câu 2. [ĐVH]: Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0, (C_2): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C_1) tại A, B cắt (C_2) tại C, D sao cho $AB = 2\sqrt{7}; CD = 8$

Lời giải:

Xét đường tròn (C_1) và (C_2) ta dễ dàng tìm được $d(I_1; \Delta) = d(I_2; \Delta) = 3$ nên có các trường hợp về (Δ) như sau:

TH1: đường thẳng (Δ) song song với I_1I_2 và cách I_1I_2 1 khoảng $= 3$.

Phương trình I_1I_2 là $2x + y - 3 = 0$

Suy ra phương trình (Δ) $2x + y + m = 0$

$$d(\Delta; I_1I_2) = \frac{|m+3|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3\sqrt{5} - 3 \Rightarrow (\Delta): 2x + y + 3\sqrt{5} - 3 = 0 \\ m = -3\sqrt{5} - 3 \Rightarrow (\Delta): 2x + y - 3\sqrt{5} - 3 = 0 \end{cases}$$

TH2: đường thẳng Δ qua trung điểm của I_1I_2 và khoảng cách từ I_1 và I_2 đến $\Delta = 3$

$M\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ là trung điểm của I_1I_2 .

Phương trình (Δ) qua M là: $a\left(x - \frac{3}{2}\right) + by = 0$.

$$d(I_1; \Delta) = \frac{\left|-\frac{a}{2} + b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{35}{4}a^2 + ab + 8b^2 = 0 \text{ (vô nghiệm do a và b không đồng thời =0)}$$

Vậy có 2 đường thẳng Δ thỏa mãn là $2x + y + 3\sqrt{5} - 3 = 0$ và $2x + y - 3\sqrt{5} - 3 = 0$.

Đ/s: $2x + y + 3\sqrt{5} - 3 = 0; 2x + y - 3\sqrt{5} - 3 = 0$

Câu 3. [ĐVH]: Cho tam giác ABC biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ A lần lượt là $6x - 5y - 7 = 0$ và $x - 4y + 2 = 0$. Tính diện tích tam giác ABC biết trọng tâm tam giác thuộc trục hoành và đường cao từ đỉnh B đi qua $E(1; -4)$

Lời giải:

Để dàng tìm được tọa độ điểm $A(2; 1)$

$G(x_G; 0)$ là trọng tâm tam giác, mà G thuộc trung tuyến suy ra tọa độ $G(-2; 0)$

Gọi M là trung điểm của BC ta có: $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow$ tọa độ $M\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M\left(-4; -\frac{1}{2}\right) \in BC \\ BC \perp AH : 6x - 5y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow BC : 5x + 6y + 23 = 0$$

Giả sử: $B(6t - 1; -3 - 5t), C(-7 - 6t; 5t + 2) \Rightarrow \overrightarrow{BE} = (2 - 6t; 5t - 1), \overrightarrow{AC} = (-9 - 6t; 5t + 1)$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (2 - 6t)(-9 - 6t) + (5t - 1)(5t + 1) = 0 \Leftrightarrow 61t^2 + 42 - 19 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{19}{61} \end{cases}$$

+) Với $t = -1 \Rightarrow B(-7; 2), C(-1; -3) \Rightarrow BC = \sqrt{61}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} d(A, BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{|5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 23|}{\sqrt{61}} \cdot \sqrt{61} = \frac{39}{2}$$

+) Với $t = \frac{19}{61} \Rightarrow B\left(\frac{53}{61}; -\frac{278}{61}\right), C\left(-\frac{541}{61}; \frac{217}{61}\right) \Rightarrow BC = \frac{99}{\sqrt{61}}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} d(A, BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{|5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 23|}{\sqrt{61}} \cdot \frac{99}{\sqrt{61}} = \frac{3861}{122}$$

Đáp số: $S_{ABC(1)} = \frac{39}{2}; S_{ABC(2)} = \frac{3861}{122}$

Câu 4. [ĐVH]: Cho tam giác ABC có $M(1; -2)$ là trung điểm AB, trục Ox là phân giác góc A, đỉnh B, C thuộc đường thẳng đi qua $N(-3; 0)$ và $P(0; 2)$. Tìm A, B, C và diện tích tam giác.

Lời giải:

Điểm A thuộc Ox , gọi tọa độ $A(a; 0)$

B, C thuộc đường thẳng qua $N(-3; 0)$ & $(0; 2) \rightarrow pt \ BC: 2x - 3y + 6 = 0$

Giả sử tọa độ $B(3b; 2b + 2)$, mà $M(1; -2)$ là trung điểm AB nên ta có hệ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 2 \\ 2b + 2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow A(11; 0) \text{ \& } B(-9; -4)$$

Gọi phân giác góc A là AD , từ M kẻ đường thẳng d cắt AD và AC lần lượt tại E và F :

$$\Rightarrow pt(d): x = 1, E = (d) \cap AD \rightarrow E(1; 0) \Rightarrow F(1; 2) \text{ (do } M \text{ và } F \text{ đối xứng nhau qua } E)$$

Suy ra phương trình AC là: $x + 5y - 11 = 0$ (do $A, F \in AC$).

Từ đây ta xác định được tọa độ điểm C là nghiệm của AC và BC : $C\left(\frac{3}{13}; \frac{28}{13}\right)$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(A; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{|2 \cdot 11 - 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{13}} \cdot \frac{40}{\sqrt{13}} = \frac{560}{13}$$

$$\text{Đáp số: } A(11; 0), B(-9; -4), C\left(\frac{3}{13}; \frac{28}{13}\right), S_{ABC} = \frac{560}{13}$$

Câu 5. [ĐVH]: Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $d_1: 2x + y - 4 = 0$ qua điểm $M(1; -1)$ cắt đường thẳng $(d_2): x - y - 1 = 0$ tại A, B sao cho $AB = 2\sqrt{7}$.

Lời giải:

Gọi I là tâm đường tròn (C) cần tìm, $I \in (d_1) \Rightarrow I(t; 4 - 2t)$

Vì đường tròn (C) cắt $(d_2): x - y - 1 = 0$ theo dây cung $AB = 2\sqrt{7}$. nên ta có:

$$\left(d_{(I/(d_2))}\right)^2 = R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{9t^2 - 30t + 39}{2} \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác đường tròn } (C) \text{ qua } M(1; -1) \rightarrow (1-t)^2 + (2t-5)^2 = R^2 \Leftrightarrow 5t^2 - 22t + 26 = R^2 \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ \& } (**) \Rightarrow \frac{9t^2 - 30t + 39}{2} = 5t^2 - 22t + 26 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 13 \end{cases}$$

$$\text{Vậy có 2 đường tròn thỏa mãn yêu cầu đề bài là: } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \text{ / } (x-13)^2 + (y+22)^2 = 585$$

Câu 6. [ĐVH]: Viết phương trình đường thẳng d qua $M(1; -1)$ cắt đường tròn tâm $I(4; 0)$ bán kính $R = 5$ tại A, B sao cho $MA = 3MB$.

Lời giải:

Gọi $\vec{n} = (a; b)$ là VTPT của đường thẳng d qua $M(1; -1)$

$$\Rightarrow pt(d): a(x-1) + b(y+1) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a + b = 0$$

$$\text{Vì } P_{(M/(C))} = IM^2 - R^2 = -15 < 0 \Rightarrow \text{điểm } M \text{ nằm trong đường tròn.}$$

$$\text{Mà: } P_{(M/(C))} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -15 \Rightarrow -MA \cdot MB = -15 \Leftrightarrow 3MB \cdot MB = 15 \Leftrightarrow MB = \sqrt{5} \Rightarrow MA = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow AB = MA + MB = 4\sqrt{5}.$$

Vậy ta đi viết phương trình đường thẳng d qua M cắt đường tròn tâm $I(4;0)$ & $R=5$ đã cho theo dây cung $AB=4\sqrt{5}$

$$\text{Do } AB=4\sqrt{5} \Rightarrow d_{(I/(d))} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ b = 2a \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } a = -2b, \text{ chọn } b = -1 \rightarrow a = 2 \Rightarrow pt(d): 2x - y - 3 = 0$$

$$+) \text{ Với } b = 2a, \text{ chọn } a = 1 \rightarrow b = 2 \Rightarrow pt(d): x + 2y + 1 = 0$$

$$\text{Đáp số: } (d_{1/2}): 2x - y - 3 = 0; x + 2y + 1 = 0$$

Câu 7. [ĐVH]: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A ngoại tiếp (C): $x^2 + y^2 = 2$. Tìm tọa độ 3 đỉnh của tam giác biết điểm A thuộc tia Ox.

Lời giải:

(C) có $O(0;0)$, $r = \sqrt{2}$. Điểm A thuộc tia Ox suy ra $A(a;0)$, $a > 0$.

$$\text{Từ } O \text{ hạ } OI \text{ vuông góc } AB, \text{ ta tính được: } OA = \frac{OI}{\sin 45^\circ} = \frac{r}{\sin 45^\circ} = 2$$

$$\text{Ta có: } OA^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2 \Rightarrow A(2;0)$$

AB/AC qua $A(2;0)$ nên AB/AC có dạng: $a(x-2) + by = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

$$\text{Mặt khác: } \cos(AB/AC, Ox) = \cos 45^\circ = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \pm b$$

$$\text{Nên giả sử: } AB: x + y - 2 = 0; AC: x - y - 2 = 0$$

$$\text{Kẻ } OA \text{ cắt } BC \text{ tại } H(k,0) \text{ khi đó } OH = r \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{Mà } AH \perp BC = \{H\} \Rightarrow B, C \in x = \pm\sqrt{2}$$

$$+) \text{ TH1: } B, C \in x = \sqrt{2} \text{ khi đó suy ra: } B(\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}), C(\sqrt{2}; \sqrt{2} - 2)$$

$$+) \text{ TH2: } B, C \in x = -\sqrt{2} \Rightarrow B(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}), C(-\sqrt{2}; -2 - \sqrt{2})$$

Vậy có 2 bộ tọa độ 3 đỉnh tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu là:

$$A(2;0), B(\pm\sqrt{2}; 2 \mp \sqrt{2}), C(\pm\sqrt{2}; -2 \pm \sqrt{2})$$

Câu 8. [ĐVH]: Cho hai đường tròn $\begin{cases} (C_1): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ (C_2): x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0 \end{cases}$ có tâm là I và J. Gọi H là tiếp điểm của (C_1) và (C_2) . Gọi d là tiếp tuyến chung ngoài không qua H của (C_1) và (C_2) . Tìm giao điểm K của d và IJ. Viết phương trình đường tròn qua K tiếp xúc với (C_1) và (C_2) tại H.

Lời giải:

Nhận xét: (C_1) có tâm $I(2; -1)$ & $R_1 = 3$ và (C_2) có tâm $J(5; 3)$ & $R_2 = 2$

Ta có: $IJ = 5 = R_1 + R_2$. Suy ra (C_1) & (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau. Mà H là tiếp điểm của 2 đường tròn:

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} = -3\overrightarrow{HJ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_I - x_H) = -3(x_J - x_H) \\ 2(y_I - y_H) = -3(y_J - y_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{19}{5} \\ y_H = \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

K là giao của tiếp tuyến chung d và IJ nên ta có:

$$\Leftrightarrow 2KI = 3KJ \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_I - x_K) = 3(x_J - x_K) \\ 2(y_I - y_K) = 3(y_J - y_K) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 11 \\ y_K = 11 \end{cases} \Rightarrow K(11; 11)$$

K thuộc đường tròn (C) và (C) tiếp xúc (C_1) & (C_2) tại H nên tâm M của (C) là trung điểm KH

$$\Rightarrow M\left(\frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right), R_{(C)} = MH = 6 \Rightarrow pt(C): \left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{5}\right)^2 = 36$$

Đáp số: $K(11; 11), (C): \left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{5}\right)^2 = 36$

Câu 9. [ĐVH]: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(1; 3)$ nằm ngoài $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d qua A cắt (C) tại hai điểm B và C sao cho $AB = BC$.

Lời giải:

Gọi $B(m, n)$

Do A nằm ngoài (C) và $AB = BC$ nên dễ thấy B là trung điểm của AC

Ta có: $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ hay $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow I(3, -1), R = 2$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-2, 4) = 2(-1, 2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{IA}} = (2, 1) \Rightarrow (IA): 2(x-1) + y-3 = 0: 2x + y - 5 = 0$$

Gọi M, N là giao điểm của IA với (C) . Hoành độ giao điểm của M, N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ (x-3)^2 + (6-2x)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 5x^2 - 30x + 41 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15+2\sqrt{5}}{5}, y = -\frac{5+4\sqrt{5}}{5} \\ x = \frac{15-2\sqrt{5}}{5}, y = \frac{-5+4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{15+2\sqrt{5}}{5}, -\frac{5+4\sqrt{5}}{5}\right); N\left(\frac{15-2\sqrt{5}}{5}, \frac{-5+4\sqrt{5}}{5}\right)$$

Ta có:

$$AB.AC = AM.AN = 16 \Rightarrow 2AB^2 = 16 \Rightarrow AB^2 = 8 \Rightarrow (m-1)^2 + (n-3)^2 = 8 \Rightarrow m^2 + n^2 - 2m - 6n + 2 = 0$$

Mà B nằm trên (C) nên ta có hệ

$$\begin{cases} m^2 + n^2 - 2m - 6n + 2 = 0 \\ m^2 + n^2 - 6m + 2n + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2n + 1 \\ 5n^2 - 6n + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1, m = 3 \\ n = \frac{1}{5}, m = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(3, 1) \Rightarrow C(5, -1) \Rightarrow d: x + y - 4 = 0 \\ B\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{9}{5}, -\frac{13}{5}\right) \Rightarrow d: 7x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm: $x + y - 4 = 0$, $7x + y - 10 = 0$

Câu 10. [ĐVH]: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (T) có phương trình: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ và $I(8; 5)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (T) đồng thời đường thẳng AB đi qua I (A, B là hai tiếp điểm).

Lời giải:

$$(T): x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow J(4, 0), R = 2$$

$$\text{Gọi } M(0, m) \Rightarrow \overline{MJ} = (4, -m) \Rightarrow (AB): 4(x - 8) - m(y - 5) = 0$$

$$\text{Ta có: } \frac{|-16 + 5m|}{\sqrt{16 + m^2}} = d(J / (AB)) = \frac{R^2}{IM} = \frac{4}{\sqrt{16 + m^2}} \Leftrightarrow |-16 + 5m| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(0, 4) \\ M\left(0, \frac{12}{5}\right) \end{cases}$$

$$\bullet \quad M(0, 4) \Rightarrow \begin{cases} IM = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \\ (AB): x - y - 3 = 0 \Rightarrow MH = d(M / (AB)) = \frac{|-7|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} < IM \Rightarrow \text{thỏa mãn} \end{cases}$$

$$\bullet \quad M\left(0, \frac{12}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} IM = \sqrt{4^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{34}}{5} \\ (AB): 4x - \frac{12}{5}y - 20 = 0 \Rightarrow MH = d(M / (AB)) = \frac{\left|\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 20\right|}{\sqrt{4^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}} = \frac{161}{5\sqrt{34}} > MI \Rightarrow 1 \end{cases}$$

oại

Đ/s: $M(0; 4)$

Câu 11. [ĐVH]: Cho 3 đường thẳng $\begin{cases} d_1: x + y + 3 = 0 \\ d_2: x - y + 4 = 0 \\ d_3: x - 2y = 0 \end{cases}$. Viết phương trình đường tròn có tâm I là giao điểm của d_1 và d_2 đồng thời cắt d_3 tại AB sao cho $AB = 2$.

Lời giải:

$$\bullet \quad I = d_1 \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} x_I + y_I + 3 = 0 \\ x_I - y_I + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{7}{2} \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\bullet \quad d(I/d_3) = \frac{\left| -\frac{7}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} \Rightarrow R^2 = \left(d(I/d_3) \right)^2 + \left(\frac{AB}{2} \right)^2 = \frac{101}{20}$$

Suy ra phương trình đường tròn cần tìm là: $\left(x + \frac{7}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{101}{20}$.

$$\text{Đ/s: } \left(x + \frac{7}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{101}{20}.$$

Câu 12. [ĐVH]: Cho các đường tròn $\begin{cases} (C_1): (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ (C_2): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng (d) tiếp

xúc với đường tròn (C_1) cắt đường tròn (C_2) theo dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

$$\begin{cases} (C_1): (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow I(1,0), R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (C_2): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow J(2,2), R_2 = 2 \end{cases}$$

Gọi $(d): ax + by + c = 0$

$$\bullet \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = R_1 = d(I/d) = \frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2(a+c)^2 \quad (1)$$

$$\bullet \quad \sqrt{R_2^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \sqrt{2} = d(J/d) = \frac{|2a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{Suy ra } d(J/d) = 2d(I/d) \Rightarrow \frac{|2a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow |2a+2b+c| = 2|a+c|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+c = 2a+2c \\ 2a+2b+c = -2a-2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = c \\ 4a+2b+3c = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad 2b = c \Rightarrow (1): a^2 + b^2 = 2(a+2b)^2 \Leftrightarrow a^2 + 8ab + 7b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = -7b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b, c = 2b \\ a = -7b, c = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (d): -x + y + 2 = 0 \\ (d): -7x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad 4a + 2b + 3c = 0 \Rightarrow (1): 4a^2 + (4a+3c)^2 = 8(a+c)^2 \Leftrightarrow 12a^2 + 8ac + c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a \\ c = -6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a, b = a \\ c = -6a, b = 7a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (d): x + y - 2 = 0 \\ (d): x + 7y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (d): -x + y + 2 = 0; -7x + y + 2 = 0; x + y - 2 = 0; x + 7y - 6 = 0$$

Câu 13. [ĐVH]: Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1: x-3y=0; d_2: 2x+y-5=0; d_3: x-y=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng $A \in d_1; C \in d_2; B, D \in d_3$.

Lời giải:

Gọi $A(3a, a), C(c, 5-2c)$, I là tâm hình vuông $\Rightarrow I$ là trung điểm của AC và thuộc BD

$$\Rightarrow \begin{cases} I\left(\frac{3a+c}{2}, \frac{a+5-2c}{2}\right) \Rightarrow 3a+c = a+5-2c \Leftrightarrow 2a+3c = 5(1) \\ x_I = y_I \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \Rightarrow \begin{cases} I\left(\frac{3a+c}{2}, \frac{a+5-2c}{2}\right) \Rightarrow 3a+c = a+5-2c \Leftrightarrow 2a+3c = 5(2) \\ x_I = y_I \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a=1, c=1 \Leftrightarrow A(3,1); C(1,3) \Rightarrow I(2,2) \Rightarrow IA = \sqrt{2} \Rightarrow (I): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$

Tọa độ giao điểm của B, D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ (I): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ (x-2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=3 \\ x=y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3,3), D(1,1) \\ B(1,1), D(3,3) \end{cases}$$

Vậy $A(3,1); C(1,3), B(3,3), D(1,1)$ hoặc $A(3,1); C(1,3); B(1,1), D(3,3)$

Câu 14. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có các đỉnh $A(-1;2); C(3;-2)$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD , BM là đường thẳng vuông góc với CE tại M ; N là trung điểm của BM và P là giao điểm của AN với DM . Biết phương trình đường thẳng BM : $2x - y - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm P

Lời giải.

Gọi I là tâm hình vuông ta có $I(1;0)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -4)$ suy ra phương trình BD : $x - y - 1 = 0$.

Do $IA = IB = IC = ID = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow B, D \in (C): (x-1)^2 + y^2 = 8$.

Tọa độ B, D thỏa mãn $\begin{cases} x = y + 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (-1; -2), (3; 2) \Rightarrow \begin{cases} B(-1; -2), D(3; 2) \\ D(-1; -2), B(3; 2) \end{cases}$

Lại có BM : $2x - y - 4 = 0$ nên chọn $B(3; 2), D(-1; -2)$; N là trung điểm BM nên AN song song với CE .

Tọa độ trung điểm $E(-1; 0) \Rightarrow (CE): x + 2y + 1 = 0$; $(AN): x + 2y - 3 = 0$ và $M \in (CE): M(-2m-1; m)$.

$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{6}{5} \Rightarrow M\left(\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}\right) \Rightarrow DM: x - 3y - 5 = 0$.

Tọa độ điểm P thỏa mãn $\begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{19}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Câu 15. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp hình chữ nhật $MNPQ$. Biết các điểm $M(-3; -1)$ và $N(2; -1)$ thuộc cạnh BC , Q thuộc cạnh AB , P thuộc cạnh AC , đường thẳng AB có phương trình $x - y + 5 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (5; 0) \Rightarrow (BC) \equiv (MN): y = -1$, suy ra (MQ) qua M và vuông góc với BC : $x = -3$.

$$Q \in (AB): x - y + 5 = 0 \Rightarrow Q(-3; 2); B \in (AB) \Rightarrow B(-6; -1).$$

$$(NP) \text{ đi qua } N \text{ và vuông với } (BC): x = 2; (PQ) \text{ đi qua } Q \text{ và song song với } (BC): y = 2 \Rightarrow P(2; 2).$$

$$(AP) \text{ đi qua } P \text{ và vuông góc với } (AB): x + y - 4 = 0 \Rightarrow A: \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right).$$

$$C = (AP) \cap (BC) \Rightarrow C(5; -1). \text{ Vậy ta có } A\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right), B(-6; -1), C(5; -1).$$

Câu 16. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ và đường thẳng $d: 4x - 3y + 9 = 0$. Gọi $A; B$ là hai điểm thuộc đường thẳng d , C là điểm thuộc đường tròn (C) . Biết điểm $H\left(\frac{22}{5}; \frac{11}{5}\right)$ là một giao điểm của AC với đường tròn (C) , điểm $H\left(-\frac{6}{5}; \frac{7}{5}\right)$ là trung điểm của cạnh AB . Xác định tọa độ các điểm A, B, C biết diện tích tứ giác $AHIK$ bằng 24 và hoành độ điểm A dương.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -1), R = 4$. Ta có $\overline{IH} = \left(\frac{12}{5}; \frac{16}{5}\right)$ nên IH song song với d , $IH: 4x - 3y - 11 = 0$.

Ta có $d(I; AB) = 4$ nên d tiếp xúc với (C) , suy ra $d(K; IH) = d(H; AB) = 4$.

$$S_{AHIK} = S_{IHK} + S_{AHK} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot d(K; IH) + \frac{1}{2} \cdot AK \cdot d(H; AB) = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot AK \cdot 4 = 24 \Leftrightarrow AK = 8.$$

$$A(x; y); x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 9 = 0 \\ \left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 = 64 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 9 = 0 \\ y \in \left\{\frac{39}{5}; -5\right\} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{18}{5}; \frac{39}{5}\right). \text{ Suy ra } B(-6; -5).$$

$$\text{Phương trình đường } AC: 7x + y - 33 = 0 \Rightarrow C\left(\frac{26}{5}; -\frac{17}{5}\right) \text{ hoặc } C\left(\frac{22}{5}; \frac{11}{5}\right).$$

Câu 17. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(1; 0)$ và các đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 2$ và $(C_2): x^2 + y^2 = 5$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt nằm trên (C_1) và (C_2) để tam giác ABC có diện tích lớn nhất, với $x_B < 1$

Lời giải:

Nhận thấy khi diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất thì O chính là trực tâm của tam giác ABC .

Và ta có: $OC \perp AB, OA \perp BC$. Khi đó gọi $B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ thì $x_B = x_C$ do $OA \perp BC$

$$\text{Ta lại có: } \overline{AB} = (x_B - 1; y_B), \overline{OC} = (x_C; y_C), \overline{OB} = (x_B; y_B), \overline{AC} = (x_C - 1; y_C)$$

$$\text{Mặt khác: } CO \perp AB \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CO} = 0 \Leftrightarrow x_B(x_B - 1) + y_B \cdot y_C = 0 \Leftrightarrow y_B \cdot y_C = x_B - x_B^2$$

$$\Leftrightarrow y_B^2 y_C^2 = x_B^4 - 2x_B^3 + x_B^2 (*)$$

$$\text{Và } \begin{cases} x_B^2 + y_B^2 = 2 \\ x_C^2 + y_C^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_B^2 = 2 - x_B^2 \\ y_C^2 = 5 - x_B^2 \end{cases} \quad (-\sqrt{2} < x_B < 1)$$

Thay vào (*) ta có:

$$(2 - x_B^2)(5 - x_B^2) = (x_B - x_B^2)^2 \Leftrightarrow 2x_B^3 - 8x_B^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow (x_B + 1)(x_B^2 - 5x_B + 5) = 0 \Leftrightarrow x_B = x_C = -1$$

Khi đó tọa độ các điểm B và C cần tìm là: $B(-1; \pm 1)$, $C(-1; \pm 2)$

Câu 18. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm M, N sao cho $MB + NB = AB$. Biết $P(\sqrt{3}; 1)$ thuộc đường thẳng DN và đường phân giác trong của góc $\widehat{MDN}$ có phương trình là $d: x - \sqrt{3}y + 6 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh D của hình thoi ABCD.

Lời giải:

Giả thiết: $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ & $\triangle CBD$ là các tam giác đều. Theo bài ta có: $AM = BN$, $BM = CN$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \widehat{DAM} = \widehat{DBN} = 60^\circ \\ AD = BD \\ AM = BN \end{cases} \Rightarrow \triangle ADM = \triangle BDN \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{BDN}$$

Tương tự ta có: $\triangle BMD = \triangle CND \Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{MDB}$

Từ trên suy ra $\widehat{MDN} = 60^\circ$.

Gọi Q là điểm đối xứng của P qua đường phân giác: $d: x - \sqrt{3}y + 6 = 0$. Suy ra điểm Q thuộc DM.

$$\text{Suy ra tam giác PDQ là tam giác đều} \Rightarrow DP = PQ = 2d(P, (d)) = 2 \cdot \frac{|x_P - y_P \sqrt{3} + 6|}{\sqrt{4}} = 6$$

$$\text{Điểm } D \in (d): x - \sqrt{3}y + 6 = 0 \Rightarrow D(\sqrt{3}d - 6; d)$$

$$\text{Ta có: } \Rightarrow PD^2 = (\sqrt{3}d - 6 - \sqrt{3})^2 + (d - \sqrt{3})^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3\sqrt{3} + 1 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(3 + \sqrt{3}; 3\sqrt{3} + 1) \\ D(\sqrt{3} - 6; 1) \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $D(3 + \sqrt{3}; 3\sqrt{3} + 1)$, $D(\sqrt{3} - 6; 1)$

Câu 19. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, đỉnh B thuộc đường thẳng $d_1: 2x - y + 2 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d_2: x - y - 5 = 0$. Gọi H là hình chiếu của B xuống đường chéo AC. Biết $M(\frac{9}{5}; \frac{2}{5})$; $K(9; 2)$ lần lượt là trung điểm của AH và CD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết hoành độ đỉnh C lớn hơn 4.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } B \in d_1 \Rightarrow B(b; 2b + 2), C \in d_2 \Rightarrow C(c; c - 5) (c > 4)$$

$$\text{Gọi E là điểm đối xứng của B qua C nên } \rightarrow E(2c - b; 2c - 2b - 12)$$

Trong tam giác ABE, CK chính là đường trung bình nên K cũng là trung điểm của AE.

Trong tam giác AHE có M, K lần lượt là trung điểm AH và AE nên MK là trung bình của tam giác:

$$\Rightarrow \overrightarrow{HE} = 2\overrightarrow{MK} = \left(\frac{72}{5}; \frac{16}{5}\right) \Rightarrow H\left(2c - b - \frac{72}{5}; 2c - 2b - \frac{76}{5}\right)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CK} = (9 - c; c + 7), \overrightarrow{BC} = (c - b; c - 2b - 7), \overrightarrow{BH} = \left(2c - 2b - \frac{72}{5}; 2c - 4b - \frac{86}{5}\right), \overrightarrow{MC} = \left(c - \frac{9}{5}; c - \frac{27}{5}\right)$$

Lại có: BH vuông góc AC ($H \in AC$), CK vuông góc BC :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 - 3bc + 23b - 23c + 49 = 0 \\ 4c^2 - 6bc + \frac{126}{5}b - 46c + \frac{594}{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 4(L) \\ c = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(1; 4), C(9; 4), \text{ mà } K \text{ là trung điểm } CD \Rightarrow D(9; 0)$$

$$\text{Mặt khác, } C \text{ là trung điểm } BE, E(17; 4), KA = KE \Rightarrow A(1; 0)$$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: $A(1; 0), B(1; 4), C(9; 4), D(9; 0)$

Câu 20. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C): $(x-5)^2 + (y-6)^2 = \frac{32}{5}$. Biết rằng các đường thẳng AC và AB lần lượt đi qua các điểm $M(7; 8)$ và $N(6; 9)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD.

Lời giải:

$$\text{Đường tròn (C): } \begin{cases} I(5; 6) \\ R = \frac{4\sqrt{10}}{5} \end{cases} \text{ do đó } I(5; 6) \text{ là tâm của hình thoi:}$$

$$\text{Ta có: } AC \text{ qua } I(5; 6), M(7; 8) \Rightarrow \vec{u}_{AC}(2; 2) \Rightarrow AC: x - y + 1 = 0$$

$$\text{Đường thẳng } BD \text{ qua } I(5; 6) \text{ và vuông góc với } AC \text{ nên phương trình } BD: x + y - 11 = 0$$

$$\text{Gọi } \vec{n}_{AB} = (a; b) \Rightarrow AB: a(x-6) + b(y-9) = 0, (\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0)$$

$$\text{Mặt khác } R = d(I; AB) \Rightarrow \sqrt{\frac{32}{5}} = \frac{|a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow (9a - 13b)(3a + b) = 0$$

$$\text{+) Với } 9a = 13b \text{ chọn } a = 13, b = 9 \Rightarrow AB: 13x + 9y - 159 = 0$$

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } A = AB \cap AC: \begin{cases} 13x + 9y - 159 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{75}{11}; \frac{86}{11}\right) \Rightarrow C\left(\frac{35}{11}; \frac{46}{11}\right)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } CD // AB \text{ và qua } C\left(\frac{35}{11}; \frac{46}{11}\right) \Rightarrow CD: 13x + 9y - 79 = 0$$

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } D = BD \cap CD: \begin{cases} 13x + 9y - 79 = 0 \\ x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-5; 16) \Rightarrow D(15; -4)$$

$$\text{+) Với } 3a = -b \text{ chọn } a = 1, b = -3 \Rightarrow AB: x - 3y + 21 = 0$$

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } A = AB \cap AC : \begin{cases} x - 3y + 21 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(9; 10) \Rightarrow C(1; 2)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } CD // AB \text{ và qua } C(1; 2) \Rightarrow CD: x - 3y + 5 = 0$$

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } D = BD \cap CD : \begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(7; 4) \Rightarrow D(3; 8)$$

Kết luận: Vậy có 2 hình thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 21. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính bằng nhau và cắt nhau tại $A(4; 2)$ và B . Một đường thẳng đi qua A và $N(7; 3)$ cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại D và C . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác BCD biết rằng đường thẳng nối tâm O_1, O_2 có phương trình $x - y - 3 = 0$ và diện tích tam giác BCD bằng $\frac{24}{5}$

Lời giải:

$$\text{Phương trình đường thẳng } CD \begin{cases} \text{qua } A(4; 2) \\ \vec{u} = (3; 1) \end{cases} \Rightarrow CD: x - 3y + 2 = 0$$

Mặt khác A, B , đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x - y - 3 = 0$

$$\text{Gọi } B(a; b) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ I \in d \end{cases} \text{ (với } I \text{ là trung điểm } AB)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (a - 4) + (b - 2) = 0 \\ \frac{a + 4}{2} - \frac{b + 2}{2} - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow B(5; 1)$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} CD \cdot d(B; CD) = \frac{1}{2} CD \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{24}{5} \Rightarrow CD = \frac{12}{5} \sqrt{10}$$

Mặt khác nhận thấy $\triangle BCD$ cân tại B do $\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$ (cùng chứa cung AB và 2 đường tròn này bằng nhau)

$$\text{Gọi } K \text{ là hình chiếu vuông góc của } B \text{ lên } CD \text{ ta có: } K(3t - 2; t) \Rightarrow \overrightarrow{BK}(3t - 7; t - 1) \Rightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \vec{u}_{CD} = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{11}{5} \Rightarrow K\left(\frac{23}{5}; \frac{11}{5}\right)$$

$$\text{Gọi } C(3u - 2; u) \Rightarrow KC^2 = \left(3u - \frac{33}{5}\right)^2 + \left(u - \frac{11}{5}\right)^2 = \frac{72}{5} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \Rightarrow C(1; 1) \Rightarrow D\left(\frac{41}{5}; \frac{17}{5}\right) \\ u = \frac{17}{5} \Rightarrow C\left(\frac{41}{5}; \frac{17}{5}\right) \Rightarrow D(1; 1) \end{cases}$$

$$\text{Kết luận: } B(5; 1), C(1; 1), D\left(\frac{41}{5}; \frac{17}{5}\right) \text{ hoặc } B(5; 1), C\left(\frac{41}{5}; \frac{17}{5}\right), D(1; 1)$$

Câu 22. [ĐVH]: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết các đỉnh B và C thuộc đường tròn (C) , các đỉnh A và D thuộc trục Ox .

Lời giải:

$$(C): \text{ tâm } I\left(\frac{5}{4}; 1\right), R = \sqrt{2}$$

Phương trình đường thẳng d là trung trực của AD, BC xác định:

$$\text{Qua } I\left(\frac{5}{4}; 1\right) \text{ và vuông góc với } Ox \Rightarrow d: x = 1$$

Ta có: $d(I; AD) = 1 < R = \sqrt{2}$ do đó AD cắt (C)

Đặt độ dài cạnh của hình vuông là m ta có: $d(I; BC) = m - 1 < R$

$$\text{Mặt khác } \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + [d(I; BC)]^2 = R^2 \Rightarrow \frac{m^2}{4} + (m - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{-2}{5} \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

Với $m = 2$ ta có: $A(0; 0), D(2; 0), B(0; 2), C(2; 2)$ hoặc $A(2; 0), D(0; 0), B(2; 2), C(0; 2)$