

Tên học sinh: ...

Số báo danh: ...

Thời gian làm bài 180 phút

Câu 1. (1 điểm): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Câu 2. (1 điểm): Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -2x + 1$ và tiếp điểm có hoành độ âm.

Câu 3. (1 điểm):

a) Cho số phức z thỏa điều kiện $z - 4 = (z + 4)i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Giải phương trình $\log_2(x+1) + 2\log_4(x-3) = 3$

Câu 4. (1 điểm): Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} x \left(\frac{1}{e^{\sqrt{x^2+1}}} + x \right) dx$.

Câu 5. (1 điểm): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 0)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 3z + 10 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P). Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua (P).

Câu 6. (1 điểm):

a) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{3\sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha}$, biết $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$.

b) Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$. Tính xác suất để ba số được chọn có tổng là một số lẻ.

Câu 7. (1 điểm): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, I và M lần lượt là trung điểm của AD và BC , SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 30° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.AMCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM , SC .

Câu 8. (1 điểm): Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A và có diện tích bằng 25, cạnh BC có trung điểm là $H(2; -1)$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC , (T) là đường tròn đường kính AB . Đường thẳng BM cắt (T) tại $E(3; 1)$, đường thẳng CE cắt (T) tại điểm thứ hai là F , tìm tọa độ của điểm F biết tung độ của C là số thực dương.

Câu 9. (1 điểm): Giải bất phương trình $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3} - \sqrt{3x^2 + 3} > x^2 - x^4$

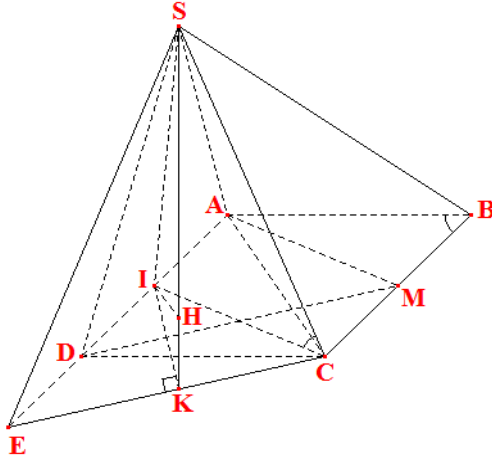
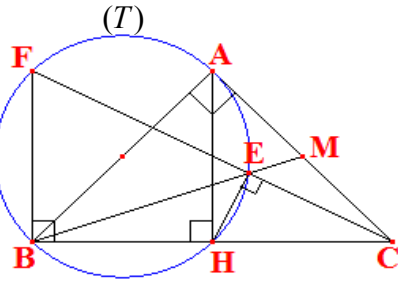
Câu 10. (1 điểm): Cho a, b, c là các số thực dương và luôn thỏa điều kiện $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$.

--- Hết ---

Câu	Đáp án	Điểm
1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$.	1,0đ
	Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$	0,25
	Giới hạn, tiệm cận đứng : $x = -1$, tiệm cận ngang: $y = 1$	0,25
	Bảng biến thiên, tính tăng, giảm...	0,25
	Đồ thị...	0,25
2	Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -2x + 1$ và tiếp điểm có hoành độ âm.	1,0đ
	$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x \Rightarrow y' = f'(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và Δ là tiếp tuyến của đồ thị tại M . $\Delta \perp d: y = -2x + 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2}$	0,25
	$\Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$	0,25
	Với $x_0 < 0 \Rightarrow x_0 = -2, y_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow M\left(-2; \frac{1}{3}\right)$	0,25
	Phương trình của $\Delta: y - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(x + 2)$ hay $y = \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$	0,25
3	a) Cho số phức z thỏa điều kiện $z - 4 = (z + 4)i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy .	0,5đ
	$z - 4 = (z + 4)i \Leftrightarrow (1 - i)z = 4 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{4 + 4i}{1 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(4 + 4i)(1 + i)}{2} \Leftrightarrow z = 4i$	0,25
	$\Rightarrow M(0; 4)$	0,25
	b) Giải phương trình $\log_2(x + 1) + 2\log_4(x - 3) = 3$	0,5đ
	Với điều kiện $x > 3$: $\log_2(x + 1) + 2\log_4(x - 3) = 3 \Leftrightarrow \log_2[(x + 1)(x - 3)] = 3$	0,25
	$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 1 + 2\sqrt{3}$ (thỏa $x > 3$)	0,25

4	$I = \int_0^{\sqrt{3}} x \left(\frac{1}{e^{\sqrt{x^2+1}}} + x \right) dx$	1,0đ
	$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{e^{\sqrt{x^2+1}}} dx + \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx.$	0,25
	Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1, x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \Rightarrow J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{e^{\sqrt{x^2+1}}} dx = \int_1^2 \frac{t}{e^t} dt$	0,25
	Đặt $u=t \Rightarrow du=dt, dv=e^{-t} dt$ chọn $v=-e^{-t} \Rightarrow J = -te^{-t} \Big _1^2 + \int_1^2 e^{-t} dt$	0,25
	$= -2e^{-2} + e^{-1} - e^{-t} \Big _1^2 = \frac{-3}{e^2} + \frac{2}{e}$	0,25
	$.I = J + \frac{2}{3} x^3 \Big _0^{\sqrt{3}} = \frac{-3}{e^2} + \frac{1}{e} + 2\sqrt{3}$	0,25
5	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;0)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-3z+10=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P) . Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua (P) .	1,0đ
	Đường thẳng d đi qua $A(2;-1;0)$, vuông góc với (P) nên d nhận vector pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;-3)$ của (P) làm vector chỉ phương.	0,25
	Phương trình của d là $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-3}$	0,25
	Tọa độ giao điểm I của d và (P) là nghiệm của hệ $\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-3} \\ x-2y-3z+10=0 \end{cases} \Rightarrow I(1;1;3)$	0,25
	B đối xứng với A qua (P) khi và chỉ khi I là trung điểm của $AB \Rightarrow B(0;3;6)$	0,25
6	a) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{3\sin^2 \alpha}{1+\sin 2\alpha}$, biết $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$.	0,5đ
	Với $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$, biến đổi $P = \frac{3\sin^2 \alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{3\sin^2 \alpha}{1+2\sin \alpha \cos \alpha}$.	0,25
	Chia tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được: $P = \frac{3\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha + 2\tan \alpha} = 12$	0,25
	b) Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp $X = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$. Tính xác suất để ba số được chọn có tổng là một số lẻ.	0,5đ
	Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{11}^3 = 165$.	0,25
	Gọi A là biến cố: “Ba số được chọn có tổng là một số lẻ”. Số kết quả thuận lợi cho A là $n(A) = C_6^3 + C_6^1 \cdot C_5^2 = 80$. Suy ra xác suất của A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{80}{165} = \frac{16}{33}$	0,25

	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^0$, I và M lần lượt là trung điểm của AD và BC, SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 30^0. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.AMCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM, SC.	1,0đ		
7		. Chứng minh $\widehat{SCI} = 30^0$, $CI = a\sqrt{3}$, $SI = a$	0,25	
		. Tính $S_{AMCD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, suy ra: $V_{S.AMCD} = \frac{1}{3}SI.S_{AMCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$	0,25	
		. Dựng $CE \parallel DM$, ($E \in AD$). Chứng minh $d(DM, SC) = d(D, (SCE))$. Trong $(ABCD)$, kẻ $IK \perp CE$, ($K \in CE$) . Trong (SIK) , kẻ $IH \perp SK$, ($H \in SK$)	0,25	
	. Chứng minh $d(I, (SCE)) = IH$, $IK = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $IH = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$			
	. $\frac{d(D, (SCE))}{d(I, (SCE))} = \frac{DE}{IE} = \frac{1}{2}$ suy ra $d(DM, SC) = d(D, (SCE)) = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$		0,25	
8	Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A và có diện tích bằng 25, cạnh BC có trung điểm là $H(2; -1)$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC, (T) là đường tròn đường kính AB. Đường thẳng BM cắt (T) tại $E(3; 1)$, đường thẳng CE cắt (T) tại điểm thứ hai là F, tìm tọa độ của điểm F biết tung độ của C là số thực dương.		1,0đ	
		. Chứng minh $HE \perp CF$, $\overrightarrow{HE} = (1; 2)$. Suy ra phương trình CF: $x + 2y - 5 = 0$		0,25
		. $AB = AC = 5\sqrt{2}$, $C \in CF \Leftrightarrow C(5 - 2a; a)$. $HC = 5 \Leftrightarrow 5a^2 - 10a - 15 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 3$. Vì $a > 0$ nên chọn $a = 3$ suy ra $C(-1; 3)$		0,25
		$\Rightarrow B(5; -5)$, chứng minh $BF \perp BC$ suy ra phương trình BF: $3x - 4y - 35 = 0$		0,25
		. $F = CF \cap BF \Rightarrow F(15; -5)$		0,25

9	Giải bất phương trình $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3} - \sqrt{3x^2 + 3} > x^2 - x^4$	1,0đ
	Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3} - \sqrt{3x^2 + 3} > x^2 - x^4$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^4 + 2x^2 + 3} + x^4 + 2x^2 + 3 > \sqrt{3x^2 + 3} + 3x^2 + 3$ (*)	0,25
	Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} + t, t \geq 0$ ta có $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 1$ suy ra $f'(t) > 0, \forall t > 0$ nên $f(t)$ tăng trên khoảng $(0; +\infty)$	0,25
	(*) $\Leftrightarrow f(x^4 + 2x^2 + 3) > f(3x^2 + 3) \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 3 > 3x^2 + 3$	0,25
	$\Leftrightarrow x^4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hay $x > 1$	0,25
10	Cho a, b, c là các số thực dương và luôn thỏa điều kiện $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$.	1,0đ
	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc}$, $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ Suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{8(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ $\Rightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq \frac{8}{(a+b)(b+c)} + \frac{8}{(b+c)(c+a)} + \frac{8}{(c+a)(a+b)}$	0,25
	Mặt khác $\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(b+c)^2} + \frac{4}{(c+a)^2}$	0,25
	Suy ra $4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)^2 \leq 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \Rightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$	0,25
	Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$, GTLN của P là $\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,25

--- Hết ---