

Câu 1 (7,0 điểm).

a) Cho phương trình: $\sin x = (\cot x + 2\sqrt{3})\cos x$.

Hỏi phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2020\pi)$?

b) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = m \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}; m \text{ là tham số thực}).$$
 Tìm tất

cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 2 (3,5 điểm).

a) Một hộp đựng 30 quả cầu được đánh số là các số tự nhiên từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên đồng thời từ hộp ra 3 quả cầu. Tính xác suất để 3 quả cầu được chọn có các số ghi trên đó lập thành một cấp số cộng.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng: $5(u_1 \cdot u_2 \cdots u_{n-1})^2 + 4$ là một số chính phương.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $2x + 4y + 7z = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a và $BA_1 = BB_1 = BC_1 = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABB_1A_1) .

b) Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABB_1, ACC_1, CBB_1 . Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm G_1, G_2, G_3, A_1, B_1 và C_1 .

Câu 5 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = 1, SB = SC = 2\sqrt{2}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua I lần lượt cắt các tia SA, SB, SC tại M, N, P . Chứng minh rằng $\frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2} \geq \frac{5}{8}$.

..... **Hết**

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1a. Cho phương trình $\sin x = (\cot x + 2\sqrt{3})\cos x$. Hỏi phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2020\pi)$

Lời giải

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Xét $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, phương trình $\sin x = (\cot x + 2\sqrt{3})\cos x \Leftrightarrow \tan x = \cot x + 2\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\tan x} + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -2 + \sqrt{3} \\ \tan x = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + m\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + n\pi \end{cases} \quad (1) \text{ với } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Xét $\frac{1}{12} + m = \frac{5}{12} + n \Leftrightarrow m = n + \frac{1}{3} (*)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm. Suy ra các nghiệm của hệ (1) là khác nhau.

$$\text{Do } x \in (0; 2020\pi) \text{ nên ta có } \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{12} + m\pi < 2020\pi \\ 0 < \frac{5\pi}{12} + n\pi < 2020\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{12} < m < 2020 - \frac{1}{12} \\ -\frac{5}{12} < n < 2020 - \frac{5}{12} \end{cases}$$

Suy ra $m \in \{0; 1; 2; \dots; 2019\}$ và $n \in \{0; 1; 2; \dots; 2019\}$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 4040 nghiệm.

Câu 1b. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = m & (2) \end{cases}$$

($x, y \in \mathbb{R}$, m là tham số). Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình có nghiệm.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq \frac{5}{2} \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow 4x^3 + x = -(y - 3)\sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow (2x)^3 + (2x) = (\sqrt{5 - 2y})^3 + (\sqrt{5 - 2y}) \quad (3)$$

Xét hàm số: $f(u) = u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u$. Suy ra $f(u)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = 5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2y = 5 - 4x^2 \end{cases} \quad \text{Thế vào (2), ta được:}$$

$$4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = m$$

Xét $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x}$ với $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$.

$$g'(x) = 8x - 8x\left(\frac{5}{2} - 2x^2\right) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Để hệ đã cho có nghiệm} \Leftrightarrow g\left(\frac{3}{4}\right) \leq m \leq g(0) \Leftrightarrow \frac{265}{64} \leq m \leq \frac{25}{4} + 2\sqrt{3}.$$

Vậy các giá trị m nguyên cần tìm là 5, 6, 7, 8, 9.

Câu 2.

a) Số phần tử của không gian mẫu: C_{30}^3

Gọi a là biến cố cần tính xác suất.

Giả sử 3 số ghi trên ba quả cầu là a ; b ; c .

Ta có $b = \frac{a+c}{2}$, suy ra a, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Từ 1 đến 30 có 15 số chẵn, 15 số lẻ.

Suy ra số kết quả thuận lợi của A là $2C_{15}^2$.

$$\text{Xác suất cần tính là: } \frac{2C_{15}^2}{C_{30}^3} = \frac{3}{58}$$

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n^2 - 2, \forall n \in N^*$. Chứng minh rằng: $5(u_1 u_2 \dots u_{n-1})^2 + 4$ là một số chính phương.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_{n+1} = u_n^2 - 2 \Rightarrow u_n^2 = u_{n+1} + 2 \Rightarrow (u_1 u_2 u_3 \dots u_n)^2 = (u_2 + 2)(u_3 + 2) \dots (u_n + 2)$$

$$\Rightarrow 5(u_1 u_2 \dots u_n)^2 = (u_1 + 2) \dots (u_n + 2).$$

$$\text{Mà } u_{n+1} = u_n^2 - 2 = (u_n - 2)(u_n + 2).$$

$$\text{Nên } u_{n+1} - 2 = (u_1 - 2)(u_1 + 2) \dots (u_n + 2) = (u_1 + 2)(u_1 + 2) \dots (u_n + 2)$$

$$\Rightarrow 5(u_1 u_2 \dots u_n)^2 = u_{n+1} - 2 \Rightarrow 5(u_1 u_2 \dots u_n)^2 + 4 = u_{n+1} + 2 = u_n^2 \text{ (đpcm)}$$

Cách 2:

$$\text{Xét hàm đa thức đặc trưng: } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases} \forall n \in N^* \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\Rightarrow u_1 = a + \frac{1}{a} \Rightarrow u_2 = u_1^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \Rightarrow u_3 = u_2^2 - 2 = a^4 + \frac{1}{a^4} [\dots]$$

$$\Rightarrow u_n = a^{(2^{n-1})} + \frac{1}{a^{(2^{n-1})}}$$

$$\Rightarrow u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) \dots \left(a^{2^{n-2}} + \frac{1}{a^{2^{n-2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right) u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a + \frac{1}{a}\right) \dots \left(a^{2^{n-2}} + \frac{1}{a^{2^{n-2}}}\right)$$

$$= \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \dots + \left(a^{2^{n-2}} + \frac{1}{a^{2^{n-2}}}\right) = \dots = \left(a^{2^{n-2}} - \frac{1}{a^{2^{n-2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right) u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} = a^{2^{n-2}} - \frac{1}{a^{2^{n-2}}}$$

Mà $a - \frac{1}{a} = \pm\sqrt{5}$ nên

$$5.(u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1})^2 = (\sqrt{5} u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1})^2 = \left(a^{2^{n-2}} - \frac{1}{a^{2^{n-2}}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 5.(u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1})^2 + 4 = \left(a^{2^{n-2}} - \frac{1}{a^{2^{n-2}}}\right)^2 + 4 = \left(a^{2^{n-2}} + \frac{1}{a^{2^{n-2}}}\right)^2 = (u_n + 1)^2 \text{ (đpcm)}$$

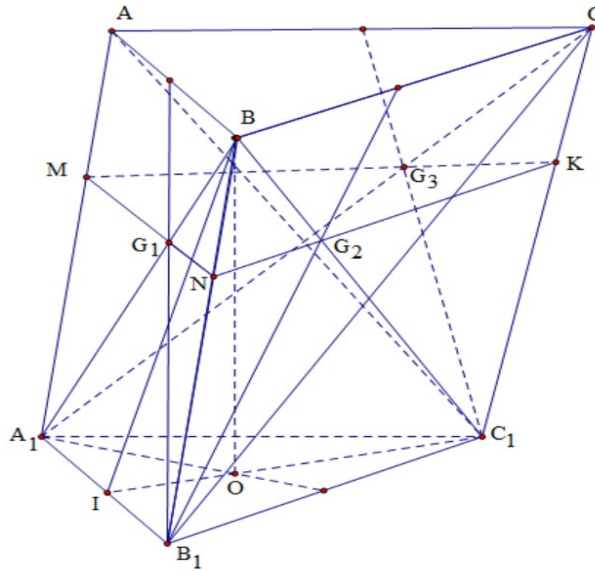
Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a và $BA_1 = BB_1 = BC_1 = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABB_1A_1) .

b) Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABB_1, ACC_1, CBB_1 . Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm G_1, G_2, G_3, A_1, B_1 và C_1 .

Lời giải

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABB_1A_1) .



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

Gọi I là trung điểm A_1B_1 .

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp C_1I \\ A_1B_1 \perp BO \end{cases} \Rightarrow A_1B_1 \perp (BC_1I).$$

Kẻ $C_1H \perp BI$.

Mà $C_1H \perp A_1B_1$.

$$\Rightarrow C_1H \perp (A_1B_1BA).$$

$$\text{Vì } CC_1 \parallel (A_1B_1BA) \Rightarrow d(C, (A_1B_1BA)) = d(C_1, (A_1B_1BA)) = C_1H.$$

$\triangle A_1B_1C_1$ là tam giác đều. Suy ra :

$$C_1I = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$C_1O = \frac{2}{3}C_1I = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$IO = \frac{1}{2}C_1O = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

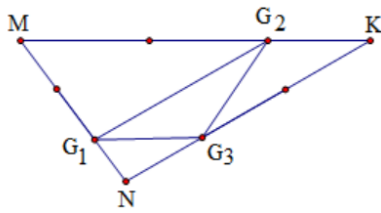
$$BI = \sqrt{BA_1^2 - A_1I^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{2}.$$

$$BO = \sqrt{BI^2 - IO^2} = \sqrt{\frac{11a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{\Delta BIC_1} = \frac{1}{2}C_1I \cdot BO = \frac{1}{2}BI \cdot C_1H \Rightarrow C_1H = \frac{C_1I \cdot BO}{BI} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

$$d(C, (A_1B_1BA)) = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

b) Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABB_1, ACC_1, CBB_1 . Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm G_1, G_2, G_3, A_1, B_1 và C_1 .



Qua G_1 kẻ đường thẳng song song với AB cắt A_1A, B_1B lần lượt tại M và N .

Trong (B_1C_1CB) gọi $K = NG_3 \cap CC_1 \Rightarrow M, G_2, K$ thẳng hàng.

$$\frac{S_{\Delta G_1G_2G_3}}{S_{\Delta MNK}} = \frac{\frac{1}{2}G_1G_3 \cdot d(G_2, G_1G_3)}{\frac{1}{2}MK \cdot d(N, MK)} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta G_1G_2G_3} = \frac{2}{9}S_{\Delta MNK} = \frac{2}{9} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta MG_1G_2} + S_{\Delta KG_2G_3} + S_{\Delta NG_1G_3} = S_{\Delta MNK} - S_{\Delta G_1G_2G_3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{18} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{36}$$

$$\Rightarrow V_{A_1.MG_1G_2} + V_{B_1.NG_1G_3} + V_{C_1.KG_2G_3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}BO [S_{\Delta MG_1G_2} + S_{\Delta KG_2G_3} + S_{\Delta NG_1G_3}]$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{7a^2\sqrt{3}}{36} = \frac{7a^3\sqrt{2}}{81}.$$

$$V_{A_1B_1C_1.MNK} = \frac{2}{3}BO \cdot S_{\Delta MNK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{A_1B_1C_1.G_1G_2G_3} &= V_{A_1B_1C_1.MNK} - [V_{A_1.MG_1G_2} + V_{B_1.NG_1G_3} + V_{C_1.KG_2G_3}] = \\ &= \frac{a^3\sqrt{2}}{3} - \frac{7a^3\sqrt{2}}{81} = \frac{20a^3\sqrt{2}}{81}. \end{aligned}$$

Câu 4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $2x + 4y + 7z = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Lời giải

$$2xyz = 2x + 4y + 7z = 3\frac{x}{\frac{3}{2}} + 5\frac{y}{\frac{5}{4}} + 7z \geq 15\sqrt[15]{\left(\frac{x}{\frac{3}{2}}\right)^3 \left(\frac{y}{\frac{5}{4}}\right)^5 z^7} = 15\sqrt[15]{x^3 y^5 z^7 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^5}.$$

$$\Rightarrow 2^{15} x^{15} y^{15} z^{15} \geq 15^{15} x^3 y^5 z^7 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \Leftrightarrow x^{12} y^{10} z^8 \geq \left(\frac{15}{2}\right)^{15} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^5.$$

$$P = x + y + z = 6\frac{x}{6} + 5\frac{y}{5} + 4\frac{z}{4} \geq 15\sqrt[15]{\left(\frac{x}{6}\right)^6 \left(\frac{y}{5}\right)^5 \left(\frac{z}{4}\right)^4} = \frac{15}{4}\sqrt[15]{\frac{x^6 y^5 z^4 4^{15}}{6^6 5^5 4^4}}$$

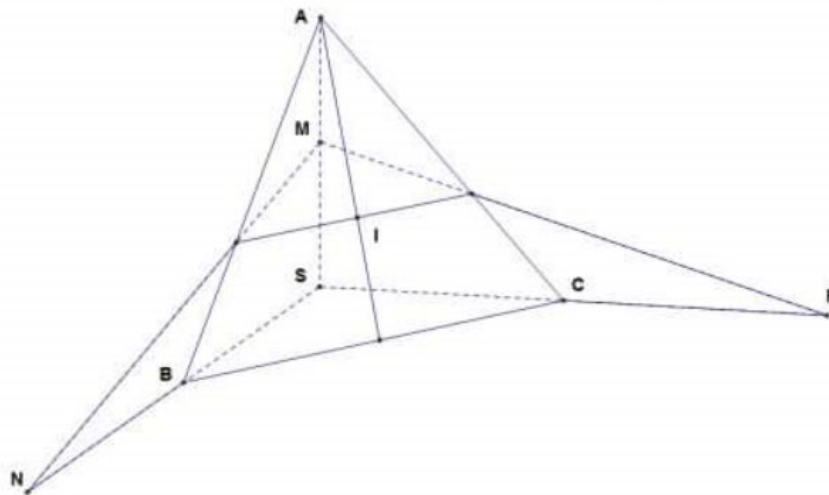
$$= \frac{15}{4}\sqrt[15]{x^6 y^5 z^4 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{4}{5}\right)^5} \geq \frac{15}{4}\sqrt[15]{\left(\frac{15}{2}\right)^{15} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{4}{5}\right)^5} = \frac{15}{2}$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{15}{2}, \text{Min}P = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{5}{4}} = z \\ \frac{x}{6} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \\ 2x + 4y + 7z = 2xyz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ x = 6a \\ y = 5a \\ z = 4a \\ 60a = 240a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{1}{2} \\ x = 6a \\ y = 5a \\ z = 4a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{5}{2} \\ z = -2 \end{cases}.$$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = 1, SB = SC = 2\sqrt{2}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua I lần lượt cắt các tia SA, SB, SC tại M, N, P . Chứng minh rằng $\frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2} \geq \frac{5}{8}$.

Lời giải



Trước hết ta chứng minh bài toán: Cho hình chóp $S.ABC$. Điểm I nằm trong mặt phẳng (ABC) thỏa mãn $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm I và cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại các điểm M, N, P . Chứng minh rằng $a \cdot \frac{SA}{SM} + b \cdot \frac{SB}{SN} + c \cdot \frac{SC}{SP} = a + b + c$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0} &\Leftrightarrow a(\vec{SA} - \vec{SI}) + b(\vec{SB} - \vec{SI}) + c(\vec{SC} - \vec{SI}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{SI} &= \frac{a\vec{SA} + b\vec{SB} + c\vec{SC}}{a + b + c} = \frac{a \cdot \frac{SA}{SM} \cdot \vec{SM} + b \cdot \frac{SB}{SN} \cdot \vec{SN} + c \cdot \frac{SC}{SP} \cdot \vec{SP}}{a + b + c} \end{aligned}$$

Vì M, N, P, I đồng phẳng nên

$$\frac{a \cdot \frac{SA}{SM} + b \cdot \frac{SB}{SN} + c \cdot \frac{SC}{SP}}{a + b + c} = 1 \Leftrightarrow a \cdot \frac{SA}{SM} + b \cdot \frac{SB}{SN} + c \cdot \frac{SC}{SP} = a + b + c \quad (*)$$

Ta có: I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC có $a = BC = 4, b = AC = 3, c = AB = 3$

$$\text{Áp dụng } (*) \text{ ta được: } 4 \cdot \frac{1}{SM} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{SN} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{SP} = 4 + 3 + 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Buniacopxki ta có:

$$\begin{aligned} 10 &= \frac{4}{SM} + \frac{6\sqrt{2}}{SN} + \frac{6\sqrt{2}}{SP} \leq \sqrt{(16 + 72 + 72) \left(\frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2} \right)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2} &\geq \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } SM = 4, SN = SP = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

HẾT