

Họ tên:

LỚP 12 THPT

SBD:

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề gồm có 01 trang

Câu 1 (2.0 điểm)

a. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$ có đồ thị là đường cong (C) và điểm $I\left(-\frac{5}{6}; \frac{5}{4}\right)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua I và cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của MN .

b. Cho hàm số $y = x + |x^2 - 2x + m|$, với m là tham số. Tìm m để hàm số có cực đại.

Câu 2 (2.0 điểm)

a. Giải phương trình sau trên tập số thực $\mathbb{R}$:

$$x^3 - 7x^2 + 9x + 12 = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}-1).$$

b. Cho sáu thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số của tập $E = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$ (các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ba thẻ, tính xác suất để rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù.

Câu 3 (2.0 điểm). Cho tích phân $I(t) = \int_0^t (x \sin x)^2 dx$.

a. Tính $I(t)$ khi $t = \pi$.

b. Chứng minh rằng $I(t) + I(-t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Câu 4 (3.0 điểm)

Cho khối tứ diện $SABC$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{NB} = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm M, N và song song với đường thẳng SC .

a. Trong trường hợp $SABC$ là tứ diện đều cạnh a , xác định và tính theo a diện tích thiết diện của khối tứ diện $SABC$ với mặt phẳng (P) .

b. Trong trường hợp bất kì, mặt phẳng (P) chia tứ diện $SABC$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Câu 5 (1.0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 1$ ta luôn có:

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

-----HẾT-----

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 (2.0 điểm).

a. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$ có đồ thị là đường cong (C) và điểm $I\left(-\frac{5}{6}; \frac{5}{4}\right)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua I và cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của MN .

Lời giải

Cách 1:

+ Gọi d đi qua điểm $I\left(-\frac{5}{6}; \frac{5}{4}\right)$ và có hệ số góc k có phương trình là:

$$y = k\left(x + \frac{5}{6}\right) + \frac{5}{4} \Leftrightarrow y = \frac{12kx + 10k + 15}{12}.$$

+ Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$\frac{1}{x} = \frac{12kx + 10k + 15}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ g(x) = 12kx^2 + (10k + 15)x - 12 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

+ Đường cong (C) cắt d tại hai điểm M, N khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (10k + 15)^2 + 4 \cdot 12^2 \cdot k > 0 \\ -12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k > \frac{-219 + 84\sqrt{6}}{50} \\ k < \frac{-219 - 84\sqrt{6}}{50} \end{cases} \quad (1).$$

+ Với k thỏa mãn (1), gọi $x_1; x_2$ lần lượt là hoành độ của hai điểm M, N , với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

+ Theo định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-5(2k + 3)}{12k}$.

+ I là trung điểm của MN khi và chỉ khi:

$$x_1 + x_2 = 2x_I \Leftrightarrow \frac{-5(2k + 3)}{12k} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow 2k + 3 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn (1))}.$$

+ Với $k = \frac{3}{2}$ ta có phương trình đường thẳng d là: $3x - 2y + 5 = 0$.

Cách 2:

+ $M\left(m; \frac{1}{m}\right) \in (C)$, I là trung điểm của MN nên ta có:

$$N(2x_I - x_M; 2y_I - y_M) = \left(\frac{-5}{3} - m; \frac{5}{2} - \frac{1}{m}\right) = \left(\frac{-5 - 3m}{3}; \frac{5m - 2}{2m}\right)$$

$$+ \text{Và } N \in (C) \text{ suy ra } \frac{5m-2}{2m} = \frac{3}{-5-3m} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0; m \neq \frac{-5}{3} \\ (5m-2)(-5-3m) = 6m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0; m \neq \frac{-5}{3} \\ 3m^2 + 5m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$+ \text{Với } m = -2 \text{ ta có } M\left(-2; \frac{-1}{2}\right); N\left(\frac{1}{3}; 3\right).$$

$$+ \text{Với } m = \frac{1}{3} \text{ ta có } M\left(\frac{1}{3}; 3\right); N\left(-2; \frac{-1}{2}\right).$$

+ Đường thẳng d đi qua hai điểm M , nhận $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{7}{3}; \frac{7}{2}\right) = \frac{7}{6}(2; 3)$ làm vectơ chỉ phương,

hay nhận $\vec{n} = (3; -2)$ làm vectơ pháp tuyến :

$$3(x+2) - 2\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 5 = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng d cần tìm là: $3x - 2y + 5 = 0$.

b. Cho hàm số $y = x + |x^2 - 2x + m|$, với m là tham số. Tìm m để hàm số có cực đại.

Lời giải

Hàm số $y = x + |x^2 - 2x + m|$. TXĐ: $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m \geq 1 \Rightarrow x^2 - 2x + m \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ $y = x + |x^2 - 2x + m| = x^2 - x + m$, hàm số này có đồ thị là một Parabol nên chỉ có cực tiểu, suy ra $m \geq 1$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m < 1$

$$+ y = x + |x^2 - 2x + m| = \begin{cases} x^2 - x + m & \text{khi } x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1-m}] \cup [1 + \sqrt{1-m}; +\infty) \\ -x^2 + 3x - m & \text{khi } x \in (1 - \sqrt{1-m}; 1 + \sqrt{1-m}) \end{cases}.$$

$$+ y' = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1-m}) \cup (1 + \sqrt{1-m}; +\infty) \\ -2x + 3 & \text{khi } x \in (1 - \sqrt{1-m}; 1 + \sqrt{1-m}) \end{cases}.$$

$$+) 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Dễ thấy } 1 + \sqrt{1-m} > \frac{1}{2} \text{ với mọi } m < 1 \text{ và } 1 - \sqrt{1-m} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}.$$

$$+) -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \text{ Dễ thấy } 1 - \sqrt{1-m} < \frac{3}{2} \text{ với mọi } m < 1 \text{ và } \frac{3}{2} < 1 + \sqrt{1-m} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}.$$

+) Với $m < \frac{3}{4}$, ta có bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{1 - m}$	$\frac{3}{2}$	$1 + \sqrt{1 - m}$	$+\infty$
y'		-		+	0
			-		+

Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{3}{2}$.

+) Với $\frac{3}{4} < m < 1$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$1-\sqrt{1-m}$	$1+\sqrt{1-m}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$

Hàm số không có cực đại.

Dễ thấy khi $m = \frac{3}{4}$ hàm số không có cực đại.

Vậy hàm số có cực đại với $m < \frac{3}{4}$.

Câu 2 (2.0 điểm)

a. Giải phương trình sau trên tập số thực $\mathbb{R}$:

$$x^3 - 7x^2 + 9x + 12 = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}-1).$$

Lời giải

Cách 1: $x^3 - 7x^2 + 9x + 12 = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}-1)$ (điều kiện $x \geq 3$)

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-3x-3) = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})\frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x^2-3x-3 = \frac{x^2-5x+6+5x\sqrt{x-3}-15\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \text{ (Nhan)} \\ (x^2-8x+12)\sqrt{x-3} = 9-2x \text{ (1)} \end{cases}$$

Giải (1): $(x^2-8x+12)\sqrt{x-3} = 9-2x$.

Đặt $t = \sqrt{x-3} \geq 0$.

Phương trình (1) trở thành: $t^5 - 2t^3 + 2t^2 - 3t - 3 = 0$ (2).

(Phân tích phương trình (2) như sau: $VT = (t^2 + at + b)(t^3 + ct^2 + dt + e)$. Đồng nhất hệ số).

$$(2): (t^2 - t - 1)(t^3 + t^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0 \\ t^3 + t^2 + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm do } t \geq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (Nhan)} \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (Loai)} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{5}}{2} \text{ (Nhan)}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ 4; \frac{9+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Cách 2: Điều kiện: $x \geq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-4)(x^2-3x-3) = \frac{x^2-5x+6+5(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (Nhan)} \\ x^2 - 3x - 3 = \frac{x^2 - 5x + 6 + 5(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + 1} \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1):

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 3 - \frac{x^2 - 5x + 6 + 5(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 3x - 3)(\sqrt{x-3} + 1) - x^2 + 5x - 6 - 5(x-3)\sqrt{x-3} &= 0 \\ \Leftrightarrow 9 - 2x - (x^2 - 8x + 12)\sqrt{x-3} &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^3 + 12x^2 - 46x + 57 + (x^2 - 8x + 12)(x - 4 - \sqrt{x-3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x-3)(x^2 - 9x + 19) + (x^2 - 8x + 12)(x - 4 - \sqrt{x-3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x-3)(x-4-\sqrt{x-3})(x-4+\sqrt{x-3}) + (x^2 - 8x + 12)(x - 4 - \sqrt{x-3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4-\sqrt{x-3})[-(x-3)(x-4+\sqrt{x-3}) + (x^2 - 8x + 12)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4-\sqrt{x-3})[(3-x)\sqrt{x-3} - x] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = x-4 & (2) \\ (3-x)\sqrt{x-3} - x = 0 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{*Giải (2): } \sqrt{x-3} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = \frac{9+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{9-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

*Giải (3):

$$(3-x)\sqrt{x-3} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^3} + x = 0 \text{ (vô nghiệm do } x \geq 3)$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm } S = \left\{ 4; \frac{9+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Cách 3: Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} (x-4)(x^2 - 3x - 3) &= (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3}) \frac{x-4}{\sqrt{x-3} + 1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (Nhan)} \\ x^2 - 3x - 3 = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3}) \frac{1}{\sqrt{x-3} + 1} \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Giải (1):

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 3 &= (x-3) \frac{x-2+5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + 1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 3}{x-3} = \frac{x-2+5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2 + 5(x-4) + 1}{(x-4) + 1} &= \frac{(x-3) + 5\sqrt{x-3} + 1}{\sqrt{x-3} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t + 1}, t \geq 0.$$

$f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t+1)^2} > 0, \forall t \geq 0$, suy ra hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t+1}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Suy ra } \sqrt{x-3} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x-3 = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = \frac{9+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{9-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ 4; \frac{9+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

b). Cho sáu thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số của tập $E = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$ (các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ba thẻ, tính xác suất để rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù.

Lời giải

Lấy ba thẻ từ 6 thẻ có số cách lấy là C_6^3 , nên số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_6^3 = 20$.

Gọi biến cố A : “rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù”.

Giả sử rút được bộ ba số là $(a; b; c)$, với $a < b < c$, do đó $4 \leq c$, nên $c \in \{4; 6; 8\}$.

a, b, c là ba cạnh của tam giác $\triangle ABC$, với $BC = a, CA = b, AB = c$ có góc C tù

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0 \\ 4 \leq c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 < c^2 \\ 4 \leq c < a + b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < c < a + b, \text{ với } c \in \{4; 6; 8\}.$$

+ Xét $c = 4$ thì có bộ $(a; b) = (2; 3)$ thỏa mãn.

+ Xét $c = 6$, do $a < b < c, 6 = c < a + b < 2b$, nên $b = 4$ và $a = 3$. Suy ra có bộ $(a; b) = (3; 4)$ thỏa mãn.

+ Xét $c = 8$, do $a < b < c, 8 = c < a + b < 2b$, nên $b = 6$ và $a = 3$ hoặc $a = 4$. Suy ra có hai bộ $(a; b) = (3; 6)$ hoặc $(a; b) = (4; 6)$ thỏa mãn.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 4$.

Nên xác suất cần tìm là $p = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

Câu 3 (2.0 điểm). Cho tích phân $I(t) = \int_0^t (x \sin x)^2 dx$.

a. Tính $I(t)$ khi $t = \pi$.

Lời giải

a. Khi $t = \pi$, ta có:

$$+ I(\pi) = \int_0^\pi x^2 \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} J.$$

+ Với $J = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$.

+ Ta có $J = \frac{x^2}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx = - \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx$. Đặt $\begin{cases} u_1 = x \\ dv_1 = \sin 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow J = - \left(-\frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos 2x \, dx \right) = \left(\frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

+ Vậy $I(\pi) = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} J = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$.

b. Chứng minh rằng: $I(t) + I(-t) = 0$

Lời giải

+ Xét $I(-t) = \int_0^{-t} (x \sin x)^2 \, dx$. Đặt $x = -u$, suy ra $dx = -du$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = -t \Rightarrow u = t$.

Khi đó: $I(-t) = - \int_0^t [-u \sin(-u)]^2 \, du = - \int_0^t (x \sin x)^2 \, dx$.

Vậy $I(t) + I(-t) = \int_0^t (x \sin x)^2 \, dx - \int_0^t (x \sin x)^2 \, dx = 0$ (đpcm).

Nhận xét: Nếu làm trắc nghiệm thì có thể làm nhanh hơn.

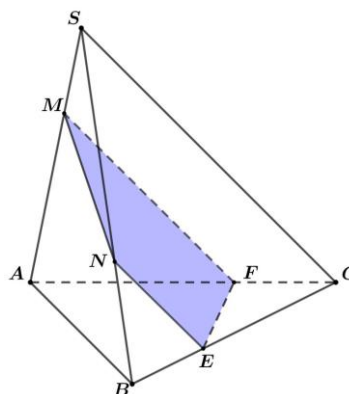
Do hàm số $y = (x \sin x)^2$ là hàm chẵn nên ta có tính chất: $\int_{-t}^0 (x \sin x)^2 \, dx = \int_0^t (x \sin x)^2 \, dx$.

Khi đó: $I(t) + I(-t) = \int_0^t (x \sin x)^2 \, dx + \int_0^{-t} (x \sin x)^2 \, dx = \int_0^t (x \sin x)^2 \, dx - \int_{-t}^0 (x \sin x)^2 \, dx = 0$

Câu 4 (3.0 điểm) Cho khối tứ diện $SABC$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{NB} = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm M, N và song song với đường thẳng SC .

a. Trong trường hợp $SABC$ là tứ diện đều cạnh a , xác định và tính theo a diện tích thiết diện của khối tứ diện $S.ABC$ với mặt phẳng (P) .

Lời giải



*) Xác định thiết diện

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC // (P) \\ SC \subset (SAC) \\ M \in (P) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAC) = MF \quad (MF // SC; F \in AC).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC // (P) \\ SC \subset (SBC) \\ N \in (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = NE \quad (NE // SC; E \in BC).$$

$\Rightarrow$ Thiết diện là tứ giác $MNEF$.

Mặt khác ta có:

$$+) NE // MF (// SC).$$

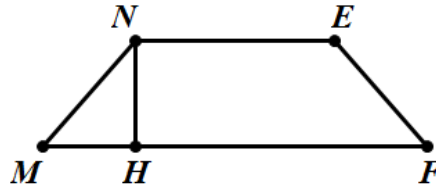
$$+) \Delta SMN = \Delta CFE \Rightarrow MN = FE.$$

$$+) NE // SC \Leftrightarrow \frac{NE}{SC} = \frac{BN}{BS} = \frac{1}{3} \Rightarrow NE = \frac{a}{3}.$$

$$+) MF // SC \Leftrightarrow \frac{MF}{SC} = \frac{AM}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow MF = \frac{2a}{3}.$$

Vậy thiết diện $MNEF$ là hình thang cân.

*) Tính diện tích thiết diện



$$\text{Xét } \Delta SMN \text{ có } MN = \sqrt{SM^2 + SN^2 - 2.SM.SN.\cos MSN} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Kẻ } NH \perp MF, MNEF \text{ là hình thang cân} \Rightarrow MH = \frac{MF - NE}{2} = \frac{a}{6} \Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{11}}{6}.$$

$$\text{Vậy diện tích thiết diện là: } S_{MNEF} = \frac{1}{2}(NE + MF).NH = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{2a}{3}\right)\frac{a\sqrt{11}}{6} = \frac{a^2\sqrt{11}}{12}.$$

b. Trong trường hợp bất kì, mặt phẳng (P) chia tứ diện $SABC$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Lời giải

Cách 1: Vì $mp(P)$ đi qua M, N và song song với SC nên:

$$(P) \cap (SAC) = MF, (F \in AC, MF // SC); (P) \cap (SBC) = NE, (E \in BC, NE // SC).$$

$$\text{Khi đó } \frac{CF}{CA} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}; \frac{CE}{CB} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}.$$

Mặt phẳng (P) chia khối tứ diện $SABC$ thành hai khối: $MNEFSC$ và $MNEFAB$.

+ Gọi $V_{SABC} = V$, $V_{MNEFSC} = V_1$, $V_{MNEFAB} = V_2$.

+ Ta có $V_1 = V_{MNEFSC} = V_{CSEF} + V_{SFME} + V_{SMNE}$.

+ $\frac{V_{CSEF}}{V_{CSBA}} = \frac{CE}{CB} \cdot \frac{CF}{CA} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{CSEF} = \frac{2}{9}V$.

+ $\frac{V_{SFME}}{V_{SFAE}} = \frac{SN}{SA} = \frac{1}{3}$ (1).

+ Mà $\frac{V_{SFAE}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3}d(S, (AEF)) \cdot S_{AEF}}{\frac{1}{3}d(S, (ABC)) \cdot S_{ABC}} = \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}$
 $= \frac{\frac{1}{2}d(E, AF) \cdot FA}{\frac{1}{2}d(B, AC) \cdot AC} = \frac{\frac{2}{3}d(B, AC) \cdot \frac{2}{3}AC}{d(B, AC) \cdot AC} = \frac{4}{9}$.

$\Rightarrow \frac{V_{SFAE}}{V_{SABC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{SFAE} = \frac{4}{9}V$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $V_{SFME} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}V = \frac{4}{27}V$.

+ $\frac{V_{SMNE}}{V_{SABE}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ (3).

+ Mà $\frac{V_{SABE}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3}d(S, (ABE)) \cdot S_{ABE}}{\frac{1}{3}d(S, (ABC)) \cdot S_{ABC}} = \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}d(A, BE) \cdot BE}{\frac{1}{2}d(A, BC) \cdot BC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow \frac{V_{SABE}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{SABE} = \frac{1}{3}V$ (4).

Từ (1) và (2) suy ra $V_{SABE} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{2}{27}V$.

+ Do đó $V_1 = V_{CSEF} + V_{SFME} + V_{SMNE} = \frac{2}{9}V + \frac{4}{27}V + \frac{2}{27}V = \frac{4}{9}V \Rightarrow V_2 = \frac{5}{9}V$.

+ Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$ hoặc $\frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{4}$.

Cách 2: Vì $MF \parallel NE \parallel SC$ nên tứ giác $MNEF$ là hình thang.

Gọi $I = FE \cap MN \Rightarrow I \in AB$.

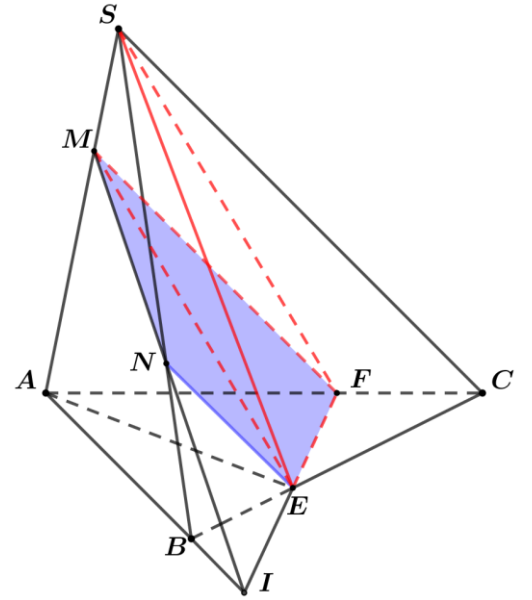
Theo định lý Menelaus, ta có

+ $\frac{SM}{AM} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{BN}{SN} = 1 \Rightarrow \frac{AI}{BI} = 4 \Rightarrow \frac{IB}{IA} = \frac{1}{4}$.

+ $\frac{AB}{IB} \cdot \frac{IE}{FE} \cdot \frac{FC}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{IE}{FE} = 1 \Rightarrow E$ là trung điểm của FI .

+ $\frac{V_{IBNE}}{V_{IAMF}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IE}{IF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow V_2 = V_{MNEFAB} = V_{IAMF} - V_{IBNE} = \frac{15}{16}V_{IAMF}$.

Mặt khác $\frac{V_{IAMF}}{V_{BAMF}} = \frac{IA}{BA} = \frac{4}{3} \Rightarrow V_{IAMF} = \frac{4}{3}V_{BAMF}$.



$$+ S_{ABF} = \frac{2}{3} S_{ABC}; \frac{AM}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{BAMF} = \frac{4}{9} V_{SABC}.$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{15}{16} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{9} V_{SABC} = \frac{5}{9} V \Rightarrow V_1 = \frac{4}{9} V.$$

$$+ \text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5} \text{ hoặc } \frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{4}.$$

Câu 5 (1.0 điểm) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 1$ ta luôn có:

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

Lời giải

Cách 1

$$+ \text{Xét } A = \sqrt{\frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)}} = \sqrt{\log_{n+1} n \cdot \log_{n+1}(n+2)}.$$

+ Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho hai số dương $\log_{n+1} n$ và $\log_{n+1}(n+2)$ ta được:

$$\sqrt{\log_{n+1} n \cdot \log_{n+1}(n+2)} \leq \frac{\log_{n+1} n + \log_{n+1}(n+2)}{2} = \frac{\log_{n+1} n(n+2)}{2}.$$

+ Mà $n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$ nên $n^2 + 2n < (n+1)^2$.

$$\Rightarrow \frac{\log_{n+1}(n^2 + 2n)}{2} < \frac{\log_{n+1}(n+1)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\log_{n+1}(n^2 + 2n)}{2} < 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log_{n+1} n \cdot \log_{n+1}(n+2)} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)}} < 1 \Leftrightarrow \log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1).$$

Cách 2

+ Với mọi số nguyên dương $n > 1$ ta có:

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2) \Leftrightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln n} > \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}.$$

+ Xét hàm số $y = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ với $x > 1$.

$$+ \text{Ta có: } y' = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}.$$

+ Với $\forall x > 1$ thì $x+1 > x > 1$; $\ln(x+1) > \ln x > 0 \Rightarrow x \ln x - (x+1) \ln(x+1) < 0$.

$$\Rightarrow y' < 0, \forall x > 1.$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

+ Do đó với mọi số nguyên dương $n > 1$ thì $y(n) > y(n+1)$.

Vậy $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$.

----- HẾT -----