



MATH
TÀI LIỆU ÔN TẬP HỌC KỲ II
LỚP 12- NĂM HỌC 2016-2017
MÔN: GIẢI TÍCH

Quảng Nam, tháng 2 năm 2017

A. TÍCH PHÂN

PHẦN 1: TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Nguyên hàm

1. Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là đoạn, khoảng, nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K , nếu $F'(x) = f(x)$, với mọi $x \in K$.

Định lý. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K . Khi đó

- a. Với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.
- b. Ngược lại, nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$.
- c. Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)dx = F(x) + C$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, C là hằng số bất kỳ.
- d. Bảng các nguyên hàm cơ bản.

Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm các hàm số sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm của hàm số hợp $u = u(x)$
$\int kdx = kx + C, k \in R$	$\int kdu = ku + C, k \in R$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha} \cdot x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{1+\alpha} \cdot u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C (x \neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C (x \neq 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1).$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (0 < a \neq 1).$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C ; \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C .$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C ; \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$

Ngoài ra còn một số công thức thường gặp là.

$$\int (ax+b)^k dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{k+1}}{k+1} + C, (a \neq 0, k \neq -1); \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, a \neq 0.$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C; \quad \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

2. Một số tính chất của nguyên hàm

Định lý. Nếu $F(x), G(x)$ tương ứng là một nguyên hàm của $f(x), g(x)$ thì

- a. $\int f'(x) dx = f(x) + C$
- b. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + C;$
- c. $\int a.f(x) dx = a \int f(x) dx = aF(x) + C \quad (a \neq 0).$

3. Một số phương pháp đổi nguyên hàm

a. Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lý sau: Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K . Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f , tức là $\int f(u) du = F(u) + C$ thì $\int f[u(x)] dx = F[u(x)] + C.$

b. Phương pháp tích phân từng phần

Một số dạng thường gặp:

Dạng 1. $\int P(x).e^{ax+b} dx, \int P(x) \sin(ax+b) dx, \int P(x) \cos(ax+b) dx$

Cách giải: Đặt $u = P(x), dv = e^{ax+b} dx$ ($dv = \sin(ax+b) dx, dv = \cos(ax+b) dx$)

Dạng 2. $\int P(x) \ln(ax+b) dx$

Cách giải: Đặt $u = \ln(ax+b), dv = P(x) dx.$

II. Tích phân

1. Định nghĩa Cho hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng K và a, b là hai số bất kỳ thuộc K . Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và ký hiệu là $\int_a^b f(x) dx$. Trong trường hợp $a < b$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là tích phân của f trên $[a; b]$.

2. Tính chất Cho các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên K và a, b, c là ba số thuộc K .

$$\begin{aligned} \bullet \int_a^a f(x)dx &= 0 & \bullet \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx \\ \bullet \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx & \bullet \int_a^b k \cdot f(x)dx &= k \int_a^b f(x)dx \\ \bullet \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

3. Một số phương pháp tính tích phân

- Phương pháp đổi biến số:** Công thức đổi biến số $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$. Trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục và $u(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng J sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên J ; $a, b \in J$.

Phương pháp đổi biến số thường áp dụng theo hai cách

Cách 1. Đặt ẩn phụ $u = u(x)$ (u là một hàm của x)

Cách 2. Đặt ẩn phụ $x = x(t)$ (x là một hàm số của t).

Đối với nguyên hàm nói chung và tích phân nói riêng cần chú ý một số dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ như sau:

Dấu hiệu	Có thể chọn
Hàm số có mẫu	Đặt t là mẫu
Hàm $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$	Đặt $t = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x, \sqrt[n]{\varphi(x)}, \sqrt[m]{\varphi(x)})$	Đặt $t = \sqrt[n]{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x + e}$	Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$
Hàm lẻ với $\sin x$	Đặt $t = \cos x$
Hàm lẻ với $\cos x$	Đặt $t = \sin x$
Hàm chẵn với $\sin x$ và $\cos x$	$t = \tan x$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ x = a \cos t, 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$

$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}; t \neq 0 \\ x = \frac{ a }{\cos t}, 0 \leq t \leq \pi; t \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$\begin{cases} x = a \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ x = a \cot t, 0 < t < \pi \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	Đặt $x = a \cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	Đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$

Phương pháp tích phân từng phần.

Định lý. Nếu $u(x), v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $\mathbf{K}$ và a, b là hai số thuộc $\mathbf{K}$ thì $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

4. Ứng dụng của tích phân

Tính diện tích hình phẳng

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)| dx$.
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Để tính diện tích S ta phải tính tích phân (1), muốn vậy ta phải “phá” dấu giá trị tuyệt đối.

- Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx$
- Nếu $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b (-f(x)) dx$

Chú ý Muốn “phá” dấu giá trị tuyệt đối ta phải xét dấu của biểu thức $f(x)$. Thường có hai cách làm như sau:

Cách 1: Dùng định lý “dấu của nhị thức bậc nhất”, định lý “dấu của tam thức bậc hai” để xét dấu các biểu thức $f(x)$; đôi khi phải giải các bất phương trình $f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$ trên đoạn $[a; b]$

-Cách 2: Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ để suy ra dấu của $f(x)$ trên đoạn đó.

Nếu trên đoạn $[a; b]$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía “trên” trục hoành thì

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$$

Nếu trên đoạn $[a; b]$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía “dưới” trục hoành thì

$$f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$$

-Cách 3 Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì ta có : $S = \int_a^b |f(x)|dx = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

- **Tính thể tích vật thể.** Thể tích vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a, b là $V = \int_a^b S(x)dx$. Trong đó $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là $x \in [a; b]$ và $S(x)$ là một hàm liên tục.
- **Tính thể tích khối tròn xoay.**
- Hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V được tính bởi công thức $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.
- Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x=g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y=c, y=d$ quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V được tính bởi công thức $V = \pi \int_c^d g^2(y)dy$.

PHẦN 2: BÀI TẬP MINH HỌA

Dạng 1: Tích phân hàm hữu tỷ

Bài 1: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 - 7x + 12} dx$

Hướng dẫn: $I = \int_1^2 \left(1 + \frac{16}{x-4} - \frac{9}{x-3} \right) dx = (x + 16\ln|x-4| - 9\ln|x-3|) \Big|_1^2 = 1 + 25\ln 2 - 16\ln 3.$

Bài 2: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^5 + x^3}$

Hướng dẫn: Ta có: $\frac{1}{x^3(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{x^2+1}$

$$\Rightarrow I = \left[-\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right] \Big|_1^2 = -\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{3}{8}$$

Bài 3: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^3}$

Hướng dẫn:

Ta có: $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{x+1-1}{(x+1)^3} = (x+1)^{-2} - (x+1)^{-3} \Rightarrow I = \int_0^1 [(x+1)^{-2} - (x+1)^{-3}] dx = \frac{1}{8}$

Bài 4: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{(x-1)^2}{(2x+1)^4} dx$

Hướng dẫn: Ta có: $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^2 \cdot \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)' \Rightarrow I = \frac{1}{9} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^3 + C$.

Bài 5: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^5}$

Bài 6: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = 1 - x^3 \Rightarrow dt = -3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{3x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_0^1 t^6 (1-t) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^8}{8} \right) = \frac{1}{168}$.

Bài 7: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = 1 - x^3 \Rightarrow dt = -3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{3x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_0^1 t^6 (1-t) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^8}{8} \right) = \frac{1}{168}$.

Bài 8: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}} dx$

Hướng dẫn: Ta có: $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{2000} \cdot 2x dx}{(1+x^2)^{2000} (1+x^2)^2}$. Đặt $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^{1000}}{t^{1000} t^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{1000} d \left(1 - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2002 \cdot 2^{1001}}$$

Bài 9: Tính tích phân $I = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} dx$

Hướng dẫn: Ta có: $\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}$. Đặt $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}. \text{ Đặt } t = \tan u \Rightarrow dt = \frac{du}{\cos^2 u} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi}{4}$$

Dạng 2: Tích phân hàm vô tỷ

Bài 1: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx$

Hướng dẫn: Ta có $I = \int \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = \int x(3x - \sqrt{9x^2 - 1}) dx = \int 3x^2 dx - \int x\sqrt{9x^2 - 1} dx$

Lại có $I_1 = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$

$$I_2 = \int x\sqrt{9x^2 - 1} dx = \frac{1}{18} \int \sqrt{9x^2 - 1} d(9x^2 - 1) = \frac{1}{27} (9x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{27} (9x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + x^3 + C$$

Bài 2: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} dx$

Hướng dẫn: Ta có $\bullet \int \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} dx$.

Lại có $I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} dx$.

Đặt $t = \sqrt{1+x\sqrt{x}} \Leftrightarrow t^2 - 1 = x\sqrt{x} \Leftrightarrow x^3 = (t^2 - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 dx = \frac{4}{3} t(t^2 - 1) dt$

$$\Rightarrow \int \frac{4}{3} t(t^2 - 1) dt = \frac{4}{9} t^3 - \frac{4}{3} t + C = \frac{4}{9} (\sqrt{1+x\sqrt{x}})^3 - \frac{4}{3} \sqrt{1+x\sqrt{x}} + C_1$$

Đối với $I_2 = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{d(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} = \frac{4}{3} \sqrt{1+x\sqrt{x}} + C_2$

Vậy: $I = \frac{4}{9} (\sqrt{1+x\sqrt{x}})^3 + C$

Bài 3: Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3} dx$

Hướng dẫn:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow 2tdu = dx \Rightarrow I = \int_1^2 \frac{2t^3 - 8t}{t^2 + 3t + 2} dt = \int_1^2 (2t - 6) dt + 6 \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt = -3 + 6 \ln \frac{3}{2}$$

Bài 4: Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x+1}} dx$

Hướng dẫn: Đặt $\sqrt{x+1} = t \Leftrightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{2(t^2 - 1)^2 + (t^2 - 1) - 1}{t} 2t dt = 2 \int_1^2 (2t^4 - 3t^2) dt = \left(\frac{4t^5}{5} - 2t^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{54}{5}$$

Bài 5: Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{3x+1}} dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow dx = \frac{2t dt}{3}$

$$\Rightarrow I = \int_2^4 \frac{\left(\frac{t^2-1}{3}\right)^2 + 1}{\frac{t^2-1}{3} \cdot t} \cdot \frac{2t dt}{3} = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) \Big|_2^4 + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^4 = \frac{100}{27} + \ln \frac{9}{5}.$$

Bài 5: Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{3x+1}} dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow dx = \frac{2t dt}{3}$

$$\Rightarrow I = \int_2^4 \frac{\left(\frac{t^2-1}{3}\right)^2 + 1}{\frac{t^2-1}{3} \cdot t} \cdot \frac{2t dt}{3} = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) \Big|_2^4 + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^4 = \frac{100}{27} + \ln \frac{9}{5}.$$

Bài 6: Tính tích phân $I = \int_0^1 (x-1)^3 \sqrt{2x-x^2} dx$

Hướng dẫn: $I = \int_0^1 (x-1)^3 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \sqrt{2x-x^2} (x-1) dx$. Đặt $t = \sqrt{2x-x^2}$

$$\Rightarrow I = -\frac{2}{15}.$$

Bài 7: Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_{-1}^1 \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x)^2-(1+x^2)} dx = \int_{-1}^1 \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx - \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} dx \\ &+ I_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx = \frac{1}{2} [\ln|x| + x]_{-1}^1 = 1 \\ &+ I_2 = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow 2t dt = 2x dx \Rightarrow I_2 = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t^2 dt}{\sqrt{2}(t^2-1)} = 0 \\ \text{Vậy: } I &= 1. \end{aligned}$$

Bài 8: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$

Hướng dẫn: Ta có Ta có: $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} x dx$. Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t^2 = 4-x^2 \Rightarrow t dt = -x dx$

$$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{t(-tdt)}{4-t^2} = \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{t^2}{t^2-4} dt = \int_{\sqrt{3}}^0 \left(1 + \frac{4}{t^2-4} \right) dt = \left(t + \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \right)_{\sqrt{3}}^0 = - \left(\sqrt{3} + \ln \left| \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right| \right).$$

Bài 9: Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2(2+\sqrt{1+x})^2} dx$

Hướng dẫn: Đặt $2+\sqrt{1+x}=t \Rightarrow I = \int_3^4 \left(2t-16 + \frac{42}{t} - \frac{36}{t^2} \right) dt = -12 + 42 \ln \frac{4}{3}$

Bài 10: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3) \cdot \sqrt[3]{1+x^3}}$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt[3]{1+x^3} \Rightarrow I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{t^2}{t^4 \cdot (t^3-1)^{\frac{2}{3}}} dt = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{t^2 \cdot (t^3-1)^{\frac{2}{3}}}$

$$= \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{t^2 \cdot \left[t^3 \left(1 - \frac{1}{t^3} \right) \right]^{\frac{2}{3}}} = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{t^4 \left(1 - \frac{1}{t^3} \right)^{\frac{2}{3}}} = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{t^3} \right)^{-\frac{2}{3}}}{t^4} dt$$

$$\text{Đặt } u = 1 - \frac{1}{t^3} \Rightarrow du = \frac{3dt}{t^4} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u^{-\frac{2}{3}}}{3} du = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{2}{3}} du = \frac{1}{3} \left(\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right) \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{3}} \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Bài 11: Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \frac{x^4}{\left(x - \frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1}} dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$

$$\Rightarrow I = \int_2^3 \frac{(t^2-1)^2}{t^2-2} dt = \int_2^3 \frac{t^4-2t^2+1}{t^2-2} dt = \int_2^3 t^2 dt + \int_2^3 \frac{1}{t^2-2} dt = \frac{19}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left(\frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} \right)$$

Bài 12: Tính tích phân $I = \int_1^{27} \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt[3]{x^2}} dx$

Hướng dẫn:

$$\text{Đặt } t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow I = 5 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^3-2}{t(t^2+1)} dt = 5 \int_1^{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{2}{t} + \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \right] dt = 5 \left(\sqrt{3} - 1 + \ln \frac{2}{3} \right) - \frac{5\pi}{12}$$

Bài 13: Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 (x^5 + x^2)\sqrt{4-x^2} dx$

Hướng dẫn: $I = \int_{-2}^2 (x^5 + x^2)\sqrt{4-x^2} dx = \int_{-2}^2 x^5\sqrt{4-x^2} dx + \int_{-2}^2 x^2\sqrt{4-x^2} dx = A + B.$

+ Tính $A = \int_{-2}^2 x^5\sqrt{4-x^2} dx$. Đặt $t = -x$. Tính được: $A = 0$.

+ Tính $B = \int_{-2}^2 x^2\sqrt{4-x^2} dx$. Đặt $x = 2\sin t$. Tính được: $B = 2\pi$.

Vậy: $I = 2\pi$.

Bài 14: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{(3-\sqrt{4-x^2})}{2x^4} dx$

Hướng dẫn: $I = \int_1^2 \frac{3}{2x^4} dx - \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^4} dx.$

+ Tính $I_1 = \int_1^2 \frac{3}{2x^4} dx = \frac{3}{2} \int_1^2 x^{-4} dx = \frac{7}{16}.$

+ Tính $I_2 = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^4} dx$. Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt.$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t dt}{\sin^4 t} = \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} \right) dt = -\frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 t \cdot d(\cot t) = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{Vậy: } I = \frac{1}{16} (7 - 2\sqrt{3})$$

Bài 15: Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - 1} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \\ v = x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= x\sqrt{x^2 - 1} \Big|_{\sqrt{2}}^3 - \int_{\sqrt{2}}^3 x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = 5\sqrt{2} - \int_{\sqrt{2}}^3 \left[\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right] dx \\ &= 5\sqrt{2} - \int_{\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2 - 1} dx - \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = 5\sqrt{2} - I - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| \Big|_{\sqrt{2}}^3 \\ \Rightarrow I &= \frac{5\sqrt{2}}{2} - \ln(\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{4} \ln 2 \end{aligned}$$

Dạng 3: Tích phân hàm lượng giác

Bài 1: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{8\cos^2 x - \sin 2x - 3}{\sin x - \cos x} dx$

Hướng dẫn:

$$I = \int \frac{(\sin x - \cos x)^2 + 4\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx = \int [(\sin x - \cos x - 4(\sin x + \cos x))] dx = 3\cos x - 5\sin x + C.$$

Bài 2: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{\cot x - \tan x - 2 \tan 2x}{\sin 4x} dx$

Hướng dẫn: $I = \int \frac{2 \cot 2x - 2 \tan 2x}{\sin 4x} dx = \int \frac{2 \cot 4x}{\sin 4x} dx = 2 \int \frac{\cos 4x}{\sin^2 4x} dx = -\frac{1}{2 \sin 4x} + C$

Bài 3: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{\cos^2 \left(x + \frac{\pi}{8} \right)}{\sin 2x + \cos 2x + \sqrt{2}} dx$

Hướng dẫn:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1 + \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int \frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} dx + \int \frac{dx}{\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right]^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int \frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2\left(x + \frac{3\pi}{8}\right)} \right) \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \left| 1 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \right| - \cot\left(x + \frac{3\pi}{8}\right) \right) + C
 \end{aligned}$$

Bài 4: Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{2 + \sqrt{3} \sin x - \cos x}$

Hướng dẫn: $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = I = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$

Bài 5: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2 \sin x - \sqrt{3}} dx$

Hướng dẫn: $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin x - \sin \frac{\pi}{3}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{2}}{\sin x - \sin \frac{\pi}{3}} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin x - \sin \frac{\pi}{3}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} dx = \ln \left| \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \ln \left| \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \dots$$

Bài 6: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$

Hướng dẫn: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) d(\sin 2x) = 0$

Bài 7: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx$

Hướng dẫn:

Ta có $\frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} = \frac{4 \sin^3 x (1 - \cos x)}{\sin^2 x} = 4 \sin x - 4 \sin x \cos x = 4 \sin x - 2 \sin 2x$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin x - 2 \sin 2x) dx = 2$$

Bài 8: Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$

Hướng dẫn: $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| dx$

$$= \sqrt{2} \left[\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) dx \right] = 4\sqrt{2}$$

Bài 9: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{\sin 2x dx}{3 + 4 \sin x - \cos 2x}$

Hướng dẫn: Ta có: $I = \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x + 4 \sin x + 2} dx$. Đặt $t = \sin x \Rightarrow$

$$I = \ln |\sin x + 1| + \frac{1}{\sin x + 1} + C$$

Bài 10: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}$

Hướng dẫn: $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^3 x \cdot \cos^2 x} = 8 \int \frac{dx}{\sin^3 2x \cdot \cos^2 x}$

Đặt $t = \tan x$. $I = \int \left(t^3 + 3t + \frac{3}{t} + t^{-3} \right) dt = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{3}{2} \tan^2 x + 3 \ln |\tan x| - \frac{1}{2 \tan^2 x} + C$

Bài 11: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{\sqrt[2011]{\sin^{2011} x - \sin^{2009} x}}{\sin^5 x} \cot x dx$

Hướng dẫn:

Ta có: $I = \int \frac{\sqrt[2011]{1 - \frac{1}{\sin^2 x}}}{\sin^4 x} \cot x dx = \int \frac{\sqrt[2011]{-\cot^2 x}}{\sin^4 x} \cot x dx$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } t = \cot x \Rightarrow I &= \int t^{\frac{2}{2011}} (1+t^2) dt = \frac{2011}{4024} t^{\frac{4024}{2011}} + \frac{2011}{8046} t^{\frac{8046}{2011}} + C \\ &= \frac{2011}{4024} \cot^{\frac{4024}{2011}} x + \frac{2011}{8046} \cot^{\frac{8046}{2011}} x + C \end{aligned}$$

Bài 12: Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x (2 - \sqrt{1 + \cos 2x}) dx$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \sin^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \sqrt{1 + \cos 2x} dx = H + K \\ + H &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \sin^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \\ + K &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \sqrt{2 \cos^2 x} dx = -\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \cos x dx = -\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \Rightarrow I &= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Bài 13: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx$

Hướng dẫn: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(2 + \sin x)^2} dx.$

Đặt $t = 2 + \sin x \Rightarrow I = 2 \int_2^3 \frac{t-2}{t^2} dt = 2 \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = 2 \left(\ln t + \frac{2}{t} \right) \Big|_2^3 = 2 \ln \frac{3}{2} - \frac{2}{3}$

Bài 14: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x}} dx$

Hướng dẫn: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x}} dx.$ Đặt $t = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \Rightarrow I = \int_1^{\frac{1}{4}} \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \frac{4}{3} \sqrt{t} \Big|_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{2}{3}$

Bài 15: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos^2 x} dx$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} |\sin x| dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\sin x}{\cos^2 x} |\sin x| dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} |\sin x| dx \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{7\pi}{12} - \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

Bài 16: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos t - 2 \sin t}{(\cos t + \sin t)^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{(\cos x + \sin x)^3} dx \\ \Rightarrow 2I = I + I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{(\cos x + \sin x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 17: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow I &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I \\ \Rightarrow 2I &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = -\pi \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{1 + \cos^2 t} = \pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Bài 18: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{3 + \sin^2 x}} dx$

Hướng dẫn:

Đặt $t = \sqrt{3 + \sin^2 x} = \sqrt{4 - \cos^2 x}$. Ta có: $\cos^2 x = 4 - t^2$ và $dt = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{3 + \sin^2 x}} dx$.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{3 + \sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x \sqrt{3 + \sin^2 x}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} \frac{dt}{4 - t^2} = \frac{1}{4} \int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| \Big|_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{15}+4}{\sqrt{15}-4} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} \right| \right) = \frac{1}{2} (\ln(\sqrt{15}+4) - \ln(\sqrt{3}+2))
 \end{aligned}$$

Bài 19: Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$

Hướng dẫn:

Ta có: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + 1}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x \sqrt{\tan^2 x + 2}} dx$

Đặt $u = \tan x \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}} dx$. Đặt $t = \sqrt{u^2 + 2} \Rightarrow dt = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}} du$.

$$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{\frac{7}{3}}}^{\sqrt{3}} dt = t \Big|_{\sqrt{\frac{7}{3}}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Bài 20: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$

Hướng dẫn: Sử dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{x}{\cos x} \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{4\pi}{3} - J, \text{ với } J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$$

Để tính J ta đặt $t = \sin x$. Khi đó $J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Vậy $I = \frac{4\pi}{3} - \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$

Bài 21: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) \cdot e^x dx$

Hướng dẫn: Ta có: $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + \tan \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \tan \frac{x}{2} dx = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Dạng 3: Tích phân hàm mũ logarit

Bài 1: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{e^{2x}}{1 + \sqrt{e^x}} dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{e^x} \Rightarrow e^x = t^2 \Rightarrow e^x dx = 2t dt$.

$$\Rightarrow I = 2 \int \frac{t^3}{1+t} dt = \frac{2}{3} t^3 - t^2 + 2t - 2 \ln|t+1| + C = \frac{2}{3} e^x \sqrt{e^x} - e^x + 2\sqrt{e^x} - 2 \ln|\sqrt{e^x} + 1| + C$$

Bài 2: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx$

Hướng dẫn:

$$I = \int \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = \int \frac{xe^x \cdot (x+1)e^x}{xe^x + 1} dx. \text{ Đặt } t = xe^x + 1 \Rightarrow I = xe^x + 1 - \ln|xe^x + 1| + C.$$

Bài 3: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{\ln(1+x^2)^x + 2011x}{\ln[(e^{x^2} + e)^{x^2+1}]} dx$

Hướng dẫn: $I = \int \frac{x[\ln(x^2+1) + 2011]}{(x^2+1)[\ln(x^2+1)+1]} dx$. Đặt $t = \ln(x^2+1)+1$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{t+2010}{t} dt = \frac{1}{2} t + 1005 \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} + 1005 \ln(\ln(x^2+1)+1) + C$$

Bài 4: Tính tích phân $J = \int_1^e \frac{xe^x + 1}{x(e^x + \ln x)} dx$

Hướng dẫn: $J = \int_1^e \frac{d(e^x + \ln x)}{e^x + \ln x} = \ln|e^x + \ln x| \Big|_1^e = \ln \frac{e^e + 1}{e}$

Bài 5: Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^{3x} + e^{2x} - 1}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1} dx$

Hướng dẫn:
$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{3e^{3x} + 2e^{2x} - e^x - (e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1)}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{3e^{3x} + 2e^{2x} - e^x}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1} - 1 \right) dx$$

$$= \ln(e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1) \Big|_0^{\ln 2} - x \Big|_0^{\ln 2} = \ln 11 - \ln 4 = \ln \frac{11}{4}$$

Bài 6: Tính tích phân
$$I = \int_0^{3\ln 2} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{e^x} + 2\right)^2}$$

Hướng dẫn:
$$I = \int_0^{3\ln 2} \frac{e^{\frac{x}{3}} dx}{e^{\frac{x}{3}} \left(\sqrt[3]{e^x} + 2\right)^2} \cdot \text{Đặt } t = e^{\frac{x}{3}} \Rightarrow dt = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} dx \Rightarrow I = \frac{3}{4} \left(\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right)$$

Bài 7: Tính tích phân
$$I = \int_{3\ln 2}^{\ln 15} \frac{(e^{2x} - 24e^x) dx}{e^x \sqrt{e^x + 1} + 5e^x - 3\sqrt{e^x + 1} - 15}$$

Hướng dẫn:

Ta có
$$\frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} = \frac{4\sin^3 x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = 4\sin x - 4\sin x \cos x = 4\sin x - 2\sin 2x$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x - 2\sin 2x) dx = 2$$

Bài 8: Tính tích phân
$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow t^2 - 1 = e^x \Rightarrow e^x dx = 2t dt$.

$$I = \int_3^4 \frac{(2t^2 - 10t) dt}{t^2 - 4} = \int_3^4 \left(2 - \frac{3}{t-2} - \frac{7}{t+2} \right) dt = (2t - 3\ln|t-2| - 7\ln|t+2|) \Big|_3^4$$

$$= 2 - 3\ln 2 - 7\ln 6 + 7\ln 5$$

Bài 9: Tính tích phân
$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1 + \sqrt{e^x - 2}}$$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{e^x - 2} \Rightarrow e^{2x} dx = 2t dt$

$$\Rightarrow I = 2 \int_0^1 \frac{(t^2 + 2)t dt}{t^2 + t + 1} = 2 \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} \right) dt = 2 \int_0^1 (t - 1) dt + 2 \int_0^1 \frac{d(t^2 + t + 1)}{t^2 + t + 1}$$

$$= (t^2 - 2t) \Big|_0^1 + 2 \ln(t^2 + t + 1) \Big|_0^1 = 2\ln 3 - 1.$$

Bài 10: Tính tích phân
$$I = \int_0^{\ln 3} \frac{2e^{3x} - e^{2x}}{e^x \sqrt{4e^x - 3} + 1} dx$$

Hướng dẫn:

Đặt $t = \sqrt{4e^{3x} - 3e^{2x}} \Rightarrow t^2 = 4e^{3x} - 3e^{2x} \Rightarrow 2t dt = (12e^{3x} - 6e^{2x}) dx \Rightarrow (2e^{3x} - e^{2x}) dx = \frac{t dt}{3}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_1^9 \frac{t dt}{t+1} = \frac{1}{3} \int_1^9 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{3} (t - \ln|t+1|) \Big|_1^9 = \frac{8 - \ln 5}{3}.$$

Bài 11: Tính tích phân $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow dx = \frac{2t dt}{e^x} \Rightarrow I = 2 \int_1^2 (t^2 + 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_1^2 = \frac{20}{3}$

Bài 12: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{2^x - 2^{-x}}{4^x + 4^{-x} - 2} dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = 2^x + 2^{-x} \Rightarrow 4^x + 4^{-x} - 2 = (2^x + 2^{-x})^2 - 4 \Rightarrow I = \frac{1}{4 \ln 2} \ln \frac{81}{25}$

Bài 13: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{6^x dx}{9^x + 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x}$

Hướng dẫn: $I = \int_0^1 \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x dx}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2}$. Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. $I = \frac{1}{\ln 3 - \ln 2} \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{\ln 15 - \ln 14}{\ln 3 - \ln 2}$

Bài 14: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x \sqrt[3]{2 + \ln^2 x}}{x} dx$

Hướng dẫn Đặt $t = 2 + \ln^2 x \Rightarrow dt = \frac{2 \ln x}{x} dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_2^3 \sqrt[3]{t} dt = \frac{3}{8} (\sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^4})$

Bài 15: Tính tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln ex}$

Hướng dẫn: $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x (1 + \ln x)} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x (1 + \ln x)} = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{1 + \ln x} \right) d(\ln x) = 2 \ln 2 - \ln 3$

Bài 16: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\log_2^3 x}{x \sqrt{1 + 3 \ln^2 x}} dx$

Hướng dẫn:

$$I = \int_1^e \frac{\log_2^3 x}{x \sqrt{1 + 3 \ln^2 x}} dx = \int_1^e \frac{\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)^3}{x \sqrt{1 + 3 \ln^2 x}} dx = \frac{1}{\ln^3 2} \int_1^e \frac{\ln^2 x}{\sqrt{1 + 3 \ln^2 x}} \cdot \frac{\ln x dx}{x}$$

Đặt $\sqrt{1 + 3 \ln^2 x} = t \Rightarrow \ln^2 x = \frac{1}{3}(t^2 - 1) \Rightarrow \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} t dt$.

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{9 \ln^3 2} \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{27 \ln^3 2}$$

Bài 17: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x + (x-2) \ln x}{x(1 + \ln x)} dx$

Hướng dẫn: $\int_1^e dx - 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx = e - 1 - 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx$

Tính $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx$. Đặt $t = 1 + \ln x \Rightarrow J = \int_1^2 \frac{t-1}{t} dt = 1 - \ln 2$.

Vậy: $I = e - 3 + 2 \ln 2$.

Bài 18: Tính tích phân $I = \int_{e^2}^{e^3} \frac{2x \ln^2 x - x \ln x^2 + 3}{x(1 - \ln x)} dx$

Hướng dẫn: $I = 3 \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx - 2 \int_{e^2}^{e^3} \ln x dx = -3 \ln 2 - 4e^3 + 2e^2$

Bài 19: Tính tích phân $I = \int_2^5 \frac{\ln(\sqrt{x-1} + 1)}{x-1 + \sqrt{x-1}} dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = \ln(\sqrt{x-1} + 1) \Rightarrow 2dt = \frac{dx}{x-1 + \sqrt{x-1}} \Rightarrow I = 2 \int_{\ln 2}^{\ln 3} dt = \ln^2 3 - \ln^2 2$.

Bài 20: Tính tích phân $I = \int_1^{e^3} \frac{\ln^3 x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow 1 + \ln x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2t dt$ và $\ln^3 x = (t^2 - 1)^3$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{(t^2 - 1)^3}{t} dt = \int_1^2 \frac{t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1}{t} dt = \int_1^2 (t^5 - 3t^3 + 3t - \frac{1}{t}) dt = \frac{15}{4} - \ln 2$$

Bài 21: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \sin 2x dx$

Hướng dẫn: $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \sin x \cos x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^{\sin x} \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^{\sin x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 2 \sin x e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \cos x dx = 2e - 2e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Bài 22: Tính tích phân $I = \int_0^1 x \ln(x^2 + x + 1) dx$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 + x + 1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + x + 1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \int_0^1 (2x - 1) dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} \end{aligned}$$

Bài 23: Tính tích phân $I = \int_3^8 \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} dx$

Hướng dẫn:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = 2\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow I = (2\sqrt{x+1} \cdot \ln x) \Big|_3^8 - 2 \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = 6 \ln 8 - 4 \ln 3 - 2J$$

$$+ \text{Tính } J = \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow J &= \int_2^3 \frac{t}{t^2-1} \cdot 2t dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left(2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_2^3 = 2 + \ln 3 - \ln 2 \end{aligned}$$

Từ đó $I = 20 \ln 2 - 6 \ln 3 - 4$.

Bài 24: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow I = -\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)x} = 3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$

Bài 25: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \ln \frac{1+x}{1-x} \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{(1-x)^2} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \left(\frac{2}{1-x^2} \right) dx$

$$= \frac{\ln 3}{8} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{x^2-1} dx = \frac{\ln 3}{8} + \int_0^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right] dx = \frac{\ln 3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$$

Bài 26: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x + e^x(e^x + \ln^2 x)}{1+e^x} dx$

Hướng dẫn: Ta có: $I = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx = H + K$

$$+ H = \int_1^e \ln^2 x dx. \text{ Đặt: } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow H = e - \int_1^e 2 \ln x dx = e - 2$$

$$+ K = \int_1^e \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx. \text{ Đặt } t = e^x + 1 \Rightarrow \Rightarrow I_2 = \int_{e+1}^{e^e+1} \frac{t-1}{t} dt = e^e - e + \ln \frac{e+1}{e^e+1}$$

Vậy: $I = e^e - 2 + \ln \frac{e+1}{e^e+1}$

Bài 27: Tính tích phân $I = \int_0^4 \ln(\sqrt{x^2+9} - x) dx$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sqrt{x^2+9} - x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow I = x \ln(\sqrt{x^2+9} - x) \Big|_0^4 + \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = 2$

Dạng 4: Tích phân tổng hợp nhiều loại hàm số

Bài 1: Tính tích phân $I = \int_0^1 \left(x^2 e^{x^3} + \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \right) dx$

Hướng dẫn: $I = \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx + \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$

$$+ \text{Tính } I_1 = \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx. \text{ Đặt } t = x^3 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{3} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{3} e - \frac{1}{3}.$$

$$+ \text{Tính } I_2 = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow I_2 = 4 \int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2} dt = 4 \left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Vậy: $I = \frac{1}{3} e + \pi - 3$

Bài 2: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} (e^{2x} \cdot \sqrt{4-x^2} - x^2) dx$.

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x e^{2x} dx - \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx = I_1 + I_2 \\ + \text{Tính } I_1 &= \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{e^2 + 1}{4} \\ + \text{Tính } I_2 &= \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow I_2 = -3\sqrt{3} + \frac{16}{3} \\ \Rightarrow I &= \frac{e^2}{4} + 3\sqrt{3} - \frac{61}{12} \end{aligned}$$

Bài 3: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2} e^x dx$

Hướng dẫn:

$$\text{Đặt } t = x+1 \Rightarrow dx = dt \quad I = \int_1^2 \frac{t^2 - 2t + 2}{t^2} e^{t-1} dt = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t} \right) e^{t-1} dt = e - 1 + \frac{2}{e} \left(-\frac{e^2}{2} + e \right) = 1$$

Bài 4: Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 \cdot e^{\sqrt{x^2+1}} dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow dx = t dt \Rightarrow I = \int_1^2 (t^2 - 1) e^t dt = \int_1^2 t^2 e^t dt - e^t \Big|_1^2 = J - (e^2 - e)$

$$+ J = \int_1^2 t^2 e^t dt = t^2 e^t \Big|_1^2 - \int_1^2 2te^t dt = 4e^2 - e - 2 \left(te^t \Big|_1^2 - \int_1^2 e^t dt \right) = 4e^2 - e - 2(te^t - e^t) \Big|_1^2$$

Vậy: $I = e^2$

Bài 5: Tính tích phân $I = \int \frac{x \ln(x^2 + 1) + x^3}{x^2 + 1} dx$

Hướng dẫn: Ta có: $f(x) = \frac{x \ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{x(x^2 + 1) - x}{x^2 + 1} = \frac{x \ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + x - \frac{x}{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) &= \int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \ln(x^2 + 1) d(x^2 + 1) + \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{d \ln(x^2 + 1)}{1} \\ &= \frac{1}{4} \ln^2(x^2 + 1) + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

Bài 6: Tính tích phân $I = \int_0^4 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - 3x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

Hướng dẫn: $I = \int_0^4 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - 3x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int_0^4 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 9})}{\sqrt{x^2 + 9}} dx - 3 \int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = I_1 - 3I_2$

+ Tính $I_1 = \int_0^4 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 9})}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$. Đặt $\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) = u \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{\ln 3}^{\ln 9} u du = \frac{u^2}{2} \Big|_{\ln 3}^{\ln 9} = \frac{\ln^2 9 - \ln^2 3}{2}$$

+ Tính $I_2 = \int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$. Đặt $\sqrt{x^2 + 9} = v \Rightarrow dv = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$, $x^2 = v^2 - 9$

$$\Rightarrow I_2 = \int_3^5 (u^2 - 9) du = \left(\frac{u^3}{3} - 9u \right) \Big|_3^5 = \frac{44}{3}$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^4 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - 3x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = I_1 - 3I_2 = \frac{\ln^2 9 - \ln^2 3}{2} - 44$$

Bài 7: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{(x^3 + 1) \ln x + 2x^2 + 1}{2 + x \ln x} dx$

Hướng dẫn:

$$I = \int_1^e x^2 dx + \int_1^e \frac{1 + \ln x}{2 + x \ln x} dx. \quad + \int_1^e x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{e^3 - 1}{3}$$

$$+ \int_1^e \frac{1 + \ln x}{2 + x \ln x} dx = \int_1^e \frac{d(2 + x \ln x)}{2 + x \ln x} = \ln |2 + x \ln x| \Big|_1^e = \ln \frac{e+2}{2}. \text{ Vậy: } I = \frac{e^3 - 1}{3} + \ln \frac{e+2}{2}$$

Bài 8: Tính tích phân $I = \int_1^4 \frac{\ln(5-x) + x^3 \cdot \sqrt{5-x}}{x^2} dx$

Hướng dẫn: Ta có: $I = \int_1^4 \frac{\ln(5-x)}{x^2} dx + \int_1^4 x \sqrt{5-x} dx = K + H$.

$$+ K = \int_1^4 \frac{\ln(5-x)}{x^2} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(5-x) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow K = \frac{3}{5} \ln 4$$

$$+ H = \int_1^4 x \sqrt{5-x} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{5-x} \Rightarrow H = \frac{164}{15}$$

$$\text{Vậy: } I = \frac{3}{5} \ln 4 + \frac{164}{15}$$

Bài 9: Tính tích phân $I = \int_3^8 \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} dx$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = 2\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow I = 2\sqrt{x+1} \ln x \Big|_3^8 - 2 \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

$$+ \text{Tính } J = \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow J = \int_2^3 \frac{2t^2 dt}{t^2 - 1} = 2 \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = 2 + \ln 3 - \ln 2$$

$$\Rightarrow I = 6 \ln 8 - 4 \ln 3 - 2(2 + \ln 3 - \ln 2) = 20 \ln 2 - 6 \ln 3 - 4$$

Bài 10: Tính tích phân $I = \int_0^\pi \frac{x(\cos^3 x + \cos x + \sin x)}{1 + \cos^2 x} dx$

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có: } I = \int_0^\pi x \left(\frac{\cos x(1 + \cos^2 x) + \sin x}{1 + \cos^2 x} \right) dx = \int_0^\pi x \cos x dx + \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = J + K$$

$$+ \text{Tính } J = \int_0^\pi x \cos x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow J = (x \sin x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = 0 + \cos x \Big|_0^\pi = -2$$

$$+ \text{Tính } K = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx. \text{ Đặt } x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$\Rightarrow K = \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} dt = \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\Rightarrow 2K = \int_0^\pi \frac{(x + \pi - x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} \Rightarrow K = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow K = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + t^2}, \text{ đặt } t = \tan u \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 u) du$$

$$\Rightarrow K = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 u) du}{1 + \tan^2 u} = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi}{2} \cdot u \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Bài 11: Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x + (x + \sin x) \sin x}{(1 + \sin x) \sin^2 x} dx$

Hướng dẫn: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x(1+\sin x) + \sin^2 x}{(1+\sin x)\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sin x} = H + K$

$+ H = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases} \Rightarrow H = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

$+ K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{3} - 2$

Vậy $I = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 2$

Bài 12: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx$

Hướng dẫn: Đặt $t = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right) dt =$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{2}{1+\tan t} dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt = t \cdot \ln 2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I$

$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4} \ln 2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

Bài 13: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1+\sin x) dx$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+\sin x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1+\cos x}{1+\sin x} dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$I = -\cos x \cdot \ln(1+\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x) dx = \frac{\pi}{2} - 1$

PHẦN 3: BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM LUYỆN THI CHƯƠNG 1: NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

Câu 1. Cho biết $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos(\pi x)$. Tính $f(4)$.

- A. $f(4) = 2\sqrt{3}$ B. $f(4) = -1$ C. $f(4) = \frac{1}{2}$ D. $f(4) = \sqrt[3]{12}$

Câu 2. Cho biết $F(x) = \int_x^{3x} \frac{t+1}{e^t} dt$. Tính $F'(0)$.

- A. $f'(0) = 2\sqrt{3}$ B. $f'(0) = 2$ C. $f'(0) = -2\sqrt{3}$ D. $f'(0) = 1$

Câu 3. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)dx = 4$, $\int_2^3 f(t)dt = 2$, $\int_9^{16} \frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt = 6$.

Tính tích phân $I = \int_0^4 f(x)dx$.

- A. 1 B. 10 C. 12 D. 9

Câu 4. Cho $m > 0$. Tìm điều kiện của tham số m để tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+m}} dx \geq 1$.

- A. $m > \frac{1}{4}$ B. $m > 0$ C. $0 < m < \frac{1}{4}$ D. $m \leq \frac{1}{4}$

Câu 5. Tìm đạo hàm của hàm số $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$.

- A. $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$ B. $F'(x) = \sin x$ C. $F'(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ D. $F'(x) = x \sin x$

Câu 6. Cho hàm số $F(x) = \int_1^x \frac{t}{e^t} dt$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. Giá trị của hàm số tại 1 là $F(1) = 1$
 B. Hàm số $F(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$
 C. Hàm số $F(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$
 D. Hàm số $F(x)$ có đạo hàm là $F'(x) = xe^x$

Câu 7. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức $S = F(b) - F(a)$.

B. $\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$

C. $\int_a^b f(Ax+B)dx = \left[F(Ax+B) \right]_a^b \quad (A \neq 0)$

D. $\int_a^b kf(x)dx = k[F(b) - F(a)]$ (k là hằng số)

Câu 8. Kết quả tích phân $\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx$ được viết dưới dạng $e - \frac{e^a}{b}$. Tính giá trị biểu thức $a + b + ab$..

A. 3

B. 2

C. 4

D. 8

Câu 9. Tính tích phân $I = \int_0^4 \left| \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1 \right| dx$.

A. 31

B. 35

C. 38

D. 40

Câu 10. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $\int_0^1 f(2x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x)dx$

C. $\int_0^1 (f(x) + 2)dx = 2 + \int_0^2 f(2x)dx$

D. $\int f(x+2)dx = 2 + \int f(x)dx$

Câu 11. Giả sử $\int_{-8}^a x \ln \sqrt{1-x} dx = 6 - \frac{63}{2} \ln 3$. Tìm giá trị của a .

A. 0

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 12. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \left[e^{-x^2} (x + \sin 2x) \right] dx$.

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

Câu 13. Với $a \leq -1$, kết quả tích phân $\int_0^a (x^2 + 3x + 2) dx$ đạt giá trị lớn nhất khi giá trị của a là:

A. -3

B. -2

C. $-\frac{5}{2}$

D. -1

Câu 14. Tính nguyên hàm $I = \int e^{x+e^x} dx$.

A. $I = e^{e^x} + c$

B. $I = e^{e^x+1} + c$

C. $I = e^x + c$

D. $I = e^{x+1} + c$

Câu 15. Đặt $a = \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-x}} dx$. Kết quả tích phân $\int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$ là:

A. $1-a$

B. $1+a$

C. $\frac{1}{2} - a$

D. $\frac{1}{3} - a$

Câu 16. Xét tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ và phép đổi biến $x = \sin t$. Mệnh đề nào dưới đây là sai.

A. $I = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right)$

B. $I = \int_0^1 \cos t \sin t dt$.

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$

D. $I = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$

Câu 17 Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(1): $\int \sin^2 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

(2): $\int \frac{4x+2}{x^2+x+3} dx = 2 \ln(x^2+x+3) + C$

(3): $\int 3^x (2^x + 3^{-x}) dx = \frac{6^x}{\ln 6} + x + C$

(4): $\int e^x (1 - e^{-x}) dx = e^{-x} - x + C$

(5): $\int (2x^3 + \sin x) dx = 6x^2 + \cos x + C$

(6): $\int \tan x dx = \tan x + x + C$

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Câu 18. Giả sử $\int_0^x f(t) dt = x^2 + x$. Tìm hàm dưới dấu tích phân.

A. $f(t) = 2t - 1$

B. $f(t) = t^2 + t$

C. $f(t) = 2t + 1$

D. $f(t) = t^2 - t$

Câu 19. Với $f(x), g(x)$ là 2 hàm số liên tục trên K và $k \neq 0$ thì mệnh đề nào sau đây là sai.

A. $\int f'(x) dx = f(x) + C.$

B. $\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx.$

C. $f(4) = \frac{1}{2}$

D. $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx.$

Câu 20. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx.$

A. $I = 2x + 1 + 5 \ln |\sqrt{2x+1} + 2| + C.$

B. $I = 2x + 1 - 4\sqrt{2x+1} + 5 \ln |\sqrt{2x+1} + 2| + C.$

C. $I = 2x + 1 + 4\sqrt{2x+1} - 5 \ln |\sqrt{2x+1} + 2| + C.$

D. $I = -2x - 1 + 4\sqrt{2x+1} - 5 \ln |\sqrt{2x+1} + 2| + C.$

Câu 21. Cho $\int_0^1 2f(x) - g(x) dx = 5$ và $\int_0^1 3f(x) + g(x) dx = 10$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

A. 3

B. 5

C. 15

D. 10

Câu 22. Tìm nguyên hàm sau $f(x) = x^2 e^x$

A. $(x^2 - 2x - 2)e^x + C$

B. $(x^2 + 2x + 2)e^x + C$

C. $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$

D. $(x^2 + 2x - 2)e^x + C$

Câu 23. Với giá trị nào của số dương b thì $\int_0^b (6x - 3x^2) dx$ có giá trị lớn nhất

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

Câu 24. Tìm giá trị của a thỏa mãn các điều kiện $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ và $\int_0^a \cos x + a^2 dx = \sin a$

A. π

B. $\sqrt{\pi}$

C. $2\sqrt{\pi}$

D. $\sqrt{2\pi}$

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện $\int_1^e \ln \frac{k}{x} dx < e - 2$.

Tìm số phần tử của S .

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

Câu 26. Tìm hàm số $y = f(x)$ nếu biết $f'(x) = \frac{15\sqrt{x}}{14}$, $f'(1) = 4$ và $f(1) = 4$

A. $f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{7} + \frac{23}{7}$

B. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{7} + \frac{23}{7}$

C. $f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{7} + \frac{3}{7}$

D. $f(x) = \frac{8\sqrt{x^3}}{7} + \frac{23}{7}$

Câu 27. Tính tích phân sau $I = \int_0^a (1+x)^n dx; n \in \mathbb{N}^*$ (a là số thực)

A. $\frac{(a+1)^n - 1}{n}$

B. $\frac{(a+1)^{n+1} - 1}{n+1}$

C. $\frac{(a+1)^{n+1} + 1}{n+1}$

D. $\frac{(a-1)^{n+1} - 1}{n+1}$

Câu 28. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{8 + \cos x} dx$. Với phép đổi biến $u = 8 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

A. $I = 2 \int_8^9 \sqrt{u} du.$

B. $I = \frac{1}{2} \int_9^8 \sqrt{u} du.$

C. $I = \int_9^8 \sqrt{u} du.$

D. $I = \int_8^9 \sqrt{u} du.$

Câu 29. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \cdot \sin x dx$

A. $I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{3\pi}{2}}$

B. $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\frac{3\pi}{2}}$

C. $I = 1 + e^{\frac{3\pi}{2}}$

D. $I = 1 - e^{\frac{3\pi}{2}}$

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + b \cdot x e^x$. Biết rằng $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Tính tổng $a + b$.

A. $\frac{-146}{13}$

B. $\frac{26}{11}$

C. $-\frac{26}{11}$

D. $\frac{146}{13}$

Câu 31. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + k}$ với $k \neq 0$?

A. $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + k}|$

B. $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + k} + \frac{x}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + k}|$

C. $f(x) = \frac{k}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + k}|$

D. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$

Câu 32. Cho $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$

trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Tính tổng $a + b + c$

A. 0

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 33. Xác định a, b, c sao cho $g(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ trong khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

A. $a = 4, b = 2, c = 2$

B. $a = 1, b = -2, c = 4$

C. $a = -2, b = 1, c = 4$

D. $a = 4, b = -2, c = 1$

Câu 34. Tìm một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x \sin \sqrt{1+x^2}$

A. $F(x) = -\sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} + \sin \sqrt{1+x^2}$

B. $F(x) = -\sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} - \sin \sqrt{1+x^2}$

C. $F(x) = \sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} + \sin \sqrt{1+x^2}$

D. $F(x) = \sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} - \sin \sqrt{1+x^2}$

Câu 35. Trong các hàm số sau:

(I) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (II) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 5$

(III) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (IV) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 2$

Hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2+1}|$

A. Chỉ (I)

B. Chỉ (III)

C. Chỉ (II)

D. Chỉ (III) và

(IV) **Câu 36.** Tìm nguyên hàm của hàm số: $y = \frac{e^x}{2^x}$

A. $\frac{e^x}{2^x \ln 2} + C$

B. $\frac{e^x}{(1 - \ln 2)2^x} + C$

C. $\frac{e^x}{x \cdot 2^x} + C$

D. $\frac{e^x \ln 2}{2^x} + C$

Câu 37. Với phép biến đổi $t = \sqrt{1+x}$ tích phân $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx$ trở thành $\int_1^2 f(t) dt$. Khi đó $f(t)$ là hàm nào trong các hàm số sau.

A. $f(t) = 2t^2 - 2t$

B. $f(t) = t^2 + t$

C. $f(t) = t^2 - t$

D. $f(t) = 2t^2 + 2t$

Câu 38. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính tích phân $\int_0^2 [4f(x) - 3] dx$.

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

Câu 39. Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3\sin x + 12} dx$, phát biểu nào sau đây đúng

A. $I > J$

B. $I = 2$

C. $J = \frac{1}{3} \ln 5$

D. $J = \frac{1}{3} \ln 5$

Câu 40. Tính tích phân $I = \int_2^3 \ln[2 + x(x^2 - 3)] dx$.

A. $-4 \ln 2 - 3$

B. $5 \ln 5 - 4 \ln 2 - 3$

C. $5 \ln 5 + 4 \ln 2 - 3$

D. $5 \ln 5 - 4 \ln 2 + 3$

Câu 41. Cho $f(x) = 3x^3 - x^2 - 4x + 1$ và $g(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 1$. Tích phân $\int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx$ bằng với tích phân nào dưới đây.

- A. $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx$ B. $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx$
 C. $\int_{-1}^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx$ D. $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx$

Câu 42. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$.

- A. $\ln x \cdot \ln \ln x + C$ B. $\ln x \cdot \ln \ln x + \ln x + C$
 C. $\ln x \cdot \ln \ln x - \ln x + C$ D. $\ln \ln x + \ln x + C$

Câu 43. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

- A. $\frac{\sqrt{3} - 2}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 2}{2}$

Câu 44. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ có kết quả dạng $I = a \ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2a + b = 1$ B. $a^2 + b^2 = 4$ C. $a - b = 1$ D. $ab = 2$

Câu 45. Nếu đặt $t = \sqrt{3 \ln^2 x + 1}$ thì tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{3 \ln^2 x + 1}} dx$ trở thành tích phân nào dưới đây?

- A. $I = \frac{1}{3} \int_1^2 dt$ B. $I = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{t} dt$ C. $I = \frac{2}{3} \int_1^{e^2} t dt$ D. $I = \frac{1}{4} \int_1^e \frac{t-1}{t} dt$

Câu 46. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

- A. $I = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$ B. $I = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$ C. $I = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $I = \frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 47. Tìm nguyên hàm của hàm số: $y = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

- A. $\tan x - \cot x + C$ B. $-\tan x - \cot x + C$ C. $\tan x + \cot x + C$ D. $\tan x + C$

Câu 48. Tìm một nguyên hàm của hàm số: $y = \frac{x^3}{\sqrt{2 - x^2}}$

A. $F(x) = x\sqrt{2-x^2}$ B. $-\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{2-x^2}$ C. $-\frac{1}{3}(x^2-4)\sqrt{2-x^2}$ D. $-\frac{1}{3}x^2\sqrt{2-x^2}$

Câu 49. Tính tích phân $J = \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$

A. $J = \frac{1}{8}$

B. $J = \frac{1}{4}$

C. $J = 2$

D. $J = 1$

Câu 50. Tính tích phân $K = \int_1^2 \frac{6^x}{9^x - 4^x} dx$

A. $K = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \ln \frac{1}{13}$

B. $K = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \ln \frac{12}{25}$

C. $K = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \ln 13$

D. $K = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \ln \frac{25}{13}$

Câu 51. Tính tích phân $K = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

A. $K = \frac{1}{e} - 2$

B. $K = \frac{1}{e}$

C. $K = -\frac{1}{e}$

D. $K = 1 - \frac{2}{e}$

Câu 52. Tìm nguyên hàm $I = \int \cos 2x \cdot \ln(\sin x + \cos x) dx$

A. $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

B. $F(x) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{2} \sin 2x + C$

C. $F(x) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

D. $F(x) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Câu 53. Tìm nguyên hàm $I = \int x^3 \sqrt{x-1} dx$.

A. $F(x) = \left[\frac{2}{9}(x-1)^4 + \frac{5}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1) \right] \sqrt{x-1} + C$

B. $F(x) = \left[\frac{2}{9}(x-1)^4 + \frac{6}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1) \right] \sqrt{x-1} + C$

C. $F(x) = \left[\frac{2}{9}(x-1)^4 + \frac{6}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{7}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1) \right] \sqrt{x-1} + C$

D. $F(x) = \left[\frac{2}{9}(x-1)^4 + \frac{6}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1) \right] \sqrt{x-1} + C$

Câu 54. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x + 1$ trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{39}{4}$. Đồ thị của hàm số $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?

A. $\frac{37}{4}$

B. $\frac{39}{4}$

C. $J = 11$

D. $J = 10$

Câu 55. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

A. $\int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_0^1 \sin x dx$

B. $\int_0^\pi \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

C. $\int_0^1 (1+x)^x dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\int_{-1}^1 x^{2007} (1+x) dx = \frac{2}{2009}$

Câu 56. Giả sử tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = a\pi + b$. Tìm phần nguyên của tổng $a + b$

A. 1

B. -1

C. 0

D. -2

Câu 57. Cho tích phân $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$. Với phép đổi biến $t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ thì kết quả nào sau đây đúng ?

A. $I = - \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2}{t^2 - 1} dt$

B. $I = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$

C. $I = - \int_2^3 \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$

D. $I = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2}{t^2 - 1} dt$

Câu 58. Tính tích phân $I = \int_0^1 x \left(\frac{2}{1+x^2} + e^x \right) dx$.

A. $I = 1 + \ln 2$

B. $I = 1 - \ln 2$

C. $I = 3 - \ln 2$

D. $I = 3 + \ln 2$

Câu 59. Giả sử tích phân $I = \int_1^e x(x + \ln x) dx = a + b.e^2 + c.e^3$. Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $b + c = a$

B. $b + c = -a$

C. $b - c = a$

D. $b - c = -a$

Câu 60. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x \sin 2x) dx$.

A. $I = \frac{\pi^4}{64} + \frac{\pi}{4}$

B. $I = \frac{\pi^4}{64} + \frac{\pi}{2}$

C. $I = \frac{\pi^4}{64} - \frac{\pi}{2}$

D. $I = \frac{\pi^4}{64} - \frac{\pi}{4}$

Câu 61. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(x + \sin x) dx}{\cos^2 x}$.

A. $I = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \ln 2$

B. $I = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2$

C. $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2$

D. $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$

Câu 62. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x} dx$.

A. $I = \frac{1}{8}$

B. $I = \frac{1}{2}$

C. $I = \frac{1}{4}$

D. $I = \frac{3}{2}$

Câu 63. Giả sử tích phân $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}+1}{x+2} dx = a + b \cdot \ln c$. Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $a = b = c$

B. $a < b < c$

C. $a > b > c$

D. $a = b < c$

Câu 64. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{(2x^2 + 1)^3} dx$.

A. $I = -\frac{1}{9}$

B. $I = \frac{1}{9}$

C. $I = \frac{8}{9}$

D. $I = -\frac{8}{9}$

Câu 65. Giả sử tích phân $\int_5^{10} \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2 - 4}}{x - 2} = \frac{63}{2} + a \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Tìm giá trị của a.

A. $a = 4$

B. $a = 5$

C. $a = 2$

D. $a = 1$

Câu 66. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x+1) \cdot e^x dx$.

A. $I = 1 + e$

B. $I = 1 - e$

C. $I = -e$

D. $I = e$

Câu 67. Xét các tích phân $I = \int_0^7 x \cdot \sqrt[3]{x+1} dx$ và $J = \int_0^8 x \cdot \sqrt{x+1} dx$. Nhận xét nào dưới đây là đúng.

A. $J = \frac{1}{8} I$

B. $I = \frac{1}{4} J$

C. $I = J$

D. $I \neq J$

Câu 68. Tính tích phân $I = \int_0^1 (\sqrt{3x+1} - 2) dx$.

A. $I = \frac{4}{9}$

B. $I = -\frac{4}{9}$

C. $I = 2$

D. $I = 1$

Câu 69. Tính tích phân $\int_1^e x^2 (\ln x + (x^3 - 1)^2) = a \cdot e^9 + b \cdot e^6 + c \cdot e^3$ Đẳng thức nào dưới đây là đúng.

A. $a + b + c = 0$

B. $a + b + 2c = 0$

C. $a + b - c = 0$

D. $a + b - 2c = 0$

Câu 70. Tính tích phân $I = \int_0^1 x(2 + e^x) dx$

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{1}{4}$

C. $I = 2$

D. $I = 1$

Câu 71. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$.

A. $I = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$

B. $I = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$

C. $I = -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$

D. $I = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$

Câu 72. Tính tích phân $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3} dx$.

A. $I = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$

B. $I = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3$

C. $I = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3$

D. $I = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{3}$

Câu 73. Tính tích phân $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 2 \cos x) \sin x dx$.

A. $J = \frac{1}{8}$

B. $J = \frac{1}{4}$

C. $J = 2$

D. $J = 1$

Câu 74. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x \ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx$.

A. $I = \frac{1}{2} \ln 2$

B. $I = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$

C. $I = \frac{1}{2} \ln 4$

D. $I = \frac{1}{4} \ln 2$

Câu 75. Tính tích phân $J = \int_0^1 (2 + x^3 + xe^x) dx$.

A. $J = \frac{9}{8}$

B. $J = \frac{9}{4}$

C. $J = 2$

D. $J = -1$

Câu 76. Tính tích phân $\int_0^1 [3x^2 - 2x + \ln(2x + 1)] dx$.

A. $I = -1 + \ln 2$

B. $I = -1 + \frac{3}{2} \ln 3$

C. $I = -1 + \frac{3}{2} \ln 2$

D. $I = 1 + \frac{3}{2} \ln 3$

Câu 77. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + x) \cdot \cos x dx$.

A. $I = -2 + e + \frac{\pi}{2}$

B. $I = -2 + e - \frac{\pi}{2}$

C. $I = -2 + e$

D. $I = e + \frac{\pi}{2}$

Câu 78. Biểu thức nào sau đây bằng với tích phân $I = \int_{-a}^a f(x) dx$

A. $\int_0^a (f(x) - f(-x)) dx$

B. $\int_0^a (f(x) - f(a - x)) dx$

C. $\int_0^a (f(x - a) + f(-x)) dx$

D. $\int_0^a (f(x - a) - f(a - x)) dx$

Câu 79. Cho $I = \int_0^4 |2-x| dx$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $I = \int_0^4 |x-2| dx$

B. $I = \int_0^1 |2-x| dx + \int_1^4 |2-x| dx$

C. $I = \int_4^0 dx$

D. $I = \int_0^2 |2-x| dx - \int_2^4 |x-2| dx$

Câu 80. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) dx = \frac{\pi}{a} - \frac{1}{b}$, với a, b là các số nguyên dương. Tính $2 \cdot \sin \left(\frac{6\pi}{a} \right)$.

A. 2

B. $\sqrt{2}$

C. $2 + \sqrt{2}$

D. 0

Câu 81. Cho các tích phân $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$, $J = \int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx$. Khẳng định nào

sau đây đúng

A. $I < 2J$

B. $I = 3J$

C. $I + 2J = 5$

D. $5I = 12J$

Câu 82. Cho $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. $f(\pi) = 3\pi$

B. $f(x) = 3x - 5 \cos x$

C. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

D. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$

Câu 83. Biết $\int_0^a \left(4 \sin^4 x - \frac{3}{2} \right) dx = 0$ và $a \in (0; \pi)$ Tìm giá trị a .

A. $a = \frac{\pi}{4}$

B. $a = \frac{\pi}{8}$

C. $a = \frac{\pi}{2}$

D. $a = \frac{\pi}{3}$

Câu 84. Ký hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbb{R}$. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Khi nào $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K

A. $F(x) = f'(x)$

B. $F(x) = f'(x) + C$, C là hằng số tùy ý.

C. $F'(x) = f(x) + C$, C là hằng số tùy ý.

D. $F'(x) = f(x)$

Câu 85. Cho $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ xác định trên khoảng $(-\infty; 0)$. Biến đổi nào sau đây là **sai**?

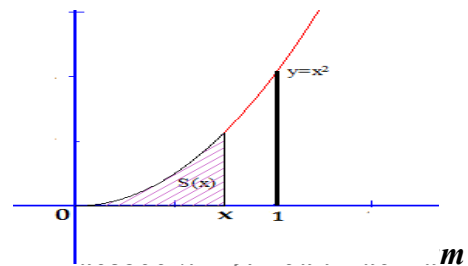
A. $\int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int 2x^2 dx + \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

B. $\int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = 2 \int x^2 dx + \int \left(\sqrt[3]{x} \right)^{-1} dx$.

C. $\int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = 2 \int x^2 dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx$.

D. $\int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \frac{2}{3} x^3 + \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + C$

Câu 86. Cho đường cong $y = x^2$. Với mỗi $x \in [0; 1]$, gọi $S(x)$ là diện tích của phần hình thang cong đã cho nằm giữa hai đường vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ 0 và x (xem hình vẽ). Khi đó, khẳng định nào sau đây đúng.



- A. $S(x) = x^2$ B. $S'(x) = x^2$
 C. $S(x) = \frac{x^2}{2}$ D. $S'(x) = 2x$

Câu 87. Tìm hàm số $y = f(x)$ biết $dy = 35\sin^4 x \cos^3 x dx$ và $f(\frac{\pi}{2}) = -2$

- A. $f(x) = 5\sin^5 x + 7\sin^7 x - 2$ B. $f(x) = 5\sin^5 x - 7\sin^7 x - 2$
 C. $f(x) = 7\sin^5 x + 5\sin^7 x - 2$ D. $f(x) = 7\sin^5 x - 5\sin^7 x - 2$

Câu 88. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2$. Tính giá trị tích

phân $\int_0^1 f(x)dx$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 1 D. 2

Câu 89. Hàm số $F(x) = e^x + \tan x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào dưới đây.

- A. $f(x) = e^x - \frac{1}{\sin^2 x}$ B. $f(x) = e^x + \frac{1}{\sin^2 x}$
 C. $f(x) = e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ D. $f(x) = e^x - \frac{1}{\sin^2 x} + 1$

Câu 90. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \sqrt{1+|x|} dx$

- A. $3\sqrt{3} - \frac{3}{4}$ B. $4\sqrt{3} + \frac{3}{4}$ C. $4\sqrt{3} - \frac{4}{3}$ D. $3\sqrt{3} + \frac{3}{4}$

Câu 91. Giả sử $I = \int_0^{\pi} 7x \cos x dx = f(x) \sin x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x^3 \sin x dx$. Tìm hàm số $f(x)$

- A. $6x^2$ B. $-\frac{x^4}{2}$ C. $\frac{x^4}{2}$ D. $2x^3$

Câu 92. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Tính tích phân

$I = \int_1^3 \frac{\sin 2x}{x} dx$

- A. $I = F(3) - F(1)$ B. $I = F(6) - F(2)$
 C. $I = F(4) - F(2)$ D. $I = F(3) - F(2)$

Câu 93. Tính tích phân $\int_0^1 |3x-1| - 2|x| dx$

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $-\frac{11}{6}$ D. 0

Câu 94. Tính tích phân sau $I = \int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx; n \in \mathbb{N}^*$

- A. $\frac{2^{n+1}+1}{3(n+1)}$ B. $\frac{2^n-1}{3(n+1)}$ C. $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ D. $\frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$

Câu 95. Tính tích phân $I(m) = \int_0^1 |x^2 - 2x + m| dx$ với $m < 0$ (m là tham số)

- A. $-\frac{2}{3} + m$ B. $\frac{1}{3} + m$ C. $\frac{2}{3} - m$ D. $\frac{2}{3} + m$

Câu 96. Mệnh đề nào sai trong các mệnh đề sau.

- A. $\int_0^1 (x^3 - x^2) dx = \int_1^0 (x^2 - x^3) dx$
 B. $\int_0^1 (x^3 - x^2) dx = \int_0^2 (x^3 - x^2) dx + \int_2^1 (x^3 - x^2) dx$
 C. $\int_0^1 (x^3 - x^2) dx = \int_0^2 (x^3 - x^2) dx - \int_2^1 (x^3 - x^2) dx$
 D. $\int_0^1 (x^3 - x^2) dx = \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 x^2 dx$

Câu 97. Tìm giá trị K thỏa $\int_{-2}^0 \left(4 - e^{-\frac{x}{2}}\right) dx = K - 2e$

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12,5

Câu 98. Biết $F'(x) = \frac{a \sin^2 x \cos^2 x + b\sqrt{3}}{\sin^2 x \cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{2}$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi$. Tìm hàm số $F(x)$.

- A. $F(x) = x + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tan x - \cot x - \frac{\pi}{12}$. B. $F(x) = x + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tan x - \cot x$.
 C. $F(x) = 9x - 2\pi$. D. $F(x) = x - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tan x - \cot x + \frac{\pi}{6}$.

Câu 99. Tìm nguyên hàm của hàm số: $y = \int \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx$

- A. $xe^x + 1 - \ln|xe^x + 1| + C$ B. $e^x + 1 - \ln|xe^x + 1| + C$
 C. $xe^x + 1 - \ln|xe^{-x} + 1| + C$ D. $xe^x + 1 + \ln|xe^x + 1| + C$

Câu 100. Biết $\int x \sin 3x dx = ax \cos 3x - b \sin 3x + C$. Tính giá trị $a+6b$

- A. -21 B. -1 C. -5 D. -7

Câu 101. Biết $\int x^2 e^x dx = (x^2 + mx + n)e^x + C$ Tìm giá trị của tích $m.n$

A. 0 B. 4 C. 6 D. -4

Câu 102. . Biết $\int \frac{2}{\cos^2(3x-1)} dx = \frac{a}{b} \tan(3x-1) + C$ Tổng $a+b$ có thể nhận giá trị nào dưới đây?

A. -5 B. -1 C. 5 D. 7

Câu 103. Biết $\int 3e^x(e^x - 1)^6 dx = \frac{a}{b}(e^x - 1)^k + C$ Tổng $a+b+2k$ có thể nhận giá trị nào dưới đây?

A. 33 B. 32 C. 24 D. 28

Câu 104. Biết $\int \frac{(2+3\ln x)^2}{x} dx = \frac{1}{a}(2+3\ln x)^b + C$ Tìm giá trị của tích $a.b$

A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

Câu 105. Biết $\int x\sqrt{x^2+2} dx = \frac{a}{b}(x^2+2)\sqrt{x^2+2} + C$, tính tổng $a+b$ biết a và b là hai số nguyên tố cùng nhau.

A. 3 B. 5 C. 1 D. 4

Câu 106. Biết $\int \frac{1}{\cos^2 3x(1+\tan 3x)} dx = \frac{a}{b} \ln|1+\tan 3x| + C$, tính tổng $2a+b$ biết a và b là hai số nguyên tố cùng nhau.

A. 5 B. 10 C. 7 D. 4

Câu 107. Biết $\int x \sin \frac{x}{3} dx = ax \cos \frac{x}{3} - b \sin \frac{x}{3} + C$, tính tổng $a+b$.

A. 9 B. 2 C. 6 D. 12

Câu 108. Biết $\int x \ln(1-x) dx = \frac{x^2}{m} \ln(1-x) - \frac{1}{n} \ln(1-x) - \frac{1}{k}(1-x)^2 + C$, tính giá trị biểu thức $2a+b+n$.

A. 2 B. 12 C. 9 D. 6

Câu 109. Biết $\int x \sin x dx = \frac{a}{b} x \cos 2x + \frac{1}{n} \sin 2x + C$, tính tổng $2a+b$ biết a và b là hai số nguyên tố cùng nhau

A. 4 B. 10 C. 2 D. 6

Câu 110. Biết $\int (x+3)e^{-2x} dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C$, tính giá trị biểu thức $m^2 + n^2$

A. 5 B. 10 C. 41 D. 65

Câu 111. Cho $I = \int x^2 e^{x^3} dx$ và phép đổi biến $u = x^3$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng.

A. $I = 3 \int e^u du$ B. $I = \int e^u du$ C. $I = \frac{1}{3} \int e^u du$ D. $I = \int u e^u du$

Câu 112. Cho $I = \int x^5 \sqrt{x^2+15} dx$ và phép đổi biến $u = \sqrt{x^2+15}$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng.

A. $I = \int (u^6 - 30u^4 - 225u^2) du$ B. $I = \int (u^4 - 15u^2) du$
C. $I = \int (u^6 - 30u^2 + 225u^2) du$ D. $I = \int (u^5 - 15u^3) du$

Câu 113. Biết $\int_0^2 \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{a} \ln b$, tính giá trị biểu thức $a^2 + b$

A. 2

B. 10

C. 14

D. 12

Câu 114. Biết $\int_0^3 \frac{-x+8}{x^2+5x+4} dx = 3\ln a - 4\ln \frac{b}{a}$ (a, b nguyên tố cùng nhau) tính giá trị biểu thức

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

A. $\frac{7}{4}$

B. $\frac{16}{49}$

C. $\frac{49}{16}$

D. $\frac{1}{16}$

Câu 115. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $x^2 - 5x + 6 = 0$

B. $x^2 - 9 = 0$

C. $2x^2 - x - 1 = 0$

D. $x^2 + 4x - 12 = 0$

Câu 116. Cho $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{a} dt$. Chọn khẳng định đúng.

A. $a = 3$

B. $a^2 = 3$

C. $a = -\sqrt{3}$

D. $a = \frac{1}{3}$

Câu 117. Biết $I = \int_1^4 \frac{dx}{x^2(x+1)} = a + \ln b$. Chọn đáp án đúng.

A. $a - b = 0$

B. $2a + b = 4$

C. $\frac{1}{2}a + b = 1$

D. $ab = 4$

PHẦN 2: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

Câu 1. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = (2x+1)^{\frac{1}{3}}, x=0, y=3$ quay quanh trục Oy

A. $V = \frac{50\pi}{7}$

B. $V = \frac{480\pi}{7}$

C. $V = \frac{480\pi}{9}$

D. $V = \frac{48\pi}{7}$

Câu 2. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = (e+1)x, y = (1+e^x)x$

A. $S = \frac{e}{2} - 2$

B. $S = \frac{e}{2} - 1$

C. $S = \frac{e}{2} + 1$

D. $S = \frac{e}{3} - 1$

Câu 3. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x \cos x + \sin^2 x}, y=0, y=\frac{\pi}{2}, x=0$. quay quanh trục Ox.

A. $V = \frac{\pi(3\pi-4)}{4}$

B. $V = \frac{\pi(3\pi+4)}{4}$

C. $V = \frac{\pi(5\pi+4)}{4}$

D. $V = \frac{\pi(3\pi+4)}{5}$

Câu 4. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sin 2x, y = \cos x, x=0, x=\frac{\pi}{2}$.

A. $S = \frac{1}{4}$ B. $S = \frac{1}{4}$ C. $S = \frac{1}{6}$ D. $S = \frac{3}{2}$

Câu 5. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sin^2 x + x, y = x (0 < x < \pi)$.

A. $S = \pi$ B. $S = \frac{\pi}{2}$ C. $S = 2\pi$ D. $S = \frac{\pi}{3}$

Câu 6. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = -2x + x^2, y = x$.

A. $S = 0$ B. $S = \frac{9}{2}$ C. $S = \frac{7}{2}$ D. $S = -\frac{9}{2}$

Câu 7. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = \ln x, x = e, y = 0$. quay quanh trục Ox

A. $V = \pi e$ B. $V = \pi(e-1)$ C. $V = \pi(e+1)$ D. $V = \pi(e-2)$

Câu 8. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = \ln x, x = 1, y = 0, x = 2$. quay quanh trục Ox

A. $V = 2\pi(\ln 2 - 1)^2$ B. $V = 2\pi(\ln 2 + 1)^2$ C. $V = 2\pi(2\ln 2 - 1)^2$ D. $V = 2\pi(2\ln 2 + 1)^2$

Câu 9. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = x^3, x = 3, y = 8$ quay quanh trục Ox

A. $V = \pi e$ B. $V = \pi(e-1)$ C. $V = \pi(e+1)$ D. $V = \pi(e-2)$

Câu 10. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^3, y = 0, x = \frac{3}{2}$

A. $S = \frac{65}{64}$ B. $S = \frac{81}{64}$ C. $S = 4$ D. $S = \frac{81}{4}$

Câu 11. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$

A. $S = 4 + e$ B. $S = e^2 - 1$ C. $S = e^2 - e + 2$ D. $S = \frac{e^2}{2} - 3$

Câu 12. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \frac{2x+1}{x+1}$, trục Ox và trục Oy. Tính

thể tích của khối tròn xoay khi cho hình (H) quay quanh trục Ox

A. $V = (4 - 3\ln 2)\pi$ B. $V = 4\pi \ln 2$ C. $V = (3 - 4\ln 2)\pi$ D. $V = 3\pi$

Câu 13. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 2x, y = 0$

A. $S = \frac{4}{3}$ B. $S = \frac{5}{3}$ C. $S = \frac{11}{12}$ D. $S = \frac{68}{3}$

Câu 14. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \sqrt{x}$

A. $S = \frac{1}{2}$ B. $S = \frac{1}{3}$ C. $S = \frac{1}{4}$ D. $S = \frac{1}{5}$

Câu 15. Quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ quay một vòng quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được sinh ra.

A. $V = \frac{64\pi}{5}$ B. $V = \frac{128\pi}{5}$ C. $V = \frac{256\pi}{5}$ D. $V = \frac{152\pi}{5}$

Câu 16. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sin x$; $y = \cos x$; $x = 0$; $x = \pi$

A. $S = 2$ B. $S = 3$ C. $S = 2\sqrt{2}$ D. $S = 3\sqrt{2}$

Câu 17. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$. quay quanh trục Ox

A. $V = \pi e$ B. $V = \pi(e-1)$ C. $V = \pi(e+1)$ D. $V = \pi(e-2)$

Câu 18. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, trục Ox và các đường thẳng $x = 0$; $x = \pi$. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình (H) quay quanh trục Ox

A. $V = 2\pi$ B. $V = 3\pi$ C. $V = \frac{3}{2}\pi$ D. $V = \frac{2}{3}\pi$

Câu 19. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^3}{1-x^2}$; $y = x$

A. $S = 1$ B. $S = 1 + \ln 2$ C. $S = 1 - \ln 2$ D. $S = 2 - \ln 2$

Câu 20. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 3x - x^2$ và trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = \frac{81}{11}\pi$ B. $V = \frac{83}{11}\pi$ C. $V = \frac{81}{10}\pi$ D. $V = \frac{83}{10}\pi$

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường (C): $y = x^2 + 2x$; $y = x + 2$

A. $S = \frac{11}{2}$ B. $S = \frac{5}{2}$ C. $S = \frac{9}{2}$ D. $S = \frac{7}{2}$

Câu 22. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường (C): $y = \frac{1}{x}$; $d: y = -2x + 3$

A. $S = \frac{3}{4} - \ln 2$ B. $S = \ln 2 - \frac{3}{4}$ C. $S = \frac{1}{24}$ D. $S = \frac{1}{24}$

Câu 23. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sqrt{x} - 1$; $y = 0$; $x = 4$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là bao nhiêu?

A. $V = \frac{7}{6}\pi$ B. $V = \frac{5}{6}\pi$ C. $V = \frac{7}{6}\pi^2$ D. $V = \frac{5}{6}\pi^2$

Câu 24. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 3x$; $y = x$; $x = 1$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là bao nhiêu?

A. $\frac{8\pi}{3}$ B. $\frac{8\pi^2}{3}$ C. $8\pi^2$ D. 8π

Câu 25. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = 2x$; $y = \frac{8}{x}$; $x = 3$

A. $S = 5 - 8\ln 6$ B. $S = 5 + 8\ln \frac{2}{3}$ C. $S = 26$ D. $S = \frac{14}{3}$

Câu 26. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = m\cos x$; Ox ; $x = 0$; $x = \pi$ bằng 3π . Khi đó, tìm giá trị của m

- A. $m = -3$ B. $m = 3$ C. $m = -4$ D. $m = \pm 3$

Câu 27. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(C): y = \sqrt{x}; (d): y = x - 2; Ox$

- A. $\frac{10}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{122}{3}$ D. $\frac{128}{3}$

Câu 28. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|; y = |x| + 5$

- A. $S = 1$ B. $S = \frac{73}{3}$ C. $S = \frac{7}{3}$ D. $S = 23$

Câu 29. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y^2 = 4x; y^2 = (4 - x)^3$

- A. $S = \frac{128}{15}$ B. $S = \frac{128\sqrt{2}}{15}$ C. $S = \frac{128\sqrt{2}}{30}$ D. $S = \frac{\sqrt{2}}{15}$

Câu 30. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 + 2x = 0$.

- A. $S = 1$ B. $S = 1 + \ln 2$ C. $S = 1 - \ln 2$ D. $S = 2 - \ln 2$

Câu 31. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^3}{1 - x^2}; y = x$

- A. $S = 3\pi$ B. $S = \frac{3\pi}{2}$ C. $S = \pi$ D. $S = \frac{\pi}{2}$

Câu 32. Giả sử hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}; y = \frac{a - ax}{1 + a^4}$ diện tích lớn nhất. Tìm giá trị của a biết a là số thực dương.

- A. $a = \sqrt[4]{3}$ B. $a = \sqrt[3]{5}$ C. $a = \sqrt[4]{5}$ D. $a = \sqrt[3]{4}$

Câu 33. Trên parabol $(P): y = x^2$ ta lấy hai điểm A, B sao cho $AB = 2$. Tìm vị trí của A và B để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng AB và (P) lớn nhất.

- A. $A(-1, 1), B(2, 4)$ B. $A(-1, 1), B(1, 1)$ C. $A(-1, 1), B(2, 4)$ D. $A(1, 1), B(2, 4)$

Câu 34. Trên parabol $(P): y = x^2$ ta lấy hai điểm $A(-1, 1), B(2, 4)$. Tìm trên cung AB điểm M sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất.

- A. $M(0, 0)$ B. $M(1, 1)$ C. $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ D. $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Câu 35. Đường thẳng $(d): y = mx + 2$ giao với parabol $(P): y = x^2 + 1$ tạo thành hình phẳng có diện tích nhỏ nhất. Tìm m .

- A. $m = 1$ B. $m = 0$ C. $m = -1$ D. $m = -2$

Câu 36. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{\ln(1 + x^3)}, y = 0, x = 1$ quay quanh trục Ox

- A. $V = \frac{\pi(2\ln 2 - 1)}{3}$ B. $V = \frac{\pi(2\ln 2 + 1)}{3}$ C. $V = \frac{\pi(2\ln 2 - 1)}{4}$ D. $V = \frac{\pi \cdot \ln 2}{3}$

Câu 37. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ và các đường thẳng $x = 1, y = 0, x = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Oy

- A. $V = \pi$ B. $V = \pi \ln 2$ C. $V = \pi \ln 4$ D. $V = 2\pi$

Câu 38. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình tròn $x^2 + (y-3)^2 \leq 4$ quanh trục Ox

- A. $V = 4\pi$ B. $V = 4\pi^2$ C. $V = 8\pi$ D. $V = 8\pi^2$

Câu 39. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình tròn $x^2 + (y-3)^2 \leq 4$ quanh trục Oy

- A. $V = \frac{32}{3}\pi$ B. $V = \frac{32}{3}\pi^2$ C. $V = 8\pi$ D. $V = 8\pi^2$

Câu 40. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay elip $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ quanh trục Ox

- A. $V = 4\pi$ B. $V = 4\pi^2$ C. $V = \frac{128}{3}\pi$ D. $V = \frac{128}{3}\pi^2$

Câu 41. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay elip $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ quanh trục Oy

- A. $V = 64\pi$ B. $V = 4\pi^2$ C. $V = \frac{128}{3}\pi$ D. $V = \frac{128}{3}\pi^2$

Câu 42. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2, y = 0$ quay quanh trục Oy

- A. $V = \frac{8\pi}{3}$ B. $V = \frac{3\pi}{8}$ C. $V = \frac{16}{15}\pi$ D. $V = \frac{15}{16}\pi$

Câu 43. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 1, y = -3x + 10$ quay quanh trục Oy

- A. $V = \frac{61\pi}{5}$ B. $V = \frac{61}{5}\pi^2$ C. $V = \frac{101}{54}\pi$ D. $V = \frac{101}{54}\pi^2$

Câu 44. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \frac{x^2}{27}, y = \frac{27}{x}$ quay quanh trục Ox

- A. $V = \frac{583}{3}$ B. $V = \frac{583}{3}\pi$ C. $V = 81 + 27 \ln 3$ D. $V = (81 + 27 \ln 3)\pi$

Câu 45. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \frac{x^2}{27}, y = \frac{27}{x}$ quay quanh trục Ox

- A. $V = \frac{583}{3}$ B. $V = \frac{583}{3}\pi$ C. $V = 81 + 27 \ln 3$ D. $V = (81 + 27 \ln 3)\pi$

Câu 46. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \frac{x^2}{27}, y = \frac{27}{x}$ quay quanh trục Oy

- A. $V = \frac{583}{3}$ B. $V = \frac{583}{3}\pi$ C. $V = 81 + 27 \ln 3$ D. $V = (81 + 27 \ln 3)\pi$

Câu 47. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 1, y = -3x + 10$ quay quanh trục Oy

- A. $V = \frac{61\pi}{5}$ B. $V = \frac{61}{5}\pi^2$ C. $V = \frac{101}{54}\pi$ D. $V = \frac{101}{54}\pi^2$

Câu 48. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = (x-2)^2, y = 4$ quay quanh trục Ox

- A. $V = \frac{128\pi}{3}$ B. $V = \frac{256}{5}\pi^2$ C. $V = \frac{256}{5}\pi$ D. $V = \frac{101}{54}\pi^2$

Câu 49. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = (x-2)^2, y = 4$ quay quanh trục Oy

- A. $V = \frac{128\pi}{3}$ B. $V = \frac{256}{5}\pi^2$ C. $V = \frac{256}{5}\pi$ D. $V = \frac{101}{54}\pi^2$

Câu 50. Tính thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \frac{x^3}{3}$ quay quanh trục Ox

- A. $V = \frac{486\pi}{35}$ B. $V = \frac{256}{35}\pi^2$ C. $V = \frac{256}{5}\pi$ D. $V = \frac{35}{486}\pi^2$

PHẦN 3: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG THỰC TẾ

Câu 1. Giả sử sau t năm, dự án đầu tư thứ nhất sẽ phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_1(t) = t^2 + 50$ trăm đô la/năm, trong khi đó dự án đầu tư thứ hai phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_2(t) = 200 + 5t$ trăm đô la/năm. Tính lợi nhuận vượt thực tế cho khoảng thời gian để tốc độ sinh lợi nhuận của dự án đầu tư thứ hai vượt bằng dự án đầu tư thứ nhất?

- A. 1690 trăm đô B. 1695 trăm đô C. 1687,5 trăm đô D. 1685 trăm đô

Câu 2. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2 (m/s^2)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc?

- A. 11100 m B. $\frac{6800}{3}m$ C. $\frac{5800}{3}m$ D. $\frac{4300}{3}m$

Câu 3. Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng

$h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không chứa nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

- A. 2,64 B. 2,65 C. 2,66 D. 2,67

Câu 4. Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t (m/s)$. Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét?

- A. 16 B. 130 C. 45 D. 170

Câu 5. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) (m/s)$ có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1} (m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là 6m/s. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần bằng với giá trị nào nhất.

- A. 10m B. 11m C. 12m D. 13m

Câu 6. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{8000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 350.000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu con? (lấy xấp xỉ hàng đơn vị).

- A. 378668 B. 378688 C. 376668 D. 388668

Câu 7. Học sinh lần đầu thử nghiệm “tên lửa tự chế” phóng từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc 15m/s. Hỏi sau 2,5s tên lửa lên đến độ cao bao nhiêu? (giả sử bỏ qua sức cản gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực $g = 9,8m/s^2$)

- A. 68,125(m) B. 6,875(m) C. 30,625(m) D. 61,25(m)

Câu 8. Một khối cầu có bán kính 5dm, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm 3dm để làm một chiếc lu đựng. Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

- A. $132\pi(dm^3)$ B. $41\pi(dm^3)$ C. $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$ D. $43\pi(dm^3)$

Câu 9. Một vật di chuyển với gia tốc $a(t) = -20(1+2t)^{-2} (m/s^2)$. Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là 30m/s. Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

- A. $S = 106m$ B. $S = 107m$ C. $S = 108m$ D. $S = 109m$

Câu 10. Trên sân bay một máy bay cất cánh trên đường băng d (từ trái sang phải) và bắt đầu rời mặt đất tại điểm O . Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt đất và cắt mặt đất theo giao tuyến là đường băng d của máy bay. Dọc theo đường băng d cách vị trí máy bay cất cánh O một khoảng 300(m) về phía bên phải có 1 người quan sát A . Biết máy bay chuyển động trong mặt phẳng (P) và độ cao y của máy bay xác định bởi phương trình $y = x^2$ (với x là độ dời của máy bay dọc theo đường thẳng d và tính từ O). Tìm khoảng cách ngắn nhất từ người A (đứng cố định) đến máy bay.

- A. 300(m) B. $100\sqrt{5}(m)$ C. 200(m) D. $100\sqrt{3}(m)$

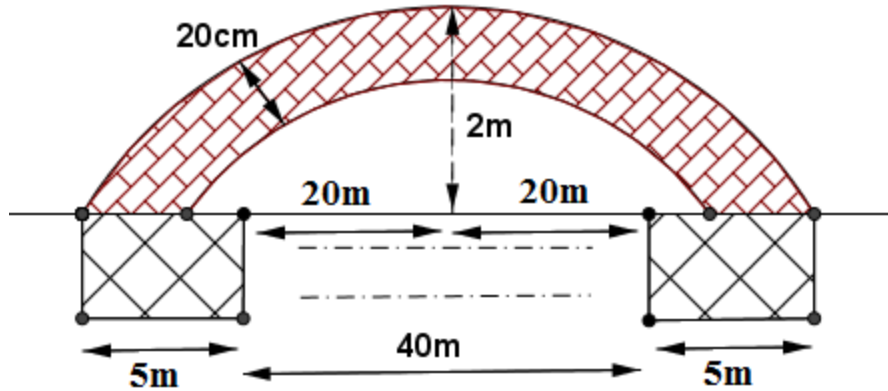
Câu 11. Một ô tô chạy với vận tốc 20m/s thì người lái xe đạp phanh còn được gọi là “thắng”. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20(m/s)$. Trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu mét?

- A. 2 B. 5 C. 3 D. 4

Câu 12. Một ô tô xuất phát với vận tốc $v_1 t = 2t + 10 m/s$ sau khi đi được một khoảng thời gian t_1 thì bất ngờ gặp chướng ngại vật nên tài xế phanh gấp với vận tốc $v_2 t = 20 - 4t m/s$ và đi thêm một khoảng thời gian t_2 nữa thì dừng lại. Biết tổng thời gian từ lúc xuất phát đến lúc dừng lại là 4 (s). Hỏi xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét.

- A. 47 B. 50 C. 57 D. 64

Câu 13. Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài 500m, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol, mỗi nhịp cách nhau 40m, biết 2 bên đầu cầu và giữa mỗi nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng 5m. Bề dày nhịp cầu không đổi là 20cm. Biết 1 nhịp cầu như hình vẽ. Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu (bỏ qua diện tích cốt sắt trong mỗi nhịp cầu)



- A. $20m^3$ B. $40m^3$ C. $50m^3$ D. $100m^3$

Câu 14. Một ô tô đang chuyển động với vận tốc a (m/s) thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = a - 40t$ (m/s) (t là khoảng thời gian tính bằng s kể từ lúc đạp phanh). Kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô đi được quãng đường dài 3m. Tìm giá trị của a .

- A. $a = 10$ B. $a = 15$ C. $a = 20$ D. $a = 40$

Câu 15. Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì nhìn thấy biển giới hạn tốc độ, người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -4t + 20$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi sau khi đạp phanh, từ lúc vận tốc còn 15m/s đến khi vận tốc của người còn 10 m/s thì ô tô đã di chuyển được quãng đường bao nhiêu mét?

- A. 37,5 B. 150 C. 15,625 D. 21,875

Câu 16. Một lực có độ lớn 40 N (newton) cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm lên 15 cm. Biết rằng theo định luật trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm (đơn vị độ dài) so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo tri lại (chống lại) với một lực cho bởi công thức , trong đó là hệ số đàn hồi (hoặc độ cứng) của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 18 cm ? (kí hiệu là đơn vị của công).

- A. 1,56j B. 0,94j C. 1,78j D. 3,96j

Câu 17 Một xe máy đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì lái xe bất ngờ tăng tốc sau 15s xe máy đạt vận tốc 15(m/s) . Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 30 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc ?

- A. 270 m B. 450m C. 360m D. 540m

Câu 18. Khi một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 0,15m bị kéo căng thêm $x(m)$ thì chiếc lò xo chống tri lại với một lực là $f(x) = 800x$. Biết rằng theo định luật trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm (đơn vị độ dài) so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo tri lại (chống lại) với một lực cho bởi công thức , trong đó là hệ số đàn hồi (hoặc độ cứng) của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 18 cm ? (kí hiệu là đơn vị của công).

- A. 0,36j B. 0,72j C. 36j D. 72j

Câu 19. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1,2 + \frac{t^2 + 4}{3 + t}$ (m/s) . Hỏi rằng trong 20s đầu tiên vật di chuyển được bao nhiêu mét ?

A. 189

B. 190

C. 191

D. 192

Câu 20. Một bác thợ xây đang bơm nước vào bể chứa. Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = 3at^2 + bt$ và lúc đầu bồn không chứa nước. Sau 5s thể tích nước trong bể là $150m^3$, sau 10s thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm được 20 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

A. $8400m^3$

B. $2200m^3$

C. $4200m^3$

D. $600m^3$

Câu 21. Người ta cần đúc một chiếc chuông cao $4m$ và bán kính miệng chuông là $2\sqrt{2}m$. Giả sử khi cắt chuông bằng một mặt phẳng qua trục của nó người ta thu được thiết diện có đường viền là một phần parabol. Tính thể tích quả chuông cần đúc.

A. 6π

B. 12π

C. $2\pi^3$

D. 16π

Câu 22. Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có biểu thức có biểu thức cường độ là $i = I_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})A$. Biết $i = q'$ với q là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t = 0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian bằng $\frac{\pi}{\omega}$ là bao nhiêu?

A. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$

B. $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$

C. 0

D. $\frac{2I_0}{\omega}$

Câu 23. Trong kinh tế học, thặng dư tiêu dùng của hàng hóa được tính bằng công thức

$$I = \int_0^a [p(x) - P] dx. \text{ Với } p(x) \text{ là hàm biểu thị biểu thị giá mà một công ty đưa ra để bán được } x$$

đơn vị hàng hóa. a là số lượng sản phẩm đã bán ra, $P = p(a)$ là mức giá bán ra ứng với số lượng sản phẩm là a . Cho $p = 1200 - 0,2x - 0,0001x^2$, (đơn vị tính là USD) Tìm thặng dư tiêu dùng khi số lượng sản phẩm bán là 500

A. 33333,3 USD

B. 1108333,3 USD

C. 570833,3 USD

D. 5000 USD

Câu 24. Một chất điểm A từ trạng thái nghỉ chuyển động với vận tốc nhanh dần đều. 8 giây sau nó đạt đến vận tốc 6m/s. Từ thời điểm đó nó chuyển động đều. Một chất điểm B khác xuất phát từ cùng vị trí với A nhưng chậm hơn nó 12 giây với vận tốc nhanh dần đều và đuổi kịp A sau 8 giây (kể từ lúc B xuất phát). Tìm vận tốc của B tại thời điểm đó.

A. 4m/s

B. 20m/s

C. 24m/s

D. 30m/s

Câu 25. Một Bác thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2dm và 4dm. Tính thể tích cái lọ.

A. $8\pi dm^2$

B. $\frac{15}{2}\pi dm^3$

C. $\frac{14}{3}\pi dm^2$

D. $\frac{15}{2}dm^2$

Câu 26. Một tên lửa A xuất phát từ vị trí T, chuyển động thẳng nhanh dần đều; sau 8 giây nó đạt vận tốc 6km/s. Từ thời điểm đó nó chuyển động thẳng đều. Sau 12 giây kể từ lúc tên lửa A được bắn đi người ta bắn tên lửa B cho nó chuyển động thẳng nhanh dần đều. Sau 8 giây kể từ khi xuất phát tên lửa B đuổi kịp tên lửa A. Tìm vận tốc tên lửa B tại thời điểm đuổi kịp tên lửa A.

A. 24000m/s

B. 16000m/s

C. 24km/s

D. 8km/s

Câu 27. Mật độ dân số cách trung tâm thành phố X một khoảng r km là $D(r) = 5000.e^{-0,1r}$. Hỏi có khoảng bao nhiêu người sống cách trung tâm thành phố 3 km.

A. 116038

B. 117000

C. 117

D. 116,038

Câu 28. Một Bức thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2dm và 4dm. Tính thể tích cái lọ.

A. $8\pi dm^2$

B. $\frac{15}{2}\pi dm^3$

C. $\frac{14}{3}\pi dm^2$

D. $\frac{15}{2}dm^2$

Câu 29. Một Bức thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2dm và 4dm. Tính thể tích cái lọ.

A. $8\pi dm^2$

B. $\frac{15}{2}\pi dm^3$

C. $\frac{14}{3}\pi dm^2$

D. $\frac{15}{2}dm^2$

Câu 30. Một Bức thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2dm và 4dm. Tính thể tích cái lọ.

A. $8\pi dm^2$

B. $\frac{15}{2}\pi dm^3$

C. $\frac{14}{3}\pi dm^2$

D. $\frac{15}{2}dm^2$

B. SỐ PHỨC

PHẦN 1: TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đơn vị ảo.

Số i mà $i^2 = -1$ gọi là đơn vị ảo.

2. Định nghĩa số phức

Số phức (dạng đại số): $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, i là đơn vị ảo); a được gọi là phần thực và b là phần ảo của số phức z .

z là số thực khi và chỉ khi phần ảo $b = 0$;

z là số phức khi và chỉ khi phần thực $a = 0$.

Hai số phức bằng nhau: $a + bi = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Biểu diễn hình học: Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ hoặc $\vec{u}(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy (mặt phẳng phức)

3. Số phức liên hợp

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta gọi số phức $\bar{z} = a - bi$ là số phức liên hợp của z .

Chú ý: $\overline{\bar{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$; z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Nhận xét:

+ Số phức liên hợp của $\bar{z}$ lại là z , tức là $\overline{\bar{z}} = z$. Do đó ta còn nói z và $\bar{z}$ là hai số phức liên

hợp với nhau.

+ Hai số phức là liên hợp với nhau khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng nhau qua trục Ox.

Tính chất:

i, Với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

ii, $\forall z \in \mathbb{C}, z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), số $\overline{z \cdot \overline{z}}$ luôn là một số thực và $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

4. Phép cộng và trừ hai số phức

Phép cộng và trừ hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ hai đa thức. Tổng của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) là số phức $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Tính chất của phép cộng số phức:

i, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

ii, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

iii, $z + 0 = 0 + z = z$ với mọi $z \in \mathbb{C}$

iv, Với mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có:
 $z + (-z) = -z + z = 0$. Số $-z$ được gọi là số đối của số phức z .

Hiệu của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) là tổng của hai số phức z_1 và $-z_2$, tức là: $z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức:

Mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi $M(a; b)$ cũng có nghĩa là véc tơ $\overrightarrow{OM}$.

Khi đó nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ theo thứ tự biểu diễn số phức z_1, z_2 thì:

+ $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 + z_2$

+ $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 - z_2$

5. Phép nhân hai số phức

Phép nhân hai số phức được thực hiện theo quy tắc nhân hai đa thức, ở đây chú ý i là đơn vị ảo.

Tích của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) là số phức:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Nhận xét: + Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$kz = k(a + bi) = ka + kbi$$

$$+ 0 \cdot z = z \cdot 0 = 0 \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

***Tính chất của phép nhân số phức:**

i, $z_1 z_2 = z_2 z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

ii, $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ với mọi $z \in \mathbb{C}$

iii, $(z_1 z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

iv, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

6. Môđun của số phức

Môđun của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là một số ký hiệu là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overline{OM}|$

+ $|z| \geq 0$ với mọi z thuộc $\mathbb{C}$ và $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

+ $|zz'| = |z| |z'|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ với mọi số phức z, z' .

7. Phép chia hai số phức

Số phức nghịch đảo của z (z khác 0): $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

Thương của z cho z' (z khác 0): $\frac{z'}{z} = z' z^{-1} = \frac{z' \bar{z}}{|z|^2} = \frac{z' \bar{z}}{z \bar{z}}$

Với z khác 0, $\frac{z'}{z} = w \Leftrightarrow z' = wz, \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}, \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

8. Căn bậc hai của số phức

z là một căn bậc hai của số phức w khi và chỉ khi $w = z^2$.

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của số phức $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.

Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0.

Số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau.

Hai căn bậc hai của số thực a dương là $\pm\sqrt{a}$.

Hai căn bậc hai của số thực âm là $\pm i\sqrt{a}$

9. Phương trình bậc hai của số phức

Phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (A, B, C là các số phức cho trước, A khác 0):

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

+ Nếu $\Delta \neq 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $z_{1,2} = \frac{-B \pm \delta}{2A}$ với δ là một căn bậc hai của Δ .

+ Nếu $\Delta = 0$: phương trình có một nghiệm kép là $z = \frac{-B}{2A}$.

10. Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), z khác 0. Số có dạng: $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ($r > 0$) là dạng lượng giác của z khi và chỉ khi $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$. φ là một argumen của z , $\varphi = (\text{Ox}, \text{OM})$

Nhân chia số phức dưới dạng lượng giác

Nếu $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i \sin\varphi')$ thì

$$zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')]$$

Công thức Moa-vơ: Với n là số nguyên dương, thì

$$[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác.

Các căn bậc hai của số phức z có dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ là $\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2})$, và

$$-\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{2}[\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + i \sin(\frac{\varphi}{2} + \pi)]$$

PHẦN 2: BÀI TẬP MINH HỌA

Dạng 1: Thực hiện các phép toán

Bài 1: Cho số phức $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Tìm các số phức sau: $\bar{z}$; z^2 ; $(\bar{z})^3$; $1 + z + z^2$

Hướng dẫn:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(\bar{z})^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}i\right) + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}i\right)^2 - \left(\frac{1}{2}i\right)^3 = -i$$

$$1 + z + z^2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$$

Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức $A = \frac{4 + 3i}{1 - i} + \frac{1 - i}{4 + 3i}$

Hướng dẫn: $A = \frac{(4 + 3i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} + \frac{(1 - i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{1 + 7i}{2} + \frac{1 - 7i}{25} = \frac{27}{50} + \frac{161}{50}i$

Bài 3: Tìm phần thực, phần ảo và tính mô đun của số phức z biết:

$$i\bar{z} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11} + \left(\frac{2i}{1+i}\right)^8$$

Hướng dẫn:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11} + \left(\frac{2i}{1+i}\right)^8 = i^{11} + (1+i)^8 = 16-i$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{16-i}{i} = -1-16i \Rightarrow z = -1+16i$$

Vậy z có phần thực bằng -1 ; phần ảo bằng 16 ; $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 16^2} = \sqrt{257}$

Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức $A = \frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}$

Hướng dẫn: Ta có:

$$(1-i)^{10} = \left((1-i)^2\right)^5 = (-2i)^5 = -32i^4 \cdot i = -32i$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+i)^5 &= (\sqrt{3}+i)^3 (\sqrt{3}+i)^2 \\ &= (3\sqrt{3}+9i+3\sqrt{3}i^2+i^3)(3+2\sqrt{3}i+i^2) \\ &= 8i(2+2i\sqrt{3}) = -16\sqrt{3}+16i \end{aligned}$$

$$(-1-i\sqrt{3})^{10} = (1+i\sqrt{3})^{10} = \left((1+i\sqrt{3})^3\right)^3 (1+i\sqrt{3}) = (-8)^3 (1+i\sqrt{3})$$

Thay vào biểu thức A ta có $A = \frac{-32i \cdot 16i \cdot (1+i\sqrt{3})}{(-8)^3 (1+i\sqrt{3})} = -1$.

Bài 5: Tìm các số thực x, y thỏa mãn: $(3x-y)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7 + (y+2)(x-i)^2 = -19-23i$

Hướng dẫn: Đặt $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^5}$

Bài 6: Chứng minh rằng số phức $z = \frac{52+\sqrt{2013}i}{(3+1)(79+7i)} + \frac{52-\sqrt{2013}i}{10(23-10i)}$ là số thuần ảo

Hướng dẫn:

Đặt $t = 1-x^3 \Rightarrow dt = -3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{3x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_0^1 t^6 (1-t) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^8}{8} \right) = \frac{1}{168}$.

Dạng 2: Xác định số phức

Bài 1: Tìm số phức z biết: $(2+i).z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$

Hướng dẫn: ta có $(2+i).z + \frac{2(1+i)(1-i)}{2} = 7+8i$

$$\Leftrightarrow (2+i).z = 4+7i \Leftrightarrow z = \frac{4+7i}{2+i} \Leftrightarrow z = \frac{(4+7i)(2-i)}{5} \Leftrightarrow z = 3+2i$$

Bài 2: Tìm số phức z biết: $\frac{(\bar{z}-1).(2-i)}{\bar{z}+2i} = \frac{3+i}{2}$

Hướng dẫn: Điều kiện $z \neq -2i$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 2(\bar{z}-1)(2-i) = (3+i)(\bar{z}+2i)$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z}-1)(4-2i) = 3\bar{z} + 6i + iz + 2i^2$$

$$\Leftrightarrow (1-3i)\bar{z} = 2i+4$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = \frac{2i+4}{1-3i} = \frac{(2i+4)(1+3i)}{10} = \frac{-1}{5} + \frac{7}{5}i$$

$$\Rightarrow z = \frac{-1}{5} - \frac{7}{5}i \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Bài 3: Tìm số phức z biết: $|z| = \sqrt{5}$ và $(z+i)^2$ là số ảo.

Hướng dẫn:

Gọi số phức z cần tìm dạng: $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Từ giả thiết ta có:

$$|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5 \quad (1)$$

$$(z+i)^2 = (a+bi+i)^2 = a^2 - (b+1)^2 + 2a(b+1)i$$

$$\text{Để } (z+i)^2 \text{ là số ảo thì } a^2 - (b+1)^2 = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 = (b+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 5 - b^2 \\ b = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = 1 \end{cases}; \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy số phức cần tìm là: $z = \pm 2 + i$; $z = \pm 1 - 2i$.

Bài 4: Tìm số phức z biết $|z+2-i| = |\bar{z}-1+2i|$ và $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Hướng dẫn: Ta có:

$$(1-i)^{10} = \left((1-i)^2\right)^5 = (-2i)^5 = -32i^4 \cdot i = -32i$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+i)^5 &= (\sqrt{3}+i)^3 (\sqrt{3}+i)^2 \\ &= (3\sqrt{3}+9i+3\sqrt{3}i^2+i^3)(3+2\sqrt{3}i+i^2) \\ &= 8i(2+2i\sqrt{3}) = -16\sqrt{3}+16i \end{aligned}$$

$$(-1-i\sqrt{3})^{10} = (1+i\sqrt{3})^{10} = \left((1+i\sqrt{3})^3\right)^3 (1+i\sqrt{3}) = (-8)^3 (1+i\sqrt{3})$$

Thay vào biểu thức A ta có $A = \frac{-32i \cdot 16i \cdot (1+i\sqrt{3})}{(-8)^3 (1+i\sqrt{3})} = -1.$

Bài 5: Tìm số phức z biết: $|z-3i| = |1-i\bar{z}|$ và $z - \frac{9}{z}$ là số thuần ảo

Hướng dẫn: Đặt $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^5}$

Dạng 3: Giải phương trình trên tập số phức

Bài 1: Giải các phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$ trên tập hợp số phức

Hướng dẫn: Ta có $\Delta' = -4 = 4i^2 \Rightarrow z = -1 \pm 2i$

Bài 2: Giải các phương trình $z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$ trên tập hợp số phức

Hướng dẫn: Ta có $\Delta = (1-3i)^2 + 8(1+i) = 2i = (1+i)^2$ nên phương trình có nghiệm là:

$$\begin{cases} z = \frac{3i-1+1+i}{2} \\ z = \frac{3i-1-1-i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = i-1 \end{cases}$$

Bài 3: Giải các phương trình $z^3 + 8 = 0$ trên tập hợp số phức.

Hướng dẫn: $z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ z = 1 + \sqrt{3}i \\ z = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$

Bài 4: Giải các phương trình $(z+3)^4 + (z+5)^4 = 2$ trên tập hợp số phức

Hướng dẫn: Đặt $t = z + 4$, khi đó phương trình trở thành:

$$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 2 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 0 \\ t^2 + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm\sqrt{6}i \end{cases}$$

+) Với $t = 0 \Rightarrow z = -4$

+) Với $t = \sqrt{6}i \Rightarrow z = -4 + \sqrt{6}i$

+) Với $t = -\sqrt{6}i \Rightarrow z = -4 - \sqrt{6}i$

Bài 5: Giải các phương trình $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = 1$ trên tập hợp số phức

Hướng dẫn: Điều kiện: $z \neq i$, khi đó phương trình tương đương với:

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+i}{z-i} = 1 \vee \frac{z+i}{z-i} = -1 \\ \frac{z+i}{z-i} = i \vee \frac{z+i}{z-i} = -i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+i = z-i \\ z+i = i-z \\ z+i = (z-i)i \\ z+i = -(z-i)i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ z = -1 \end{cases}$$

Dạng 4: Tìm tập hợp điểm biểu diễn

Bài 1: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z}{z-i}\right| = 3$

Hướng dẫn:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x; y)$ biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng tọa độ.

Ta có $\left|\frac{z}{z-i}\right| = 3 \Leftrightarrow |x + yi| = 3|x + (y-1)i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9x^2 + 9(y-1)^2$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 - 18y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R = \frac{3}{8}$

Bài 2: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn

$$|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$$

Hướng dẫn:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x; y)$ biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng tọa độ.

Ta có $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ (*) $\Leftrightarrow |(x-2) + (y-4)i| = |x + (y-2)i|$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (4-y)^2 = x^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow y = -x + 4$$

Tập hợp M là đường thẳng có phương trình $y = -x + 4$

Bài 3: Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn

$$2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|.$$

Hướng dẫn:

Đặt: $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\rightarrow z$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức là $M(x; y)$.

$$\text{Ta có } 2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i| \Leftrightarrow 2|x + (y-1)i| = |(1+y)i| \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường parabol (P) có phương trình $y = \frac{x^2}{4}$.

Bài 4: Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn

$$|z - i| + |z + i| = 4$$

Hướng dẫn:

Đặt: $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\rightarrow z$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức là $M(x; y)$.

$$\text{Ta có } |z - i| + |z + i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } F_1(0; -1) ; F_2(0; 1)$$

$$(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4 > F_1F_2 = 2$$

Suy ra tập hợp M là elíp (E) có 2 tiêu điểm là F_1, F_2 .

$$\text{Gọi (E) có phương trình } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < a < b; b^2 = a^2 + c^2)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 = 5$$

$$\text{Vậy (E) có phương trình } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Bài 5: Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn

$$|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$$

Hướng dẫn:

Đặt: $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\rightarrow z$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức là $M(x; y)$.

$$\text{Ta có } |z^2 - (\bar{z})^2| = 4 \Leftrightarrow |4xyi| = 4 \Leftrightarrow 4|xy| = 4 \Leftrightarrow |xy| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường hyperbol (H) có phương trình là $y = \frac{1}{x}$ và $y = -\frac{1}{x}$

Dạng 5: Bài toán cực trị

Bài 1: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $|z+1-5i| = |\bar{z}+3-i|$, tìm số phức có môđun nhỏ nhất

Hướng dẫn:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z+1-5i| = |\bar{z}+3-i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x+3y-4=0 \Leftrightarrow x=4-3y$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4-3y)^2 + y^2} = \sqrt{10y^2 - 24y + 16} = \sqrt{10\left(y - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{8}{5}} \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } y = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$\text{Vậy } |z| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ khi } z = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$$

$$\text{Vậy } z = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i \text{ là số phức cần tìm}$$

Bài 2: Trong các số phức z có phần thực, phần ảo không âm và thoả mãn:

$$\left| \frac{z-3}{z-1+2i} \right| = 1. \text{ Tìm số phức } z \text{ sao cho biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.}$$

$$P = |z^2 - \bar{z}^2| - (z^2 - \bar{z}^2) \cdot i \cdot [z(1-i) + \bar{z}(1+i)]$$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $z \neq 1-2i$

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}_+^*$)

$$\left| \frac{z-3}{z-1+2i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-3|}{|z-1+2i|} = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-1+2i|$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow x+y=1$$

(luôn thoả mãn điều kiện vì $x=1; y=-2$ không thoả mãn phương trình)

$$\bar{z} = x - yi \Rightarrow z^2 - \bar{z}^2 = 4xy \cdot i \Rightarrow |z^2 - \bar{z}^2| = 4xy \text{ (vì } x, y \text{ không âm)}$$

$$(z^2 - \bar{z}^2) \cdot i = -4xy \Rightarrow |z^2 - \bar{z}^2| = 4xy$$

$$z(1-i) + \bar{z}(1+i) = 2x + 2y$$

$$\text{Do đó } P = 16x^2y^2 + 4xy \cdot (2x + 2y) = 16x^2y^2 + 8xy$$

$$\text{Đặt } t = xy \Rightarrow 0 \leq t \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ ta có } P = 16t^2 + 8t; t \in \left[0; \frac{1}{4} \right]$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 16t^2 + 8t \text{ liên tục trên } \left[0; \frac{1}{4} \right]$$

$$f'(t) = 32t + 8t; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -\frac{1}{4} \text{ (loại)}$$

$$f(0) = 0; f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{33}{16} \Rightarrow \max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = \frac{33}{16} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}; \min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\text{Khi } t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}; \text{ Khi } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0; y = 1 \\ x = 1; y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P \text{ đạt giá trị lớn nhất bằng } \frac{33}{16} \text{ khi } z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } 0 \text{ khi } z = 1 \vee z = 0$$

Bài 3: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Hướng dẫn:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x, y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ tọa độ Oxy

$$|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$$

Vậy điểm M biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn (T) có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 4$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM; OI = 5 > R \text{ nên } O \text{ nằm ngoài đường tròn (T)}$$

$|z|$ lớn nhất, nhỏ nhất khi OM lớn nhất, nhỏ nhất khi M di động trên (T)

Với điểm M bất kì trên (T), ta có:

$$AM \geq IM - IA = IB - IA = AB. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } M \equiv B$$

$$AM \leq AI + IM = AI + IC = AC. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } M \equiv C$$

Đường thẳng OI cắt đường tròn (T) tại hai điểm phân biệt

$$A\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right); B\left(\frac{27}{5}; -\frac{36}{5}\right) \Rightarrow OA = 1; OB = 9$$

$$\text{Với } M \text{ di động trên (T), ta có: } OA \leq OM \leq OB \Leftrightarrow 1 \leq OM \leq 9 \Rightarrow 1 \leq |z| \leq 9$$

$$\Rightarrow OM \text{ nhỏ nhất khi } M \text{ trùng với } A; OM \text{ lớn nhất khi } M \text{ trùng với } B$$

$$\text{Vậy } |z| \text{ nhỏ nhất bằng } 1 \text{ khi } z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i; |z| \text{ lớn nhất bằng } 9 \text{ khi } z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i$$

Bên cạnh đó bạn đọc có thể tham khảo thêm cách giải sau:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x, y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ tọa độ Oxy

$$\omega = 3 - 4i \Rightarrow A(3; -4) \text{ biểu diễn cho số phức } \omega$$

$$|z| = OM; |\omega| = OA = 5; |z - \omega| = AM; |z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |z - \omega| = 4 \Leftrightarrow AM = 4$$

$$\text{Ta có: } |OM - OA| \leq AM \Leftrightarrow -4 \leq OM - OA \leq 4 \Leftrightarrow -4 + OA \leq OM \leq 4 + OA \Leftrightarrow 1 \leq OM \leq 9$$

$$\Rightarrow 1 \leq |z| \leq 9; |z| = 1 \text{ khi } z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i; |z| = 9 \text{ khi } z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i$$

Vậy $|z|$ nhỏ nhất bằng 1 khi $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$; $|z|$ lớn nhất bằng 9 khi $z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i$

Bài 4: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\bar{z}(z+2-4i)$ là một số ảo, tìm số phức z sao cho $\omega = z-1-i$ có môđun lớn nhất.

Hướng dẫn:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x, y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ tọa độ Oxy

$$\bar{z}(z+2-4i) = (x-yi)[(x+2)+(y-4)i] = x(x+2) + y(y-4) + [x(y+4) - y(x+2)]i$$

$\bar{z}(z+2-4i)$ là một số ảo

$$\Leftrightarrow x(x+2) + y(y-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

$\Rightarrow M$ biểu diễn cho z thuộc đường tròn (T) có tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$

$$|\omega| = |z-1-i| = |(x-1) + (y-1)i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = AM \text{ với } A(1;1)$$

$$IA = \sqrt{5} \Rightarrow A \in (T)$$

Vì M là điểm di động trên (T) nên AM lớn nhất $\Leftrightarrow AM$ là đường kính của (T)

$\Leftrightarrow M$ đối xứng với A qua I $\Leftrightarrow I$ là trung điểm của AM

$$\Rightarrow M(-3; 3) \Rightarrow z = -3 + 3i \Rightarrow \omega = -4 + 2i$$

Vậy $|\omega|$ lớn nhất bằng $2\sqrt{5}$ khi $z = -3 + 3i$

Bài 5: Cho các số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn: $|z_1|=1; \bar{z}_2[z_2 - (1-i)] - 6 + 2i$ là một số thực. Tìm số phức $z_1; z_2$ sao cho $P = |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

Gọi $z_1 = a + bi; z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(a, b), N(c, d)$ lần lượt biểu diễn cho $z_1; z_2$ trong hệ tọa độ Oxy

$$|z_1|=1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (T) có tâm O, bán kính $R = 1$

$$\bar{z}_2 = c - di;$$

$$\omega = \bar{z}_2[z_2 - (1-i)] - 6 + 2i = (c - di)[(c-1) + (d+1)i] + 2 - 6i$$

$$= c(c-1) + d(d+1) + 2 + [c(d+1) - d(c-1) - 6]i$$

$$\omega \text{ là số thực} \Leftrightarrow c(d+1) - d(c-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow c + d - 6 = 0$$

$\Rightarrow N$ thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 6 = 0$

Ta có $d(O; \Delta) > 1$ nên Δ và (T) không có điểm chung

$$z_1\bar{z}_2 = ac + bd + (bc - ad)i; \bar{z}_1z_2 = ac + bd + (-bc + ad)i \Rightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 2(ac + bd)$$

$$P = c^2 + d^2 - 2(ac + bd) = (c-a)^2 + (d-b)^2 - 1 = MN^2 - 1 \text{ (vì } a^2 + b^2 = 1)$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $\Delta: x + y - 6 = 0 \Rightarrow H(3; 3)$

Đoạn OH cắt đường tròn (T) tại $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Với N thuộc đường thẳng Δ , M thuộc đường tròn (T) , ta có:

$$MN \geq ON - OM \geq OH - OI = IH = 3\sqrt{2} - 1. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } M \equiv I; N \equiv H$$

$$\Rightarrow P \geq (3\sqrt{2} - 1)^2 - 1 = 18 - 6\sqrt{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; z_2 = 3 + 3i$$

$$\text{Vậy } P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } 18 - 6\sqrt{2} \text{ khi } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; z_2 = 3 + 3i$$

PHẦN 3: BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho số phức $z = a + bi$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $z + \bar{z} = 2bi$ B. $z - \bar{z} = 2a$ C. $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$ D. $|z^2| = |z|^2$

Câu 2. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = a + (a - b)i$

A. $\bar{z} = a + (b - a)i$ B. $\bar{z} = a - bi$ C. $\bar{z} = a + (a - b)i$ D. $\bar{z} = a - bi$

Câu 3. Cho số phức $z = a + bi$. Tìm phần thực của số phức z^2 .

A. $a^2 + b^2$ B. $a^2 - b^2$ C. $a + b$ D. $a - b$

Câu 4. Tìm số phức liên hợp của số phức: $z = 1 - 3i$

A. $\bar{z} = 3 - i$ B. $\bar{z} = -1 + 3i$ C. $\bar{z} = 1 + 3i$ D. $\bar{z} = -1 - 3i$

Câu 5. Tìm mô đun của số phức: $z = 2 + 3i$

A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{5}$ C. 5 D. 2

Câu 6. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau.

A. Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bằng điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng phức Oxy

B. Số phức $z = a + bi$ có mô đun là $\sqrt{a^2 + b^2}$

C. Số phức $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

D. Số phức $z = a + bi$ có số phức đối $z' = a - bi$

Câu 7. Tìm điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$ trên mặt phẳng Oxy

A. (1; -2) B. (-1; -2) C. (2; -1) D. (2; 1)

Câu 8. Với giá trị nào của x, y để 2 số phức sau bằng nhau: $x + 2i = 3 - yi$

A. $x = 2; y = 3$ B. $x = -2; y = 3$ C. $x = 3; y = 2$ D. $x = 3; y = -2$

Câu 9. Với giá trị nào của x, y thì $(x + y) + (2x - y)i = 3 - 6i$

A. $x = -1; y = 4$ B. $x = -1; y = -4$ C. $x = 4; y = -1$ D. $x = 4; y = 1$

Câu 10. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Tìm phần thực số phức zz'

A. $a + a'$ B. aa' C. $aa' - bb'$ D. $2bb'$

Câu 11. Cho số phức $z = 2016 - 2017i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức đối của z

A. (2016; 2017) B. (-2016; -2017) C. (-2016; 2017) D. (2016; -2017)

Câu 12. Cho số phức $z = (\sqrt{2} + 3i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

A. Phần thực bằng -7, Phần ảo bằng $6\sqrt{2}i$ B. Phần thực bằng 7, Phần ảo bằng $6\sqrt{2}$

C. Phần thực bằng -7 và Phần ảo bằng $6\sqrt{2}$ D. Phần thực bằng 7 và Phần ảo bằng $6\sqrt{2}i$

Câu 13. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z^3 .

A. Phần thực bằng 46 và Phần ảo bằng $-9i$ B. Phần thực bằng -46 và Phần ảo bằng $-9i$

C. Phần thực bằng 46 và Phần ảo bằng $-9i$ D. Phần thực bằng -46 và Phần ảo bằng -9

Câu 14. Tính môđun của số phức $z = (1+i)^3$

A. $|z| = 2\sqrt{2}$

B. $|z| = \sqrt{2}$

C. $z = 0$

D. $|z| = -2\sqrt{2}$

Câu 15. Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tìm số phức $(\bar{z})^2$

A. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

B. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

C. $1 + \sqrt{3}i$

D. $\sqrt{3} - i$

Câu 16. Cho hai số phức $z = 2 + 3i$ và $z' = 1 - 2i$. Tính môđun của số phức $z + z'$.

A. $|z + z'| = \sqrt{10}$

B. $|z + z'| = 2\sqrt{2}$

C. $|z + z'| = 2$

D. $|z + z'| = 2\sqrt{10}$

Câu 17. Cho hai số phức $z = 3 - 4i$ và $z' = 4 - 2i$. Tính môđun của số phức $z - z'$

A. $|z - z'| = \sqrt{3}$

B. $|z - z'| = \sqrt{5}$

C. $|z - z'| = 1$

D. $|z - z'| = 5$

Câu 18. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $2z - i\bar{z} = 2 + 5i$.

A. $z = 3 + 4i$

B. $z = 3 - 4i$

C. $z = 4 - 3i$

D. $z = 4 + 3i$

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2z + 3(1-i)\bar{z} = 1 - 9i$. Tìm môđun của z .

A. $\sqrt{13}$

B. $\sqrt{82}$

C. $\bar{z} = 1 + 3i$

D. $\bar{z} = -1 - 3i$

Câu 20. Tìm môđun của số phức: $z = 2 + 3i$

A. $\sqrt{13}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5}$

D. 13

Câu 21. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau.

A. Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bằng điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng phức Oxy

B. Số phức $z = a + bi$ có môđun là $\sqrt{a^2 + b^2}$

C. Số phức $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

D. Số phức $z = a + bi$ có số phức đối $z' = a - bi$

Câu 22. Tìm số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$

A. $z^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $z^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ C. $z^{-1} = 1 + \sqrt{3}i$ D. $z^{-1} = -1 + \sqrt{3}i$

Câu 23. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn hình học của các số phức $z = a + ai$

A. $y = x$

B. $y = 2x$

C. $y = -x$

D. $y = -2x$

Câu 24. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn hình học của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$

A. $x = 7$

B. $y = 7$

C. $y = x$

D. $y = x + 7$

Câu 25. Cho số phức $z = a + a^2i$ với $a \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức liên hợp của z

A. Đường thẳng $y = 2x$

B. Đường thẳng $y = -x + 1$

C. Parabol $y = x^2$

D. Parabol $y = -x^2$

Câu 26. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = 1$ có hình dạng như thế nào?

A. Đường thẳng

B. Đường tròn

C. Đoạn thẳng

D. Hình vuông

Câu 27. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = 4$ có hình dạng như thế nào?

A. Đường thẳng

B. Đường tròn

C. Đoạn thẳng

D. Hình vuông

Câu 28. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Tìm điều kiện giữa a, b, a', b' để $z + z'$ là một số thực

A. $\begin{cases} a, a' \in \mathbb{R} \\ b + b' = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b, b' \in \mathbb{R} \end{cases}$

C. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b = b' \end{cases}$

D. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases}$

Câu 29. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Tìm điều kiện giữa a, b, a', b' để $z + z'$ là một số thuần ảo.

A. $\begin{cases} a, a' \in \mathbb{R} \\ b + b' = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b, b' \in \mathbb{R} \end{cases}$

C. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b = b' \end{cases}$

D. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases}$

Câu 30. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Tìm điều kiện giữa a, b, a', b' để $z.z'$ là một số thực

A. $aa' + bb' = 0$

B. $aa' - bb' = 0$

C. $ab' + a'b = 0$

D. $ab' - a'b = 0$

Câu 31. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Tìm điều kiện giữa a, b, a', b' để $z.z'$ là một số thực

A. $aa' + bb' = 0$

B. $aa' - bb' = 0$

C. $ab' + a'b = 0$

D. $ab' - a'b = 0$

Câu 32. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Tìm điều kiện giữa a, b, a', b' để $z.z'$ là một số thuần ảo

A. $aa' = bb'$

B. $aa' = -bb'$

C. $a' + a = b + b'$

D. $a' + a = 0$

Câu 33. Cho $(x + 2i)^2 = yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Tìm giá trị của x và y

A. $x = 2$ và $y = 8$ hoặc $x = -2$ và $y = -8$

B. $x = 3$ và $y = 12$ hoặc $x = -3$ và $y = -12$

C. $x = 1$ và $y = 4$ hoặc $x = -1$ và $y = -4$

D. $x = 4$ và $y = 16$ hoặc $x = -4$ và $y = -16$

Câu 34. Cho $(x + 2i)^2 = 3x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Tìm giá trị của x và y

A. $x = 1$ và $y = 2$ hoặc $x = -1$ và $y = -2$

B. $x = -1$ và $y = -4$ hoặc $x = 4$ và $y = 16$

C. $x = 2$ và $y = 5$ hoặc $x = 3$ và $y = -4$

D. $x = 6$ và $y = 1$ hoặc $x = 0$ và $y = 4$

Câu 35. Tìm số phức z , biết: $(3-i)z - (2+5i)\bar{z} = -10+3i$.

A. $z = 2-3i$

B. $z = 2+3i$

C. $z = -2+3i$

D. $z = -2-3i$

Câu 36. Tìm số phức z , biết: $(2-i)z - (5+3i)\bar{z} = -17+16i$

A. $z = 3+4i$

B. $z = 3-4i$

C. $z = -3+4i$

D. $z = -3-4i$

Câu 37. Tìm số phức z biết $|z| = 5$ và phần thực lớn hơn phần ảo một đơn vị.

A. $z_1 = 4+3i, z_2 = 3+4i$

B. $z_1 = -4-3i, z_2 = -3-4i$

C. $z_1 = 4+3i, z_2 = -3-4i$

D. $z_1 = -4-3i, z_2 = 3+4i$

Câu 38. Tìm số phức z biết $|z| = \sqrt{20}$ và phần thực gấp đôi phần ảo.

A. $z_1 = 2+i, z_2 = -2-i$

B. $z_1 = 2-i, z_2 = -2+i$

C. $z_1 = -2+i, z_2 = -2-i$

D. $z_1 = 4+2i, z_2 = -4-2i$

Câu 39. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện z^2 là một số thực âm

A. Trục hoành (trừ gốc tọa độ O)

B. Đường thẳng $y = x$ (trừ gốc tọa độ O)

C. Trục tung (trừ gốc tọa độ O)

D. Đường thẳng $y = -x$ (trừ gốc tọa độ O)

Câu 40. Cho số phức z thỏa mãn: $z+5=0$. Tìm môđun của z .

A. $\sqrt{26}$

B. $\sqrt{5}$

C. 0

D. 5

Câu 41. Tìm môđun của số phức $z = 4+i - (2+3i)(1-i)$.

A. 2

B. 1

C. 0

D. -2

Câu 42. Cho x, y là các số thực. Hai số phức $z = 3+i$ và $z = (x+2y) - yi$ bằng nhau khi nào ?

A. $x = 5, y = -1$

B. $x = 1, y = 1$

C. $x = 3, y = 0$

D. $x = 2, y = -1$

Câu 43. Cho x, y là các số thực. Số phức: $z = 1+xi + y+2i$ bằng 0 khi nào ?

A. $x = 2, y = 1$

B. $x = -2, y = -1$

C. $x = 0, y = 0$

D. $x = -1, y = -2$

Câu 44. Cho x số thực. Số phức: $z = x(2-i)$ có môđun bằng $\sqrt{5}$ khi nào ?

A. $x = 0$

B. $x = 2$

C. $x = -1$

D. $x = -\frac{1}{2}$

Câu 45. Cho số phức: $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức $|z\bar{z}|$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

Câu 46. Cho hai số phức: $z_1 = 1+2i, z_2 = -2-i$ Tính giá trị biểu thức $|z_1 z_2|$.

A. 5

B. $2\sqrt{5}$

C. 25

D. 0

Câu 47. Cho số phức z có phần ảo gấp hai phần thực và $|z+1| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Tính môđun của z .

A. $\sqrt{26}$

B. $\sqrt{5}$

C. 0

D. 5

Câu 48. Cho z có phần thực là số nguyên và $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính môđun của số phức: $w = 1 - z + z^2$.

A. $|w| = \sqrt{37}$

B. $|w| = \sqrt{457}$

C. $|w| = \sqrt{425}$

D. $|w| = \sqrt{445}$

Câu 49. Cho z có phần thực là số nguyên và $|z| - 3\bar{z} = -11 - 6i + z$. Tính môđun của số phức: $w = 1 + z - z^2$.

A. $|w| = \sqrt{23}$

B. $|w| = 5$

C. $|w| = \sqrt{443}$

D. $|w| = \sqrt{445}$

Câu 50. Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z . Biết tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện sau đây: $|z - 1 + i| = 2$ là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn đó.

A. Có tâm $(-1; -1)$ và bán kính là 2

B. Có tâm $(1; -1)$ và bán kính là $\sqrt{2}$

C. Có tâm $(-1; 1)$ và bán kính là 2

D. Có tâm $(1; -1)$ và bán kính là 2

Câu 51. Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z . Biết rằng tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện sau đây: $|2 + z| = |1 - i|$ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $-4x + 2y + 3 = 0$

B. $4x + 2y + 3 = 0$

C. $4x - 2y - 3 = 0$

D. $2x + y + 2 = 0$

Câu 52. Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z . Biết rằng tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện sau đây: $|z + \bar{z} + 3| = 4$ là hai đường thẳng. Viết phương trình những đường thẳng đó.

A. $x = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{7}{2}$

B. $x = -\frac{1}{2}$ và $x = -\frac{7}{2}$

C. $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{7}{2}$

D. $x = -\frac{1}{2}$ và $x = \frac{7}{2}$

Câu 53. Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z . Biết rằng tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện sau đây: $|z + \bar{z} + 1 - i| = 2$ là hai đường thẳng. Viết phương trình những đường thẳng đó.

A. $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ và $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ B. $y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ và $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

C. $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ và $y = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ D. $y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ và $y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

Câu 54. Tìm số phức z thỏa mãn: $|z - (2+i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$.

- A. $z = 3+4i$ hoặc $z = 5$ B. $z = -3+4i$ hoặc $z = -5$
C. $z = 3-4i$ hoặc $z = 5$ D. $z = 4+5i$ hoặc $z = 3$

Câu 55. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $P = z_1^4 + z_2^4$

- A. $P = 14$ B. $P = -14$ C. $P = 14i$ D. $P = -14i$

Câu 56. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của pt: $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z_1

- A. $M(-1; 2)$ B. $M(-1; -2)$ C. $M(-1; -\sqrt{2})$ D. $M(-1; -\sqrt{2}i)$

Câu 57. Cho số phức z có phần ảo âm và thỏa mãn $z^2 - 3z + 5 = 0$. Tìm mô đun của số phức: $\omega = 2z - 3 + \sqrt{14}$

- A. 4 B. $\sqrt{17}$ C. $\sqrt{24}$ D. 5

Câu 58. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $\mathbb{F} = |z_1| + |z_2|$

- A. 10 B. 3 C. 6 D. $2\sqrt{5}$

Câu 59. Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tính hiệu phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. 0 B. 1 C. 4 D. 6

Câu 60. Cho số phức $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$. Trong các kết luận sau kết luận nào đúng?

- A. $z \in \mathbb{R}$ B. z là số thuần ảo.
C. Mô đun của z bằng 1 D. z có phần thực và phần ảo đều bằng 0

Câu 61. Biểu diễn về dạng $z = a+bi$ của số phức $z = \frac{i^{2016}}{(1+2i)^2}$ là số phức nào?

- A. $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ B. $\frac{-3}{25} + \frac{4}{25}i$ C. $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ D. $\frac{-3}{25} - \frac{4}{25}i$

Câu 62. Tìm điểm biểu diễn số phức $z = \frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$

A. (1;-4)

B. (-1;-4)

C. (1;4)

D. (-1;4)

Câu 63. Tìm nghiệm của phương trình $i.z + 2017 - i = 0$.

A. $1 + 2017i$

B. $1 - 2017i$

C. $-1 - 2017i$

D. $-2017 + i$

Câu 64. Cho số phức $z = x + yi \neq 1$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Tìm phần ảo của số phức $\frac{z+1}{z-1}$.

A. $\frac{-2x}{(x-1)^2 + y^2}$

B. $\frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2}$

C. $\frac{xy}{(x-1)^2 + y^2}$

D. $\frac{x+y}{(x-1)^2 + y^2}$

Câu 65. Trong C, giải phương trình $\frac{4}{z+1} = 1 - i$.

A. $z = 2 - i$

B. $z = 3 + 2i$

C. $z = 5 - 3i$

D. $z = 1 + 2i$

Câu 66. Cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$. Giả sử phương trình có nghiệm $z = 1 + i$. Tìm các giá trị b và c bằng (b, c là số thực).

A. $b = 3, c = 5$

B. $b = 1, c = 3$

C. $b = 4, c = 3$

D. $b = -2, c = 2$

Câu 67. Cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Giả sử $z = 1 + i$ và $z = 2$ là hai nghiệm. Tìm các giá trị a, b, c bằng (a, b, c là số thực):.

A. $\begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = -4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$

Câu 68. Số phức nào sau đây là số thực.

A. $z = \frac{1-2i}{3-4i} + \frac{1+2i}{3-4i}$

B. $z = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{1-2i}{3+4i}$

C. $z = \frac{1-2i}{3-4i} - \frac{1+2i}{3+4i}$

D. $z = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{1-2i}{3+4i}$

Câu 69. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1 và z_2 trên mặt phẳng phức. Tính độ dài của MN.

A. $MN = 4$

B. $MN = 5$

C. $MN = -2\sqrt{5}$

D. $MN = 2\sqrt{5}$

Câu 70. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và số phức $k = x + iy$ trên mặt phẳng phức. Tìm tập hợp điểm P trên mặt phẳng phức để tam giác MNP vuông tại P.

A. Đường thẳng có phương trình $y = x - \sqrt{5}$

B. Đường tròn có phương trình $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$

C. Đường tròn có phương trình $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$, nhưng không chứa M, N.

D. Đường tròn có phương trình $x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$, nhưng không chứa M, N.

Câu 71. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = -1$. Tính giá trị của $P = z_1^3 + z_2^3$.

- A. $P = 0$ B. $P = 1$ C. $P = 2$ D. $P = 3$

Câu 72. Biết số phức z thỏa phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị của $P = z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}}$.

- A. $P = 0$ B. $P = 1$ C. $P = 2$ D. $P = 3$

Câu 73. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và số phức $k = x + iy$ trên mặt phẳng phức. Tìm số phức k để tam giác MNP đều.

- A. $k = 1 + \sqrt{27}$ hay $k = 1 - \sqrt{27}$ B. $k = 1 + \sqrt{27}i$ hay $k = 1 - \sqrt{27}i$
C. $k = \sqrt{27} - i$ hay $k = \sqrt{27} + i$ D. Một đáp số khác.

Câu 74. Tìm phần thực và phần ảo của $z = \frac{i^{2008} + i^{2009} + i^{2010} + i^{2011} + i^{2012}}{i^{2013} + i^{2014} + i^{2015} + i^{2016} + i^{2017}}$.

- A. 0; -1 B. 1; 0 C. -1; 0 D. 0; 1

Câu 75. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1 và z_2 trên mặt phẳng phức. Tính độ dài của MN.

- A. $MN = 4$ B. $MN = 5$ C. $MN = -2\sqrt{5}$ D. $MN = 2\sqrt{5}$

Câu 76. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1 và z_2 trên mặt phẳng phức. Tính độ dài của MN.

- A. $MN = 4$ B. $MN = 5$ C. $MN = -2\sqrt{5}$ D. $MN = 2\sqrt{5}$

Câu 77. Gọi z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm của phương trình $z^3 - 8 = 0$. Tính $M = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

- A. $M = 4$ B. $M = 0$ C. $M = 6$ D. $M = 8$

Câu 78. Tìm số phức z sao cho $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $2 + i$ B. $2 + 2i$ C. $5 + 5i$ D. $4 + 3i$

Câu 79. Cho số phức z có tập nghiệm biểu diễn là trục hoành. Nếu $z = \frac{z' + 1}{z' - 1}$ thì tập điểm biểu diễn z' là một phần của hình nào dưới đây.

- A. Trục tung B. Đường tròn C. Trục hoành D. Hình tròn

Câu 80. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm H và A, B, C, D, H lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức a, b, c, d, h . Tính môđun của số phức b biết $a = -2 + i$; $h = 1 + 3i$ và số phức b có phần ảo dương.

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{26}$ C. $4\sqrt{2}$ D. 5

Câu 81. Tìm môđun của số phức z thỏa mãn: $(1 - 2i)(z + i) + 4i(i - 1) = 7 - 21i$.

- A. $|z| = 9$ B. $|z| = 2\sqrt{3}$ C. $|z| = 5$ D. $|z| = 3\sqrt{7}$

Câu 82. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $z\bar{z} = 5$ là đường tròn có tâm I . Tìm I

- A. $I(0, 0)$ B. $I(1, 0)$ C. $I(-1, 1)$ D. $I(0, 1)$

Câu 83. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2iz - 4 = 0$. Tính môđun của số phức $w = (z_1 - 2)(z_2 - 2)$.

- A. $|w| = 6$ B. $|w| = 5$ C. $|w| = 4$ D. $|w| = 7$

Câu 84 Cho số phức $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Tìm giá trị của biểu thức $T = (z - 2)^{2021} + (4 - z)^{2012}$.

- A. 2^{1007} B. -2^{1007} C. 3^{1007} D. -2^{1006}

Câu 85. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Xác định căn bậc 2 của số phức z .

- A. $2 - i, -2 + i$ B. $2 \pm i$ C. $-2 + i, -2 - i$ D. $\sqrt{3} \pm 2i$

Câu 86. Cho số phức z thỏa mãn phương $(1 + 2i).z = 1 - 2i$. Tìm phần ảo của số phức $\omega = 2iz + (1 - 2i).\bar{z}$.

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 87. Cho số phức z thỏa mãn $z^3 = \bar{z}$. Khẳng định nào đúng?

- A. Phần thực của z lớn hơn 1.
B. z có thể nhận giá trị là số thực hoặc số thuần ảo
C. Chỉ có duy nhất một số phức thuần ảo z thỏa $z^3 = \bar{z}$.
D. $|z| = 1$

Câu 88. Cho $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$, tính $z^5 + z^6 + z^7 + z^8$.

A. 0

B. 1

C. 4

D. 3

Câu 89. Cho số phức tùy ý $z \neq 1$. Xét các số phức $\alpha = \frac{i^{2005} - i}{\bar{z} - 1} - z^2 + (\bar{z})^2$ và

$\beta = \frac{z^3 - z}{z - 1} + (\bar{z})^2 + \bar{z}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. α là số thực, β là số thực

B. α là số ảo, β là số thực

C. α là số thực, β là số ảo

D. α là số ảo, β là số ảo

Câu 90. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $(\bar{z})^4 - 2(\bar{z})^2 - 8 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

A. 4

B. $4 + \sqrt{2}$

C. $4 + 2\sqrt{2}$

D. $2 + 2\sqrt{2}$

Câu 91. Điểm M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn phương trình $3(z + 1) = 4\bar{z} + i(7 - i)$.

Tìm tọa độ điểm M.

A. $M(-2, 1)$

B. $M(-2, -1)$

C. $M(2, 1)$

D. $M(1, 2)$

Câu 92. Tính môđun của số phức $\omega = z + z^2$, với $(2 + i)z + \frac{1 - i}{1 + i} = 5 - i$.

A. $5\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

Câu 93. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn

$$2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|.$$

A. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$.

B. Parabol $y = \frac{x^2}{4}$

C. Đường tròn tâm $I(\sqrt{3}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

D. Parabol $x = \frac{y^2}{4}$

Câu 94. Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 4 + 3i| = 3$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z = 2 + 3i$

B. $z = \frac{4}{5} + \frac{6}{5}i$

C. $z = 3 + \frac{5}{2}i$

D. $z = 1 - 4i$

Câu 95. Giải phương trình $3\sqrt{2}z^2 - 2\sqrt{3}z + \sqrt{2} = 0$.

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}(1 \pm i)$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}(1 \pm i)$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}(1 \pm i)$

D. $\frac{\sqrt{6}}{5}(1 \pm i)$

Câu 96. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức

$w = (2 - i)(z + 2) - 1$ là một đường tròn. Tính chu vi đường tròn đó.

A. $2\pi\sqrt{5}$

B. $3\pi\sqrt{5}$

C. $6\pi\sqrt{5}$

D. $4\pi\sqrt{5}$

Câu 97. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là ba điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3

. Biết $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào là **đúng**.

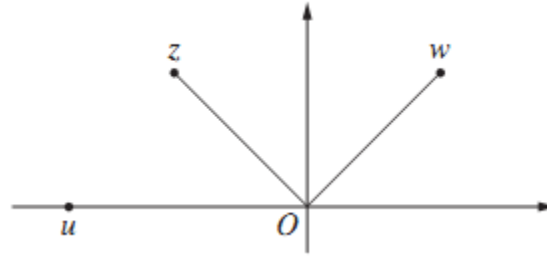
A. Trọng tâm của tam giác ABC là điểm biểu diễn số phức $z_1 + z_2 + z_3$.

B. Tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là gốc tọa độ O .

C. Tam giác ABC có trọng tâm là gốc tọa độ O

D. Tam giác ABC là tam giác đều

Câu 98. Cho các số phức w, z, u có biểu diễn hình học thỏa mãn: w nằm ở góc phần tư thứ (I), z nằm ở góc phần tư thứ (II), và u nằm trên chiều âm của trục thực.



Khẳng định nào sau đây có thể đúng?

A. $u = z.w; \quad u = z - w$

B. $z = u.w; \quad u = z + w$

C. $u = z.w; \quad u = z + w$

D. $z = u.w; \quad u = z - w$

Câu 99. Cho số phức z thỏa $|z + i - 1| = |\bar{z} - 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\frac{1}{4}$

D. 1

Câu 100. Cho hai số phức w và z thỏa mãn $w - 1 + 2i = z$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(-2; 3)$, bán kính $r = 3$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w ..

A. Đường tròn, tọa độ tâm $(-3; 5)$ bán kính bằng 3.

B. Đường thẳng song song trục tung

C. Đường thẳng song song trục hoành

D. Đường tròn, tọa độ tâm $(-1; 1)$ bán kính bằng 3

Câu 101. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z + 1 - 3i| \leq 4$.

A. Đường tròn tâm $I(1; 3)$, bán kính $R=4$

B. Đường tròn tâm $I(-1; 3)$, bán kính $R=2$

C. Hình tròn tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=4$

D. Hình tròn tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=2$

Câu 102. Tìm phần thực của số phức z biết: $z + \frac{|z|^2}{z} = 10$.

A. 10

B. $\sqrt{10}$

C. 5

D. -5

Câu 103. Cho 3 số phức $z_1 = 1+2i$; $z_2 = -3+i$; $z_3 = 4-i$. Đặt số phức $z = \overline{z_1 z_2 z_3} = a+bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Tính tổng $a+b$.

A. -10

B. 10

C. -40

D. 40

Câu 104. Tìm số phức $\omega = 2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2}$, biết $z_1 = 4-3i+(1-i)^3$; $z_2 = \frac{2+4i-2(1-i)^3}{1+i}$.

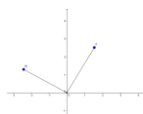
A. $\omega = 18-74i$.

B. $\omega = 18-75i$.

C. $\omega = 18+74i$.

D. $\omega = 18+75i$.

Câu 105. Hình vẽ sau biểu diễn dạng hình học của các số phức z và w . Ở đây z nằm trong góc phần tư thứ (I) và w nằm trong góc phần tư thứ (II). Số phức nào trong các số phức sau nằm trong góc phần tư thứ (III)?



A. $\overline{w} - z$

B. $\overline{z}$

C. $2iz$.

D. $-w$

Câu 106. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của 3 số phức :

$1+2i$; $(1-i)(1+2i)$; $\frac{2+6i}{3-i}$. Tính diện tích của tam giác ABC.

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Câu 107. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2+3i|=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\sqrt{13}-3$

B. 2

C. $\sqrt{13}-2$

D. $\sqrt{2}$

Câu 108. Tìm số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}(1+i)-3+2i| = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

A. $z = 1 + 3i$ B. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ D. $z = \frac{3}{4} + \frac{15}{4}i$

Câu 109. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$.

A. 4 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 110. Trên tập hợp số phức cho phương trình $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ (*). Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình (*). Tìm môđun của số phức $w = \frac{z_1}{i^{4n+2}} + \frac{z_2}{i^{4n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

A. 4 B. 6 C. 1 D. 2

Câu 111. Cho số phức z thỏa mãn: $(1-2i)z + \frac{1-3i}{1+i} = 2-i$. Tìm số phức $w = z + \frac{1}{z+2i}$.

A. $w = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$ B. $w = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$ C. $w = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$ D. $w = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

Câu 112. Tìm số phức z thỏa mãn $\frac{z}{1+i} = \bar{z} - \frac{1}{2}(3+i)$.

A. $z = 4-i$ B. $z = 4+i$ C. $z = 1+4i$ D. $z = 3$

Câu 113. Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)z + (2-3i)\bar{z} = -2-2i$. Tính môđun của z .

A. $|z| = 1$ B. $|z| = 2$ C. $|z| = \sqrt{2}$ D. $|z| = 0$

Câu 114. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình

$2(1+i)z^2 - 4(2-i)z - 5-3i = 0$ Tính $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. $T = \frac{17}{2}$ B. $T = \frac{1}{2}$ C. $T = 9$ D. $T = 1$

Câu 115. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|zi - (2+i)| = 2$

A. Đường tròn tâm $I(2,1)$ bán kính 2 B. Đường tròn tâm $I(2,1)$ bán kính 4
C. Đường tròn tâm $I(1,-2)$ bán kính 2 D. Đường tròn tâm $I(1,-2)$ bán kính 4

Câu 116. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|-2+i(z-1)| = 5$.

A. Đường tròn tâm $I(2,1)$ bán kính 25

B. Đường tròn tâm $I(2,1)$ bán kính 25

C. Đường tròn tâm $I(1,-2)$ bán kính 25

D. Đường tròn tâm $I(1,-2)$ bán kính 5

Câu 117. Tìm modul của số phức z , biết $z = (1+i)(2-i) - 8 + i + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$.

A. $|z| = 61$

B. $|z| = \sqrt{61}$

C. $|z| = 36$

D. $|z| = 25$

Câu 118. Cho số phức $z = (1-2i)(4-3i) - 2 + 8i + \frac{(2+3i)^2 - 7i}{|3+4i|}$. Xác định phần thực, phần ảo

của số phức z

A. Phần thực của số phức z là 10, phần ảo của số phức z là 4

B. Phần thực của số phức z là -10, phần ảo của số phức z là 4

C. Phần thực của số phức z là 4, phần ảo của số phức z là -10

D. Phần thực của số phức z là 4, phần ảo của số phức z là 10

Câu 119. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn điều kiện:

$$|z|^2 - 5z - 5\bar{z} = 0.$$

A. Đường tròn tâm $I(5,0)$ bán kính 25

B. Đường tròn tâm $I(0,5)$ bán kính 25

C. Đường tròn tâm $I(5,0)$ bán kính 5

D. Đường tròn tâm $I(0,5)$ bán kính 5

Câu 120. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $\bar{z}$ biết: $z = (2-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i) + (1-i)^{2016}$.

A. Phần thực của số phức z là $2^{1008} + 9$, phần ảo của số phức z là $-\sqrt{3}$

B. Phần thực của số phức z là $2^{1008} + 9$, phần ảo của số phức z là $-\sqrt{3}i$

C. Phần thực của số phức z là $2^{1008} - 9$, phần ảo của số phức z là $-\sqrt{3}i$

D. Phần thực của số phức z là $2^{1008} - 9$, phần ảo của số phức z là $-\sqrt{3}$

Câu 121. Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)z + (2-3i)\bar{z} = -2-2i$. Tính môđun của $Z + i\bar{Z}$.

A. $|w| = 5$

B. $|w| = 5\sqrt{2}$

C. $|w| = 4$

D. $|w| = 4\sqrt{2}$

Câu 122. Cho số phức z thỏa mãn: $i\bar{z} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11} + \left(\frac{2i}{1+i}\right)^8$. Tìm phần thực, phần ảo của

$$w = \bar{z} + i\bar{z}.$$

- A. Phần thực của số phức z là 15, phần ảo của số phức z là 17
 B. Phần thực của số phức z là 15, phần ảo của số phức z là -17
 C. Phần thực của số phức z là 15, phần ảo của số phức z là $-17i$
 D. Phần thực của số phức z là -15 , phần ảo của số phức z là -17

Câu 123. Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)\bar{z}$ là số thực và $\left|z+2\bar{z}-\frac{1}{2}\right|=2\sqrt{5}$ Tìm số phức liên hợp của z .

- A. 4 B. 6 C. 1 D. 2

Câu 124. Cho số phức z thỏa mãn: $|z|^2 + |z|^4 = 30$ và $|2z + \bar{z}| = \sqrt{13}$ Tìm modul của số phức z .

- A. $|z|=5$ B. $|z|=\sqrt{5}$ C. $|z|=2\sqrt{2}$ D. $|z|=2$

Câu 125. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $|2+3iz|=|6z-i|$ và $|z_1-z_2|=\frac{1}{3}$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A=|z_1+z_2|$.

- A. 4 B. 6 C. 1 D. 2

Câu 126. Cho số phức z thỏa mãn: $\frac{z}{1-2i} + \bar{z} = 2$. Tìm phần thực, phần ảo của $w = z^2 - 2(z+i)$

- A. Phần thực của số phức z là $-\frac{65}{49}$, phần ảo của số phức z là $-\frac{128}{49}$
 B. Phần thực của số phức z là $-\frac{65}{49}$, phần ảo của số phức z là $-\frac{128}{49}i$
 C. Phần thực của số phức z là $-\frac{65}{49}$, phần ảo của số phức z là $-\frac{65}{49}$
 D. Phần thực của số phức z là $-\frac{65}{49}$, phần ảo của số phức z là $\frac{128}{49}i$

Câu 127. Cho số phức z thỏa mãn: $1+\bar{z}=\left|\bar{z}-i\right|^2+(iz-1)^2$. Tìm modul của $w=z+\frac{4}{z+1}$

- A. 4 B. 6 C. 1 D. 2

Câu 128. Tìm số phức $w=1-3i+z$ có modul lớn nhất. Biết z là số phức sao cho $|z-1+i|=2$

- A. $z=8-4i$ B. $z=8+4i$ C. $z=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}i$ D. $z=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}i$

Câu 129. Cho số phức z thỏa mãn: $|z| = 2016$. Tìm modul của w biết $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$

- A. $|w| = 1$ B. $|w| = 0$ C. $|w| = 2016$ D. $|w| = 5$

Câu 130. Gọi z_1, z_2, z_3 là hai số phức thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$.

- A. 4 B. 5 C. 1 D. 2

Câu 131. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $2z_1 = (1 + \sqrt{3}i)z_2$ và $|z_1| = 1$. Tính diện tích tam giác OAB.

- A. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $S = \frac{1}{2}$ D. $S = \sqrt{3}$

Câu 132. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = 3z + 1 - i$ biết z là số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 2 - 3i| = \sqrt{3}|1 + \bar{z}|$ có hình dạng như thế nào?

- A. Hình tròn B. Đường thẳng C. Đường tròn D. Parabol

Câu 133. Cho tập hợp số phức z thỏa mãn: $|z^4 + 1| = 2|z|$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của modul z .

- A. Giá trị nhỏ nhất của modul z là $\sqrt{5} - 1$, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{5} + 1$.
 B. Giá trị nhỏ nhất của modul z là $\sqrt{5}$, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{5} + 1$.
 C. Giá trị nhỏ nhất của modul z là 2, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{5} + 1$.
 D. Giá trị nhỏ nhất của modul z là 2, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{5} - 1$.

Câu 134. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2|$ Hãy tính $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4$

- A. $P = 1$ B. $P = 2$ C. $P = -1$ D. $P = -2$

Câu 135. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của modul $|z + 1| + |z^2 - z + 1|$.

- A. Giá trị nhỏ nhất của modul z là $\sqrt{3} - 1$, giá trị lớn nhất của modul z là $\frac{13}{4}$.

B. Giá trị nhỏ nhất của modul z là $\sqrt{3}$, giá trị lớn nhất của modul z là $\frac{13}{4}$.

C. Giá trị nhỏ nhất của modul z là $\frac{13}{4}$, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{3}-1$.

D. Giá trị nhỏ nhất của modul z là $\sqrt{3}-1$, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{5}-1$.

Câu 136. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của modul $|z^3-1|$.

A. Giá trị nhỏ nhất của modul z là 1, giá trị lớn nhất của modul z là 4.

B. Giá trị nhỏ nhất của modul z là 0, giá trị lớn nhất của modul z là 4.

C. Giá trị nhỏ nhất của modul z là 4, giá trị lớn nhất của modul z là 5.

D. Giá trị nhỏ nhất của modul z là 1, giá trị lớn nhất của modul z là 5.

Câu 137. Cho tập hợp số phức z thỏa mãn: $\left| \frac{z+2-i}{z+1-i} \right| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của modul z .

A. Giá trị nhỏ nhất của modul z là $\sqrt{2}-1$, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{2}+1$.

B. Giá trị nhỏ nhất của modul z là $\sqrt{2}$, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{2}+1$.

C. Giá trị nhỏ nhất của modul z là 2, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{2}+1$.

D. Giá trị nhỏ nhất của modul z là 2, giá trị lớn nhất của modul z là $\sqrt{2}+1$.

Câu 138. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ sao cho

$|z-i| = |(i+1)z|$ có hình dạng như thế nào?

A. Một phần hình tròn

B. Một phần hypebol

C. Một phần đường thẳng

D. Một phần đường tròn

Câu 139. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = iz + 1$ trên mặt phẳng tọa độ sao cho :

$$\left| \left(\bar{z} - 2i + 1 \right)^3 \right| = 8$$

A. Đường tròn tâm $I(-1,1)$ bán kính 2

B. Đường tròn tâm $I(1,1)$ bán kính 2

C. Đường tròn tâm $I(-1,1)$ bán kính 4

D. Đường tròn tâm $I(1,1)$ bán kính 4

Câu 140. Cho số phức $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ thỏa mãn $\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}$ là số thực. Tìm modul của z .

A. $|z|=1$

B. $|z|=2$

C. $|z|=\sqrt{2}$

D. $|z|=3$

