TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\left\lfloor \frac{x}{\sqrt{\pi}} \right\rfloor$$

CHUYÊN ĐỀ
HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ HỖN TẠP

LÝ THUYẾT GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC (PHẦN 4)

TRUNG ĐOÀN VŨ VĂN DŨNG – QUÂN ĐOÀN TĂNG THIẾT GIÁP

CHỦ ĐẠO: KẾT HỢP SỬ DỤNG PHÉP THẾ, CỘNG ĐẠI SỐ VÀ ẨN PHỤ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

- **SỬ DỤNG ĐẠI LƯỢNG LIÊN HỢP TRỰC TIẾP.**
- **PHỐI HỢP PHÉP THẾ, PHÉP CỘNG ĐẠI SỐ VÀ ẨN PHỤ.**
- **TỔNG HỢP CÁC PHÉP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN.**
- **BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.**

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2014

"Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em"

(*Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh*).

"Giang hồ còn lại mình tôi,
Quê người đắng khói, quê người cay men…"

(*Anh về quê cũ – Nguyễn Bính*).

CHUYÊN ĐỀ
HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ HỖN TẠP

LÝ THUYẾT GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC (PHẦN 4)

TRUNG ĐOÀN VŨ VĂN DŨNG – QUÂN ĐOÀN TĂNG THIẾT GIÁP

Trong khuôn khổ Toán học sơ cấp nói chung và Đại số phổ thông nói riêng, hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tạp là dạng toán cơ bản nhưng thú vị, có phạm vi trải rộng, phong phú, liên hệ chặt chẽ với nhiều bộ phận khác của toán học sơ cấp cũng như toán học hiện đại.

Tại Việt Nam, hệ phương trình, nội dung hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tạp là một bộ phận hữu cơ, quan trọng, được phổ biến giảng dạy chính thức trong chương trình sách giáo khoa Toán các lớp 9, 10, 11, 12 song song với các khối lượng kiến thức liên quan. Đây cũng là kiến thức phổ biến xuất hiện trong các kỳ thi kiểm tra kiến thức thường niên, kỳ thi chọn học sinh giỏi toán các cấp trên toàn quốc, kỳ thi tuyển sinh lớp 10 hệ THPT và trong kỳ thi tuyển sinh đại học – cao đẳng hàng năm, một kỳ thi đầy cam go, kịch tính và bất ngờ, nó lại là một câu rất được quan tâm của các bạn học sinh, phụ huynh, các thầy cô, giới chuyên môn và đông đảo bạn đọc yêu Toán.

Yêu cầu của dạng toán khá đa dạng, đa chiều, mục tiêu tìm các ẩn thỏa mãn một tính chất nào đó nên để thao tác dạng toán này, các bạn học sinh cần liên kết, phối hợp, tổng hợp các kiến thức được học về phương trình, hệ phương trình và bất phương trình, như vậy nó đòi hỏi năng lực tư duy của thí sinh rất cao. Tuy nhiên "Trăm hay không hay bằng tay quen", các phương pháp cơ bản đã được được các thế hệ đi trước đúc kết và tận tụy cho thế hệ tương lai, các bạn hoàn toàn đủ khả năng kế thừa, phát huy và sáng tạo không ngừng, chuẩn bị đủ hành trang nắm bắt khoa học kỹ thuật, đưa đất nước ngày càng vững bền, phồn vinh, và hiển nhiên những bài toán trong các kỳ thi nhất định không thể là rào cản, mà là cơ hội thử sức, cơ hội khẳng định kiến thức, minh chứng sáng ngời cho tinh thần học tập, tinh thần ái quốc !

Các phương pháp giải và biện luận hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tạp được luyện tập một cách đều đặn, bài bản và hệ thống sẽ rất hữu ích, không chỉ trong bộ môn Toán mà còn phục vụ đắc lực cho các môn khoa học tự nhiên khác như hóa học, vật lý, sinh học,...Tiếp theo Lý thuyết giải hệ phương trình chứa căn các phần 1, 2, 3, tài liệu chủ yếu giới thiệu đến quý bạn đọc Lý thuyết giải hệ phương trình chứa căn phần 2 ở cấp độ cao hơn, trình bày chi tiết các thí dụ điển hình về hệ giải được nhờ sử dụng tổng hợp các phép thế, phép cộng đại số, đại lượng liên hợp và phép đặt ẩn phụ. Đây là nội dung có mức độ khó tương đối, đòi hỏi các bạn độc giả cần có kiến thức vững chắc về các phép giải phương trình chứa căn, kỹ năng biến đổi đại số và tư duy chiều sâu bất đẳng thức.

Các thao tác tính toán và kỹ năng trình bày cơ bản đối với phương trình, hệ phương trình xin không nhắc lại.

I. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1. Kỹ thuật nhân, chia đơn thức, đa thức, hằng đẳng thức.
2. Nắm vững các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.
3. Nắm vững các phương pháp giải, biện luận phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc cao.
4. Sử dụng thành thạo các ký hiệu toán học, logic (ký hiệu hội, tuyển, kéo theo, tương đương).
5. Kỹ năng giải hệ phương trình cơ bản và hệ phương trình đối xứng, hệ phương trình đồng bậc, hệ phương trình chứa căn thông thường.
6. Kỹ thuật đặt ẩn phụ, sử dụng đại lượng liên hợp, biến đổi tương đương.
7. Kiến thức nền tảng về ước lượng – đánh giá, hàm số - đồ thị, bất đẳng thức – cực trị.

I. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)=3, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=x+1. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{y}=\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+3}.$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x+3}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x+3=x^2+2x+1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\in\left\{-2;1\right\} \end{cases}\Rightarrow x=1.$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Đây là bài toán mở đầu cho phương pháp sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức, một phương pháp ẩn giấu khá mạnh trong phương trình, hệ phương trình. Các bạn lưu ý các hệ thức tương đương

- $A+B=\dfrac{A^2-B^2}{A-B} \quad \left(A-B\ne 0\right)\Leftrightarrow A-B=\dfrac{A^2-B^2}{A+B} \quad \left(A+B\ne 0\right)$.
- $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} \quad \left(A\ge 0;B\ge 0;A\ne B\right)\Leftrightarrow \sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \quad \left(A\ge 0;B\ge 0;A^2+B^2>0\right)$.

Mấu chốt bài toán là khai phá quan hệ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+3}$, dựa trên điều này kết hợp các phương trình vô tỷ các bạn có thể tương tự thêm nhiều bài toán khác

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)=3, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3x+1. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)=3, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2x+1. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)=3, \\ 2\sqrt{x}+2\sqrt{y}=x^2-x+5. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)=3, \\ 2\sqrt{x}+2\sqrt{y}=x^2+5x+8. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)=3, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=x+4. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}+3x-3y=0, \\ x^3+xy+3x+y=6. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1;y\ge -1$.

Trường hợp $\sqrt{x+1}=\sqrt{y+1}=0\Leftrightarrow x=y=-1$ không thỏa mãn hệ.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+3(x-y)=0\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+3\right)=0.$$

Ta thấy $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+3>0$ nên thu được $x-y=0\Leftrightarrow x=y$. Phương trình thứ hai trở thành

$$x^3+x^2+4x-6=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+2x+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\(x+1)^2=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1.$$

Từ đây kết luận hệ có nghiệm $x=y=1$.

Nhận xét.

Với bài toán này, quan hệ ràng buộc $x=y$ sẽ cho ta nhiều hướng đi mới về hệ kế thừa

- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}+3x-3y=0,\\x^2+xy+y^2+x+y=6.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.
- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}+3x-3y=0,\\x^2-y-2=2\sqrt{15x+y+1}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.
- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}+3x-3y=0,\\xy+5x+6=2\sqrt{2x+y+4}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.
- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}+3x-3y=0,\\4x^2+5x+3y=\sqrt{x+y+6}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Ngoài ra các bạn có thể tổng quát hóa phương trình thứ nhất của hệ bằng cách đảm bảo cho biểu thức hệ quả xác định dương như sau

$$\sqrt{x+m}-\sqrt{y+m}+nx-ny=0,\quad(n>0).$$

Bài toán 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^3+1}-\sqrt{y^3+1}+x-y=0,\\2y-1=\sqrt{y^2+4x-4}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge-1;y\ge-1;y^2+4x-4\ge0$. Xét trường hợp $x=y=-1$ không thỏa mãn hệ.

Ngoài khả năng đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^3+1}-\sqrt{y^3+1}+x-y=0\Leftrightarrow\frac{x^3-y^3}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{y^3+1}}+x-y=0\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{x^2+xy+y^2}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{y^3+1}}+1\right)=0.$$

Rõ ràng $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\ge0,\forall x;y\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{x^2+xy+y^2}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{y^3+1}}+1>0$.

Do đó ta thu được $2x-1=\sqrt{x^2+4x-4}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge0\\4x^2-4x+1=x^2+4x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\3x^2-8x+5=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{1;\frac{5}{3}\right\}$.

Kết luận bài toán có hai nghiệm $x=y=1;x=y=\frac{5}{3}$.

Nhận xét.

Bài toán số 3 cũng tương tự bài toán 2, phương trình thứ nhất được tổng quát hóa như sau

$$\sqrt{x^3+m}-\sqrt{y^3+m}+nx-ny=0,\quad(n>0).$$

Bài toán 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2y}+4x=4y+\sqrt{3y},\\ x^4-xy-3x+y+2=0.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x+2y\ge 0; y\ge 0$. Trường hợp hai biến cùng bằng 0 không thỏa mãn hệ đã cho.

Ngoài trường hợp đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+2y}-\sqrt{3y}+4x-4y=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+4(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+4\right)=0\Rightarrow x=y\ \left(\text{Vì } \frac{1}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+4>0\right).$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$x^4-x^2-2x+2=0\Leftrightarrow x^4-2x^2+1+x^2-2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2+(x-1)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=1\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Mấu chốt bài toán là nhận ra $x+2y-3y=x-y$ điểm nhấn liên hợp

$$\sqrt{x+2y}-\sqrt{3y}=\frac{x-y}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}$$

Chúng ta có thể tổng quát hóa phương trình thứ nhất của hệ theo từng cấp độ

$$\sqrt{x+ny}+px=py+\sqrt{(n+1)y}\quad (p>0)$$

$$\sqrt{mx+ny}+px=py+\sqrt{(n+m)y}\quad (p>0)$$

Từ đó đề xuất được muôn vàn bài toán kế thừa

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2y}+4x=4y+\sqrt{3y},\\ x^2-10y-12=4\sqrt{x+y+3}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+2y}+4x=4y+\sqrt{5y},\\ 2y^2+x-3=2\sqrt{3x-y+3}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x+3y}+6x=6y+\sqrt{7y},\\ 4x+1-xy=2\sqrt{x+y+1}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+5y}+7x=7y+2\sqrt{2y},\\ 2xy-3y+2=y\sqrt{3x-2}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+5y}+10x=10y+\sqrt{7y},\\ \sqrt{xy-2x}+\sqrt{2x^2+4y}=2y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y}-\sqrt{x}=(x-y)\left(x^2+y^2+1\right),\\ 2x-y=\sqrt{3x^2-xy+x-y-1}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0; y\ge 0$.

Trừ đi khả năng hai biến cùng bằng 0, phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$(x-y)(x^2+y^2+1)+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2+1)+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+y^2+1+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0 \Leftrightarrow x=y \text{ (Vì } x^2+y^2+1+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0\text{)}.$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$x=\sqrt{2x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=2x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\in\{-1;1\} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Bài toán kế thừa giữ nguyên phương trình thứ nhất của hệ

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}-\sqrt{x}=(x-y)(x^2+y^2+1), \\ 5x^2-2y+1=(4x-1)\sqrt{x^2+1} \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}-\sqrt{x}=(x-y)(x^2+y^2+1), \\ 2xy-2x-y+2=x\sqrt{3y-2}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}-\sqrt{x}=(x-y)(x^2+y^2+1), \\ 10\sqrt{x^2y+1}=3(x^2+2). \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Tổng quát hóa phương trình thứ nhất của hệ theo cấp độ 1

$$k\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)=l(x-y)(mx^2+ny^2+p) \qquad (k,l>0).$$

- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{y}-3\sqrt{x}=(x-y)(4x^2+5y^2+6), \\ (2x-1)\sqrt{10-4xy}=5-2x. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5\sqrt{y}-5\sqrt{x}=6(x-y)(x^2+2y^2+1), \\ \sqrt{2x-1}-\sqrt{y+1}=x+y-4. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Tổng quát hóa phương trình thứ nhất của hệ theo cấp độ 2 với D là tập xác định của hệ

$$k\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)=l(x-y).f(x;y) \qquad \left(k,l>0; f(x;y)>0, \forall x,y\in D\right)$$

- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{y}-3\sqrt{x}=5(x-y)(x^2+2y^2+x+1), \\ \sqrt{2x-1}-\sqrt{y+1}=x+y-4. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5\sqrt{y}-5\sqrt{x}=(x-y)(x^4+y^2+y), \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7\sqrt{y}-7\sqrt{x}=5(x-y)(x^4+y^4+x+2y), \\ \sqrt{xy-3x+10}+\sqrt{2x^2-5y+4}=y+3. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 9\sqrt{y}-9\sqrt{x}=(x-y)(x^4+y^4+x+3y+1), \\ \sqrt{x+2}-\sqrt{3-y}=y^2-6x+9. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+x=\sqrt{2y+1}+y+1,\\ \sqrt{y+3}+\sqrt{5-2x}=\sqrt{2y+2}+\sqrt{7-3x}.\end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x+y\ge 0; y\ge -\frac{1}{2}; x\le \frac{7}{3}$.

Trường hợp $x+y=2y+1=0$ không thỏa mãn hệ. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{2y+1}+x-y-1=0\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y+1}}+\left(x-y-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y+1}}+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y+1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y+1}}+1=0\quad(1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y+1}}+1>0$ nên ta thu được $x=y+1$.

Khi ấy phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-2x}=\sqrt{2x}+\sqrt{7-3x}$.

Với điều kiện mới $0\le x\le \frac{7}{3}$, phương trình ẩn x đã cho tương đương với

$$x+2+5-2x+2\sqrt{\left(x+2\right)\left(5-2x\right)}=2x+7-3x+2\sqrt{2x\left(7-3x\right)}$$

$$\Leftrightarrow 7-x+2\sqrt{-2x^2+x+10}=7-x+2\sqrt{14x-6x^2}$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+x+10=14x-6x^2\Leftrightarrow 4x^2-13x+10=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{5}{4};2\right\}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến hệ có hai nghiệm kể trên $x=y=\frac{5}{4}; x=y=2$.

Nhận xét.

Một số hệ phương trình kế thừa

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+x=\sqrt{2y+1}+y+1,\\ \sqrt{y+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{y+9}-\sqrt{x+3}.\end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+x=\sqrt{2y+1}+y+1,\\ \left(\sqrt{y+2}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x.\end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+x=\sqrt{2y+1}+y+1,\\ \sqrt{x^2+y+1}-\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1}.\end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Mấu chốt của thao tác liên hợp là nhận ra nhân tử chung $x+y-\left(2y+1\right)=x-y-1$, thực ra điều này các bạn khai thác phương trình thứ nhất dưới sự trợ giúp của máy tính bỏ túi Casio Fx570 Plus như sau

- Xét phương trình $\sqrt{x+y}+x=\sqrt{2y+1}+y+1$.
- Gán $x=100\Rightarrow \sqrt{100+y}+100=\sqrt{2y+1}+y+1$.
- Dùng tổ hợp phím Shift Solve (Shift Calc) ta thu được $y=99$.
- Như vậy $x-y-1=0$.

Sở dĩ chúng ta chọn $x=100$ là một số lớn, khi đó mức độ "xấp xỉ" nhỏ nên dễ dàng thiết lập được quan hệ giữa x và y. Các bạn lưu ý có thể lựa chọn với $x=1000, x=10000$.

Một số hệ phương trình tương tự như sau

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y}+x=\sqrt{4y+1}+y+1,\\ \sqrt{y-2}+\sqrt{7-x}=6x-7-x^2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+x-y=\sqrt{2y+1}+1,\\ (y+1)^2+5x+6=2\sqrt{3x+4}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+2y}+x=\sqrt{2x+3y}+y,\\ 3\sqrt{x+1}+3\sqrt{y-1}=3x+y+1.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x},\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0;x+y\geq 0$.

Xét trường hợp $y=3\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{x+3}=0\\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x}=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$.

Xét trường hợp $y\neq 3\Rightarrow\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x+3}$. Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\frac{y-3}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}=\frac{y-3}{x}\Leftrightarrow\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x\Rightarrow\sqrt{x+y}=x+\sqrt{x+3}.$$

Phương trình thứ hai trở thành

$$x+\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=x+3\Leftrightarrow\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=3\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{x^2+3x}=9$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3x}=3-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3\\ x^2+3x=x^2-6x+9\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Một số bài toán kế thừa

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x},\\ \sqrt{x+y}-x=2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x},\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}+x^2+12\sqrt{x+1}=36.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x},\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}+x^3=2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+2y-2}=y-x-1,\\ x^2+y^2-2xy+4x-3y=0.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x+y\geq 1\\ x+2y\geq 2\end{cases}$

Trường hợp $\sqrt{2x+y-1}=\sqrt{x+2y-2}=0$ không thỏa mãn hệ. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{x-y+1}{\sqrt{2x+y-1}+\sqrt{x+2y-2}}+x-y+1=0\Leftrightarrow(x-y+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+y-1}+\sqrt{x+2y-2}}+1\right)=0.$$

Ta thấy $\frac{1}{\sqrt{2x+y-1}+\sqrt{x+2y-2}}+1>0$ nên $x-y+1=0\Leftrightarrow y=x+1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$(x-y)^2+4x-3y=0\Leftrightarrow 1+4x-3(x+1)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow(x;y)=(2;3).$$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y+1+\sqrt{2y+3}=x+\sqrt{2x+1},\\ \sqrt{3x+y}+\sqrt{4x^2-1}=x-y.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge-\frac{1}{2};4x^2\ge1\\ 3x+y\ge0;y\ge-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\vee x\ge\frac{1}{2}\\ 3x+y\ge0;y\ge-\frac{3}{2}\end{cases}$

Xét trường hợp $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}y+1+\sqrt{2y+3}=-\frac{1}{2}\\ \sqrt{y-\frac{3}{2}}+\sqrt{4x^2-1}=-\frac{1}{2}-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+1+\sqrt{2y+3}=-\frac{1}{2}\\ y\ge\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow y\in\varnothing$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x-y-1+\sqrt{2y+3}-\sqrt{2x+1}=0\Leftrightarrow y+1-x+\frac{2(y+1-x)}{\sqrt{2y+3}+\sqrt{2x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow(y+1-x)\left(1+\frac{2}{\sqrt{2y+3}+\sqrt{2x+1}}\right)=0\Leftrightarrow x=y+1$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$.

Với điều kiện $\begin{cases}x\ge\frac{1}{4}\\ 4x^2\ge1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$ ta được $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}\ge\sqrt{4.\frac{1}{2}-1}=1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2};y=-\frac{1}{2}$.

Bài toán 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+8}=\frac{y-8}{2x},\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+8x}=12.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0;y\ge1$.

Xét $y=8$ ta thu được hệ $\begin{cases}2\sqrt{x+8}=0;x>0\\ \sqrt{x+8}+\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+8x}=12\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Xét $y\ne8$ thì $\sqrt{x+y}\ne\sqrt{x+8}$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{y-8}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+8}}=\frac{y-8}{2x}\Leftrightarrow\sqrt{x+y}-\sqrt{x+8}=2x.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $2x+\sqrt{x+8}+\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+8x}=12$.

Đặt $\sqrt{x}+\sqrt{x+8}=t,t>0\Rightarrow t^2=2x+8+2\sqrt{x^2+8x}$. Dẫn đến

$$\begin{cases}t^2+t-20=0\\t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\in\{-5;4\}\\t>0\end{cases}\Leftrightarrow t=4\Rightarrow t^2=16\Leftrightarrow\sqrt{x^2+8x}=4-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 4\\x^2+8x=x^2-8x+16\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Từ đây suy ra hệ có nghiệm $(x;y)=(1;24)$.

Nhận xét.

Thông qua 10 bài toán mở đầu có lẽ đông đảo bạn đọc đã hình dung được phần nào phương pháp sử dụng trục căn thức – đại lượng liên hợp giải hệ phương trình chứa căn thức hỗn hợp. Kiến thức được sử dụng hết sức cơ bản, nằm trong chương trình Đại số học kỳ I lớp 9 THCS hiện hành

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\qquad[1]$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\qquad[2]$$

Hai dạng thức [1] và [2] là tương đương nhau tuy nhiên chắc các bạn đều biết điều kiện tiên quyết của [2] là mẫu số khác 0, đồng nghĩa trước khi thực hiện liên hợp chúng ta cần xét trường hợp đặc biệt $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0\Leftrightarrow a=b$, nhằm đảm bảo nguyên tắc và tránh bỏ sót nghiệm vốn có của bài toán. Ngoài ra, thực hiện liên hợp theo phương án [2] vô tình tạo ra đại lượng $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ dưới mẫu thức, xui xẻo hơn khi dấu của nó rất khó xác định. Quan niệm rằng đánh giá đại lượng xác định dương (âm) rõ ràng dễ dàng hơn những thứ vô định, vì thế các bạn cần tránh liên hợp theo phương án [2], trừ trường hợp bất đắc dĩ. Một số bài toán kế thừa

- ❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+8}=\dfrac{y-8}{2x},\\2\sqrt{x+y}=x^2+x+13.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.
- ❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+8}=\dfrac{y-8}{2x},\\4\sqrt{x+y}=x^2+x+28.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.
- ❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+8}=\dfrac{y-8}{2x},\\\sqrt{x+y}-\sqrt{x+8}+x^3+\sqrt{x}=4.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x}\right)=8,\\y+\dfrac{9x}{\sqrt{x+8}}=5\sqrt{x}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $y=\dfrac{8}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}\Leftrightarrow y=\sqrt{x+8}-\sqrt{x}$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}+\dfrac{9x}{\sqrt{x+8}}=5\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x+8}+\dfrac{9x}{\sqrt{x+8}}-6\sqrt{x}=0$.

Điều kiện $x\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x+8+9x-6\sqrt{x^2+8x}=0 \Leftrightarrow 5x+4=3\sqrt{x^2+8x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4\ge 0 \\ 25x^2+40x+16=9\left(x^2+8x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{4}{5} \\ 16x^2-32x+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{4}{5} \\ (x-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$, dẫn đến hệ có nghiệm $x=1; y=2$.

Nhận xét.

Một số bài toán kế thừa

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x}\right)=8, \\ y+\dfrac{10x}{\sqrt{x+8}}=\dfrac{16}{3}\sqrt{x}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x}\right)=8, \\ y+\dfrac{3x}{\sqrt{x+8}}=3\sqrt{x}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-4y+3\sqrt{y}=\sqrt{2x+y}, \\ \sqrt{y-1}+\sqrt{x+1}+y^2+y=10. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 1; x\ge -1; 2x+y\ge 0$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x-4y+3\sqrt{y}-\sqrt{2x+y}=0 \Leftrightarrow x-4y+\frac{8y-2x}{3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4y)\left(1-\frac{2}{3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ 3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}=2 \end{array}\right.$$

Xét trường hợp $3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}=2$ vô nghiệm vì $3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}\ge 3, \forall y\ge 1$.

Xét trường hợp $x=2y$ thì phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{y-1}+\sqrt{4y+1}+y^2+y=10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1}-1+\sqrt{4y+1}-3+y^2+y-6=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}+\frac{4y-8}{\sqrt{4y+1}+3}+(y-2)(y+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}+\frac{4}{\sqrt{4y+1}+3}+y+3\right)=0$$

Dễ thấy $\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{4y+1}+3}+y+3>0, \forall y\ge 1 \Rightarrow y-2=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow (x;y)=(8;2)$.

Bài toán 13. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực $\begin{cases} \dfrac{x+3\sqrt{y}}{4y+\sqrt{2x+y}}=1, \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-4y-8}}-\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}+\dfrac{1}{2}=0. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $3x-4y-8\neq 0; y>1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x-4y=\sqrt{2x+y}-3\sqrt{y}\Leftrightarrow x-4y=\frac{x-4y}{\sqrt{2x+y}+3\sqrt{y}}$$

$$\Leftrightarrow (x-4y)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2x+y}+3\sqrt{y}}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4y\\ \sqrt{2x+y}+3\sqrt{y}=1\end{array}\right.$$

Vì $\sqrt{2x+y}+3\sqrt{y}>3>1,\forall y>1$ nên với $x=4y\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt[3]{y-1}}-\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{2}=0$.

Đặt $\frac{1}{\sqrt[6]{y-1}}=a;a>0$ thu được $\frac{1}{2}a^2-a^3+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow a=1\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[6]{y-1}}=1\Leftrightarrow y=2\Rightarrow (x;y)=(8;2)$.

Kết luận hệ đề bài có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Các bài toán 12 và 13 có cùng một phương trình thứ nhất, phương trình thứ hai chỉ mang tính kế thừa. Tuy nhiên để đạt mục đích loại trừ một trường hợp các bạn cần lựa chọn x và y sao cho $3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}=2$ *vô nghiệm, rõ ràng phương án gần nhất là lựa chọn y sao cho* $3\sqrt{y}+\sqrt{2x+y}\geq 3,\forall y\geq 1$. *Điều này khiến chúng ta lựa chọn phương trình thứ hai tiền thân kiểu biến y thay vì biến x*

- Làm ngược phương trình thứ hai từ $y^2-3y+4=2\sqrt{y-1}$.

  Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-4y+3\sqrt{y}=\sqrt{2x+y},\\ y^2+y-x+4=2\sqrt{y-1}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Làm ngược phương trình thứ hai từ $2y^2-7y+8=2\sqrt{y-1}$.

  Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-4y+3\sqrt{y}=\sqrt{2x+y},\\ 2y^2-x+8=3y+2\sqrt{y-1}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Làm ngược phương trình thứ hai từ $\frac{(y-2)(y-5)+\sqrt{y-4}+1}{y^2-4y+1}=\frac{1}{3}$.

  Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+3\sqrt{y}}{4y+\sqrt{2x+y}}=1,\\ \dfrac{(y-2)(y-5)+\sqrt{y-4}+1}{y^2-x+1}=\dfrac{1}{3}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2},\\ \sqrt{x-2}-\sqrt{y+2}=2\sqrt{xy-4}-2x+2.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 2;y\geq 2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}+\sqrt{x-2}-\sqrt{y-2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+\frac{x-y}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}\right)=0$$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}>0\Rightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2$.

Điều kiện $x\ge 2$. Đặt $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=t\Rightarrow t^2=2x+2\sqrt{x^2-4}$.

Ta có $x-2<x+2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow t=\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}<0,\forall x\ge 2$. Ta thu được

$$\begin{cases}t<0\\ t=-t^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<0\\ (t-1)(t+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<0\\ t\in\{-2;1\}\end{cases}\Leftrightarrow t=-2\Leftrightarrow t^2=4$$

$$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-4}=4\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\ge 0\\ x^2-4=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=2$.

Nhận xét.

Phương trình thứ nhất ngoài phương án sử dụng đại lượng – trục căn thức, các bạn có thể sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số thuộc liên chương trình Đại số - Giải tích lớp 11 – 12 THPT, tuy nhiên phải thông qua một phép đặt nhẹ tạo tiền đề như sau

- Đặt $\begin{cases}\sqrt{x-2}=a,a\ge 0\Rightarrow x=a^2+2\\ \sqrt{y-2}=b,b\ge 0\Rightarrow x=b^2+2\end{cases}\Rightarrow\sqrt{a^2+4}+a=\sqrt{b^2+4}+b$.
- Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t;t\ge 0\Rightarrow f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}+1>0,\forall t>0$.
- Hàm số liên tục, đồng biến nên ta được $f(a)=f(b)\Leftrightarrow x-2=y-2\Leftrightarrow x=y$.

Tuy nhiên, các bạn đã thấy phép liên hợp đưa ta đến lời giải "cơ bản", "nhẹ nhàng" hơn rất nhiều, thậm chí các em học sinh lớp 9, 10 đều làm được. Một số hệ phương trình kế thừa như sau

➢ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2},\\ \sqrt{y+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2y-1}}=\sqrt{2}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

➢ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2},\\ \sqrt{x^2-y+3}-\sqrt{y^2-x-6}=3.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Các bạn có thể tổng quát hóa phương trình thứ nhất để dẫn đến những phương trình chốt mới

$$\sqrt{x+m}+\sqrt{x+n}=\sqrt{y+m}+\sqrt{y+n}$$

$$\sqrt{x^3+m}+\sqrt{x+n}=\sqrt{y^3+m}+\sqrt{y+n}$$

$$\sqrt{x^{2p+1}+m}+\sqrt{x^{2q+1}+n}=\sqrt{y^{2p+1}+m}+\sqrt{y^{2q+1}+n}$$

Như vậy ta có một số hệ phương trình mới như sau

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x-4}=\sqrt{y^3+2}+\sqrt{y-4},\\ \sqrt{5x-y^2}+\sqrt{18+3y-x^2}=4\sqrt{3}\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x-4}=\sqrt{y^3+2}+\sqrt{y-4},\\ \sqrt{5x-y^2}+\sqrt{18+3y-x^2}=2\sqrt{2}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^7+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{y^7+2}+\sqrt{y-2},\\ \sqrt{(7-x)(y+1)}-\sqrt{y(4-x)}=\sqrt{3}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=7,\\ \sqrt{y+5}+\sqrt{x-2}=7.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2; y\ge 2$. Trừ từng vế hai phương trình ta có

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=\sqrt{y+5}+\sqrt{x-2}\Leftrightarrow \sqrt{x+5}-\sqrt{y+5}=\sqrt{x-2}-\sqrt{y-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}}=\frac{x-y}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ \dfrac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}}=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}\quad (1)\end{array}\right.$$

Ta có $\begin{cases}\sqrt{x+5}>\sqrt{x-2}\\ \sqrt{y+5}>\sqrt{y-2}\end{cases}\Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}>\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}$, dẫn đến (1) vô nghiệm.

Với $x=y$ ta được

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=7\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x-10}+2x+3=49$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x-10}=23-x\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 23\\ x^2+3x-10=x^2-46x+529\end{cases}\Leftrightarrow x=11$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=11$.

Nhận xét.

Về bản chất, hệ phương trình trên thuộc motip hệ phương trình đối xứng loại 2 khi được lồng ghép căn thức, tuy nhiên nếu không sử dụng phép liên hợp – trục căn thực thì rất khó dẫn đến hai biến bằng nhau. Điểm nhấn của phép liên hợp là chứng minh một khả năng vô nghiệm, tổng quát hóa ta có

- Đẳng thức tiền đề $\sqrt{x+m}+\sqrt{y+n}=\sqrt{y+m}+\sqrt{x+n}\quad (m\ne n)$.
- Phép liên hợp và hệ quả

$$\sqrt{x+m}-\sqrt{y+m}=\sqrt{x+n}-\sqrt{y+n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+m}+\sqrt{y+m}}=\frac{x-y}{\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ \sqrt{x+m}+\sqrt{y+m}=\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}\quad (1)\end{array}\right.$$

- Ta có (1) vô nghiệm do $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+m}+\sqrt{y+m}>\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}\\ \sqrt{x+m}+\sqrt{y+m}<\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}\end{array}\right.\quad (m\ne n)$.

Ngoài ra còn một phương án liên hợp khác, gọi là liên hợp kết hợp hệ tạm thời hay kiểu liên hợp tổng hiệu, cũng được nhiều bạn đọc lựa chọn như sau

- Liên hợp

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=\sqrt{y+5}+\sqrt{x-2}\Leftrightarrow \sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}=\sqrt{y+5}-\sqrt{y-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}}=\frac{7}{\sqrt{y+5}+\sqrt{y-2}}\Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=\sqrt{y+5}+\sqrt{y-2}$$

- Kết hợp $\begin{cases}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}=\sqrt{y+5}-\sqrt{y-2}\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=\sqrt{y+5}+\sqrt{y-2}\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x+5}=2\sqrt{y+5}\Leftrightarrow x=y$.

Như vậy, rõ ràng các bạn có thể xây dựng một hướng mới cho phương trình thứ nhất của hệ có sử dụng liên hợp với hình thức như sau

$$\begin{cases}\sqrt{x+m}+\sqrt{y+n}=\sqrt{y+m}+\sqrt{x+n},\\ f(x;y)=0\end{cases}\quad (m\neq n).$$

Một số hệ tương tự

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+5}+\sqrt{y-3}=4,\\ \sqrt{y+5}+\sqrt{x-3}=4.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+6}+\sqrt{y-2}=3,\\ \sqrt{y+6}+\sqrt{x-2}=4.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Một số hệ kế thừa

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+5}+\sqrt{y+4}=\sqrt{y+5}+\sqrt{x+4},\\ \sqrt{x(y+1)}+\sqrt{x(y+2)}=\sqrt{y(x+3)}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+7}+\sqrt{y+4}=\sqrt{y+7}+\sqrt{x+4},\\ \sqrt{\dfrac{10}{3-y}}+\sqrt{\dfrac{18}{5-x}}=4+x-y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}=\sqrt{y+2}+\sqrt{x-1},\\ \sqrt{x^2+16}-\sqrt{y^2+7}=3y-8.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Bài toán 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x^2-2y+5}{x+\sqrt{2y-5}}=\dfrac{y^2-2x+5}{y+\sqrt{2x-5}},\\ \sqrt{x-2}-\sqrt{y+2}=2\sqrt{xy-4}-2x+2.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x\geq\frac{5}{2};y\geq\frac{5}{2};xy\geq 4$. Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$x-\sqrt{2y-5}=y-\sqrt{2x-5}\Leftrightarrow x-y+\sqrt{2x-5}-\sqrt{2y-5}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+\frac{x-y}{\sqrt{2x-5}+\sqrt{2y-5}}=0\Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2x-5}+\sqrt{2y-5}}\right)=0$$

Do $1+\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}+\sqrt{2y-5}}>0,\forall x\geq\dfrac{5}{2},\forall y\geq\dfrac{5}{2}$ nên ta thu được $x=y$, phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2.$$

Điều kiện $x\geq 2$. Đặt $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=t\Rightarrow t^2=2x+2\sqrt{x^2-4}$.

Ta có $x-2<x+2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow t=\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}<0,\forall x\geq 2$. Ta thu được

$$\begin{cases}t<0\\ t=-t^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<0\\ (t-1)(t+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<0\\ t\in\{-2;1\}\end{cases}\Leftrightarrow t=-2\Leftrightarrow t^2=4$$

$$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-4}=4\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\geq 0\\ x^2-4=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=2$.

Nhận xét.

Bài toán số 16 này có hình thức phân thức, đây là một tấm bình phong cho bản chất thực của bài toán, đặc biệt hơn nữa bình phong này được tạo ra dựa trên phép liên hợp, và mối quan hệ giữa hai biến cũng được tạo ra bởi phép liên hợp. Tác giả xin được nói đại ý về cách xây dựng bài toán như sau

A. Lựa chọn một phương trình (*) hai ẩn x và y có mối quan hệ ràng buộc $x = y$, chẳng hạn

$$x-y+\sqrt{3x-5}-\sqrt{3y-5}=0.$$

B. Sử dụng kỹ thuật liên hợp một biến hoặc hai biến để giấu đi bản chất trên

$$x-y+\sqrt{3x-5}-\sqrt{3y-5}=0 \Leftarrow x-\sqrt{3y-5}=y-\sqrt{3x-5} \Leftarrow \frac{x^2-3y+5}{x+\sqrt{3y-5}}=\frac{y^2-3x+5}{y+\sqrt{3x-5}}$$

C. Sử dụng biến đổi đại số giấu đi bản chất trên hơn nữa

$$\left(x^2-3y+5\right)\left(y+\sqrt{3x-5}\right)=\left(y^2-3x+5\right)\left(x+\sqrt{3y-5}\right) \Leftarrow \frac{x^2-3y+5}{x+\sqrt{3y-5}}=\frac{y^2-3x+5}{y+\sqrt{3x-5}}.$$

D. Lựa chọn phương trình vô tỷ một ẩn sao cho ĐKXĐ không vi phạm ĐKXĐ của phương trình (*)

$$\sqrt{6-x}+\sqrt{2x+6}+\sqrt{6x-5}=x^2-2x-5.$$

E. Do $x = y$ nên ta làm ngược phương trình một ẩn về phương trình thứ hai bằng cách hoán đổi x và y tùy ý

$$\sqrt{6-y}+\sqrt{2x+6}+\sqrt{6y-5}=y^2-2x-5 \Leftarrow \sqrt{6-x}+\sqrt{2x+6}+\sqrt{6x-5}=x^2-2x-5.$$

F. Thiết lập hệ phương trình đầy đủ

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2-3y+5\right)\left(y+\sqrt{3x-5}\right)=\left(y^2-3x+5\right)\left(x+\sqrt{3y-5}\right),\\ \sqrt{6-y}+\sqrt{2x+6}+\sqrt{6y-5}=y^2-2x-5.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Các bạn độc giả lưu ý

- Trong bước A các bạn có thể tổng quát hóa hệ thức ràng buộc
$$x-y+\sqrt{3x-5}-\sqrt{3y-5}=0 \to k(x-y)+\sqrt{mx-5}-\sqrt{my-5}=0, \quad (k,m>0).$$
- Trong bước B ta thu được tổng quát hóa
$$k(x-y)+\sqrt{mx-l}-\sqrt{my-l}=0 \leftarrow \frac{kx^2-my+l}{kx+\sqrt{my-l}}=\frac{ky^2-mx+l}{ky+\sqrt{mx-l}}.$$

Rõ ràng dựa trên tư tưởng trên các bạn có thể tự xây dựng cho mình rất nhiều hệ phương trình tương tự

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2-4y+5\right)\left(y+\sqrt{4x-5}\right)=\left(y^2-4x+5\right)\left(x+\sqrt{4y-5}\right),\\ 4\sqrt{2y-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)=x+y+2.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2-6y+1\right)\left(y+\sqrt{6x-1}\right)=\left(y^2-6x+1\right)\left(x+\sqrt{6y-1}\right),\\ 4\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-y}-2x-y=1+\sqrt{1-xy}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x^2-6y+2}{x+\sqrt{6y-2}}=\dfrac{y^2-6x+2}{y+\sqrt{6x-2}},\\ 2xy-7x-2y+8=2\sqrt{x-1}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Cũng vẫn với motip liên hợp tương tự, nhưng các bạn không nhất thiết tạo ra sự bằng nhau giữa hai biến, đôi khi hệ quả liên hợp có thể là một hệ thức phức tạp giữa hai biến nhưng là yếu tố thuận lợi đối với phương trình thứ hai của hệ phương trình. Mời các bạn theo dõi thí dụ tiếp theo

Bài toán 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x^2+x-5}{x+\sqrt{5-x}}+\dfrac{y^2-x-5}{y+\sqrt{x+5}}=0,\\ x+y+5\sqrt{25-x^2}=19.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}-5\le x\le 5\\ x+\sqrt{5-x}\ne 0; y+\sqrt{x+5}\ne 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x-\sqrt{5-x}+y-\sqrt{x+5}=0\Leftrightarrow x+y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x+5}.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+5}+5\sqrt{25-x^2}=19$.

Điều kiện $-5\le x\le 5$. Đặt $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}=t\Rightarrow t^2=10+2\sqrt{25-x^2}$.

Ta có $t\ge 0;t^2=10+2\sqrt{25-x^2}\ge 10\Rightarrow t\ge\sqrt{10}$ và $t\ge 0;t^2=10+2\sqrt{25-x^2}\le 10+2\sqrt{25}\Rightarrow t\le 2\sqrt{5}$

Kết hợp lại suy ra $t\in\left[\sqrt{10};2\sqrt{5}\right]$. Phương trình đã cho tương đương với

$$t+5.\frac{t^2-10}{2}=19\Leftrightarrow 5t^2+2t=88\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\ t=-\dfrac{22}{5}\end{array}\right.\Rightarrow t=4\Leftrightarrow t^2=16\Leftrightarrow\sqrt{25-x^2}=3\Leftrightarrow x\in\{-4;4\}.$$

So sánh với điều kiện $-5\le x\le 5$ ta thu được nghiệm $S=\{-4;4\}$, hệ có nghiệm $(x;y)=(-4;8),(4;0)$.

Nhận xét.

Phương trình thứ nhất của hệ có phân thức làm đa số bạn đọc khó chịu, nhưng chính sự khó chịu này tạo ra sự băn khoăn trong việc tìm phương hướng khai thác của chúng ta, và ý tưởng liên hợp – trục căn thức là hoàn toàn tự nhiên khi tập trung phát hiện sự đồng điệu

$$\frac{x^2+x-5}{x+\sqrt{5-x}}+\frac{y^2-x-5}{y+\sqrt{x+5}}\equiv\frac{a^2-b^2}{a+b}+\frac{c^2-d^2}{c+d}\equiv a-b+c-d.$$

Phương trình thứ hai sử dụng phương pháp một ẩn phụ thuần túy quy về phương trình bậc hai (trực thuộc phương pháp đặt ẩn phụ) có lẽ các bạn khi tiếp cận phương trình vô tỷ đều đã quen thuộc, tác giả xin không bình luận nữa. Sau đây là các bước xây dựng bài toán của tác giả

- Lựa chọn phương trình tiền đề cho phương trình thứ hai $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+5}+5\sqrt{25-x^2}=19$.
- Thay thế một cụm biểu thức X một ẩn bởi hai ẩn, X tồn tại khả năng ẩn giấu thông qua liên hợp
$$X=\sqrt{5-x}+\sqrt{x+5}\sim x+y.$$
- Thiết lập phương trình thứ nhất của hệ từ X
$$\frac{x^2+x-5}{x+\sqrt{5-x}}+\frac{y^2-x-5}{y+\sqrt{x+5}}\Leftarrow x-\sqrt{5-x}+y-\sqrt{x+5}=0\Leftarrow\sqrt{5-x}+\sqrt{x+5}=x+y.$$
- Lắp ghép hai phương trình thu được hệ phương trình hoàn chỉnh, sử dụng hình thức $x,y\in\mathbb{R}$ để tránh tình trạng "đột phá" số phức rắc rối

$$\text{Giải hệ phương trình }\begin{cases}\dfrac{x^2+x-5}{x+\sqrt{5-x}}+\dfrac{y^2-x-5}{y+\sqrt{x+5}}=0,\\ x+y+5\sqrt{25-x^2}=19.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$$

Bài toán 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(y+1)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{6-x}\right)=2x+1,\\ y+2\sqrt{6-x}+\sqrt{(6-x)(7-x)}=12.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-7\le x\le 6$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y+1=\frac{2x+1}{\sqrt{x+7}+\sqrt{6-x}}=\sqrt{x+7}-\sqrt{6-x}\Rightarrow y=\sqrt{x+7}-\sqrt{6-x}-1.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{6-x}-1+2\sqrt{6-x}+\sqrt{(6-x)(7-x)}=12$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6-x}+\sqrt{x+7}+\sqrt{(6-x)(7-x)}=11$$

Điều kiện $-7\le x\le 6$. Đặt $\sqrt{6-x}=a;\sqrt{x+7}=b\ (a\ge 0;b\ge 0)$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=13\\ a+b+ab=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=13\\ 2a+2b+2ab=22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2ab+2a+2b=35\\ a+b+ab=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2+2(a+b)-35=0\\ a+b+ab=11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a+b=5\\ a+b=-7\end{array}\right.\\ a+b+ab=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ ab=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(5-a)=6\\ ab=6\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ a=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6-x=4\\ 6-x=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-3\end{array}\right.$$

So sánh điều kiện thu được tập nghiệm $S=\{-3;2\}$, hệ có nghiệm $(x;y)=(-3;-2),(2;0)$.

Bài toán 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}=y+\sqrt{5-2x}-1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{5-2x}}=\dfrac{y-2}{x-4}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0\le x\le 1$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}+\frac{x-4}{\sqrt{1-x}+\sqrt{5-2x}}=y-2\Leftrightarrow\sqrt{x}-2+\sqrt{1-x}-\sqrt{5-2x}=y-2.$$

Dẫn đến $y+\sqrt{5-2x}-1=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1$, phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1.$$

Điều kiện $0\le x\le 1$. Đặt $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=t\Rightarrow t^2=1+2\sqrt{x(1-x)}\Rightarrow 2\sqrt{x(1-x)}=t^2-1$.

Ta có $\begin{cases}t\ge 0;t^2=1+2\sqrt{x(1-x)}\ge 1\Rightarrow t\ge 1\\ t\ge 0;t^2=1+2\sqrt{x(1-x)}\le 1+x+1-x=2\Rightarrow t\le\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow 1\le t\le\sqrt{2}$.

Phương trình đã cho trở thành $1+\dfrac{t^2-1}{3}=t\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow (t-1)(t-2)=0\Leftrightarrow t\in\{1;2\}$.

Loại giá trị $t=2>\sqrt{2}$. Với $t=1\Rightarrow 2\sqrt{x(1-x)}=0\Leftrightarrow x(1-x)=0\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$.

Từ đây dẫn đến bài toán có hai nghiệm $(x;y)=\left(0;1-\sqrt{5}\right),\left(1;1-\sqrt{3}\right)$.

Bài toán 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x(x-1)\left(\sqrt{y}+\sqrt{2-x}\right)+\sqrt{x}(x+y-2)\left(\sqrt{x}+1\right)=0,\\ x+\sqrt{y}+5\sqrt{2x-x^2}=7.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in[0;2],y\ge 0$.

Rõ ràng các cặp số $(0;y),(2;0)$ đều không thỏa mãn hệ đã cho. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{2-x}\right)+(x+y-2)\left(x+\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}+\frac{x+y-2}{\sqrt{y}+\sqrt{2-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{2-x}=0\Leftrightarrow x+\sqrt{y}=\sqrt{2-x}+\sqrt{x}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $\sqrt{2-x}+\sqrt{x}+5\sqrt{2x-x^2}=7$. Điều kiện $0\le x\le 2$.

Đặt $\sqrt{2-x}+\sqrt{x}=t\ (t\ge 0)\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{(2-x)x}\Rightarrow \sqrt{2x-x^2}=\dfrac{t^2-2}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành $t+\dfrac{5}{2}\left(t^2-2\right)=7\Leftrightarrow 5t^2+2t-24=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{12}{5}\end{array}\right.$

So sánh điều kiện thu được $t=2\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{x}=2\Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=1\Leftrightarrow x=1$.
Kết luận tập nghiệm của hệ phương trình $x=y=1$.

Bài toán 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{x-y}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{11-x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y+2}+2\sqrt{22+9x-x^2}=17. \end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.
Điều kiện $x\in[0;11]; y\ge -2; x\ne y$.
Nhận xét $\sqrt{x}+\sqrt{11-x}>\sqrt{x+11-x}=\sqrt{11}>0,\forall x\in[0;11]$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\frac{2x-11}{\sqrt{x}+\sqrt{11-x}}=\frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{11-x}=\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y+2}=\sqrt{11-x}+\sqrt{x+2}$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{11-x}+\sqrt{x+2}+2\sqrt{22+9x-x^2}=17$.
Điều kiện $-2\le x\le 11$. Đặt $\sqrt{11-x}=a;\sqrt{x+2}=b\ \ (a\ge 0;b\ge 0)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ a+b+2ab=17\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+a+b+2ab=30 \\ a+b+2ab=17\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2+(a+b)=30 \\ a+b+2ab=17\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=5 \\ a+b=-6\end{array}\right. \\ a+b+2ab=17\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=5-a \\ a(5-a)=6\end{cases}\Rightarrow a\in\{2;3\}\Rightarrow x\in\{7;2\}$$

Kết hợp điều kiện $-2\le x\le 11$ thu được nghiệm $S=\{2;7\}$.

Bài toán 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{(x+1)\left(y+\sqrt{x-2}\right)}{x+\sqrt{x+2}}=\dfrac{y^2-x+2}{x-2}, \\ y=2\sqrt{x^2-4}-x+2. \end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.
Điều kiện $x>2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{x^2-x-2}{x+\sqrt{x+2}}=\frac{y^2-x+2}{y+\sqrt{x-2}}\Leftrightarrow x-\sqrt{x+2}=y-\sqrt{x-2}\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=y-x.$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$x+\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-x+2\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}+2.$$

Điều kiện $x\ge 2$. Đặt $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=t\Rightarrow t^2=2x+2\sqrt{x^2-4}$.

Ta có $x-2<x+2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow t=\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}<0,\forall x\geq 2$. Ta thu được

$$\begin{cases}t<0\\ t=-t^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<0\\ (t-1)(t+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<0\\ t\in\{-2;1\}\end{cases}\Leftrightarrow t=-2\Leftrightarrow t^2=4$$

$$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-4}=4\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\geq 0\\ x^2-4=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2;y=0$.

Bài toán 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{3-x}}=\dfrac{x+y-3}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}},\\ \sqrt{4-x}+\sqrt{2-y}+2=4\sqrt{4x-x^2-3}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1\leq x\leq 3;y\leq 2$. Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1}-\sqrt{2-y}\Leftrightarrow\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4-x}+\sqrt{2-y}.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}-4\sqrt{4x-x^2-3}=-2\quad(x\in\mathbb{R})$.

Điều kiện $1\leq x\leq 3$. Đặt $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}=t\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{4x-x^2-3}\Rightarrow 2\sqrt{4x-x^2-3}=t^2-2$.

Ta có $\begin{cases}t\geq 0;t^2=2+2\sqrt{4x-x^2-3}\geq 2\Rightarrow t\geq\sqrt{2}\\ t^2=2+2\sqrt{(3-x)(x-1)}\leq 2+3-x+x-1=4\Rightarrow t\leq 2\end{cases}\Rightarrow t\in\left[\sqrt{2};2\right]$.

Rõ ràng phương trình đã cho trở thành

$$t-2\left(t^2-2\right)=-2\Leftrightarrow 2t^2-t-6=0\Leftrightarrow(t-2)(2t+3)=0\Leftrightarrow t\in\left\{-\frac{3}{2};2\right\}.$$

Chọn giá trị dương $t=2\Rightarrow 2\sqrt{4x-x^2-3}=t^2-2=2\Leftrightarrow 4x-x^2-3=1\Leftrightarrow(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$.

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=2;y=2\sqrt{2}-1$.

Bài toán 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3-y}+\sqrt{x-1}\right)=4-x-y,\\ \sqrt{3-y}-\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 1;y\leq 3$. Rõ ràng $(x;y)=(1;3)$ không thỏa mãn hệ, do đó $\sqrt{3-y}+\sqrt{x-1}>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}=\dfrac{4-x-y}{\sqrt{3-y}+\sqrt{x-1}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-\sqrt{3-y}=0\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}=\sqrt{3-y}-\sqrt{x-1}$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

Đặt $t=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}\Rightarrow t^2=4x-3+2\sqrt{3x^2-5x+2}$. Ta có $t=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}\geq 1,\forall x\geq 1$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}t\geq 1\\ t=t^2-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq 1\\ t\in\{-2;3\}\end{cases}\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow 4x-3+2\sqrt{3x^2-5x+2}=9$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3x^2-5x+2}=6-2x\Leftrightarrow\begin{cases}6-2x\geq 0\\ 3x^2-5x+2=4\left(x^2-6x+9\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3\\ x^2-19x+34=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Kết luận bài toán đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Nhận xét.

Thực ra thì lớp hệ phương trình kiểu thay thế này cũng không quá khó, cụ thể tác giả đã xây dựng các bài toán 16, 18, 19, 20, 21 dựa trên các bài toán gốc như sau

- **Bài toán 16.**

  Phương trình gốc $\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1$.

  Phép thay thế $y+\sqrt{5-2x}-1=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1$.

  Phép liên hợp $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}+\frac{x-4}{\sqrt{1-x}+\sqrt{5-2x}}=y-2\Leftarrow\sqrt{x}-2+\sqrt{1-x}-\sqrt{5-2x}=y-2$.

- **Bài toán 18.**

  Phương trình gốc $\sqrt{2-x}+\sqrt{x}+5\sqrt{2x-x^2}=7$.

  Phép thay thế $x-\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{2-x}=0\Leftrightarrow x+\sqrt{y}=\sqrt{2-x}+\sqrt{x}$.

  Phép liên hợp $\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{2-x}\right)+\left(x+y-2\right)\left(x+\sqrt{x}\right)=0\Leftarrow\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}+\frac{x+y-2}{\sqrt{y}+\sqrt{2-x}}=0$.

- **Bài toán 19.**

  Phương trình gốc $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=t\Rightarrow t^2=2x+2\sqrt{x^2-4}$.

  Phép thay thế $x-\sqrt{x+2}=y-\sqrt{x-2}\Leftrightarrow\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=y-x$.

  Phép liên hợp $\frac{\left(x+1\right)\left(y+\sqrt{x-2}\right)}{x+\sqrt{x+2}}=\frac{y^2-x+2}{x-2}\Leftarrow\frac{x^2-x-2}{x+\sqrt{x+2}}=\frac{y^2-x+2}{y+\sqrt{x-2}}$.

- **Bài toán 20.**

  Phương trình gốc $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}-4\sqrt{4x-x^2-3}=-2$.

  Phép thay thế $\sqrt{4-x}-\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1}-\sqrt{2-y}\Leftrightarrow\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4-x}+\sqrt{2-y}$.

  Phép liên hợp $\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{3-x}}=\frac{x+y-3}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}}\Leftarrow\sqrt{4-x}-\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1}-\sqrt{2-y}$.

- **Bài toán 21.**

  Phương trình gốc $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

  Phép thay thế $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-\sqrt{3-y}=0\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}=\sqrt{3-y}-\sqrt{x-1}$.

  Phép liên hợp $\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3-y}+\sqrt{x-1}\right)=4-x-y\Leftarrow\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}=\frac{4-x-y}{\sqrt{3-y}+\sqrt{x-1}}$.

Như vậy các bạn có thể thấy rằng từ một phương trình vô tỷ thông thường có các cụm biểu thức tồn tại khả năng liên hợp, bản thân nó đã tiềm ẩn sự cấu thành hệ phương trình, thậm chí là những hệ phương trình rất khó tùy theo mức độ khó của phương trình gốc, mức độ phức tạp của phép thế mà ta lựa chọn. Sự muôn hình muôn vẻ của phương trình vô tỷ kéo theo sự đa dạng, phong phú của lớp hệ phương trình này dường như đã làm cho tác giả "chùn bước", có lẽ tác giả xin dừng lại sự phát triển tương tự ở đây, tác giả mong muốn các bạn độc giả, các thầy cô và các em học sinh sẽ có nhiều phát hiện thú vị, nâng cao hơn nữa.

Bài toán 22. Trích lược câu II.2, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hải Dương; Năm học 2013 – 2014; Đề thi chính thức.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}3xy\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}},\\ x^3\left(9y^2+1\right)+4\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=10.\end{cases}\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \ge 0$.
Xét $x = 0$ không thỏa mãn hệ đã cho.
Khi $x > 0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3xy\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \Leftrightarrow 3y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}$$

$$\Leftrightarrow 3y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\sqrt{\frac{1}{x}}.\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 3y+3y\sqrt{9y^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{1}{x}+1} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1};t>0 \Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$, hàm liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Thu được $(*) \Leftrightarrow f(3y)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow 3y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$x^3+x^2+4\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=10.$$

Xét hàm số $g(x)=x^3+x^2+4\left(x^2+1\right)\sqrt{x};x\ge 0$ ta có $g'(x)=3x^2+2x+8x\sqrt{x}+2\left(x^2+1\right).\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0,\forall x>0$.

Hàm số liên tục và đồng biến với x dương nên ta có $f(x)=f(2) \Leftrightarrow x=2;y=\dfrac{1}{3}$.

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
Nhận xét.
Bài toán này so với các bài toán trước đó đã có sự ẩn giấu đôi chút khi dạng thức hàm số ngoài phép chia cô lập ẩn còn có phép sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời. Trên thực tế để xử lý hệ phương trình trong đề thi tuyển sinh đại học môn Toán, các bạn cần có tâm lý an toàn, cần có kỹ năng biến đổi thành thạo theo các hướng biến đổi tương đương để xuất hiện nhân tử, triệt phá mẫu thức – căn thức, đại lượng liên hợp, đặt ẩn phụ làm quang đãng sự chằng chịt, đánh giá – hàm số để phá bỏ các chốt chướng ngại vật, kết hợp với kiến thức cơ bản như xét trường hợp, chia khoảng, điều kiện xác định,...để đi đến đáp số cuối cùng.

Bài toán 23. Giải hệ phương trình trên tập hợp số thực $\begin{cases} x+\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}+x}+y^2=0, \\ \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3. \end{cases}$

Lời giải.
Điều kiện căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $x+y\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+y^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y}+y+\sqrt{x^2+1}-x=0$. (*)

Cộng từng vế (*) với phương trình thứ hai ta có $\left(\dfrac{x}{y}+y\right)^2-2\left(\dfrac{x}{y}+y\right)-3=0 \Rightarrow \left(\dfrac{x}{y}+y\right)\in\{-1;3\}$.

Thay trở lại vào (*) ta có $\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{x}{y}+y\right)=-1 \Rightarrow -1+\sqrt{x^2+1}-x=0 \Rightarrow x=0 \\ \left(\dfrac{x}{y}+y\right)=3 \Rightarrow 3+\sqrt{x^2+1}-x=0 \Rightarrow x\in\varnothing \end{array}\right.$

Kết luận hệ có nghiệm $x=0;y=-1$.

Bài toán 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1,\\ x^2+\sqrt{3-x}=2y^2-4\sqrt{2-y}+5.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\le 3; y\le 2$. Rõ ràng $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}\ne 0, y+\sqrt{y^2+1}\ne 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ có thể biến đổi theo hai hướng

$$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}-y=x+\sqrt{x^2+1}\quad (1)$$

$$\sqrt{y^2+1}+y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}+y=\sqrt{x^2+1}-x\quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta có $2y=-2x\Leftrightarrow x=-y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$x^2+\sqrt{3-x}=2x^2-4\sqrt{x+2}+5\Leftrightarrow \sqrt{3-x}+4\sqrt{x+2}=x^2+5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x}-1+4\sqrt{x+2}-8=x^2-4\Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{3-x}+1}+\frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+2+\frac{1}{\sqrt{3-x}+1}-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-2$$

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;-2)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\le 3; y\le 2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{(-y)^2+1}.$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1};t\in\mathbb{R}$ ta có $f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}}\ge 0;\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Thu được hệ thức $f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x+y=0$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$x^2+\sqrt{3-x}=2x^2-4\sqrt{x+2}+5\Leftrightarrow \sqrt{3-x}+4\sqrt{x+2}=x^2+5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x}-1+4\sqrt{x+2}-8=x^2-4\Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{3-x}+1}+\frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+2+\frac{1}{\sqrt{3-x}+1}-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-2$$

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;-2)$.

Nhận xét.

Đối với bài toán số 24, có lẽ nhiều bạn đọc đã quen với lời giải số 2, đây là lời giải sử dụng tính chất đơn điệu hàm số cùng công cụ đạo hàm, đều là kiến thức cơ bản chủ chốt thuộc phạm vi liên chương trình Đại số - Giải tích lớp 11, 12 bậc THPT. Mặc dù vậy, lời giải này vẫn cần những biến đổi khéo léo bao gồm

- Biến đổi về dạng tương đồng thông qua liên hợp một lần

$$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{(-y)^2+1}.$$

- Đánh giá đạo hàm xác định dương thông qua bất đẳng thức cơ bản

$$\sqrt{A^2}+A=|A|+A=\begin{cases}A+A=2A\ge 0;A\ge 0\\ -A+A=0;A<0\end{cases}$$

Bên cạnh đó lời giải thứ nhất chỉ sử dụng thuần túy phép liên hợp – trục căn thức, một kiến thức hết sức cơ bản của chương trình Đại số lớp 9 THCS, nhưng phải hai lần thao tác

$$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y\Leftrightarrow\sqrt{y^2+1}-y=x+\sqrt{x^2+1}\quad(1)$$

$$\sqrt{y^2+1}+y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow\sqrt{y^2+1}+y=\sqrt{x^2+1}-x\quad(2)$$

Bước tiếp theo là tiến hành trừ từng vế (1) và (2) đưa đến $2y=-2x\Leftrightarrow x=-y$, kết thúc quá trình khai thác phương trình thứ nhất của hệ. Một số bạn đọc khác có thể manh nha ý tưởng cộng từng vế (1) và (2) dẫn đến

$$2\sqrt{y^2+1}=2\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x^2=y^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=y & (3)\\ x=-y & (4)\end{array}\right.$$

Rõ ràng (4) thỏa mãn phương trình thứ nhất của hệ, còn (3) thì không, do vậy chúng ta không nên lựa chọn phương án cộng từng vế trong lời giải các bạn nhé.
Trên thực tế, các hệ phương trình này được kế thừa từ một hệ thức khá quen thuộc trong chương trình Đại số lớp 9 cấp THCS, với dạng tổng quát

$$\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\left(y+\sqrt{y^2+a}\right)=a\Leftrightarrow x+y=0.$$

Trường hợp riêng của bài toán này có lẽ nhiều bạn đã gặp, chẳng hạn như

- Bài 1(14); Thi Giải toán qua thư; Số 14; Tháng 4 năm 2004; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam.
  Tác giả: Đỗ Văn Thu – Sinh viên K26G; ĐHSP Hà Nội 2; Xuân Hòa; Huyện Mê Linh; Tỉnh Vĩnh Phúc.
  Cho x và y thỏa mãn $\left(x+\sqrt{2003+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2003+y^2}\right)=2003$.
  Tính giá trị của biểu thức $T=x^{2003}+y^{2003}$.
- Bài 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Trường THPT Chuyên Hà Tĩnh; Thành phố Hà Tĩnh; Tỉnh Hà Tĩnh; Năm học 2007 – 2008.
  Cho hai số x và y thỏa mãn đẳng thức $\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)=4$. Tính $x+y$.

Ngoài ra các bạn có thể thấy rằng $(-m)^2=m^2,\forall m\in\mathbb{R}$ nên ta còn có hệ thức tổng quát hơn với một vế như sau

$$\left(\pm x+\sqrt{x^2+a}\right)\left(\pm y+\sqrt{y^2+a}\right)=a.$$

Dựa trên cơ sở này, có rất nhiều bài toán hay, thú vị đã từng xuất hiện trong các Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT đại trà (câu phân loại); Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT Chuyên (Toán chung và Toán chuyên); Đề thi chọn học sinh các cấp thuộc THCS và THPT và Đề thi thử sức trước kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Kỳ thi THPT Quốc gia hiện hành.
Mời các bạn theo dõi tiếp các bài toán sau đây

Bài toán 25. Trích lược câu 3; Đề thi thử Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2014; Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amserdam; Thành phố Hà Nội.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2,\\ 12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x;y\in\mathbb{R}$.
Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x+\sqrt{x^2+4}=\frac{2}{y+\sqrt{y^2+1}}\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\frac{2\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)}{y^2+1-y^2}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{y^2+1}-2y\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=-2y+\sqrt{(-2y)^2+4}$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+4};t\in\mathbb{R}$ thì $f'(t)=\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}>\frac{t+\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2+4}}\ge\frac{t+|t|}{\sqrt{t^2+4}}\ge 0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Ta thu được $f(x)=f(-2y)\Leftrightarrow x=-2y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$3x^2+5x+2=2\sqrt[3]{x^3+1}\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+2x+2=x^3+1+2\sqrt[3]{x^3+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)=x^3+1+2\sqrt[3]{x^3+1}$$

Xét hàm số $g(t)=t^3+2t;t\in\mathbb{R}$ ta có $g'(t)=3t^2+2>0,\forall t\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục và đồng biến.

Khi đó phương trình ẩn x trở thành

$$g(x+1)=g\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^3+1}$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1=x^3+1\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow x\in\{-1;0\}$$

Từ đây suy ra hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(-1;2),(0;0)$.

Nhận xét.

Lời giải bài toán 25 sử dụng tính chất đơn điệu hàm số đối với phương trình thứ nhất dựa trên phép liên hợp

$$\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\frac{2}{y+\sqrt{y^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\frac{2\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)}{y^2+1-y^2}\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{y^2+1}-2y$$

Sau đó tiếp tục biến đổi tương đồng hàm số $x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4y^2+4}-2y\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=-2y+\sqrt{(-2y)^2+4}$.

Tuy nhiên ngoài cách làm này các bạn có thể lập luận $x=-2y$ *chỉ bằng phép liên hợp như sau*

Nền tảng $x+\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{y^2+1}-2y$. *Thực hiện tương tự với biểu thức chứa x ta có*

$$y+\sqrt{y^2+1}=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}+x}=\frac{2\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)}{x^2+4-x^2}\Leftrightarrow 2y+2\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2+4}-x.$$

Kết hợp lại thu được $\begin{cases}x+\sqrt{x^2+4}+2y-2\sqrt{y^2+1}=0\\2y+2\sqrt{y^2+1}+x-\sqrt{x^2+4}=0\end{cases}\Rightarrow x+2y+2y+x=0\Leftrightarrow 2x+4y=0\Leftrightarrow x=-2y$.

Lưu ý thêm công đoạn lập luận dấu đạo hàm, chú ý rằng $\sqrt{A^2}+A=|A|+A=\begin{cases}A+A=2A\ge 0;A\ge 0\\-A+A=0;A<0\end{cases}$

Vì vậy hàm số dạng tương tự luôn luôn đơn điệu (đồng biến).

Bài toán 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1,\\x^3-3x^2=8y^3-12y^2.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải 1.

Điều kiện các biến thực. Đặt $x+1=a; y=b$ ta biến đổi phương trình thứ nhất

$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+1}=\frac{1}{b+\sqrt{b^2+1}}=\sqrt{b^2+1}-b \quad (1)$$

$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow b+\sqrt{b^2+1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}=\sqrt{a^2+1}-a \quad (2)$$

Trừ chéo vế (1) và (2) ta có $2a=-2b \Leftrightarrow a=-b$, dẫn đến $x+1=-y$.
Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$-(y+1)^3-3(y+1)^2=8y^3-12y^2 \Leftrightarrow -y^3-3y^2-3y-1-3y^2-6y-3=8y^3-12y^2$$

$$\Leftrightarrow 9y^3-6y^2+9y+4=0 \Leftrightarrow (3y+1)\left(3y^2-3y+4\right)=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}; x=-\frac{2}{3}$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện các biến thực.

Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi $x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}=-y+\sqrt{(-y)^2+1}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}; t\in\mathbb{R}$ ta có $f'(t)=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\frac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}}\geq 0; \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(x)>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Ta thu được

$$f(x+1)=f(-y) \Leftrightarrow x+1=-y.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$-(y+1)^3-3(y+1)^2=8y^3-12y^2 \Leftrightarrow -y^3-3y^2-3y-1-3y^2-6y-3=8y^3-12y^2$$

$$\Leftrightarrow 9y^3-6y^2+9y+4=0 \Leftrightarrow (3y+1)\left(3y^2-3y+4\right)=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}; x=-\frac{2}{3}$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+9}+y\right)=3, \\ 3x=\sqrt{9-y}\sqrt{15-y}+\sqrt{15-y}\sqrt{21-y}+\sqrt{21-y}\sqrt{9-y}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi về

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{3}{\sqrt{y^2+9}+y}=\frac{1}{3}\left(\sqrt{y^2+9}-y\right) \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1}-3x=\sqrt{y^2+9}-y \quad (1)$$

$$\sqrt{y^2+9}+y=\frac{3}{\sqrt{x^2+1}-x}=3\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1}+3x=\sqrt{y^2+9}+y \quad (2)$$

Trừ từng vế (1) và (2) ta được $6x=2y \Leftrightarrow y=3x$.
Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$y=\sqrt{9-y}.\sqrt{15-y}+\sqrt{15-y}.\sqrt{21-y}+\sqrt{21-y}.\sqrt{9-y}.$$

Đặt $\sqrt{9-y}=a; \sqrt{15-y}=b; \sqrt{21-y}=c, (a;b;c\geq 0)$ ta thu được $y=9-a^2=15-b^2=21-c^2$.
Phương trình khi đó tương đương $y=ab+bc+ca$. Do đó ta có

$$\begin{cases}9-a^2=ab+bc+ca \\ 15-b^2=ab+bc+ca \\ 21-c^2=ab+bc+ca\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab+bc+ca+a^2=9 \\ ab+ac+bc+b^2=15 \\ ab+ac+bc+c^2=21\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(a+c)+a(a+c)=9 \\ a(b+c)+b(c+b)=15 \\ a(b+c)+c(b+c)=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)(a+b)=9 & (1) \\ (b+c)(b+a)=15 & (2) \\ (c+a)(c+b)=21 & (3) \end{cases}$$

Nhân từng vế ba phương trình (1), (2), (3) thu được

$$\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2 = 9.15.21 \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 9\sqrt{35} \text{ (Do } a\ge 0; b\ge 0; c\ge 0\text{)}.$$

Kết hợp lần lượt với (1), (2) và (3) ở trên ta có

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{3\sqrt{35}}{7} \\ b+c=\sqrt{35} \\ c+a=\dfrac{3\sqrt{35}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{3\sqrt{35}}{7} \\ 2(a+b+c)=\dfrac{71\sqrt{35}}{35} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{3\sqrt{35}}{7} \\ a+b+c=\dfrac{71\sqrt{35}}{70} \end{cases} \Rightarrow c=\dfrac{41\sqrt{35}}{70} \Rightarrow x=\dfrac{1259}{140}.$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{y^2+9}+y=3\sqrt{x^2+1}+3x=\sqrt{(3x)^2+9}+3x.$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+9}; t\in\mathbb{R}$ thì $f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+9}+t}{\sqrt{t^2+9}} \ge \dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+9}} \ge 0; \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực.

Thu được $f(y)=f(3x) \Leftrightarrow y=3x$. Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$y=\sqrt{9-y}.\sqrt{15-y}+\sqrt{15-y}.\sqrt{21-y}+\sqrt{21-y}.\sqrt{9-y}.$$

Đặt $\sqrt{9-y}=a; \sqrt{15-y}=b; \sqrt{21-y}=c, (a;b;c\ge 0)$ ta thu được $y=9-a^2=15-b^2=21-c^2$.

Phương trình khi đó tương đương $y=ab+bc+ca$. Do đó ta có

$$\begin{cases} 9-a^2=ab+bc+ca \\ 15-b^2=ab+bc+ca \\ 21-c^2=ab+bc+ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca+a^2=9 \\ ab+ac+bc+b^2=15 \\ ab+ac+bc+c^2=21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(a+c)+a(a+c)=9 \\ a(b+c)+b(c+b)=15 \\ a(b+c)+c(b+c)=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)(a+b)=9 & (1) \\ (b+c)(b+a)=15 & (2) \\ (c+a)(c+b)=21 & (3) \end{cases}$$

Nhân từng vế ba phương trình (1), (2), (3) thu được

$$\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2 = 9.15.21 \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 9\sqrt{35} \text{ (Do } a\ge 0; b\ge 0; c\ge 0\text{)}.$$

Kết hợp lần lượt với (1), (2) và (3) ở trên ta có

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{3\sqrt{35}}{7} \\ b+c=\sqrt{35} \\ c+a=\dfrac{3\sqrt{35}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{3\sqrt{35}}{7} \\ 2(a+b+c)=\dfrac{71\sqrt{35}}{35} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{3\sqrt{35}}{7} \\ a+b+c=\dfrac{71\sqrt{35}}{70} \end{cases} \Rightarrow c=\dfrac{41\sqrt{35}}{70} \Rightarrow x=\dfrac{1259}{140}.$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 28. Trích lược Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Lâm Đồng; Năm học 2013 – 2014.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8x^3+2y=\sqrt{y+5x+2}, \\ \left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $y+5x+2\ge 0$. Phương trình thứ hai của hệ biến đổi

$$3x+\sqrt{1+9x^2}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}+y}=\sqrt{1+y^2}-y \Leftrightarrow 3x+\sqrt{(3x)^2+1}=-y+\sqrt{(-y)^2+1}.$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1};t\in\mathbb{R}$ ta có

$$f'(t)=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\frac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}}\ge 0;\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)>0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Ta thu được $f(3x)=f(-y)\Leftrightarrow y=-3x$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành $8x^3-6x=\sqrt{2x+2}$. Đặt $x=\cos t;t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ta được

$$2(4\cos 3t-3\cos t)=\sqrt{2\cos t+2}\Leftrightarrow 2\cos 3t=\sqrt{2(1+\cos t)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos^2\frac{t}{2}}=\cos 3t\Leftrightarrow \cos\frac{t}{2}=\cos 3t\Leftrightarrow t\in\left\{\frac{k4\pi}{5};\frac{k4\pi}{7}\right\},k\in\mathbb{Z}$$

Do $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t=0\Rightarrow x=1;y=-3$. Bài toán có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.
Nếu khai thác phương trình thứ hai theo phương pháp liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời các bạn nên sử dụng phép đặt $3x=a;y=b$ và biến đổi

$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1\Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+1}=\frac{1}{b+\sqrt{b^2+1}}=\sqrt{b^2+1}-b \quad (1)$$
$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1\Leftrightarrow b+\sqrt{b^2+1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}=\sqrt{a^2+1}-a \quad (2)$$

Trừ chéo vế (1) với (2) cho ta $2a=-2b\Leftrightarrow a=-b\Leftrightarrow y=-3x$. Sau đó giải phương trình thứ nhất tương tự.

Bài toán 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right)\left(\sqrt{y^4+1}+y^2\right)=1, \\ \sqrt{\dfrac{x^2+3y^2+5}{x^2-2y^2-2}}+x+1=0 \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x^2-2y^2-2\ne 0$. Đặt $x+1=a;y^2=b$ ta biến đổi phương trình thứ nhất

$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1\Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+1}=\frac{1}{b+\sqrt{b^2+1}}=\sqrt{b^2+1}-b \quad (1)$$
$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1\Leftrightarrow b+\sqrt{b^2+1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}=\sqrt{a^2+1}-a \quad (2)$$

Trừ chéo vế (1) và (2) ta có $2a=-2b \Leftrightarrow a=-b \Leftrightarrow x+1+y^2=0$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x}}=-x-1 \quad (2)$.

Điều kiện $x\ge 2 \vee 0<x\le 1 \vee x<-2$. Ta thu được

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=\left(x^2+2x\right)\left(x^2+2x+1\right) \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x+2\right)\left(x^2+3x-1\right)=0 \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có hai nghiệm.

Nhận xét.

Nếu sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số các bạn biến đổi từng bước như sau

- Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+2x+2}+x+1=\frac{1}{\sqrt{y^4+1}+y^2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+1}+x+1=\sqrt{y^4+1}-y^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+1}+x+1=\sqrt{\left(-y^2\right)^2+1}-y^2 \quad (1)$$

- Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t; t\in\mathbb{R}$ thì $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}\ge\dfrac{|t|+1+t}{\sqrt{t^2+1}}>0, \forall t\in\mathbb{R}$.
- Như vậy hàm số đang xét đồng biến, và $(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f\left(-y^2\right)\Leftrightarrow x+1+y^2=0$.

Bài toán 30. Trích lược câu 3, Đề thi thử sức trước kỳ thi Đại học; Môn Toán; Khối D; Lần thứ nhất; Mùa thi 2014; Trường THPT Dân lập Lương Thế Vinh; Thành phố Hà Nội.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}+y\right)=2, \\ x^2-\dfrac{3}{4}y=\sqrt{x-1}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$. Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi theo hai hướng

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{2}{\sqrt{y^2+4}+y}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}-2x=\sqrt{y^2+4}-y$$
$$\sqrt{y^2+4}+y=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x}=2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}+2x=\sqrt{y^2+4}+y$$

Cộng từng vế hai phương trình ta có $4x=2y\Leftrightarrow y=2x$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$x^2-\frac{3}{4}.2x=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2x^2-3x=2\sqrt{x-1}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-4x+4\right)+x-1-2\sqrt{x-1}+1=0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-2)^2+\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{x-1}=1 \end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=2; y=4$.

Nhận xét.

Rõ ràng chỉ cần xoay quanh các phương trình chốt chặn thông qua liên hợp, chúng ta có thể xây dựng rất nhiều hệ phương trình kế thừa

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}+y\right)=2,\\ \sqrt{9x^2-4x-y+2}+\sqrt{9x^2+3y+2}=2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}+y\right)=2,\\ \sqrt{x^2+y-x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2,\\ |2y|+\left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right|=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right)\left(\sqrt{y^4+1}+y^2\right)=1,\\ \dfrac{\sqrt{2-x}-4y^2-7}{x}=2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1,\\ x^2+y+7=4\sqrt{3x-2}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+9}+y\right)=3,\\ \sqrt{x^2-y+x-8}=\sqrt{3}(x-4).\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{7x+y-1}+\sqrt{4x^2-1}=1,\\ \left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{y+2}-\sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}\right)=3,\\ \sqrt{18y+23}+\sqrt{17-2x}=x^4-8x^3+17x^2-8x+22.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2\le x\le\dfrac{17}{2};y\ge -1$. Đặt $\sqrt{y+1}=u;\sqrt{x-2}=v$ thì phương trình thứ nhất trở thành

$$\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\sqrt{v^2+9}+v\right)=3\Leftrightarrow\sqrt{v^2+9}+v=\frac{3}{\sqrt{u^2+1}-u}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{v^2+9}+v=3\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)\Leftrightarrow\sqrt{v^2+9}+v=3\sqrt{u^2+1}+3u$$

Ngoài ra

$$\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\sqrt{v^2+9}+v\right)=3\Leftrightarrow\sqrt{u^2+1}-u=\frac{3}{\sqrt{v^2+9}+v}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{u^2+1}-u=\frac{1}{3}\left(\sqrt{v^2+9}-v\right)\Leftrightarrow\sqrt{v^2+9}-v=3\sqrt{u^2+1}-3u$$

Kết hợp $\begin{cases}\sqrt{v^2+9}+v=3\sqrt{u^2+1}+3u\\ \sqrt{v^2+9}-v=3\sqrt{u^2+1}-3u\end{cases}\Rightarrow 2v=6u\Leftrightarrow v=3u\Rightarrow v^2=9u^2\Leftrightarrow x-2=9y+9\Leftrightarrow x=9y+11$.

Phương trình thứ hai khi đó trở thành $\sqrt{2x+1}+\sqrt{17-2x}=x^4-8x^3+17x^2-8x+22$.

Điều kiện $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{17}{2}$. Ta có

$$(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \Rightarrow a+b \le |a+b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức này thì

$$\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{17-2x}\right)^2 \le (1^2+1^2)(2x+1+17-2x) = 36 \Rightarrow \sqrt{2x+1}+\sqrt{17-2x} \le 6.$$

Mặt khác

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 22 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + x^2 - 8x + 16 + 6$$
$$= (x^2-4x)^2 + (x-4)^2 + 6 \ge 6, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra, tức là

$$\begin{cases} 2x+1 = 17-2x \\ x-4 = x^2-4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 16 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Các bạn có thể sử dụng tính chất đơn điệu khai thác phương trình thứ nhất của hệ như sau

- Đặt $\sqrt{y+1} = u; \sqrt{x-2} = v$ thì phương trình thứ nhất trở thành

$$\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\sqrt{v^2+9}+v\right) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{v^2+9}+v = \frac{3}{\sqrt{u^2+1}-u}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{v^2+9}+v = 3\left(\sqrt{u^2+1}+u\right) \Leftrightarrow \sqrt{v^2+9}+v = 3u+\sqrt{9u^2+9}$$

- Xét hàm số $f(t) = t+\sqrt{t^2+9}; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = \frac{\sqrt{t^2+9}+t}{\sqrt{t^2+9}} \ge \frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+9}} \ge 0; \forall t \in \mathbb{R}$.
- Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực nên

$$f(v) = f(u) \Leftrightarrow v = 3u \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1} = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow 9x+9 = y-2 \Leftrightarrow y = 9x+11.$$

Bài toán 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{y^4+2y^3+y^2+1}-y^2-y\right)\left(\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x}\right) = 1, \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x} = x^3-3x^2+\frac{3y^2+3y}{\sqrt{x}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $1 \le x \le 3$. Phương trình thứ nhất tương đương với $\left[\sqrt{(y^2+y)^2+1}-(y^2+y)\right]\left(\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x}\right) = 1$

Đặt $y^2+y = u; 2\sqrt{x} = v$ ta thu được

$$\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\sqrt{v^2+1}+v\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{v^2+1}+v = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}-u} \Leftrightarrow \sqrt{v^2+1}+v = \sqrt{u^2+1}+u$$
$$\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\sqrt{v^2+1}+v\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{u^2+1}-u = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}+v} \Leftrightarrow \sqrt{u^2+1}-u = \sqrt{v^2+1}-v$$

Trừ chéo vế ta được $2u = 2v \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow y^2+y = 2\sqrt{x}$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x} = x^3-3x^2+6 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)^2 \le \left(1^2+1^2\right)\left(x-1+3-x\right)=4 \Rightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\le 2.$$

Bên cạnh đó $x^3-3x^2+6=x^3-3x^2+4+2=\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)\ge 2,\forall x\in\left[1;3\right]$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra, nghĩa là $\begin{cases} x-1=3-x \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Thử lại thấy thỏa mãn đề bài, kết luận nghiệm $\left(x;y\right)=\left(2;\dfrac{-1+\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2}\right),\left(2;\dfrac{-1-\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Bài toán 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{4y^4-12y^3+9y^2+16}-2y^2+3y\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)=8, \\ 3x^2-11x+12=2y^2-3y. \end{cases}$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\left[\sqrt{\left(2y^2-3y\right)^2+16}-\left(2y^2-3y\right)\right]\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)=8.$$

Đặt $2y^2-3y=u;\sqrt{x-1}=v$ đưa về $\left(\sqrt{u^2+16}-u\right)\left(\sqrt{v^2+4}+v\right)=8$. Ta biến đổi

$$\sqrt{v^2+4}+v=\frac{8}{\sqrt{u^2+16}-u}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+16}+u\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{v^2+4}+2v=\sqrt{u^2+16}+u$$

$$\sqrt{u^2+16}-u=\frac{8}{\sqrt{v^2+4}+v}=2\left(\sqrt{v^2+4}-v\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{v^2+4}-2v=\sqrt{u^2+16}-u$$

Trừ từng vế hai hệ quả ta có $4v=2u\Leftrightarrow u=2v\Leftrightarrow 2y^2-3y=2\sqrt{x-1}$.

Phương trình thứ hai trở thành

$$3x^2-11x+12=2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-1}+1+3\left(x^2-4x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+3\left(x-2\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=1\\ x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Khi đó $2y^2-3y=2\Leftrightarrow y\in\left\{-0,5;2\right\}\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(2;-\dfrac{1}{2}\right),\left(2;2\right)$. Kết luận hệ có hai nghiệm.

Nhận xét.

Đối với bài toán số 33 các bạn vẫn đặt hai ẩn phụ $2y^2-3y=u;\sqrt{x-1}=v$, nhưng sau đó sử dụng tính chất đơn điệu hàm số như sau

- Biến đổi

$$\left(\sqrt{u^2+16}-u\right)\left(\sqrt{v^2+4}+v\right)=8\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{u^2+16}-u\right)}{4}.\frac{\left(\sqrt{v^2+4}+v\right)}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{u^2}{16}+1}-\frac{u}{4}\right)\left(\sqrt{\frac{v^2}{4}+1}+\frac{v}{2}\right)=1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{v^2}{4}+1}+\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{u^2}{16}+1}+\frac{u}{4}$$

- Xét hàm số $f\left(t\right)=t+\sqrt{t^2+1};t\in\mathbb{R}$ ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{\left|t\right|+t}{\sqrt{t^2+1}}\ge 0;\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f'\left(t\right)>0,\forall t\in\mathbb{R}$.
- Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Thu được

$$f\left(\frac{v}{2}\right)=f\left(\frac{u}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{v}{2}=\frac{u}{4}\Leftrightarrow u=2v\Leftrightarrow 2y^2-3y=2\sqrt{x-1}.$$

Qua các bài toán trên, các bạn có thể thấy vẫn cùng một thiên hướng liên hợp $\left(\pm x+\sqrt{x^2+a}\right)\left(\pm y+\sqrt{y^2+a}\right)=a$*, tuy nhiên cụm bài toán 28 – 33 đã được nâng cấp hơn so với cụm bài toán 24 – 27, trong đó ẩn x và ẩn y đều đã được ẩn giấu sau các vỏ bọc căn thức, đa thức bậc cao, đó là đòn bẩy đẩy bài toán lên mức độ rất khó.*
Sau đây là một số bài toán tương tự

- Sử dụng mối liên hệ $y^2-2y=2\sqrt{2x-1}$ và làm ngược từ hai phương trình

$$\left(\sqrt{x^4-4x^3+4x^2+16}+2x-x^2\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)=8$$

$$x^4-2x^2+2x=2\sqrt{2x-1}$$

Hệ phương trình tạo thành

$$\begin{cases}\left(\sqrt{y^4-4y^3+4y^2+16}+2y-y^2\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)=8,\\ x^4-2x^2+2x=y^2-2y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$$

- Sử dụng mối liên hệ $20y^2-5y=3\sqrt{13x+12}$ và làm ngược từ hai phương trình

$$\left(\sqrt{x^4-4x^3+4x^2+16}+2x-x^2\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)=8$$

$$x^4-7x^2+9x+41=6\sqrt{13x+12}$$

Hệ phương trình tạo thành $\begin{cases}\left(\sqrt{y^4-4y^3+4y^2+16}+2y-y^2\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)=8,\\ x^4-7x^2+9x+41=2\left(20y^2-5y\right).\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

- Sử dụng mối liên hệ $y^2+1=7\sqrt{7x-1}$ và làm ngược từ hai phương trình

$$x^3+x^2+6x+7\sqrt{7x-1}=8+7\sqrt{6}$$

$$\left(\sqrt{7x}-\sqrt{7x-1}\right)\left(\sqrt{x^4+2x^2+50}+x^2+1\right)=7$$

Hệ phương trình tạo thành $\begin{cases}\left(\sqrt{7x}-\sqrt{7x-1}\right)\left(\sqrt{y^4+2y^2+50}+y^2+1\right)=7,\\ x^3+x^2+6x+y^2=7+7\sqrt{6}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Một số hệ phương trình khác tương tự

1. $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)=1,\\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=y^2+8.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1,\\ x^2-3y=(3+y)\sqrt{-y^2+x+4},\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

3. $\begin{cases}\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1,\\ y+3+\sqrt[3]{2x-y+3}=x^3+3x^2.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

4. $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+9}+y\right)=3,\\ 26+x^2=5x+y+(x+1)\sqrt{x^2-2y-6}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

5. $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right)\left(\sqrt{y^4+1}+y^2\right)=1,\\ \left(y^2+1\right)^2+\sqrt[3]{x^2\left(x^2-1\right)}+7y^2=3x-6.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Bài toán 34. Trích lược câu 2.2, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Hệ không chuyên; Đề thi chính thức; Quê hương Thái Bình; Năm học 2011 – 2012.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+\sqrt{x^2+2y+1}=x^2y+y+1, \\ (x+y-1)\sqrt{y+1}=10. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+2y+1\ge 0 \\ y+1\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất đã cho tương đương với

$$x^3-x^2y+\sqrt{x^2+2y+1}-(y+1)=0 \Leftrightarrow x^2(x-y)+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Rõ ràng $x+y-1>0 \Rightarrow x^2+\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}>0 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Với $x=y$ thì phương trình thứ hai trở thành

$$(2x-1)\sqrt{x+1}=10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>1 \\ 4x^3-3x-39=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>1 \\ (x-3)(4x^2+12x+13)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=y=3$.

Nhận xét.

Mấu chốt của bài toán là phân tích theo nhân tử chung $x-y$, các bạn có thể "cầu cứu" sự trợ giúp của máy tính bỏ túi Casio Fx – 570 ES Plus hoặc tương đương với kết quả được cho bởi

$$\begin{cases} x=100 \Rightarrow y=100 \\ x=50 \Rightarrow y=50 \\ x=1000 \Rightarrow y=1000 \end{cases} \Rightarrow x=y.$$

Tạm vui mừng và phấn khởi vì nhân tử "nhỏ, gọn, đẹp", các bạn mon men theo nhân tử này, lại tiếp tục quan sát thấy $x^3-x^2y=x^2(x-y)$ nên ta mạnh dạn sử dụng phép liên hợp với các "thành phần" còn lại

$$x^3-x^2y+\sqrt{x^2+2y+1}-(y+1)=0 \Leftrightarrow x^2(x-y)+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

- Xét trường hợp $x=y$, chúng ta xử lý phương trình thứ hai $(2x-1)\sqrt{x+1}=10$.

  Đây là một phương trình vô tỷ ngắn gọn, sử dụng máy tính bỏ túi thu được nghiệm $x=3$, đây là một tiền đề dành cho phép liên hợp khả quan của mình. Tuy nhiên, nếu để ý kỹ chúng ta có thể thấy nếu nâng lũy thừa hai vế phương trình này chỉ thu được phương trình tối đa bậc ba, rõ ràng là "Giết gà đâu cần dao mổ trâu" – Ngưu đao sát kê, các bạn cứ làm nhẹ nhàng để tránh đánh giá hệ quả

$$(2x-1)\sqrt{x+1}=10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>1 \\ 4x^3-3x-39=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>1 \\ (x-3)(4x^2+12x+13)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

  Như vậy trường hợp thứ nhất đã xong!

- Một chướng ngại vật sừng sững trước mắt khi buộc phải xử lý (1), các bạn cũng nên chuẩn bị tình huống xấu nhất khi (1) có nghiệm, tức là tồn tại mối quan hệ giữa x và y từ đây. Đánh giá biểu thức hệ quả T bên trái (1) thì có nhiều cách lắm, nhiều cách còn hy hữu và vận dụng tổng hòa kiến thức nữa. Rõ ràng ta nên tập tành đánh giá từ dễ đến khó, tức là tạm thời dựa dẫm $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, các bạn hãy tập trung vào phân thức trước tiên

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}.$$

May mắn thay, phân thức này dương bởi nếu để mắt đến phương trình thứ hai thì

$$(x+y-1)\sqrt{x+1} = 10 \Rightarrow x+y-1>0 \Leftrightarrow x+y>1.$$

Mọi sự chuẩn bị hoàn tất dẫn đến (1) vô nghiệm.

Vấn đề đặt ra tiếp theo là việc kế thừa, tương tự hóa, tổng quát hóa, mở rộng bài toán để tạo ra sự phong phú, đa dạng, đa chiều cũng như quen với thao tác đánh giá này khi gặp những tình huống tiếp theo. Tính riêng trường hợp kế thừa, các bạn chỉ cần xây dựng phương trình thứ hai có điều kiện $x+y \geq \alpha \geq 0$, 0 *là số tối thiểu đảm bảo T dương.*

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+\sqrt{x^2+2y+1} = x^2y+y+1, \\ \sqrt{x+y-1} = x^2-x+1. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R}).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+\sqrt{x^2+2y+1} = x^2y+y+1, \\ 2\sqrt{x+y-3} = x^2-5x-y+6. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R}).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+\sqrt{x^2+2y+1} = x^2y+y+1, \\ \sqrt{x+y-2} = 4x^2+x-y+2. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R}).$

Bài toán 35. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}+3x(x+y) = \sqrt{2y}+6y^2, \\ x^2+2xy+y^2 = 5x+3y-2. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x+y \geq 0; y \geq 0$.

Nhận xét cặp số $x=y=0$ không thỏa mãn hệ ban đầu. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}+3x(x+y)-6y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+3(x-y)(x+2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+3(x+2y)=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Rõ ràng $x+y \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow x+2y \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+3(x+2y)>0$, (1) vô nghiệm.

Với $x=y \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x^2-4x+1=0 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right),\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right).$

Kết luận hệ ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 36. Giải hệ phương trình trên tập số thực $\begin{cases} \sqrt{x+y}+x(x+y) = \sqrt{2y}+2y^2, \\ \sqrt{x^2+4y-3}-3 = y-\sqrt{3x-2}. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $y \ge 0; x \ge \frac{2}{3}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\sqrt{x+y} - \sqrt{2y} + x^2 + xy - 2y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + (x-y)(x+2y) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + x + 2y\right) = 0$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + x + 2y > 0, \forall x \ge \frac{3}{2}, \forall y \ge 0$ nên ta được $x = y$. Phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x^2+4x-3} - 3 = x - \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x-3} - 3 = \left(2 - \sqrt{3x-2}\right) + x - 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+6)}{\sqrt{x^2+4x-3}+3} = \frac{3(2-x)}{\sqrt{3x-2}+2} + x - 2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \dfrac{x+6}{\sqrt{x^2+4x-3}+3} = \dfrac{-3}{\sqrt{3x-2}+2} + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \dfrac{x+3-\sqrt{x^2+4x-3}}{\sqrt{x^2+4x-3}+3} + \dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2} = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Dễ thấy $x + 3 - \sqrt{x^2+4x-3} = \frac{2x+12}{x+3+\sqrt{x^2+4x-3}} > 0, \forall x \ge \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x+3-\sqrt{x^2+4x-3}}{\sqrt{x^2+4x-3}+3} + \frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} > 0, \forall x \ge \frac{2}{3}$.

Phương trình (1) vô nghiệm nên hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 2$.

Bài toán 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y(x-1)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}, \\ \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2y-x+6}\right)\left(\sqrt{2y-1} - 3\right) = 4. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 0; y \ge \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+y(x-1)} - y + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+xy-y-y^2}{\sqrt{x+y(x-1)}+y} + \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1+y}{\sqrt{x+y(x-1)}+y} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) = 0$$

Ta thấy $\frac{1+y}{\sqrt{x+y(x-1)}+y} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > 0, \forall y \ge 0 \Rightarrow x = y$. Phương trình thứ hai: $\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1} - 3\right) = 4$.

Rõ ràng ta có $\sqrt{2x-1} - 3 > 0 \Rightarrow x > 5$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến với $x \ge 0$.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{2x-1} - 3 > 0 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$, hàm số đồng biến.

Tích hai hàm số đồng biến và xác định dương nên $f(x).g(x)$ đồng biến.

Hơn nữa $f(7).g(7) = 4 \Rightarrow x = 7; y = 7$. Kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 38. Trích lược Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Đề thi chính thức; Lần thứ 2; Mùa thi 2016; Trường THPT Chuyên Thái Bình; Thành phố Thái Bình; Tỉnh Thái Bình.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y},\\ \sqrt{5x^2+4y}-\sqrt{x^2-3x-18}=5\sqrt{y}.\end{cases}$ $\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;x^2-3x-18\ge 0;y\ge 0$

Rõ ràng trường hợp $x=y=0$ không thỏa mãn hệ nên với $x>0;y>0$ ta có $\sqrt{x^2-xy+y^2}+y>0;\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}-y+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0\Leftrightarrow \frac{x^2-xy}{\sqrt{x^2-xy+y^2}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-xy+y^2}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0$$

Ta có $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-xy+y^2}+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0,\forall x,y>0$, dẫn đến $x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{5x^2+4x}=\sqrt{x^2-3x-18}+5\sqrt{x}$.

Với điều kiện $x\ge 6$ ta thu được

$$\begin{aligned}&5x^2+4x=x^2+22x-18+10\sqrt{x}.\sqrt{(x-6)(x+3)}\\ &\Leftrightarrow 4x^2-18x+18-10\sqrt{x}.\sqrt{x-6}.\sqrt{x+3}=0\\ &\Leftrightarrow 2x^2-9x+9-5\sqrt{x^2-6x}.\sqrt{x+3}=0\\ &\Leftrightarrow 2\left(x^2-6x\right)-5\sqrt{x^2-6x}.\sqrt{x+3}+3(x+3)=0\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2-6x}=u;\sqrt{x+3}=v$ ta được

$$2u^2-5uv+3v^2=0\Leftrightarrow (u-v)(2u-3v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u^2=v^2\\ 4u^2=9v^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x=x+3\\ 4x^2-24x=9x+27\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-7x-3=0\\ 4x^2-33x-27=0\end{array}\right.\Rightarrow x\in\left\{\frac{7+\sqrt{61}}{2};\frac{7-\sqrt{61}}{2};-\frac{3}{4};9\right\}$$

Đối chiếu điều kiện $x\ge 6\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{7+\sqrt{61}}{2};9\right\}\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{7+\sqrt{61}}{2};\dfrac{7+\sqrt{61}}{2}\right),(9;9)$.

Nhận xét.

Bài toán số 38 là một bài toán tổng hòa trong đó

- Phương trình thứ nhất khai thác theo phép liên hợp với nhân tử $x-y$, dựa trên sự trợ giúp của máy tính bỏ túi Casio Fx570 ES Plus hoặc tương đương.
- Phương trình thứ hệ đưa về hệ quả một ẩn x, thuộc lớp phương trình đồng bậc bậc hai gián tiếp.

Tuy nhiên các bạn hết sức lưu ý biểu thức hệ quả $T=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-xy+y^2}+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Mẫu thức của biểu thức hệ quả T không phải luôn luôn dương với mọi x và y thuộc điều kiện xác định nên trước khi sử dụng liên hợp theo kiểu "cấu thành mẫu thức", các bạn hãy xét kỹ lưỡng trường hợp mẫu thức bằng 0, tức là

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-xy+y^2}+y=0\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0\\ x=y=0\end{array}\right.$$

Một điều oái oăm là trường hợp $x = y = 0$ nghiệm đúng phương trình thứ nhất, nhưng vẫn còn may mắn khi nó không thỏa mãn phương trình thứ hai, nói chung là không thỏa mãn toàn bộ hệ ban đầu. Do đó trước khi biến đổi chúng ta phải có lời dẫn để hợp logic, đồng thời loại bỏ khả năng này ngay lập tức

Rõ ràng trường hợp $x = y = 0$ không thỏa mãn hệ nên với $x > 0; y > 0$ ta có $\sqrt{x^2 - xy + y^2} + y > 0; \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$.

Trong một số bài toán, người ra đề có thể "cố ý" bố trí hệ vẫn lấy khả năng X làm nghiệm hy hữu

X: Cặp số $(x; y)$ làm cho mẫu thức bằng 0.

Khi đó, với X, người ra đề muốn triệt hạ hoặc làm khó những bạn mới tập tành đánh giá, đồng thời nó cũng nâng cao mức phức tạp, găm tư duy chiều sâu, âu cũng là yêu cầu đối với một bài toán hệ phương trình khi đặt tại vị trí phân loại thí sinh. Như vậy các bạn hãy mạnh dạn thử nghiệm, xoay sở, phát hiện và thực hành nhiều hơn nữa đối với hệ phương trình phân chia hai công đoạn theo mức độ: Cơ bản – Nâng cao.

Một số bài toán kế thừa các bài 37 và 38

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x + y(x-1)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}, \\ (x^2 - 7y + 1)\sqrt{6x + y - 2} + x = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x + y(x-1)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}, \\ (x^2 - 6x + 2)\sqrt{6x - 3} + x = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x + y(x-1)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}, \\ (x^2 - 8x + 2)\sqrt{8x - 3} + x = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}, \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{4-y} = xy - 6x + 11. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}, \\ \sqrt{x-1} + y - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2y - 2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}, \\ \sqrt{1+x} + \sqrt{1-y} = 2 - \dfrac{xy}{4}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}, \\ \dfrac{1}{1-xy} = \dfrac{3y}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x}{y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Bài toán 39. Giải hệ phương trình trên tập số thực $\begin{cases} x\sqrt{x+y} = y\sqrt{2y} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+3}} + 1 = \dfrac{6}{y^2+3}. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x + y \geq 0; y \geq 0$.

Rõ ràng trường hợp $x = y = 0$ không thỏa mãn hệ nên $y > 0 \Rightarrow \sqrt{x+y} + \sqrt{2y} > 0$.

Phương trình thứ nhất tương đương

$$(x-y)\sqrt{x+y} + y\left(\sqrt{x+y} - \sqrt{2y}\right) = 0 \Leftrightarrow (x-y)\sqrt{x+y} + y.\frac{x-y}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\sqrt{x+y}+\frac{y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}\right)=0 \Rightarrow x=y, \text{ vì } \sqrt{x+y}+\frac{y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}>0, \forall y>0.$$

Phương trình thứ hai trở thành $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+1=\frac{6}{x^2+3} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình ẩn x ở trên tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1=\frac{6}{x^2+3}-2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1=\frac{-2x^2}{x^2+3} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2+3}+\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1=0.$$

Đặt $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=t$ ta thu được $2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow (2t-1)(t+1)=0 \Leftrightarrow t\in\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$

❖ $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4x^2=x^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\in\{-1;1\} \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

❖ $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=-1 \Leftrightarrow -x=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2=x^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Bài toán số 39 dưới sự trợ giúp của máy tính bỏ túi Casio hoặc tương đương các bạn tìm ra nhân tử $x=y$, từ đó manh nha đi ghép nhóm $\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}$ vì đặc tính $x+y-2y=x-y$. Lời giải trên là một phương án liên hợp, ngoài ra các bạn có thể tuần tự như thế này

$$x\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}\right)+x\sqrt{2y}=y\sqrt{2y} \Leftrightarrow \frac{x(x-y)}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+(x-y)\sqrt{2y}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\sqrt{2y}\right)=0.$$

Một số bạn đọc còn có thể khai thác theo hướng phương trình đồng bậc bậc ba cũng rất khả quan

- Nhận xét $\begin{cases} x\sqrt{x+y}=y\sqrt{2y} \\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\ge 0$.
- Biến đổi

$$x\sqrt{x+y}=y\sqrt{2y} \Leftrightarrow x^2(x+y)=2y^3 \Leftrightarrow x^3+x^2y-2y^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+2xy+2y^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ (x+y)^2+y^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=y=0 \quad (L) \end{array}\right.$$

Bài toán 40. Giải hệ phương trình trên tập số thực $\begin{cases} \sqrt{x-2+\frac{8}{y+3}}+\frac{(y+1)^2+4}{x+3}=3. \\ \sqrt{x}+(2x-2y-1)\sqrt{y}=0 \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0; y\ge 0; x-2+\frac{8}{y+3}\ge 0$.

Xét $x=y=0$ không là nghiệm của hệ nên $x>0; y>0$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}+2(x-y)\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+2(x-y)\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+2\sqrt{y}\right)=0 \Rightarrow x=y \text{ (Vì } \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+2\sqrt{y}>0, \forall x,y>0\text{)}.$$

Phương trình thứ nhất trở thành $\sqrt{x-2+\frac{8}{x+3}}+\frac{(x+1)^2+4}{x+3}=3$. Điều kiện $x\neq -3; x-2+\frac{8}{x+3}\geq 0$.

Phương trình trên tương đương

$$\sqrt{x-2+\frac{8}{x+3}}+\frac{x^2+2x+5}{x+3}=3\Leftrightarrow\sqrt{\frac{(x+3)(x-2)+8}{x+3}}+\frac{x^2+2x+5}{x+3}-1=2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{x^2+x+2}{x+3}=2.$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}=t, t\geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases}t\geq 0\\ t^2+t=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq 0\\ (t-1)(t+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq 0\\ t\in\{-2;1\}\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}=1\Leftrightarrow x^2+x+2=x+3\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=y=1$.

Nhận xét.

Bài toán 41 có phương trình thứ hai khá đơn giản, với sự trợ giúp của máy tính Casio Fx570 ES Plus hoặc tương đương, các bạn dễ dàng tìm được nhân tử $x-y$ khi gán

$$\begin{cases}x=100\Rightarrow y=100\\ x=1000\Rightarrow y=1000\\ x=50\Rightarrow y=50\end{cases}$$

Ngoài cách tách biểu thức tương tự lời giải chúng ta có thể sử dụng

$$\sqrt{x}+(2x-2y-1)\sqrt{y}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt{y}+(2x-2y-1)\sqrt{y}+\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt{y}+(2x-2y)\sqrt{y}=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+2(x-y)\sqrt{y}=0\Leftrightarrow\ldots$$

Các bạn có thể làm khó hệ phương trình này lên mức độ phức tạp hơn bằng cách găm thêm đại lượng

$$k(x-y)\geq 0,\forall x,y\geq 0\vee f(x;y).(x-y); f(x;y)\geq 0,\forall x,y\geq 0.$$

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+(2x-2y-1)\sqrt{y}+x^3-y^3=0,\\ 1+4x^2+(4y-3)\sqrt{x-1}=5y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x}+(3x-3y-2)\sqrt{y}+4x=4y,\\ x^2+y+6+2x\sqrt{y+3}=4\left(y+\sqrt{x+3}\right).\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+(3x-3y-1)\sqrt{y}+x^2+xy-2y^2=0,\\ (3x+y-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2y+1.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x}+(5x-5y-2)\sqrt{y}+x^3+x^2y=2y^3,\\ (3x+y-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2y+1.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 41. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y}=\sqrt{2y+1},\\ 12\sqrt[3]{xy^2+7x}=x^2+8y+15.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+y+1\geq 0; x-y\geq 0 \\ 2y+1\geq 0; xy^2+7x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq y \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+y+1}-\sqrt{2y+1}+\sqrt{x-y}=0 \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+\sqrt{x-y}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-y}.\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+\sqrt{x-y}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-y}\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+1\right)=0$$

Ta có $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+1>0 \Rightarrow \sqrt{x-y}=0 \Leftrightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương $12\sqrt[3]{x^3+7x}=x^2+8x+15$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực không âm ta có

$$4\sqrt[3]{x\left(x^2+7\right)}=\sqrt[3]{8.8x\left(x^2+7\right)}\leq \frac{8+8x+x^2+7}{3}=\frac{x^2+8x+15}{3} \Rightarrow 12\sqrt[3]{x^3+7x}\leq x^2+8x+15.$$

Do đó phương trình ẩn x có nghiệm khi $8x=x^2+7=8 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Bài toán số 41 thoạt tiên các bạn nhận thấy có 3 căn thức, nhưng nếu sử dụng sự trợ giúp của máy tính Casio Fx570 ES Plus chúng ta vẫn khai thác được nhân tử $x-y$ hoặc thậm chí $\sqrt[n]{x-y}$, may mắn hơn nữa khi một căn thức đã chứa đại lượng này, theo lẽ tự nhiên các bạn tạm thời thực hiện liên hợp trực tiếp với hai căn thức còn lại

$$\sqrt{x+y+1}-\sqrt{2y+1}+\sqrt{x-y}=0 \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+\sqrt{x-y}=0.$$

Bước tiếp theo các bạn không nên lựa chọn nhân tử $x-y$ mà lựa chọn $\sqrt{x-y}$

$$\sqrt{x-y}.\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+\sqrt{x-y}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-y}.\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+1\right)=0.$$

Vì sao chúng ta lại lựa chọn phương án này, vì tránh tình trạng đặt $\sqrt{x-y}$ dưới mẫu thức, lúc đó bắt buộc xét trường hợp phụ $x=y$, dễ dẫn đến coi nhẹ vai trò, xét qua loa, không cẩn thận, trong khi đây lại là trường hợp chính, vô hình chung đã hoán đổi vai trò chính – phụ của hai trường hợp, thật sự là không nên.

Bài toán 42. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+y}+xy=y^2+2\sqrt{y}, \\ x^2y-5y^2+8x+2=\sqrt{5y-6}+\sqrt{8x+y-2}. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$

Lời giải.

Điều kiện $y\geq \frac{6}{5}; 8x+y\geq 2; 3x+y\geq 0$. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$\sqrt{3x+y}-2\sqrt{y}+y\left(x-y\right)=0 \Leftrightarrow \frac{3\left(x-y\right)}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+y\left(x-y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+y\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \frac{3}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+y=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Ta thấy $\frac{3}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+y>0, \forall y\geq 0$ nên (1) vô nghiệm, thu được $x=y$.

Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned}&x^3-5x^2+8x+2=\sqrt{5x-6}+\sqrt{9x-2}\\&\Leftrightarrow x-\sqrt{5x-6}+x+2-\sqrt{9x-2}+x^3-5x^2+6x=0\\&\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x+\sqrt{5x-6}}+\frac{x^2-5x+6}{x+2+\sqrt{9x-2}}+x\left(x^2-5x+6\right)=0\\&\Leftrightarrow \left(x^2-5x+6\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{5x-6}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{9x-2}}+x\right)=0\quad(2)\end{aligned}$$

Lại có $\frac{1}{x+\sqrt{5x-6}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{9x-2}}+x>0,\forall x\ge\frac{6}{5}$ nên $(2)\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x\in\{2;3\}\Rightarrow(x;y)=(2;2),(3;3)$.

Bài toán 43. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-y^2+1=2\left(\sqrt{y}-\sqrt{x+1}-x\right),\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y-3}+x-y=2.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 3;x\ge -1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+1)^2-y^2+2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y}\right)=0\Leftrightarrow(x-y+1)(x+y+1)+\frac{2(x-y+1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y+1)\left(x+y+1+\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}\right)=0$$

Ta thấy $x+y+1+\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}}>0\Rightarrow x-y+1=0$. Phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{x^2-x-2}=9\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x-2}=10-2x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-2}=5-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 5\\ x^2-x-2=x^2-10x+25\end{cases}\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=4$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=3;y=4$.

Bài toán 44. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x}=\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{y},\\ 5x^2-48y+47=\sqrt{10y-9}+\sqrt{8x+6y-5}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;y\ge\frac{9}{10}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0$$

Ta thấy $\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0$ nên thu được $x=y$. Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned}&5x^2-48x+47=\sqrt{10x-9}+\sqrt{14x-5}\\&\Leftrightarrow x-\sqrt{10x-9}+x+2-\sqrt{14x-5}+5\left(x^2-10x+9\right)=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-10x+9}{x+\sqrt{10x-9}}+\frac{x^2-10x+9}{x+2+\sqrt{14x-5}}+5\left(x^2-10x+9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-10x+9\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{10x-9}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{14x-5}}+5\right)=0$$

Rõ ràng $\frac{1}{x+\sqrt{10x-9}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{14x-5}}+5>0,\forall x\ge\frac{9}{10}$ nên $x^2-10x+9=0\Leftrightarrow x\in\{1;9\}$.

Kết luận hệ có hai nghiệm $x=y=1;x=y=9$.

Bài toán 45. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y}+x+1=\left(\sqrt{y}+1\right)^2,\\ 6y^2-17x+\dfrac{12y}{x}=\sqrt{3x-2}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3};y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}+x-y=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+x-y=0\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+1\right)=0.$$

Ta thấy $\frac{1}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+1>0$ nên thu được $x=y$. Phương trình thứ hai trở thành

$$6x^2-17x+12=\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow x-\sqrt{3x-2}+6\left(x^2-3x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{3x-2}}+6\left(x^2-3x+2\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{3x-2}}+6\right)=0$$

Ta thấy $\frac{1}{x+\sqrt{3x-2}}+6>0,\forall x\ge\frac{2}{3}$ nên thu được $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x\in\{1;2\}$. Kết luận $x=y=1;x=y=2$.

Nhận xét.

Bài toán số 44 về hình thức các bạn có thể hơi "mông lung", tuy nhiên đây là sự đánh lạc hướng bởi nếu thực hiện khai triển chúng ta sẽ thu được $\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$. Sử dụng máy tính bỏ túi Casio hoặc tương đương ta có nhân tử $x=y$, hơn nữa các hiệu $x+y-2y;x-y$ đều dẫn đến $x=y$ nên ta nhóm

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0.$$

Bài toán 45 các bạn hãy mạnh dạn khai triển hằng đẳng thức bình thường thì thấy bài toán thật đơn giản!

Bài toán 46. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+8y}+2\sqrt{x}=\sqrt{x+3y}+3\sqrt{y},\\ \sqrt{y-1}+\sqrt{x+4}=2y-5.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 1;x\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+8y}-3\sqrt{y}+2\sqrt{x}-\sqrt{x+3y}=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+\frac{3(x-y)}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3y}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+\frac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3y}}\right)=0$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+\frac{8}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8y}}>0;\forall y\ge 1,\forall x\ge 0$ nên thu được $x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai tương đương với

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x+4}-3=2x-10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}=2(x-5)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}=2 \quad (1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}<2$ nên (1) vô nghiệm. Từ đây ta có nghiệm $x=y=5$.

Bài toán 47. Giải phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+8y}+2\sqrt{x}=\sqrt{x+3y}+3\sqrt{y}, \\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{4x+y+4}=x+y+3.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;y\ge 0$. Xét trường hợp $x=y=0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Với $x>0;y>0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+8y}-3\sqrt{y}+2\sqrt{x}-\sqrt{x+3y}=0\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+\frac{3(x-y)}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+\frac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3y}}\right)=0$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+\frac{8}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8y}}>0;\forall y>0,\forall x>0$ nên thu được $x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=2x+3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x+3-\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+4}=0\Leftrightarrow x+1-\sqrt{3x+1}+x+2-\sqrt{5x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0 \quad (1)$$

Ta thấy $\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}>0,\forall x\ge -\frac{1}{3}$ nên $(1)\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$.

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 48. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+5y}+3\sqrt{x}=\sqrt{6y}+\sqrt{x+8y}, \\ 8x^2-10y+5=\sqrt{6x+y-2}+\sqrt{6x+5y-1}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;y\ge 0;6x+y\ge 2;6x+5y\ge 1$.

Xét trường hợp $x=y=0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Với $x>0;y>0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+5y}-\sqrt{6y}+3\sqrt{x}-\sqrt{x+8y}=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+5y}+\sqrt{6y}}+\frac{8(x-y)}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8y}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+5y}+\sqrt{6y}}+\frac{8}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8y}}\right)=0$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x+5y}+\sqrt{6y}}+\frac{8}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8y}}>0,\forall x>0,y>0$ nên dẫn đến $x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ khi đó tương đương với $8x^2-10x+5=\sqrt{7x-2}+\sqrt{11x-1}$.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{7}$. Phương trình trên tương đương với

$$2x-\sqrt{7x-2}+2x+1-\sqrt{11x-1}+8x^2-14x+4=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4x^2-7x+2}{2x+\sqrt{7x-2}}+\frac{4x^2-7x+2}{2x+1+\sqrt{11x-1}}+2\left(4x^2-7x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-7x+2\right)\left(\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+\frac{1}{2x+1+\sqrt{11x-1}}+2\right)$$

Vì $\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+\frac{1}{2x+1+\sqrt{11x-1}}+2>0,\forall x\ge\frac{2}{7}$ nên thu được $4x^2-7x+2=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{7+\sqrt{17}}{8};\frac{7-\sqrt{17}}{8}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện ta có tập hợp nghiệm $S=\left\{\left(\frac{7+\sqrt{17}}{8};\frac{7+\sqrt{17}}{8}\right);\left(\frac{7-\sqrt{17}}{8};\frac{7-\sqrt{17}}{8}\right)\right\}$.

Nhận xét.

Đối với các bài toán 46, 47 và 48, sử dụng máy tính bỏ túi Casio Fx – 570 ES Plus hoặc công cụ tương đương ta khai thác được phương trình thứ nhất, cụ thể thu được mối quan hệ $x=y$. Dựa trên yếu tố này, ta đặt $x=y=k$, quan sát kỹ hình thức phương trình, các bạn có các hướng ghép biểu thức như sau

- Các bài toán 46 và 47

$$x=y=k\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+8y}=\sqrt{k+8k}=3\sqrt{k}\\2\sqrt{x}=2\sqrt{k}\\3\sqrt{y}=3\sqrt{k}\\\sqrt{x+3y}=\sqrt{k+3k}=2\sqrt{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+8y}=3\sqrt{k}=3\sqrt{y}\\\sqrt{x+3y}=2\sqrt{k}=2\sqrt{x}\end{cases}$$

Đi đến ghép liên hợp $\sqrt{x+8y}-3\sqrt{y}+2\sqrt{x}-\sqrt{x+3y}=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+\frac{3(x-y)}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3y}}=0$.

- Bài toán 48

$$x=y=k\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+5y}=\sqrt{k+5k}=\sqrt{6k}\\3\sqrt{x}=3\sqrt{k}\\\sqrt{6y}=\sqrt{6k}\\\sqrt{x+8y}=\sqrt{k+8k}=3\sqrt{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+5y}=\sqrt{6k}=\sqrt{6y}\\3\sqrt{x}=\sqrt{x+8y}=3\sqrt{k}\end{cases}$$

Đi đến ghép liên hợp $\sqrt{x+5y}-\sqrt{6y}+3\sqrt{x}-\sqrt{x+8y}=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+5y}+\sqrt{6y}}+\frac{8(x-y)}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8y}}=0$.

Rõ ràng với ý tưởng này, kết hợp với phương trình làm ngược "kho khó" một chút, các bạn có thể tạo ra được rất nhiều hệ phương trình thú vị, đại loại như

✓ Làm ngược từ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\left(1+x^3\right)=16$; Đáp số $x=y=1$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{6x-y}=\sqrt{3y}+\sqrt{5x},\\ \left(x+\frac{y}{x}\right)^3\left(y^3+1\right)=16y.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

✓ Làm ngược từ $\sqrt[3]{x+1}=x^3-15x^2+75x-131$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{7x+y}+2\sqrt{2x}=2\sqrt{2y}+\sqrt{7y+x},\\ \sqrt[3]{y+1}=x^2y-15x^2+75y-131.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

✓ Làm ngược và đánh giá từ $\min\left[6|x-1|+|3x-2|+2x\right]=2$; Đáp số $x=y=1$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{17x+6y}+\sqrt{3x+4y}=\sqrt{23y}+\sqrt{x+6y},\\ 6|x-1|+|3y-2|+2x+3\sqrt{1-y}=2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

✓ Làm ngược từ $x=\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+6y}+\sqrt{4x-y}=\sqrt{2x+7y}+\sqrt{3x},\\ 2x-y=\sqrt{1-\frac{1}{y}}+\sqrt{y-\frac{1}{x}}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

✓ Làm ngược từ $2x^2+3\sqrt[3]{x^3-9}=\frac{10}{x}$; Đáp số $x=y=2$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+2y}+\sqrt{5x+3y}=\sqrt{x+4y}+2\sqrt{x+y},\\ x^2+xy+3\sqrt[3]{xy^2-9}=\frac{4}{x}+\frac{6}{y}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 49. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+2y}+2\sqrt{2x+3y}=3\sqrt{x+4y},\\ \sqrt{x\left(y^3+2\right)}+\sqrt{y\left(x^2+2\right)}=\frac{x^3+y^2+5x+y+4}{2\sqrt{3}}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Trường hợp $x=y=0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x+2y}-\sqrt{2x+3y}+3\sqrt{2x+3y}-3\sqrt{x+4y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y}}+\frac{3x-3y}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{x+4y}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y}}+\frac{3}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{x+4y}}\right)=0$$

Lại có $\frac{1}{\sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{x+4y}}>0\Rightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{x\left(x^3+2\right)}+\sqrt{x\left(x^2+2\right)}=\frac{x^3+x^2+6x+4}{2\sqrt{3}}$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\sqrt{3x\left(x^3+2\right)}+\sqrt{3x\left(x^2+2\right)}\le\frac{3x+x^3+2}{2}+\frac{3x+x^2+2}{2}=\frac{x^3+x^2+6x+4}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x\left(x^3+2\right)}+\sqrt{x\left(x^2+2\right)}\le\frac{x^3+x^2+6x+4}{2\sqrt{3}}$$

Do đó phương trình ẩn x có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2=3x\\x^3+2=3x\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 50. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y}=2\sqrt{x+4y},\\\sqrt{y^2+x+1}-\sqrt{x^2-y+1}=\sqrt{2}.\end{cases}\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Xét trường hợp $x=y=0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x+2y}-\sqrt{x+4y}+\sqrt{2x+3y}-\sqrt{x+4y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x-2y}{\sqrt{3x+2y}+\sqrt{x+4y}}+\frac{x-y}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{x+4y}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{3x+2y}+\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{x+4y}}\right)=0$$

Rõ ràng $\frac{2}{\sqrt{3x+2y}+\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{x+4y}}>0$ với x và y không đồng thời bằng 0.

Ta được $x=y$ và phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+1=x^2-x+3+2\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}\Leftrightarrow x-1=\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\x^2-2x+1=2x^2-2x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\x^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

Đối với phương trình thứ hai của bài toán số 50, thực ra tác giả làm ngược từ trường hợp riêng $m=\sqrt{2}$ của bài toán gốc

A. Tìm *m* để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$.

Có lẽ một số bạn đọc đã từng trải qua hoặc được đọc, được học ở đâu đó bài toán biện luận phương trình điển hình nguyên là bài toán trong Đề thi tuyển sinh Đại học; Môn Toán; Trường Đại học Luật Hà Nội; Mùa thi 1995.

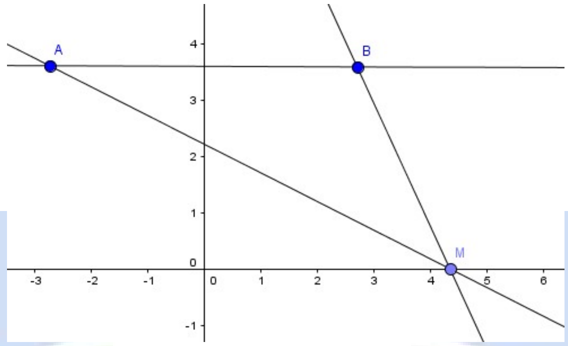
B. Xác định tham số *a* để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{4x^2+2x+1}-\sqrt{4x^2-2x+1}=2a$.

Hai bài toán biện luận tham số a này, có sử dụng một phương pháp đặc trưng dành cho các bài toán đặc thù, mang tên phương pháp hình học. Cụ thể, với bài toán A

- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy ta lấy các điểm có tọa độ

$$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right),B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right),M\left(x;0\right).$$

- Khi đó $AB=1;MA=\sqrt{x^2+x+1};MB=\sqrt{x^2-x+1}$.
- Hình vẽ minh họa



- Theo bất đẳng thức tam giác trong tam giác AMB ta có
$$|MA-MB|\le AB \Rightarrow \left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|\le 1 \Rightarrow |m|\le 1.$$
- Vì AB song song với trục hoành và M nằm trên xOx' nên dấu đẳng thức không xảy ra.
- Kết luận $-1<m<1$.

Tuy nhiên đó là một phương trình chứa tham số, với các trường hợp cụ thể, chúng ta đều nhận ra sau khi chuyển vế và bình phương hai vế, đại lượng bậc hai bị triệt tiêu, phương trình cuối cùng thu được tối đa bậc hai, đây có lẽ phương án tối ưu khi giải lớp phương trình căn không chứa tham số, đồng thời là dạng đặc thù của phương pháp biến đổi tương đương giải phương trình chứa căn

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2+x+1=x^2-x+3+2\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)} \Leftrightarrow x-1=\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-2x+1=2x^2-2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Một số hệ phương trình kế thừa

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y}=2\sqrt{x+4y}, \\ \sqrt{y^2+x+1}-\sqrt{x^2-y+1}=\sqrt{2013}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y}=2\sqrt{x+4y}, \\ \sqrt{y^2+x+1}-\sqrt{x^2-y+1}=\sqrt{3}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y}=2\sqrt{x+4y}, \\ 9x\sqrt{y^2+1}+13y\sqrt{1-x^2}=16. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y}=2\sqrt{x+4y}, \\ \sqrt{y+1}=x^2+3x+y+5. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+2y}+2\sqrt{2x+3y}=3\sqrt{x+4y}, \\ \sqrt{3x+1}+4x^2-13x+5=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+2y}+2\sqrt{2x+3y}=3\sqrt{x+4y}, \\ \sqrt[3]{2x+3}+1=x^3+3x^2+2x. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+2y}+2\sqrt{2x+3y}=3\sqrt{x+4y}, \\ x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+2y}+2\sqrt{2x+3y}=3\sqrt{x+4y}, \\ (1+3x)\sqrt{x^2+x+2}=3x^2+3x+2. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 51. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{6x+y}+3\sqrt{7x}=4\sqrt{5x+2y},\\ \dfrac{3x+y+7}{x^2-7y+7}=2\sqrt{x+2}-1.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Xét trường hợp $x=y=0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{6x+y}-\sqrt{5x+2y}+3\left(\sqrt{7x}-\sqrt{5x+2y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{6x+y}+\sqrt{5x+2y}}+\frac{3(x-y)}{\sqrt{7x}+\sqrt{5x+2y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{6x+y}+\sqrt{5x+2y}}+\frac{3}{\sqrt{7x}+\sqrt{5x+2y}}\right)=0$$

Rõ ràng $\dfrac{1}{\sqrt{6x+y}+\sqrt{5x+2y}}+\dfrac{3}{\sqrt{7x}+\sqrt{5x+2y}}>0$ khi x và y không đồng thời bằng 0.

Xét $x=y$ thì phương trình thứ hai trở thành

$$\frac{4x+7}{x^2-7x+7}=2\sqrt{x+2}-1\Leftrightarrow\frac{4x+7}{x^2-7x+7}=\frac{4x+7}{2\sqrt{x+2}+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-\dfrac{7}{4} & \\ x^2-7x+6=2\sqrt{x+2} & (1)\end{array}\right.$$

Ta có $(1)\Leftrightarrow x^2-6x+9=x+3+2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow(x-3)^2=\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x-4=\sqrt{x+2} & (2)\\ 2-x=\sqrt{x+2} & (3)\end{array}\right.$

- Giải $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 4\\ x^2-8x+16=x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 4\\ x^2-9x+14=0\end{cases}\Leftrightarrow x=7$.
- Giải $(3)\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x^2-4x+4=x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x^2-5x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện $x\ge 0\Rightarrow(x;y)=(7;7),\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Nhận xét.

Các bài toán 49, 50 và 51 là phát triển mở rộng của các bài toán trước đó, với sự trợ giúp của máy tính bỏ túi Casio Fx – 570 ES Plus hoặc tương đương ta thu được quan hệ $x=y$, tác giả xin quay lại phân tích kỹ thuật liên hợp – trục căn thức như sau

- Bài toán 49

$$x=y=k\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3x+2y}=\sqrt{5k}\\ \sqrt{2x+3y}=\sqrt{5k}\\ \sqrt{x+4y}=\sqrt{5k}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{3x+2y}=\sqrt{2x+3y}=\sqrt{x+4y}.$$

Mặc dù ba căn thức có giá trị bằng nhau khi $x=y$ nhưng tuyệt đối không ghép $\sqrt{3x+2y}\sim\sqrt{2x+3y}$.

Các bạn phải tách đối lượng “nhiều hơn”, san sẻ đều cho hai căn thức này.

Rõ ràng chúng ta không nên dại gì sử dụng liên hợp tạo mẫu hiệu, mục đích là phải liên hợp tạo mẫu tổng

$$\sqrt{3x+2y}+2\sqrt{2x+3y}-3\sqrt{x+4y}=0\Leftrightarrow\sqrt{3x+2y}-\sqrt{x+4y}+2\sqrt{2x+3y}-2\sqrt{x+4y}=0.$$

- Bài toán 50

  Ta thấy $x=y=k \Rightarrow \sqrt{3x+2y}=\sqrt{2x+3y}=\sqrt{x+4y}=\sqrt{5k}$, dẫn đến ghép liên hợp
  $$\sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y}-2\sqrt{x+4y}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+2y}-\sqrt{x+4y}+\sqrt{2x+3y}-\sqrt{x+4y}=0.$$
- Bài toán 51

  Ta thấy $x=y=k \Rightarrow \sqrt{6x+y}=\sqrt{5x+2y}=\sqrt{7x}=\sqrt{7k}$, dẫn đến ghép cặp
  $$\sqrt{6x+y}-\sqrt{5x+2y}+3\sqrt{7x}-3\sqrt{5x+2y}=0 \Leftrightarrow \sqrt{6x+y}-\sqrt{5x+2y}+3\left(\sqrt{7x}-\sqrt{5x+2y}\right)=0.$$

Bài toán 52. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}-3\sqrt{3y}+2\sqrt{2x-y}=0,\\ 3x^2+10y-4=4\left(5-\dfrac{2}{y}\right)\sqrt{5x-4}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{4}{5};2x\ge y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với
$$\sqrt{x+y}-\sqrt{3y}+2\sqrt{2x-y}-2\sqrt{3y}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}-\sqrt{3y}+2\left(\sqrt{2x-y}-\sqrt{3y}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-2y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{3y}}+\frac{4(x-2y)}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{3y}}=0 \Leftrightarrow (x-2y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{3y}}+\frac{4}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{3y}}\right)=0$$

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{3y}}+\dfrac{4}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{3y}}>0$ với $x\ge\frac{4}{5};2x\ge y\ge 0$ do đó $x=2y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $3x^2+5x-4=4\left(5-\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{5x-4} \Leftrightarrow 3x^3+x(5x-4)=4(5x-4)\sqrt{5x-4}$.

Đặt $\sqrt{5x-4}=t\ (t\ge 0)$ ta thu được
$$3x^3+xt^2-4t^3=0 \Leftrightarrow 3x^2(x-t)+3xt(x-t)+4t^2(x-t)=0 \Leftrightarrow (x-t)\left(3x^2+3xt+4t^2\right)=0 \qquad (1)$$

Vì $x\ge\frac{4}{5};t\ge 0 \Rightarrow 3x^2+3xt+4t^2>0$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x=t \Leftrightarrow x=\sqrt{5x-4} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\dfrac{4}{5}\\ x^2-5x+4=0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\{1;4\}$

Kết luận hệ có hai cặp nghiệm $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right),(4;2)$.

Nhận xét.

Với bài toán số 52 này, sử dụng công cụ máy tính bỏ túi Casio Fx – 570 ES Plus có lẽ các bạn đều thấy rằng mối quan hệ hai biến bằng nhau đã không còn nữa, vậy mối quan hệ giữa x và y chính xác như thế nào, các bạn hãy sử dụng một loạt phép gán với kết quả thu được như sau

Tổ hợp phím $\rightarrow$	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc
x	100	1000	50	200
y	50	500	25	100
Mối liên hệ	$x=2y$	$x=2y$	$x=2y$	$x=2y$

Dựa trên cơ sở này ta có

$$x=2y=2k\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+y}=\sqrt{2k+k}=\sqrt{3k}\\2\sqrt{3y}=2\sqrt{3k}\\2\sqrt{2x-y}=2\sqrt{2.2k-k}=2\sqrt{3k}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x+y}=\sqrt{3y}=\sqrt{2x-y}$$

Do đó chúng ta có định hương ghép liên hợp

$$\sqrt{x+y}-2\sqrt{3y}+2\sqrt{2x-y}=0\Leftrightarrow\sqrt{x+y}-\sqrt{3y}+2\sqrt{2x-y}-2\sqrt{3y}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+y}-\sqrt{3y}+2\left(\sqrt{2x-y}-\sqrt{3y}\right)=0\Leftrightarrow\frac{x-2y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{3y}}+\frac{4(x-2y)}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{3y}}=0$$

Bài toán 53. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+6y}=5\sqrt{y},\\18y^2+6x-5=3\left(6-\dfrac{5}{3y}\right)\sqrt{6x-5}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{5}{6};y>0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+y}-2\sqrt{y}+\sqrt{x+6y}-3\sqrt{y}=0\Leftrightarrow\frac{x-3y}{\sqrt{x+y}+2\sqrt{y}}+\frac{x-3y}{\sqrt{x+6y}+3\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x+6y}+3\sqrt{y}}\right)=0$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x+y}+2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x+6y}+3\sqrt{y}}>0,x\ge\frac{5}{6};y>0$ nên ta được $x=3y$.

Phương trình thứ hai trở thành $2x^2+6x-5=3\left(6-\frac{5}{x}\right)\sqrt{6x-5}\Leftrightarrow2x^3+x(6x-5)=3(6x-5)\sqrt{6x-5}$.

Đặt $\sqrt{6x-5}=t\ (t\ge0)$ quy về

$$2x^3+xt^2-3t^3=0\Leftrightarrow2x^2(x-t)+3xt(x-t)+3t^2(x-t)=0\Leftrightarrow(x-t)\left(2x^2+3xt+3t^2\right)=0\quad(*)$$

Ta có $x\ge\frac{5}{6};t\ge0\Rightarrow2x^2+3xt+3t^2>0$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow x=t\Leftrightarrow x=\sqrt{6x-5}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{5}{6}\\x^2-6x+5=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{1;5\}$.

Kết luận hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(1;\frac{1}{3}\right),\left(5;\frac{5}{3}\right)$.

Nhận xét.

Dựa trên cơ sở ghép cặp liên hợp được bố trí trước, kết hợp làm ngược phương trình một ẩn , các bạn có thể xây dựng một loạt các bài toán tương tự như sau

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{7x+y}{2}}+2\sqrt{x}=3\sqrt{3x+y}.\\(3x^2+6y+7)\sqrt{3x+1}+(y^2+10x+5)\sqrt{x^2+y+2}=64.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R}).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{11x+2y}+3\sqrt{13x}=4\sqrt{10x+3y},\\\dfrac{2x+y-2}{(y-1)^2+1}+1=\sqrt{3x-1}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R}).$

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{9x+y}+4\sqrt{10x}=5\sqrt{8x+2y},\\ 27y^2-27y+5=\sqrt{11x-1}+\sqrt{23y+3}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x+3y}+6\sqrt{7x}=7\sqrt{2x+5y},\\ \dfrac{6x+y-3}{2xy-13y+5}+1=\sqrt{6x+y-2}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+5\sqrt{5x-2y}=6\sqrt{x+2y},\\ \dfrac{x^3+18xy-60y+41}{4x^2+y-14}=2\sqrt{x-2}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+2y}-7\sqrt{2x+3y}+6\sqrt{7x-2y}=0,\\ y^2-7x+14=\left(5x+6-\dfrac{3}{y}\right)\sqrt{2-x}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{7x+3y}+\sqrt{x+y}=\sqrt{6x+6y+2\sqrt{y}},\\ \dfrac{2x^3+18x^2+33x+17}{\sqrt{3x+3y+5}}=(6y+3)^2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{5x+y}+\sqrt{2x+y}=\sqrt{4x+3y}+\sqrt{x+3y},\\ (27x-8)\sqrt{x+3y-3}=2(8x+3y-7)\sqrt{5x-1}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{3x+2y}=\sqrt{x+4y}+\sqrt{2x+5y},\\ 12\sqrt{3y}+2\sqrt{x-1}=2x+3y+9.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{3x+2y}=2\sqrt{y}+\sqrt{x+5y},\\ 9y^2+3y+x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{3y-1}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2y}+\sqrt{2x+7y}=\sqrt{5y}+\sqrt{x+10y},\\ 4\sqrt{3y+3}-\sqrt{x-1}=2x-3y+7.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{6x+y}+\sqrt{5x+2y}=\sqrt{3x+2y}+\sqrt{2x+3y},\\ 2x^3+1=\sqrt[3]{\dfrac{y-2x+1}{2}}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{3x+2y}=\sqrt{6y}+\sqrt{2x+7y},\\ 8x^2+5y+2x+7=6x\sqrt{5y+8}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{6x+y}+\sqrt{x+5y}=\sqrt{5x+2y}+\sqrt{6y},\\ (x+y)\sqrt{y+3}=8x^2-y-3.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{5x+3y}+\sqrt{7x+y}=\sqrt{3x+5y},\\ 10\sqrt{2x+2}+2\sqrt{y+3}=y+23.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{7x+4y}+\sqrt{8x+y}=\sqrt{x+22y},\\ 7x^2+21y=\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 54. Trích lược câu 8; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2015; Trường THPT Đồng Lộc; Huyện Can Lộc; Tỉnh Hà Tĩnh.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[3]{x^3+5y^2+14x+9}=2\sqrt{x^2+2y-1}+x+2,\\ \sqrt{3x+y}-\sqrt{x-y}+3(x+y)=0.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định. Xét trường hợp $x=y=0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\frac{2x+2y}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{x-y}}+3(x+y)=0\Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{2}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{x-y}}+3\right)=0.$$

Ta thấy $\frac{2}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{x-y}}+3>0$ với mọi x, y thuộc tập xác định nên thu được $x+y=0$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành $\sqrt[3]{x^3+5x^2+14x+9}=2\sqrt{x^2-2x-1}+x+2$.

Điều kiện $x^2-2x-1\geq 0$ (*). Biến đổi về

$$\sqrt[3]{x^3+5x^2+14x+9}-(x+2)=2\sqrt{x^2-2x-1}$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^3+5x^2+14x+9}-(x+2)\geq 0\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3+5x^2-14x+9}\geq x+2$$
$$\Leftrightarrow x^3+5x^2+14x+9\geq x^3+6x^2+12x+8\Leftrightarrow x^2-2x-1\leq 0$$

Kết hợp điều kiện (*) ta được $x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x\in\left\{1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}\Rightarrow (x;y)=\left(1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right),\left(1-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right)$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 55. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+3y}+3\sqrt{x+8y}+x=y+13\sqrt{y},\\ 2x^2y+3xy+8x+2=x(x+y+3)\sqrt{y^2+\frac{2}{x}+6}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x+3y\geq 0;x+8y\geq 0;y\geq 0;x\neq 0;y^2+\frac{2}{x}+6\geq 0$. Xét trường hợp $x=y=0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2\sqrt{x+3y}-4\sqrt{y}+3\sqrt{x+8y}-9\sqrt{y}+x-y=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x-y)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{3(x-y)}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+x-y=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+1\right)=0$$

Vì $\frac{2}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}+1>0$ với mọi x và y thuộc tập xác định nên ta được $x=y$.

Phương trình thứ hai trở thành $2x^3+3x^2+8x+2=x(2x+3)\sqrt{x^2+\frac{2}{x}+6}$.

Điều kiện $x\left(x^3+6x+2\right)\geq 0;x\neq 0$.

Phương trình trên tương đương với

$$2x^2+\frac{2}{x}+3x+8=(2x+3)\sqrt{x^2+\frac{2}{x}+6}\Leftrightarrow x^2+\frac{2}{x}+6-2x\sqrt{x^2+\frac{2}{x}+6}+x^2-3\sqrt{x^2+\frac{2}{x}+6}+3x+2=0.$$

Đặt $\sqrt{x^2+\frac{2}{x}+6}-x=t$ ta thu được $t^2-3t+2=0\Leftrightarrow (t-1)(t-2)=0\Leftrightarrow t\in\{1;2\}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{x^2+\frac{2}{x}+6}=x+1 & (1)\\ \sqrt{x^2+\frac{2}{x}+6}=x+2 & (2)\end{array}\right.$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ x^3+6x+2=x\left(x^2+2x+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ 2x^2-5x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{5+\sqrt{41}}{4};\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right\}$.
- $(2)\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -2\\ x^3+6x+2=x\left(x^2+4x+4\right)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -2\\ 4x^2-2x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$.

Đối chiếu điều kiện, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)=\left(\frac{5+\sqrt{41}}{4};\frac{5+\sqrt{41}}{4}\right),(1;1)$.

Bài toán 56. Giải hệ phương trình trên tập số thực $\begin{cases}\sqrt{x+2y}+2\sqrt{2x+y}+x-y=3\sqrt{3y},\\ \sqrt{1-y}+\sqrt{x}=\sqrt{\dfrac{x^2-y+1}{2y^2-x+2}}.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;0\le y\le 1;\dfrac{x^2-y+1}{2y^2-x+2}\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+2y}-\sqrt{3y}+2\left(\sqrt{2x+y}-\sqrt{3y}\right)+x-y=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\frac{2(x-y)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{3y}}+x-y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\frac{2}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{3y}}+1\right)=0$$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\dfrac{2}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{3y}}+1>0,\forall x;y\ge 0$ nên ta có $x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{2x^2-x+2}}\quad (1)$.

Ta có $\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)^2=1+2\sqrt{(1-x)x}\ge 1\Rightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{x}\ge 1$.

Mặt khác $(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2-2x+1\ge 0\Rightarrow 0<x^2-x+1\le 2x^2-x+2\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{2x^2-x+2}}\le 1$.

Do đó (1) có nghiệm khi $\begin{cases}(1-x)x=0\\ x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 57. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y}+\sqrt{3x+y}+x=y+4\sqrt{y},\\ \sqrt[3]{x+2y-2}=x^3y+(x-1)(y-4).\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y \ge 0$. Xét trường hợp $x = y = 0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+3y} - 2\sqrt{y} + \sqrt{3x+y} - 2\sqrt{y} + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}} + \frac{3(x-y)}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}} + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}} + 1\right) = 0$$

Nhận xét $\frac{1}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}} + 1 > 0$ khi x và y không đồng thời bằng 0.

Với trường hợp $x = y$ thì phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\sqrt[3]{3x-2} = x^4 + (x-1)(x-4) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-2} = x^4 + x^2 - 5x + 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-2} = x^4 - 4x + 3 + x^2 - x + 1 \quad (1)$$

Nhận xét

$$x^4 - 4x + 3 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 3) = (x-1)^2\left[(x+1)^2 + 2\right] \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó từ (1) suy ra $x^4 - 4x + 3 + x^2 - x + 1 > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{3x-2} > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$.

Khi đó $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \ge 0, \forall x > \frac{2}{3} \Rightarrow x^3 \ge 3x - 2 \Rightarrow \sqrt[3]{3x-2} \le x$.

Mặt khác $x^4 - 4x + 3 + x^2 - 2x + 1 = x^4 - 4x + 3 + (x-1)^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^4 - 4x + 3 + x^2 - x + 1 \ge x$.

Do đó (1) có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra đồng thời, tức là $x = 1 \Rightarrow x = y = 1$.

Bài toán 58. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{x+y} + x = y + (\sqrt{2}+1)\sqrt{y} \\ \sqrt[4]{4x-3} + \sqrt[3]{x+2y-2} = x^2 + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{3}{4}; y \ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} + 2\left(\sqrt{x+y} - \sqrt{2y}\right) + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{2(x-y)}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + x - y = 0 \quad .$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{2}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + 1\right) = 0$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{2}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}} + 1 > 0 \Rightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt[4]{4x-3} + \sqrt[3]{3x-2} = x^2 + 1$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\sqrt[4]{4x-3}+\sqrt[3]{3x-2}\le \frac{4x-3+1+1+1}{4}+\frac{3x-2+1+1}{3}=2x\le x^2+1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $4x-3=3x-2=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow x=y=1$.

Bài toán 59. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}+x^3=2\sqrt{2y}+y^3,\\ \sqrt{(x+2)(2y-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(y+6)(2x-1)}+3\sqrt{y+2}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $3x\ge y; x\ge \frac{1}{2}; y\ge \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}+\sqrt{3x-y}-\sqrt{2y}+x^3-y^3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{3(x-y)}{\sqrt{3x-y}+\sqrt{2y}}+(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{3}{\sqrt{3x-y}+\sqrt{2y}}+x^2+xy+y^2\right)=0$$

Nhận xét $\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{3}{\sqrt{3x-y}+\sqrt{2y}}+x^2+xy+y^2>0,\forall x\ge \frac{1}{2},\forall y\ge \frac{1}{2}$.

Do đó thu được $x=y$ và phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

Biến đổi phương trình về dạng $\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4\Leftrightarrow f(x)=4 \qquad (1)$.

Xét các trường hợp sau

- Nếu $\frac{1}{2}\le x<5$ thì $f(x)<0<4$, suy ra (1) vô nghiệm.
- Nếu $x\ge 5$ thì $f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+6}}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)+\frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-1}}>0,\forall x\ge 5$.

  Trong trường hợp này hàm số đồng biến, ngoài ra $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(7)=4\Leftrightarrow x=7$.

Phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=7$ suy ra $x=y=7$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 54 đến 59 là lớp bài toán kế thừa các bài toán trước đó, là sự kết hợp giữa căn thức và đa thức. Các bạn có thể dễ dàng xây dựng các hệ phương trình khác như sau, chú ý rằng độ khó hệ phương trình cũng phụ thuộc rất nhiều vào phương trình vô tỷ được làm ngược

- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{x+y}+x=y+\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{y}\\ 6(x-1)\sqrt{y+1}+\left(y^2+2\right)\left(\sqrt{x-1}-3\right)=x^2y+2x.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

  Làm ngược phương trình thứ hai từ bài toán $6(x-1)\sqrt{x+1}+\left(x^2+2\right)\left(\sqrt{x-1}-3\right)=x^3+2x$.

  (T4/419; Đề ra kỳ này; Tháng 5 năm 2012; Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ; Nhà Xuất bản Giáo dục).

- ✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{x+y}+x=y+\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{y}\\ \sqrt[4]{x+y}+\sqrt{2y}+2\sqrt[4]{6-y}+2\sqrt{6-x}=2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

  Làm ngược phương trình thứ hai từ bài toán IV.2; Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Đề chính thức; Khối A; Mùa thi 2008.

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m.$$

✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y}+\sqrt{3x+y}+x=y+4\sqrt{y},\\ x^3+3xy-1=3\left(\sqrt{2x-y}-\sqrt{y-1}\right)^3.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Làm ngược phương trình thứ hai từ bài toán

Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm: $x^3+3x^2-1\le a\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)^3$.

(Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Khối A; Đề thi chính thức; Trường Đại học Bách khoa Hà Nội; Mùa thi 2000).

✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y}+\sqrt{3x+y}+x=y+4\sqrt{y},\\ 4\sqrt{x+1}+2\sqrt{2y+3}=(x-1)(xy-2).\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Làm ngược phương trình thứ hai từ bài toán $4\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x+3}=(x-1)\left(x^2-2\right)$.

✓ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2y}+2\sqrt{2x+y}+x-y=3\sqrt{3y},\\ \left(y^5+x-1\right)^5+(3x-2y)^5=\dfrac{2x}{y}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ bài toán $\left(x^5+x-1\right)^5+x^5=2$.

(T6/443; Đề ra kỳ này; Tháng 5 năm 2014; Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ; Nhà Xuất bản Giáo dục).

Bài toán 60. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}(x-y)=\sqrt{y-2},\\ x^2+\sqrt[3]{y^2\left(y^2+2x-1\right)}=3.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1;y\ge 2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-y-1)\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{y-2}=0\Leftrightarrow (x-y+1)\sqrt{x}+\frac{x-y+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}}\right)=0$$

Vì $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}}>0,\forall x\ge 1;y\ge 2$ nên ta được $y=x+1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$(y-1)^2+\sqrt[3]{y^2(y-2)}=3\Leftrightarrow y^2-2y+\sqrt[3]{y^2(y-2)}=2\Leftrightarrow y-\frac{2}{y}+\sqrt[3]{y-\frac{2}{y}}-2=0.$$

Đặt $\sqrt[3]{y-\dfrac{2}{y}}=t$ dẫn đến

$$t^3+t-2=0\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+2\right)=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow y-\frac{2}{y}=1$$

$$\Leftrightarrow y^2-y-2=0\Leftrightarrow y\in\{-1;2\}\Rightarrow y=2;x=1$$

Đối chiếu điều kiện kết luận hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;2)$.

Bài toán 61. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{2y^2+1}=\sqrt{y+1},\\ \sqrt{x+8}+\dfrac{9x}{\sqrt{2x-y+8}}-5\sqrt{y}=\sqrt{x}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Hướng dẫn.

Điều kiện $x\ge 0; y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2+1}+\sqrt{2y^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2+1}+\sqrt{2y^2+1}}\right]=0$$

Rõ ràng $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\dfrac{(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2+1}+\sqrt{2y^2+1}}>0,\forall x\ge 0,y\ge 0$ nên $x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ khi đó trở thành

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{x+8}+\frac{9x}{\sqrt{x+8}}-6\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x+8+9x-6\sqrt{x^2+8x}=0\Leftrightarrow 5x+4=3\sqrt{x^2+8x}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x+4\ge 0\\25x^2+40x+16=9(x^2+8x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{4}{5}\\16x^2-32x+16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{4}{5}\\(x-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 62. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+3y^2+1}=\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{y^2+3},\\2\sqrt{2x^2-y^2+3}-\sqrt{8+2x-y^2}=x.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+3}-\sqrt{y^2+3}+\sqrt{x^2+3y^2+1}-\sqrt{4y^2+1}=0$$

$$\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+3y^2+1}+\sqrt{4y^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=y^2\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3y^2+1}+\sqrt{4y^2+1}}=0\quad(1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3y^2+1}+\sqrt{4y^2+1}}>0$ nên (1) vô nghiệm.

Với $x^2=y^2$ phương trình thứ hai trở thành $2\sqrt{x^2+3}-\sqrt{8+2x-x^2}=x\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3}-x=\sqrt{9-(x-1)^2}$.

Tập xác định D. Ta có

$$\sqrt{9-(x-1)^2}\le 3,\forall x\in D\Rightarrow 2\sqrt{x^2+3}-x\le 3\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3}\le x+3$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\4x^2+12\le x^2+6x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\3(x-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Do đó phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;-1),(1;1)$.

Nhận xét.

Các bài toán 61 và 62 đều có phương trình hệ quả vô nghiệm, trong đó bài toán số 61 có biểu thức hệ quả T dương với điều kiện xác định ban đầu, bài toán 62 đặc biệt sử dụng nguyên vẹn hệ thức $x^2 = y^2$ chứ không chia trường hợp. Lưu ý thêm, phương trình thứ hai của bài toán số 62 tác giả đã làm ngược từ bài toán

Giải phương trình $2\sqrt{x^2+3}-\sqrt{8+2x-x^2}=x$ [1].

- Bài 2(47); Thi Giải toán qua thư; Số 47; Tháng 1 năm 2007; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam.
- Tác giả: Cao Xuân Nam – Giáo viên Trường THPT Chuyên Hà Giang; Thị xã Hà Giang; Tỉnh Hà Giang.

Ngoài phương án sử dụng đánh giá – bất đẳng thức đối với [1] *như trên, bạn đọc có thể sử dụng phương pháp sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức với kỹ thuật liên hợp nghiệm kép hữu tỷ.*

Bài toán 63. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+2y}-3\sqrt{3y}+\sqrt{x^2-y^2+3y}=0, \\ \dfrac{2x^4+xy+2x-1}{y^3+1}=3-\sqrt{x}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0; y\ge 0$. Trường hợp hai biến bằng 0 không thỏa mãn hệ.

Ngoài trường hợp này, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2\sqrt{x+2y}-2\sqrt{3y}+\sqrt{x^2-y^2+3y}-\sqrt{3y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-y)}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2-y^2+3y}+\sqrt{3y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{2}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2+3y}+\sqrt{3y}}\right]$$

Ta thấy $\dfrac{2}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2+3y}+\sqrt{3y}}>0,\forall x\ge 0, y\ge 0$ nên thu được $x=y$.

Phương trình thứ hai trở thành

$$\frac{2x^4+x^2+2x-1}{x^3+1}=3-\sqrt{x}\Leftrightarrow \frac{2x^4+x^2+2x-1}{x^3+1}-2x+\sqrt{x}-1+2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^3+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}+2(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}+2\right)=0$$

Rõ ràng $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \dfrac{1}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+2>0,\forall x\ge 0$ nên ta thu được $x=1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Phương trình thứ hai của bài toán 63 tác giả đã làm ngược từ phương trình $\dfrac{2x^4+x^2+2x-1}{x^3+1}=3-\sqrt{x}$.

Bài toán này có guồn gốc – Xuất xứ

- Bài 3(69); Thi Giải toán qua thư; Số 69; Tháng 11 năm 2008; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam.
- Tác giả: Kiều Đình Minh – Giáo viên Trường THPT Thanh Ba; Huyện Thanh Ba; Tỉnh Phú Thọ.

Ngoài cách giải trên; các bạn độc giả có thể sử dụng phương pháp đánh giá – bất đẳng thức nhưng cần xét kỹ lưỡng các trường hợp như sau

- Xét $0\le x<1\Rightarrow \dfrac{2x^4+x^2+2x-1}{x^3+1}<\dfrac{2x^3+3-1}{x^3+1}=2<3-\sqrt{x}$, loại.

- Xét $x>1\Rightarrow \dfrac{2x^4+x^2+2x-1}{x^3+1}>\dfrac{2x^3+3-1}{x^3+1}=2>3-\sqrt{x}$, loại.
- Xét $x=1$ thì phương trình nghiệm đúng.

Điểm nhấn khác của phương trình thứ hai đó là yếu tố $x\ge 0$ vu hồi cùng $y\ge 0$ của phương trình thứ nhất, làm cơ sở để đánh giá biểu thức hệ quả T ở phía sau. Tác giả hy vọng các bạn độc giả, các bạn thí sinh có thể đào sâu, tìm tòi, mở rộng và phát hiện hướng đi mới trong việc giải, xây dựng bài toán tương tự. Về phương trình thứ nhất của hệ, có lẽ không quá khó để nhận ra nhân tử $x-y$ dựa trên công cụ máy tính bỏ túi Casio Fx – 570ES Plus hoặc các công cụ tương đương.

Tổ hợp phím $\rightarrow$	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc
x	100	1000	50	200
y	100	1000	50	200
Mối liên hệ	$x=y$	$x=y$	$x=y$	$x=y$

Để ghép biểu thức chuẩn bị liên hợp, chúng ta nhận xét các căn

$$\begin{cases}2\sqrt{x+2y}=2\sqrt{k+2k}=2\sqrt{3k}\\ 2\sqrt{3y}=2\sqrt{3k}\\ \sqrt{x^2-y^2+3y}=\sqrt{k^2-k^2+3k}=\sqrt{3k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{x+2y}=2\sqrt{3y}\\ \sqrt{x^2-y^2+3y}=\sqrt{3y}\end{cases}$$

Quan sát phương trình chốt có $3\sqrt{3k}$ nên thực hiện ghép

$$2\sqrt{x+2y}-2\sqrt{3y}+\sqrt{x^2-y^2+3y}-\sqrt{3y}=0\Leftrightarrow\frac{2(x-y)}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{3y}}+\frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2-y^2+3y}+\sqrt{3y}}=0.$$

Bài toán 64. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+2y^2+4}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3y^2+4}+\sqrt{y+2},\\ \sqrt{2x-1}+\sqrt{3y^3-2}=\dfrac{3x^3+2y-1}{2}+|2x-y-1|.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2};y\ge\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}+\sqrt{x^2+2y^2+4}-\sqrt{3y^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+\frac{(x-y)(x+y)}{\sqrt{x^2+2y^2+4}+\sqrt{3y^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2+1}+\sqrt{2y^2+1}}\right]=0\Rightarrow x=y$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x^3-2}=\dfrac{3x^3+2x-1}{2}+|x-1|$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x^3-2}\le\frac{2x-1+1}{2}+\frac{3x^3-2+1}{2}=\frac{3x^3+2x-1}{2}\le\frac{3x^3+2x-1}{2}+|x-1|.$$

Do đó phương trình ẩn x có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $2x-1=3x^3-2=1\Leftrightarrow x=1$.

Bài toán 65. Giải hệ phương trình $\begin{cases}8x^2-26y+7=\sqrt{4y-1}+x\sqrt{7x-y},\\ \sqrt{x^2+3y^2}+\sqrt{x^2+7xy+8y^2}=6y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge\frac{1}{4};7x\ge y\Rightarrow y\ge\frac{1}{4};x\ge\frac{1}{28}$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$\sqrt{x^2+3y^2}-2y+\sqrt{x^2+7xy+8y^2}-4y=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+3y^2}+2y}+\frac{x^2+7xy-8y^2}{\sqrt{x^2+7xy+8y^2}+4y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3y^2}+2y}+\frac{x+8y}{\sqrt{x^2+7xy+8y^2}+4y}\right)=0$$

Rõ ràng $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3y^2}+2y}+\frac{x+8y}{\sqrt{x^2+7xy+8y^2}+4y}>0,\forall y\ge\frac{1}{4},\forall x\ge\frac{1}{28}$ nên ta được $x=y$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$8x^2-26x+7=\sqrt{4x-1}+x\sqrt{6x}$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{4x-1}+x^2+x-x\sqrt{6x}+7x^2-28x+7=0$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{4x-1}+x\left(x+1-\sqrt{6x}\right)+7\left(x^2-4x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+1}{x+\sqrt{4x-1}}+x.\frac{x^2-4x+1}{x+1+\sqrt{6x}}+7\left(x^2-4x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+1\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{4x-1}}+\frac{x}{x+1+\sqrt{6x}}+7\right)=0$$

Rõ ràng $\frac{1}{x+\sqrt{4x-1}}+\frac{x}{x+1+\sqrt{6x}}+7>0,\forall x\ge\frac{1}{4}$ nên thu được $x^2-4x+1=0\Leftrightarrow x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=y=2+\sqrt{3};x=y=2-\sqrt{3}$.

Nhận xét.

Với bài toán số 65, các bạn còn có thể khai thác phương trình thứ hai theo hướng đi đồng bậc nhất

Đặt $x=ky$, phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{k^2y^2+3y^2}+\sqrt{k^2y^2+7ky^2+8y^2}=6y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ \sqrt{k^2+3}+\sqrt{k^2+7k+8}=6\quad(2)\end{array}\right.$$

Vấn đề đặt ra là giải phương trình (2), điều này là bắt buộc, sau khi nhẩm được nghiệm ta sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức

$$\sqrt{k^2+3}-2+\sqrt{k^2+7k+8}-4=0\Leftrightarrow\frac{k^2-1}{\sqrt{k^2+3}+2}+\frac{k^2+7k-8}{\sqrt{k^2+7k+8}+4}=0$$

$$\Leftrightarrow(k-1)\left(\frac{k+1}{\sqrt{k^2+3}+2}+\frac{k+8}{\sqrt{k^2+7k+8}+4}\right)=0$$

Biểu thức hệ quả T nếu chú ý điều kiện xác định một chút các bạn sẽ thấy không khó khăn

$$x = ky; y \ge \frac{1}{4}; x \ge \frac{1}{28} \Rightarrow k > 0 \Rightarrow \frac{k+1}{\sqrt{k^2+3}+2} + \frac{k+8}{\sqrt{k^2+7k+8}+4} > 0, \forall k > 0.$$

Ngoài ra, với cơ sở $k > 0$, đối với các bạn học sinh đã học chương trình Đại số - Giải tích lớp 11, 12 THPT chúng ta có ý tưởng sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số

- Xét $f(k) = \sqrt{k^2+3} + \sqrt{k^2+7k+8}; k > 0$.
- Đạo hàm $f'(k) = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+3}} + \dfrac{k}{\sqrt{k^2+7k+8}} > 0, \forall k > 0$.
- Hàm số liên tục và đồng biến với *k* dương.
- $f(k) = 6 \Leftrightarrow f(k) = f(1) \Leftrightarrow k = 1$.

Bài toán 66. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+3xy} + \sqrt{10xy-y^2} = 5\sqrt{xy}, \\ 7x^2+y^2-10x+5 = \sqrt{7x-2} + \sqrt{11y-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{2}{7}; y \ge \frac{1}{11}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+3xy} - 2\sqrt{xy} + \sqrt{10xy-y^2} - 3\sqrt{xy} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2+3xy}+2\sqrt{xy}} + \frac{y(x-y)}{\sqrt{10xy-y^2}+3\sqrt{xy}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3xy}+2\sqrt{xy}} + \frac{y}{\sqrt{10xy-y^2}+3\sqrt{xy}}\right) = 0$$

Nhận xét $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3xy}+2\sqrt{xy}} + \dfrac{y}{\sqrt{10xy-y^2}+3\sqrt{xy}} > 0, \forall x \ge \dfrac{2}{7}; y \ge \dfrac{1}{11}$ nên thu được $x = y$.

Phương trình thứ hai của hệ khi đó trở thành

$$8x^2 - 10x + 5 = \sqrt{7x-2} + \sqrt{11x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \sqrt{7x-2} + 2x + 1 - \sqrt{11x-1} + 8x^2 - 14x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2-7x+2}{2x+\sqrt{7x-2}} + \frac{4x^2-7x+2}{2x+1+\sqrt{11x-1}} + 2(4x^2-7x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2-7x+2)\left(\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}} + \frac{1}{2x+1+\sqrt{11x-1}} + 2\right) = 0$$

Vì $\dfrac{1}{2x+\sqrt{7x-2}} + \dfrac{1}{2x+1+\sqrt{11x-1}} + 2 > 0, \forall x \ge \dfrac{2}{7}$ nên thu được $4x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{7+\sqrt{17}}{8}; \dfrac{7-\sqrt{17}}{8}\right\}$.

So sánh với điều kiện ta có hai nghiệm $x = y = \dfrac{7+\sqrt{17}}{8}; x = y = \dfrac{7-\sqrt{17}}{8}$.

Nhận xét.

Có lẽ đến đây các bạn độc giả đều đã có thể tự xây dựng cho mình những hệ phương trình tương tự như lớp bài toán 61 – 66, tác giả cũng xin khái quát các bước như sau

A. Lựa chọn một mối quan hệ tỷ lệ thuận (I) giữa *x* và *y*, chẳng hạn $x \sim ky$

B. Lựa chọn một phương trình vô tỷ (II) tồn tại khả năng liên hợp khai phá ra $x \sim ky$ và biểu thức hệ quả T.

C. Phương trình (II) đảm bảo yêu cầu $T > 0 \vee T < 0$ với điều kiện xác định ban đầu, cao hơn nữa là điều kiện có nghiệm được xử lý triệt để theo tổng thể hệ phương trình.

D. Phương trình (II) đảm bảo giải được nghiệm chính xác với điều kiện xác định ban đầu, cao hơn nữa là điều kiện có nghiệm được xử lý triệt để theo tổng thể hệ phương trình.

Xin giới thiệu một số hệ phương trình để các bạn tham khảo và luyện tập như sau

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{2y^2+1}=\sqrt{y+1},\\5x^2-2y^2-10y+4=\sqrt{4x-1}+\sqrt{6y}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ $3x^2-10x+4=\sqrt{4x-1}+\sqrt{6x}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+3y^2+1}=\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{y^2+3},\\(x+2)\sqrt{4y^2+5}+(2x+2)\sqrt{y^2+2}=3.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ $(x+2)\sqrt{4x^2+5}+(2x+2)\sqrt{x^2+2}=3$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+2y}-3\sqrt{3y}+\sqrt{x^2-y^2+3y}=0,\\9x^3-11xy+7y+2=\sqrt{11x-1}+\sqrt{23y+3}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ $9x^3-11x^2+7x+2=\sqrt{11x-1}+\sqrt{23x+3}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+2y^2+4}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3y^2+4}+\sqrt{y+2},\\x^2+y^2-5x=(y-3)\sqrt{3x-2}+(x-2)\sqrt{4y-3}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ $2x^2-5x=(x-3)\sqrt{3x-2}+(x-2)\sqrt{4x-3}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}2y^3-5x=(y^2-1)\sqrt{5x-6}+(x^2-4)\sqrt{4y-3},\\\sqrt{x^2+3y^2}+\sqrt{x^2+7xy+8y^2}=6y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ nhất được làm ngược từ $2x^3-5x=(x^2-1)\sqrt{5x-6}+(x^2-4)\sqrt{4x-3}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+3xy}+\sqrt{10xy-y^2}=5\sqrt{xy},\\(27x-8)\sqrt{2y-3}=2(9y-7)\sqrt{5x-1}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ $(27x-8)\sqrt{2x-3}=2(9x-7)\sqrt{5x-1}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=2y,\\\sqrt{x}+y\sqrt{5}=3.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+3y^2}+\sqrt{5x^2+4y^2}-5y=0,\\y^2+\sqrt{y-\sqrt{2x+2}}=\dfrac{3x^3+y^2}{x^2}+\sqrt{2(3x+1)}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ $x^2+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}=3x+1+\sqrt{2(3x+1)}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+6y^2}+\sqrt{3x^2+4y^2}=2\sqrt{7}y,\\\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-y^2}=\sqrt{11x-4x^2-5}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ $\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-x^2}\ge\sqrt{11x-4x^2-5}$.

  (Câu 2.1; Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Ninh Bình; Năm học 2015 – 2016).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+6y^2}+\sqrt{3x^2+4y^2}=2\sqrt{7}y,\\\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{3x-2}=2y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{3x-2}=2x$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+3xy}+\sqrt{2x^2+7xy}=5y,\\ \dfrac{\sqrt{y-3}}{\sqrt{2x-1}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{y+3}-\sqrt{x-3}}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-1}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y}+\sqrt{3x^2+y^2}=2y+2\sqrt{y},\\ \sqrt{x-\sqrt{y-3}}=\dfrac{x\sqrt{3}}{2y}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{y}}\right).\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $\sqrt{x-\sqrt{x-3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+3y^2}+\sqrt{2x^2+y^2+1}=2y+\sqrt{2y^2+1},\\ \sqrt{x^2-2}+2=y+\sqrt{2y-2}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $\sqrt{y^2-2}+2=y+\sqrt{2y-2}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y},\\ \sqrt{3y+3}-\sqrt{5-2x}=y^3-3x^2-10y+26.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}=x^3-3x^2-10x+26$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y},\\ 8x^2+3y+\left(4x^2+y-2\right)\sqrt{x+4}=4.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $8x^2+3x+\left(4x^2+x-2\right)\sqrt{x+4}=4$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-4xy+y^2}+\sqrt{x}=y+2\sqrt{y},\\ 6x^3+15x^2+4y+1=\left(3x^2+8y+7x+1\right)\sqrt{x^2-4y+1}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $6x^3+15x^2+x+1=\left(3x^2+9x+1\right)\sqrt{x^2-x+1}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-6xy+y^2}+\sqrt{x}=y+\sqrt{6y},\\ \left(2\sqrt{12y-1}+x+1\right)^2=9x^2+21x+6y-15.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $\left(2\sqrt{2x-1}+x+1\right)^2=9x^2+22x-15$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x^2-6xy+y^2}+\sqrt{x}=y+\sqrt{2y},\\ \sqrt{4y^2-3x+1}+2y=\dfrac{4x^2-11x+1}{4\left(y-1\right)^2}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $\sqrt{x^2-3x+1}+x=\dfrac{4x^2-11x+1}{\left(x-2\right)^2}$.

Bài toán 67. Giải hệ phương trình trên tập số thực $\begin{cases} 3x = 3y + 1 - \sqrt{\dfrac{3x-y}{x+y}}, \\ \sqrt{2(x+y)} + \sqrt{4x^2 - 3x} = 2x^2 + \dfrac{3-x}{2}. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x+y>0; 3x-y\geq 0; x(4x-3)\geq 0$. Rõ ràng trường hợp $x=y=0$ không thỏa mãn hệ.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$(3x-3y-1)\sqrt{x+y} + \sqrt{3x-y} = 0 \Leftrightarrow 3(x-y)\sqrt{x+y} + \sqrt{3x-y} - \sqrt{x+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-y)\sqrt{x+y} + \frac{2(x-y)}{\sqrt{3x-y}+\sqrt{x+y}} = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(3\sqrt{x+y} + \frac{2}{\sqrt{3x-y}+\sqrt{x+y}}\right) = 0$$

Dễ thấy $3\sqrt{x+y} + \dfrac{2}{\sqrt{3x-y}+\sqrt{x+y}} > 0$ khi x và y không đồng thời bằng 0.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân cho phương trình thứ hai ta có

$$\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{4x^2-3x} \leq \frac{2+x+y}{2} + \frac{4x^2-3x+1}{2} = 2x^2 + \frac{3-2x+y}{2} = 2x^2 + \frac{3-x}{2}.$$

Phương trình thứ hai có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y=2 \\ 4x^2-3x=1 \Leftrightarrow x=y=1. \\ x=y \end{cases}$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Bài toán số 67 mở đầu cho lớp hệ phương trình mới, kỳ thực cũng khó nói rành mạch về lớp hệ này, tác giả xin được tạm gọi là hệ phương trình "BÁN LIÊN HỢP" hoặc "LIÊN HỢP KHÔNG HOÀN TOÀN", từ "BÁN" trong nghĩa Hán – Việt được hiểu là "một nửa, một bến, ở giữa hoặc lưng chừng", như các bạn đã từng nghe: bán cầu, bán kết, dạ bán, bán nguyệt,…

Giải thích cho tên gọi trên là dạng thức biểu thức hệ quả T của hệ được tạo ra dựa trên biểu thức có sẵn và phép liên hợp một lần, là sự mở rộng của lớp bài toán 34 – 45 đã được đề cập trước đây.

$$(ax+by+c)\left[f(x;y)+\frac{A}{B}\right]=0 \textit{ trong đó } f(x;y) \textit{ không tồn tại dưới dạng phân thức.}$$

Bài toán 68. Giải hệ phương trình trên tập số thực $\begin{cases} 3\sqrt{x+y+3} + (4x-4y-3)\sqrt{2y+3} = 0, \\ y + \sqrt{3y^2 - 3y + \dfrac{1}{x}} = \sqrt{\dfrac{xy+1}{y}}. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $3y^2 - 3y + \dfrac{1}{x} \geq 0; \dfrac{xy+1}{y} \geq 0; 2y+3\geq 0; x+y+3\geq 0$.

Rõ ràng trường hợp $\sqrt{x+y+3} + \sqrt{2y+3} = 0$ không thỏa mãn hệ. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3\sqrt{2x+y+3} - 3\sqrt{2y+3} + 4(x-y)\sqrt{2y+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-y)}{\sqrt{2x+y+3}+\sqrt{2y+3}} + 4(x-y)\sqrt{2y+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{3}{\sqrt{2x+y+3}+\sqrt{2y+3}} + 4\sqrt{2y+3}\right) = 0 \Rightarrow x = y$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$x+\sqrt{3x^2-3x+\frac{1}{x}}=\sqrt{x+\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\sqrt{3x^2-3x+\frac{1}{x}}=\sqrt{x+\frac{1}{x}}-x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-3x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}-2x\sqrt{x+\frac{1}{x}}+x^2\Leftrightarrow 2x\sqrt{x+\frac{1}{x}}+2x^2+16=4x$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+\frac{1}{x}}+x^2+8=2x\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{1}{x}}+x+\frac{1}{x}=2$$

Đặt $\sqrt{x+\frac{1}{x}}=t,t>0$ ta được $t^2+t=2\Rightarrow t=2\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x=1\Rightarrow x=y=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 69. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x-y)\sqrt{x+y+3}=x\sqrt{2y+3},\\3x^2+y^2-1+\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+y-2}=0.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $2y+3\ge 0;x\ge\frac{3}{4};x+y\ge 2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-y)\sqrt{x+y+3}+x\left(\sqrt{x+y+3}-\sqrt{2y+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\sqrt{x+y+3}+\frac{x(x-y)}{\sqrt{x+y+3}+\sqrt{2y+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\sqrt{x+y+3}+\frac{x}{\sqrt{x+y+3}+\sqrt{2y+3}}\right)=0$$

Rõ ràng $\sqrt{x+y+3}+\frac{x}{\sqrt{x+y+3}+\sqrt{2y+3}}>0,\forall x\ge\frac{3}{4}$, dẫn đến $x=y$. Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$4x^2-1+\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1)+\frac{2x-1}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(2x+1+\frac{1}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x-2}}\right)=0\quad(1)$$

Lại thấy $2x+1+\frac{1}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x-2}}>0,\forall x\ge\frac{3}{4}$ nên $(1)\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=y=\frac{1}{2}$.

Nhận xét.

Có lẽ các bạn đã quen với dạng thức hệ quả phía sau liên hợp $(ax+by+c)\left[\frac{A}{B}+\frac{C}{D}+...+k\right]=0$ *với các yếu tố*

- $\frac{A}{B}>0;\frac{C}{D}>0;k>0;A,B=const$.
- B,D đa số là tổng các căn thức.

Dù rằng đôi lúc một số bạn bỏ sót nghiệm khi "quên" không xét tình huống hy hữu $B=0;D=0$ *nhưng phép đánh giá biểu thức hệ quả T của chúng ta vẫn diễn ra rất thuận lợi. Điều gì sẽ xảy ra nếu như A và B đều được thay thế bởi các đa thức, thậm chí căn thức, rõ ràng khi đó T của mình sẽ phức tạp hơn rất nhiều.*

Các bài toán từ 67 đến 69 như đã nói, là ba thí dụ mở màn cho lớp hệ phương trình như thế. Với sự trợ giúp của máy tính bỏ túi Casio Fx – 570ES Plus hoặc công cụ tương đương, các bạn độc giả dễ dàng có được bảng sau với phương trình thứ nhất của cả ba bài toán

Tổ hợp phím →	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc
x	100	1000	50	200
y	100	1000	50	200
Mối liên hệ	$x=y$	$x=y$	$x=y$	$x=y$

Khai thác phương trình thứ nhất bài toán số 67 có các bước

- A. Nhân chéo quy đồng $(3x-3y-1)\sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}=0$.
- B. Chú ý quan sát nhân tử $x-y$ và để ý $\sqrt{3x-y}-\sqrt{x+y}=\dfrac{2x-2y}{\sqrt{3x-y}+\sqrt{x+y}}$.
- C. Ghép biểu thức liên hợp
$$3(x-y)\sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}-\sqrt{x+y}=0 \Leftrightarrow 3(x-y)\sqrt{x+y}+\frac{2(x-y)}{\sqrt{3x-y}+\sqrt{x+y}}=0.$$
- D. Đánh giá biểu thức hệ quả $T=3\sqrt{x+y}+\dfrac{2}{\sqrt{3x-y}+\sqrt{x+y}}$.
- E. Đề phòng trường hợp $\sqrt{3x-y}+\sqrt{x+y}=0$ thông qua trường hợp $x=y=0$.
- Sắp xếp lại thứ tự thực hiện $E\to A\to B\to C\to D$.

Khai thác phương trình thứ nhất bài toán số 68 có các bước

- A. Chú ý quan sát nhân tử $x-y$ và để ý $x+y+3-(2y+3)=x-y$.
- B. Ghép biểu thức liên hợp
$$3\sqrt{x+y+3}-3\sqrt{2y+3}+4(x-y)\sqrt{2y+3}=0 \Leftrightarrow \frac{3(x-y)}{\sqrt{x+y+3}+\sqrt{2y+3}}+4(x-y)\sqrt{2y+3}=0.$$
- C. Đánh giá biểu thức hệ quả $T=\dfrac{3}{\sqrt{x+y+3}+\sqrt{2y+3}}+4\sqrt{2y+3}$.
- D. Đề phòng trường hợp $\sqrt{x+y+3}+\sqrt{2y+3}=0$ thông qua xét $(x;y)=\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ không thỏa mãn hệ.
- Sắp xếp lại thứ tự thực hiện $D\to A\to B\to C$.

Khai thác phương trình thứ nhất bài toán số 69 có các bước

- A. Chuyển vế đổi dấu $(2x-y)\sqrt{x+y+3}-x\sqrt{2y+3}=0$.
- B. Chú ý quan sát nhân tử $x-y$ và để ý $x+y+3-(2y+3)=x-y$.
- C. Ghép biểu thức liên hợp
$$(x-y)\sqrt{x+y+3}+x\left(\sqrt{x+y+3}-\sqrt{2y+3}\right)=0 \Leftrightarrow (x-y)\sqrt{x+y+3}+\frac{x(x-y)}{\sqrt{x+y+3}+\sqrt{2y+3}}=0.$$
- D. Đánh giá biểu thức hệ quả $T=\sqrt{x+y+3}+\dfrac{x}{\sqrt{x+y+3}+\sqrt{2y+3}}$ với chú ý ĐKXĐ.

- E. Đề phòng trường hợp $\sqrt{x+y+3}+\sqrt{2y+3}=0$ thông qua xét $(x;y)=\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ không thỏa mãn hệ.
- Sắp xếp lại thứ tự thực hiện $E\to A\to B\to C\to D$.

Tạm thời chúng ta có một số bài toán kế thừa như sau

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x=3y+1-\sqrt{\dfrac{3x-y}{x+y}},\\ x+3\sqrt{\dfrac{3(x+y)}{2}}=\dfrac{1}{x}+3\sqrt{2x+\dfrac{1}{x}}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $x+3\sqrt{3x}=\frac{1}{x}+3\sqrt{2x+\frac{1}{x}}$.

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}3\sqrt{x+y+3}+(4x-4y-3)\sqrt{2y+3}=0,\\ (3x-1)\sqrt{3y-2}=4y^3-9xy+7x.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $(3x-1)\sqrt{3x-2}=4x^3-9x^2+7x$.

❖ Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x-y)\sqrt{x+y+3}=x\sqrt{2y+3},\\ y=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{y}}\right)^2.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai được làm ngược từ $x=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

Bài toán 71. Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x-y+\sqrt{x+y-3}=2+(x+y)(2x-y)+\sqrt{3x-4},\\ \sqrt{y}+\sqrt{2-x^2}=2.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}y\ge 0;2-x^2\ge 0\\ x+y-3\ge 0;3x\ge 4\end{cases}$

Trường hợp $\sqrt{3x-4}=\sqrt{x+y-3}=0$ không thỏa mãn hệ nên phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+y)(2x-y)-5x+y+2+\sqrt{3x-4}-\sqrt{x+y-3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)(2x-y-1)+\frac{2x-y-1}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x+y-3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y-1)\left(x+y-2+\frac{1}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x+y-3}}\right)=0$$

Vì $x+y-2+\dfrac{1}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x+y-3}}>0\Rightarrow y=2x-1$. Phương trình thứ hai của hệ trở thành

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x^2}=2\quad (1)$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x^2}=\sqrt{1(2x-1)}+\sqrt{1(2-x^2)}\le\frac{1+2x-1}{2}+\frac{1+2-x^2}{2}=\frac{3+2x-x^2}{2}$$

$$\frac{3+2x-x^2}{2}=\frac{4-(x-1)^2}{2}\le\frac{4}{2}=2\Rightarrow\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x^2}\le 2$$

Do đó phương trình (1) có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases}2x-1=1\\2-x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận hệ vô nghiệm.

Nhận xét.

Đối với bài toán này, phát hiện phương trình thứ nhất đóng vai trò chốt, các bạn cần thực hiện "bán liên hợp" thử nghiệm.

- Biến đổi tương đương $2x^2+xy-y^2-5x+y+2+\sqrt{3x-4}-\sqrt{x+y-3}=0$.
- Không quá khó nhận ra $3x-4-(x+y-3)=2x-y-1$ khi liên hợp trực tiếp hai căn.
- Dự đoán $2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0\Leftrightarrow(2x-y-1).g(x;y)=0$.
- Sử dụng công cụ máy tính bỏ túi Casio Fx – 570ES Plus hoặc tương đương chỉ với hai lần thử thu được

Tổ hợp phím $\rightarrow$	Shift Calc	Shift Calc
x	100	1000
y	199	1999
Mối liên hệ	$2x-y-1=0$	$2x-y-1=0$

- Ghép biểu thức liên hợp

$$(x+y)(2x-y)-5x+y+2+\sqrt{3x-4}-\sqrt{x+y-3}=0$$
$$\Leftrightarrow(x+y-2)(2x-y-1)+\frac{2x-y-1}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x+y-3}}=0$$
$$\Leftrightarrow(2x-y-1)\left(x+y-2+\frac{1}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x+y-3}}\right)=0$$

- Đánh giá biểu thức hệ quả $T=x+y-2+\dfrac{1}{\sqrt{3x-4}+\sqrt{x+y-3}}$ dựa trên một phần ĐKXĐ là $x+y\ge 3$.

Như vậy, các bạn có thể thấy khi giải hệ phương trình chứa nhân tử chung thông qua phép liên hợp – trục căn thức, chúng ta không nhất thiết phải sử dụng công cụ máy tính bỏ túi Casio Fx – 570ES Plus với toàn bộ hệ, một khi đã có nhân tử gọn gàng khi liên hợp trực tiếp hai căn, chỉ cần thực hiện một thao tác nhỏ với đa thức ngoài căn đã dẫn đến kết quả tuyệt vời.

Ngoài ra, đa thức bố trí phía ngoài, một đa thức đã được nhiều đầu sách tham khảo lấy làm phương trình chốt trong các thí dụ phân tích nhân tử, cũng được tác giả trên đây, sử dụng trích lược trong câu 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Trường ĐHKH Tự nhiên; Đại học Quốc gia Hà Nội; Năm học 2003 – 2004.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0,\\x^2+y^2+x+y-4=0.\end{cases}$

Bài toán 72. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)\left(\sqrt{2y+3}+1\right)+\sqrt{x+y+4}+1=0,\\2x^3+5x^2+4x+1=x(x+y+4)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Hướng dẫn.

Điều kiện $y \ge -\frac{3}{2}; x > 0 \vee x \le -1; x + y + 4 \ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x - y + 1 + \sqrt{x+y+4} + (x-y)\sqrt{2y+3} = 0$$
$$\Leftrightarrow x - y + 1 + \sqrt{x+y+4} - \sqrt{2y+3} + (x-y+1)\sqrt{2y+3} = 0$$
$$\Leftrightarrow x - y + 1 + \frac{x-y+1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}} + (x-y+1)\sqrt{2y+3} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}} + \sqrt{2y+3}\right) = 0$$

Vì $1 + \frac{1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}} + \sqrt{2y+3} > 0$ với ĐKXĐ nên ta được $y = x + 1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$2x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = x(2x+5)\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{1}{x} + 5x + 4 = (2x+5)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x} - 2x\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} + x^2 - 5\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} - x\right)^2 - 5\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} - x\right) + 4 = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} - x = u$ ta được $u^2 - 5u + 4 = 0 \Leftrightarrow u \in \{1;4\}$

- ✓ $u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x}} = x + 1 \Rightarrow x \ge -1$, đối chiếu ĐKXĐ được $x = -1$.
- ✓ $u = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x}} = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ \frac{1}{x} = 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ 8x^2 + 16x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-4-3\sqrt{2}}{4}; \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện xác định ta có nghiệm $x = y = \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}$.

Nhận xét.

Chắc hẳn nhiều bạn độc giả, nhiều bạn thí sinh khi học toán, làm toán, đặc biệt khi luyện tập về chuyên đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, thậm chí tự làm nguyên vẹn một đề thi thử sức, đề thi chính thức chuẩn bị cho các kỳ thi học sinh giỏi các cấp, chuyển cấp, sát hạch hay kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng đều có tâm lý muốn làm được nhiều đề thi, nhiều bài tập nhằm tăng cường trí lực, kỹ năng. Mỗi khi đứng trước đề bài, đề thi có nhiều câu, hình thức tổng hợp, phong phú, đa dạng chúng ta sẽ có tâm lý phấn chấn, hứng khởi, xông phá bởi bản tính tò mò, ham muốn chinh phục của con người. Tuy nhiên nếu không được luyện tập thành thục, không bài bản, không khái quát, mở rộng một bài toán nhỏ, các bạn bắt buộc đối mặt với cảm giác mới lạ, bỡ ngỡ và bỏ cuộc khi gặp những bài toán "từ trên trời nhưng gần ngay trước mắt". Lâu dần cảm giác này tiến hóa trở thành sợ sệt, e ngại, né tránh mỗi khi nhìn thấy nó, nói chung là "lực bất tòng tâm". Làm việc gì cũng vậy, không nên đốt cháy giai đoạn, phải có công tác chuẩn bị, kế hoạch "hiểm độc", tuần tự, tiệm cận từng bước đi tới giai đoạn chín muồi, để sau đó

Đánh một trận, sạch không kình ngạc
Đánh hai trận, tan tác chim muông.
Cơn gió to trút sạch lá khô,
Tổ kiến hổng sụt toang đê vỡ.

(Bình Ngô Đại cáo – Nguyễn Trãi; 1428).

Thiết nghĩ, luyện tập hệ phương trình các bạn cần luyện tập theo lớp tuần tự, một lớp gồm nhiều bài, xong lớp này đến lớp khác, đào sâu suy nghĩ, liên hệ, nếu có cơ hội sẽ phát triển lớp cũ khi có thời cơ.

Bài toán số 72 ở trên cũng vậy, hình thức cồng kềnh khi được gắn các đa thức vào căn làm nó phức tạp hơn so với các bài toán trước, chúng ta hãy cùng nhau khám phá nhé

- Sử dụng công cụ máy tính bỏ túi Casio Fx – 570ES Plus hoặc công cụ tương đương định hướng nhân tử

Tổ hợp phím $\rightarrow$	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc
x	100	1000	50	200
y	101	1001	51	201
Mối liên hệ	$y=x+1$	$y=x+1$	$y=x+1$	$y=x+1$

- Để ý hiệu hai biểu thức trong căn $x+y+4-(2y+3)=x-y+1$ nên dự kiến ghép liên hợp hai căn

$$\sqrt{x+y+4}-\sqrt{2y+3}=\frac{x-y+1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}.$$

- Thử nghiệm biến đổi theo nhân tử $x-y+1$

$$x-y+1+\sqrt{x+y+4}+(x-y)\sqrt{2y+3}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+4}-\sqrt{2y+3}+x-y+1+(x-y)\sqrt{2y+3}+\sqrt{2y+3}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-y+1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+x-y+1+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$

Đến đây thì mức độ khai thác thành công đã đạt 96,69%, hehe.

- Đánh giá biểu thức hệ quả $T=1+\frac{1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+\sqrt{2y+3}$.

Phương trình thứ hai của hệ sau khi đưa về một ẩn thuộc về phương pháp đặt ẩn phụ (kỹ thuật đặt một ẩn phụ hoặc ẩn phụ không hoàn toàn), điều này cần có quá trình luyện tập tổng thể và lựa chọn đúng hướng, tác giả xin được miễn bình luận.

Bài toán 73. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+2x\sqrt{2x+y}=(x+y)\sqrt{x+2y}, \\ \dfrac{x}{\sqrt{2-y^2}}+\dfrac{1}{2-2x^2+y^2}=2. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định. Trường hợp $x=y=0$ bị loại nên phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x-y+(x+y)\left(\sqrt{2x+y}-\sqrt{x+2y}\right)+(x-y)\sqrt{2x+y}=0$$
$$(x-y)+\frac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+(x-y)\sqrt{2x+y}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{x+y}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{2x+y}\right)=0$$

Ta có $\begin{cases} 2x+y\ge 0 \\ x+2y\ge 0 \end{cases}\Rightarrow x+y\ge 0\Rightarrow 1+\frac{x+y}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{2x+y}>0\Rightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{2-x^2}=2\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{2-x^2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{x^2}{2\left(2-x^2\right)}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{x^2}{2-x^2}=3$$

Đặt $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}=t$ ta thu được $2t+t^2=3\Leftrightarrow(t-1)(t+3)=0\Leftrightarrow t\in\{-3;1\}$.

- $t=1\Leftrightarrow x=\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2=2-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.
- $t=-3\Leftrightarrow x=-3\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\x^2=9.2-9x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\5x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x=1;x=-\frac{3}{\sqrt{5}}$ dẫn đến nghiệm $x=y=1$.

Nhận xét.

✓ Sử dụng máy tính bỏ túi Casio Fx – 570ES Plus hoặc công cụ tương đương đối với phương trình thứ nhất của hệ, các bạn độc giả dễ dàng có được bảng

Tổ hợp phím →	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc
x	100	1000	50	200
y	100	1000	50	200
Mối liên hệ	$x=y$	$x=y$	$x=y$	$x=y$

✓ Để ý hiệu biểu thức trong căn $2x+y-(x+2y)=x-y$.

✓ Biến đổi tương đương phương trình thứ nhất $x-y+2x\sqrt{2x+y}-(x+y)\sqrt{x+2y}=0$.

✓ Thử nghiệm biến đổi hướng 1 chạy theo $2x$ phía ngoài căn

$$x-y+2x\sqrt{2x+y}-2x\sqrt{x+2y}=(x+y)\sqrt{x+2y}-2x\sqrt{x+2y}$$

$$\Leftrightarrow x-y+2x\left(\sqrt{2x+y}-\sqrt{x+2y}\right)=(y-x)\sqrt{x+2y}$$

$$\Leftrightarrow x-y+\frac{2x(x-y)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+(x-y)\sqrt{x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(1+\frac{2x}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{x+2y}\right)=0$$

✓ Mặc dù tỷ lệ thành công đã đạt 96,69% tuy nhiên việc đánh giá hệ quả T bất thành

$$T=1+\frac{2x}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{x+2y}.$$

Điều kiện xác định của mình quá "lỏng", chúng ta không thể xoay sở được gì để T bứt phá ngoài việc

$$T=1+\frac{2x}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{x+2y}=1+\frac{\sqrt{2x+y}+3x+2y}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}.$$

✓ Thử nghiệm biến đổi hướng 2 chạy theo $x+y$ phía ngoài căn

$$x-y+(x+y)\left(\sqrt{2x+y}-\sqrt{x+2y}\right)+2x\sqrt{2x+y}-(x+y)\sqrt{2x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)+\frac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+(x-y)\sqrt{2x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{x+y}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{2x+y}\right)=0$$

Đến đây tỷ lệ thành công đã đạt 96,69%.

✓ Đánh giá biểu thức hệ quả $T=1+\frac{x+y}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{2x+y}$ theo hướng kết hợp ĐKXĐ

$$\begin{cases}2x+y\ge 0\\ x+2y\ge 0\end{cases}\Rightarrow x+y\ge 0\Rightarrow 1+\frac{x+y}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{2x+y}>0\Rightarrow x=y.$$

Bài toán 74. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-y+x\sqrt{2x+y}-y\sqrt{x+2y}=0,\\ x^3+\left(y-\sqrt{2x-y}\right)\sqrt{x^2+y-1}+1=2y.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x+y\ge 0; x+2y\ge 0; x^2+y-1\ge 0; 2x-y\ge 0$.

Trường hợp hai biến bằng 0 không thỏa mãn hệ nên phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x-y+x\sqrt{2x+y}-x\sqrt{x+2y}+(x-y)\sqrt{x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+x\left(\sqrt{2x+y}-\sqrt{x+2y}\right)+(x-y)\sqrt{x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+\frac{x(x-y)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+(x-y)\sqrt{x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{x}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{x+2y}\right)=0$$

Nhận xét $\begin{cases}2x+y\ge 0\\ x+2y\ge 0\end{cases}\Rightarrow x+y\ge 0\Rightarrow 1+\frac{x}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{x+2y}=1+\frac{2x+2y+\sqrt{2x+y}}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}>0$.

Do đó ta được $x=y$, phương trình thứ hai của hệ trở thành $x^3+\left(x-\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2+x-1}+1=2x$

Với điều kiện $x\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ta biến đổi

$$\Leftrightarrow x^3-2x+1+\left(x-\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2+x-1}=0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{x^2+x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)+\frac{(x-1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.\sqrt{x^2+x-1}=0\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x^2+x-1}\left[\sqrt{x^2+x-1}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right]=0$$

Rõ ràng $\sqrt{x^2+x-1}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}>0,\forall x\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, dẫn đến $\begin{cases}(x-1)\sqrt{x^2+x-1}=0\\ x\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Kết luận hệ ban đầu có hai nghiệm $x=y=1; x=y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét.

Nếu các bạn độc giả tinh ý sẽ thấy bài toán số 74 chính là kế thừa, phát triển sự "thất bại" trong phương án thử nghiệm hướng 1 của bài toán số 73. Trước tiên chúng ta sử dụng máy tính Casio tìm được mối quan hệ hai biến bằng nhau, biến đổi liên hợp đạt 96,69%, xác định biểu thức hệ quả T, cộng tác đánh giá điều kiện xác định

$$\begin{cases}2x+y\ge 0\\ x+2y\ge 0\end{cases}\Rightarrow x+y\ge 0.$$

Tuy nhiên như thế vẫn chưa đủ bởi chẳng lẽ $1+\dfrac{x}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{x+2y}>0$ *với* $x+y\ge 0$*?*

Câu hỏi đặt ra là 3,31% còn lại nằm ở yếu tố nào, đó chính là phép quy đồng được bố trí đẹp đẽ mà ít ai ngờ tới

$$T=1+\frac{x}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{x+2y}=1+\frac{2x+2y+\sqrt{2x+y}}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}>0.$$

Hơn nữa, phương trình thứ hai được làm ngược từ $x^3+\left(x-\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2+x-1}+1=2x$ [*].

Điều kiện của [*] là $x\ge\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$*. Khi xây dựng đề bài, các bạn phải triệt phá ngay điều kiện này bởi lẽ chúng sẽ tiếp viện làm đòn bẩy hữu hiệu phá tan cái sự "bố trí khéo léo" dự kiến của T. Một cách đơn giản là thay các biểu thức trong căn bởi hai biến x và y dựa trên quan hệ* $x=y$*, việc manh nha điều kiện sẽ trở nên vô hướng, đi vào ngõ cụt hoặc vô cùng khó, chẳng hạn*

$$x^3+\left(x-\sqrt{2x-y}\right)\sqrt{x^2+y-1}+1=2y\Leftarrow x^3+\left(x-\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2+x-1}+1=2x$$

$$x^3+\left(x-\sqrt{3x-2y}\right)\sqrt{y^2+x-1}+1=2x\Leftarrow x^3+\left(x-\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2+x-1}+1=2x$$

Khi biến đổi liên hợp đối với bài toán số 74, tác giả chợt nhận ra có nhiều hướng biến đổi đưa về $x-y$*, trong đó mình phải xoay sở theo hai hướng chạy theo biểu thức gắn với căn để đạt mục đích, cũng làm tiền đề cho việc đánh giá hệ quả T phía sau. Nhưng, liệu chúng ta có nhất thiết phải làm thế hay không, có nhất thiết cần kết hợp điều kiện tổng thể* $\begin{cases}2x+y\ge 0\\ x+2y\ge 0\end{cases}\Rightarrow x+y\ge 0$*, và có nhất thiết phải kìm nén phương trình thứ hai của hệ hay không. Câu trả lời là không, và thậm chí phương trình thứ nhất còn làm chỗ dựa nếu phương trình thứ hai có yêu cầu đánh giá phía sau đấy, mời các bạn theo dõi bài toán tương tự sau*

Bài toán 75. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-y+x\sqrt{2x+y}-y\sqrt{x+2y}=0,\\ \sqrt{10x^2-10y+6}+x+1=\sqrt{6x+y-2}.\end{cases}\quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x+y\ge 0;x+2y\ge 0\\ 5y^2-5x+3\ge 0;6x+y-2\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất suy ra $x\left(1+\sqrt{2x+y}\right)=y\left(1+\sqrt{x+2y}\right)\Rightarrow xy\ge 0$.

Kết hợp $\begin{cases}xy\ge 0\\ 2x+y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x.y\ge 0\\ 2x+y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$

Trường hợp hai biến bằng 0 không thỏa mãn hệ nên phương trình thứ nhất đưa về

$$x-y+x\sqrt{2x+y}-x\sqrt{x+2y}+\left(x-y\right)\sqrt{x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+x\left(\sqrt{2x+y}-\sqrt{x+2y}\right)+\left(x-y\right)\sqrt{x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+\frac{x\left(x-y\right)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\left(x-y\right)\sqrt{x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{x}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{x+2y}\right)=0.$$

Rõ ràng $1+\dfrac{x}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\sqrt{x+2y}>0,\forall x,y>0$ nên ta được $x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $2\sqrt{5x^2-5x+3}+2=\sqrt{7x-2}$.

Với điều kiện $x\ge \dfrac{2}{7}$ ta biến đổi về

$$\left[\sqrt{2\left(5x^2-5x+3\right)}-x+1\right]+2x-\sqrt{7x-2}=0\Leftrightarrow \frac{2\left(4x^2-7x+2\right)}{\sqrt{2\left(5x^2-5x+3\right)}+x-1}+\frac{4x^2-7x+2}{2x+\sqrt{7x-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-7x+2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2\left(5x^2-5x+3\right)}+x-1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-7x+2\right)\left(5x-1+\sqrt{7x-2}+\sqrt{2\left(5x^2-5x+3\right)}+2\sqrt{7x-2}\right)=0$$

Rõ ràng $5x-1+\sqrt{7x-2}+\sqrt{5x^2-5x+3}+2\sqrt{7x-2}>0,\forall x\ge \dfrac{2}{7}$ nên $4x^2-7x+2=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{7-\sqrt{17}}{8};\dfrac{7+\sqrt{17}}{8}\right\}$.

Kết luận hệ đã cho có hai nghiệm $x=y=\dfrac{7-\sqrt{17}}{2};x=y=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$.

Nhận xét.

Rõ ràng bài toán số 74 và 75 của chúng ta chung một phương trình chốt, và cả hai đều có thể sử dụng tổng hòa điều kiện xác định, tuy nhiên lời giải bài toán 75 đã khai phá một điều kiện "khỏe" hơn, đó là các nghiệm đều không âm, chứ không còn đơn thuần là $x+y\ge 0$.

- Phương trình thứ nhất suy ra $x\left(1+\sqrt{2x+y}\right)=y\left(1+\sqrt{x+2y}\right)\Rightarrow xy\ge 0$.
- Kết hợp $\begin{cases}xy\ge 0\\2x+y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x.y\ge 0\\2x+y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$

Đây chính là điểm nhấn mà tác giả mong muốn các bạn lưu ý. Trong chương trình Đại số học kỳ II lớp 9 THCS hiện hành, nếu các bạn đã được học qua, có lẽ ai cũng biết đến hệ thức Viete đối với phương trình bậc hai như sau

$$\begin{cases}ax^2+bx+c=0\\a\ne 0;\Delta\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\x_1.x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

Một bài toán quen thuộc mà các bạn thường được luyện tập với lớp bài toán phương trình bậc hai chứa tham số, đó chính là yêu cầu tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm cùng dương, hoặc đều không âm, hoặc đều âm với các công thức được sử dụng như sau

❖ $\begin{cases}x_1\ge 0\\x_2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\ge 0\\x_1.x_2=\dfrac{c}{a}\ge 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_1\le 0\\x_2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\le 0\\x_1.x_2=\dfrac{c}{a}\ge 0\end{cases}$

Chiều xuôi $\Rightarrow$ của các hệ thức trên đây được xây dựng dựa trên tổng và tích của các số hữu tỷ cùng dấu, khác dấu. Tuy nhiên chiều ngược không phải dễ dàng nhận thấy, nguyên do có một chút phản chứng như sau

$$\begin{cases} x_1+x_2\ge 0 \\ x_1.x_2\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1\ge 0 \vee x_2\ge 0 \\ x_1x_2\ge 0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1\ge 0 \\ x_1x_2\ge 0\end{cases} \\ \begin{cases} x_2\ge 0 \\ x_1x_2\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0\end{cases} \\ \begin{cases} x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0\end{cases}$$

Chú ý điều này, nếu bắt gặp hệ phương trình có điều kiện lỏng A các bạn hãy đắn đo suy ra điều kiện chặt B để sử dụng khi cần thiết

$$\begin{cases} mx+ny\ge 0 \\ xy\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx+ny\ge 0 \\ mx.ny\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx\ge \\ ny\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0\end{cases} \text{ trong đó } m,n\ge 0.$$

Bài toán 76. Giải hệ phương trình trên tập số thực $\begin{cases} 3x-3y+(2x-2y+1)\sqrt{x+2y+1}=\sqrt{3y+1}, \\ 4y^2+5x+2y+1=2\sqrt{2x-y+2}.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3(x-y)+\sqrt{x+2y+1}-\sqrt{3y+1}+2(x-y)\sqrt{x+2y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-y)+\frac{x-y}{\sqrt{x+2y+1}+\sqrt{3y+1}}+2(x-y)\sqrt{x+2y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(3+\frac{1}{\sqrt{x+2y+1}+\sqrt{3y+1}}+2\sqrt{x+2y+1}\right)=0\Leftrightarrow x=y$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $4x^2+7x+1=2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow 4(x^2+4x+4)-9(x+2)+3=2\sqrt{x+2}$.

Đặt $\sqrt{x+2}=t\quad (t\ge 0)$ thu được

$$4t^4-9t^2+3=2t\Leftrightarrow t^2(4t^2-9)=2t-3\Leftrightarrow (2t-3)\left[t^2(2t+3)-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (2t-3)(2t-1)(t+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3}{2} \\ t=-1 \\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=\frac{3}{2} \\ \sqrt{x+2}=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ x=-\frac{7}{4}\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện ta thu được nghiệm $x=y=\frac{1}{4}$.

Bài toán 77. Giải hệ phương trình trên tập số thực $\begin{cases} y(x-y)+(3y+x-1)\sqrt{x+2y-1}=(4y-1)\sqrt{3y-1}, \\ \sqrt[3]{(x+6)(y-1)}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{y+6}-\sqrt[3]{x-1}}.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x+2y-1\ge 0; y\ge \frac{1}{3}; y\ne x-7$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y(x-y)+(4y-1)\left(\sqrt{x+2y-1}-\sqrt{3y-1}\right)+(x-y)\sqrt{x+2y-1}=0$$

$$\Leftrightarrow y(x-y)+\frac{(4y-1)(x-y)}{\sqrt{x+2y-1}+\sqrt{3y-1}}+(x-y)\sqrt{x+2y-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(y+\frac{4y-1}{\sqrt{x+2y-1}+\sqrt{3y-1}}+\sqrt{x+2y-1}\right)=0.$$

Dễ thấy $y+\dfrac{4y-1}{\sqrt{x+2y-1}+\sqrt{3y-1}}+\sqrt{x+2y-1}>0,\forall x\ge\dfrac{1}{3},x+2y-1\ge 0$, dẫn đến $x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt[3]{(x+6)(x-1)}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[3]{x-1}}$.

Đặt $\sqrt[3]{x+6}=a;\sqrt[3]{x-1}=b\Rightarrow a^3-b^3=7$. Phương trình đã cho trở thành $ab=\dfrac{2}{a-b}$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^3-b^3=7\\ ab=\dfrac{2}{a-b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-b)^3+3ab(a-b)=7\\ ab(a-b)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-b)3=1\\ ab(a-b)=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=1\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ b(b+1)=2\end{cases}\Rightarrow b\in\{-2;1\}\Rightarrow x\in\{-7;2\}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=2$.

Bài toán 78. Giải hệ phương trình trên tập số thực $\begin{cases}x\sqrt{x+y}+(y-x)\sqrt{2y}=y\sqrt{3y-x},\\ xy^2+\sqrt{x^2y+x-3}=1+\sqrt{x-2}.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2;y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$x\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}\right)+y\left(\sqrt{2y}-\sqrt{3y-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x-y)}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{y(x-y)}{\sqrt{2y}+\sqrt{3y-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\frac{y}{\sqrt{2y}+\sqrt{3y-x}}\right)=0$$

Rõ ràng $\dfrac{x}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}+\dfrac{y}{\sqrt{2y}+\sqrt{3y-x}}>0,\forall x\ge 2;\forall y\ge 0$ nên thu được $x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$x^3-1+\sqrt{x^3+x-3}-\sqrt{x-2}=0\Leftrightarrow x^3-1+\frac{x^3-1}{\sqrt{x^3+x-3}+\sqrt{x-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-1\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^3+x-3}+\sqrt{x-2}}\right)=0\Rightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow x=y=1$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 79. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3-x}+\sqrt{y+1}+3(2x+1)=x^3+y^2,\\ 4(x-y+1)+\sqrt{3x+4y+5}+(2x-2y+1)\sqrt{7y+2}=0.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$4(x-y+1)+\sqrt{3x+4y+5}-\sqrt{7y+2}+2(x-y+1)\sqrt{7y+2}=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-y+1)+\frac{3(x-y+1)}{\sqrt{3x+4y+5}+\sqrt{7y+2}}+2(x-y+1)\sqrt{7y+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(4+\frac{3}{\sqrt{3x+4y+5}+\sqrt{7y+2}}+2\sqrt{7y+2}\right)=0\Leftrightarrow y=x+1$$

Khi đó phương trình thứ nhất trở thành

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{y+1}=x^3+y^2-6x-2\Leftrightarrow \sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}=x^3+x^2+2x+1-6x-2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}=x^3+x^2-4x-1\Leftrightarrow 3\sqrt{3-x}+3\sqrt{x+2}=3x^3+3x^2-12x-3$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3-x}-(5-x)+3\sqrt{x+2}-(x+4)=3x^3+3x^2-12x-12$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(3-x)-(x^2-10x+25)}{3\sqrt{3-x}+5-x}+\frac{9(x+2)-(x^2+8x+16)}{3\sqrt{x+2}+x+4}=3x^2(x+1)-12(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{3\sqrt{3-x}+5-x}+\frac{-x^2+x+2}{3\sqrt{x+2}+x+4}=3(x^2-4)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)\left[\frac{1}{3\sqrt{3-x}+5-x}+\frac{1}{3\sqrt{x+2}+x+4}+3(x+2)\right]=0\quad (1)$$

Dễ thấy $\frac{1}{3\sqrt{3-x}+5-x}+\frac{1}{3\sqrt{x+2}+x+4}+3(x+2)>0,\forall x\in[-2;3]$ nên (1) có các nghiệm $x=2;x=-1$.

Kết luận hệ phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Bài toán 80. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y+2}+\sqrt{3x+2y-1}=\sqrt{x+3}+2,\\ (x+y)(x-1)+3\sqrt[3]{x(3x^2-x+1)}=3x^2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0;x+y+2\ge 0;3x+2y-1\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+y+2}-2+\sqrt{3x+2y-1}-\sqrt{x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y-2}{\sqrt{x+y+2}+2}+\frac{2(x+y-2)}{\sqrt{3x+2y-1}+\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y+2}+2}+\frac{2}{\sqrt{3x+2y-1}+\sqrt{x+3}}\right)=0$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{x+y+2}+2}+\frac{2}{\sqrt{3x+2y-1}+\sqrt{x+3}}>0$ với ĐKXĐ nên ta được $x+y-2=0$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $2x+3\sqrt[3]{x(3x^2-x+1)}=3x^2+2$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\sqrt[3]{x\left(3x^2-3x+1\right)}\le\frac{1+x+3x^2-3x+1}{3}=\frac{3x^2-2x+2}{3}\Rightarrow 2x+3\sqrt[3]{x\left(3x^2-x+1\right)}\le 3x^2+2.$$

Do đó phương trình hệ quả có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra, tức là

$$x=3x^2-3x+1=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow x=y=1.$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 81. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y+1)\left(\sqrt{2y+3}+1\right)+\sqrt{x+y+5}+1=0,\\ \sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt{y+2}=3.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $0\le x\le 1; y\ge -\frac{3}{2}; x+y+4\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x-y+2+\sqrt{x+y+5}+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$
$$\Leftrightarrow x-y+2+\sqrt{x+y+5}-\sqrt{2y+3}+(x-y+2)\sqrt{2y+3}=0$$
$$\Leftrightarrow x-y+2+\frac{x-y+2}{\sqrt{x+y+5}+\sqrt{2y+3}}+(x-y+2)\sqrt{2y+3}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y+2)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+y+5}+\sqrt{2y+3}}+\sqrt{2y+3}\right)=0$$

Rõ ràng $1+\frac{1}{\sqrt{x+y+5}+\sqrt{2y+3}}+\sqrt{2y+3}>0$ với ĐKXĐ nên ta được $y=x+2$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt{x+4}=3$ (1).

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b}$ ta có

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x}=\sqrt{\sqrt{1-x}}+\sqrt{\sqrt{x}}\ge\sqrt{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}\ge\sqrt{\sqrt{1-x+x}}=1.$$

Do đó $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt{x+4}\ge 1+\sqrt{4}=3,\forall x\ge 0$.

Phương trình (1) có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra hay $\begin{cases}(1-x)x=0\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0; y=2$.

So sánh với điều kiện, kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=0; y=2$.

Bài toán 82. Giải hệ phương trình trên tập hợp số thực $\begin{cases}2x-y+1+(4x-2y+5)\sqrt{3x+y+1}=3\sqrt{x+2y},\\ \dfrac{2}{3\sqrt{-9x^2+y+9x-3}}=\dfrac{y+2}{19x+6}.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức, mẫu thức xác định.

Trường hợp $\sqrt{3x+y+1}=\sqrt{x+2y}=0$ không thỏa mãn hệ.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ nhất trở thành

$$2x-y+1+3\left(\sqrt{3x+y+1}-\sqrt{x+2y}\right)+2(2x-y+1)\sqrt{3x+y+1}=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-y+1+\frac{3(2x-y+1)}{\sqrt{3x+y+1}+\sqrt{x+2y}}+2(2x-y+1)\sqrt{3x+y+1}=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-y+1)\left(1+\frac{3}{\sqrt{3x+y+1}+\sqrt{x+2y}}+2\sqrt{3x+y+1}\right)=0$$

Rõ ràng $1+\dfrac{3}{\sqrt{3x+y+1}+\sqrt{x+2y}}+2\sqrt{3x+y+1}>0$ với ĐKXĐ nên ta được $2x-y+1=0$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\frac{2}{3\sqrt{-9x^2+11x-2}}=\frac{2x+3}{19x+6}\Leftrightarrow 38x+12=(6x+9)\sqrt{-9x^2+11x-2}$$

$$\Leftrightarrow -9x^2+11x-2-6x\sqrt{-9x^2+11x-2}+9x^2-9\sqrt{-9x^2+11x-2}+27x+14=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-9x^2+11x-2}-3x\right)^2-9\left(\sqrt{-9x^2+11x-2}-3x\right)+14=0$$

Đặt $\sqrt{-9x^2+11x-2}-3x=u$ đưa về $u^2-9u+14=0\Leftrightarrow u\in\{2;7\}$.

Xét hai khả năng xảy ra

- ❖ $u=2\Leftrightarrow\sqrt{-9x^2+11x-2}=3x+2\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2\ge 0\\18x^2+x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.
- ❖ $u=7\Leftrightarrow\sqrt{-9x^2+11x-2}=3x+4\Leftrightarrow\begin{cases}3x+4\ge 0\\18x^2+13x+18=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 83. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{x+3y}+y\sqrt{2x-y}=2x\sqrt{y}+y\sqrt{x},\\x^3+8xy+9y+10=(x+y+5)\sqrt{x^3+7y^2+4x+4}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x-y\ge 0\\x\ge 0;y\ge 0\\x^3+7y^2+4x+4\ge 0\end{cases}$

Xét trường hợp $x=y=0$ thỏa mãn hệ đã cho. Xét $x>0;y>0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\left(\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}\right)+y\left(\sqrt{2x-y}-\sqrt{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-y)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{y(x-y)}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}}\right)=0$$

Vì $\dfrac{x}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{2x-y}+\sqrt{x}}>0,\forall x;y>0$ nên ta được $x=y$.

Phương trình thứ hai trở thành $x^3+8x^2+9x+10=(2x+5)\sqrt{x^3+7x^2+4x+4}$.

Điều kiện $x^3+7x^2+4x+4\ge 0$. Phương trình này tương đương với

$$x^3+7x^2+4x+4-2x\sqrt{x^3+7x^2+4x+4}+x2-5\sqrt{x^3+7x^2+4x+4}+5x+6=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^3+7x^2+4x+4}-x\right)^2-5\left(\sqrt{x^3+7x^2+4x+4}-x\right)+6=0$$

Đặt $\sqrt{x^3+7x^2+4x+4}-x=t$ ta thu được

$$t^2-5t+6=0\Leftrightarrow(t-2)(t-3)=0\Leftrightarrow t\in\{2;3\}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x^3+7x^2+4x+4}=x+2 & (1)\\ \sqrt{x^3+7x^2+4x+4}=x+3 & (2)\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x^3+7x^2+4x+4 = x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x^2(x+6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x \in \{-6;0\} \end{cases} \Leftrightarrow x=0$.
- $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x^3+7x^2+4x+4 = x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x^3+6x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{0;\sqrt{11}-3\right\}$.

So sánh điều kiện kết luận bài toán có hai nghiệm $x=y=0; x=y=\sqrt{11}-3$.

Bài toán 84. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y+1)\sqrt{x+3y}+y\sqrt{3x-2y}=(3y+2)\sqrt{y}, \\ 18xy=3x+y+1+(6x-1)\sqrt{9x^2-y+1}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 9x^2-y+1\ge 0; y\ge 0 \\ x+3y\ge 0; 3x-2y\ge 0 \end{cases}$

Xét trường hợp $x=y=0$ là một nghiệm của hệ đã cho.

Xét $x>0; y>0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(y+1)\left(\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}\right)+y\left(\sqrt{3x-2y}-\sqrt{y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y+1)(x-y)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{3y(x-y)}{\sqrt{3x-2y}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{y+1}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{3y}{\sqrt{3x-2y}+\sqrt{y}}\right)=0$$

Vì $\frac{y+1}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{3y}{\sqrt{3x-2y}+\sqrt{y}}>0, \forall y>0 \Rightarrow x=y$, đưa đến $18x^2=4x+1+(6x-1)\sqrt{9x^2-x+1}$.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình ẩn *x* trên tương đương với

$$18x^2-4x-1=(6x-1)\sqrt{9x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-x+1-6x\sqrt{9x^2-x+1}+9x^2+\sqrt{9x^2-x+1}-3x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9x^2-x+1}-3x\right)^2+\left(\sqrt{9x^2-x+1}-3x\right)-2=0$$

Đặt $\sqrt{9x^2-x+1}-3x=t$ ta thu được

$$t^2+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)=0 \Leftrightarrow t\in\{-2;1\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{9x^2-x+1}=3x+1 & (1) \\ \sqrt{9x^2-x+1}=3x-2 & (2) \end{array}\right.$$

Xét hai khả năng xảy ra

- ❖ $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1\ge 0 \\ 9x^2-x+1=9x^2+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{1}{3} \\ 7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$.
- ❖ $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2\ge 0 \\ 9x^2-x+1=9x^2-12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{2}{3} \\ 11x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=0$.

Bài toán 85. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1+\sqrt{2x+y+1}=4(2x+y)^2+\sqrt{6x+3y}, \\ (9x+4y)\left(\sqrt{19x+8y}-\sqrt{14-x-2y}\right)^2=5+4x+2y. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x+y\ge 0 \\ 14-x-2y\ge 0 \\ 19x+8y\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{6x+3y}-\sqrt{2x+y+1}+(4x+2y)^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+2y-1}{\sqrt{6x+3y}+\sqrt{2x+y+1}}+(4x+2y+1)(4x+2y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (4x+2y-1)\left[\frac{1}{\sqrt{6x+3y}+\sqrt{2x+y+1}}+2(2x+y)+1\right]=0$$

Ta thấy $\dfrac{1}{\sqrt{6x+3y}+\sqrt{2x+y+1}}+2(2x+y)+1>0\Rightarrow 4x+2y=1$. Ta thu được

$$(x+2)\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+13}\right)^2=6\Leftrightarrow 17(x+2)=2\left(\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x+13}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{9x^2+51x+52}=15x+20\Leftrightarrow \begin{cases} 15x+20\ge 0 \\ 3x^2-8x-16=0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{4}{3};4\right\}$$

Từ đây suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(4;-\dfrac{15}{2}\right)$.

Bài toán 86. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+y)\sqrt{x-y+6}=2x^2-x+3y-2, \\ \sqrt{x(10-y)-12}+1=\dfrac{y-x}{\sqrt{y-4}+\sqrt{6-x}}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x-y+6\ge 0 \\ y\ge 4; x\le 6 \\ x(10-y)-12\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x^2+y)\sqrt{x-y+6}=2(x^2+y)-(x-y+2)\Leftrightarrow (x^2+y)\left(\sqrt{x-y+6}-2\right)+x-y+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y).\frac{x-y+2}{\sqrt{x-y+6}+2}+x-y+2=0\Leftrightarrow (x-y+2)\left[\frac{x^2+y}{\sqrt{x-y+6}+2}+1\right]=0$$

Ta thấy $\dfrac{x^2+y}{\sqrt{x-y+6}+2}+1>0$ với điều kiện xác định nên ta được $y=x+2$.

Phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{-x^2+8x-12}+1=\dfrac{2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}}$.

Đặt $\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}=t; t>0\Rightarrow \sqrt{-x^2+8x-12}=\dfrac{t^2-4}{2}$, dẫn đến

$$\frac{t^2-4}{2}+1=\frac{2}{t}\Leftrightarrow t^3-2t-4=0\Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+2)=0\Rightarrow t=2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+8x-12}=0\Leftrightarrow (x-2)(6-x)=0\Leftrightarrow x\in\{2;6\}$$

Kết luận hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(2;4),(6;8)$

Bài toán 87. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+y}+(x^2-y^2-1)\sqrt{x+3y}+x=y,\\ \sqrt[3]{8x^2y+11y^2+7x+4}=x+y+1+(xy+2016)\sqrt{y^2-x-3}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}3x+y\ge 0\\ x+3y\ge 0,\\ y^2-x-3\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x+y}-\sqrt{x+3y}+(x^2-y^2)\sqrt{x+3y}+x-y=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x-2y}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{x+3y}}+(x-y)(x+y)\sqrt{x+3y}+x-y=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{2}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{x+3y}}+(x+y)\sqrt{x+3y}+1\right]=0$$

Rõ ràng $\begin{cases}3x+y\ge 0\\ x+3y\ge 0\end{cases}\Rightarrow 4x+4y\ge 0\Leftrightarrow x+y\ge 0\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{x+3y}}+(x+y)\sqrt{x+3y}+1>0$.

Ta thu được $x=y$, đưa phương trình thứ hai về

$$\sqrt[3]{8x^3+11x^2+7x+4}=2x+1+(x^2+2016)\sqrt{x^2-x-3}.$$

Điều kiện $x^2-x-3\ge 0 \quad (*)$.

Nhận xét

$$(x^2+2016)\sqrt{x^2-x-3}\ge 0\Rightarrow \sqrt[3]{8x^3+11x^2+7x+4}\ge 2x+1$$
$$\Leftrightarrow 8x^3+11x^2+7x+4\ge 8x^3+12x^2+6x+1\Leftrightarrow x^2-x-3\le 0$$

Kết hợp điều kiện (*) thì $x^2-x-3=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Kết luận hệ có hai nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right),\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$.

Bài toán 88. Giải hệ phương trình nghiệm thực $\begin{cases}x^2-y^2+2x+1+y\sqrt{x+y}+(x-2y+1)\sqrt{2y-1}=0,\\ \dfrac{y-1}{\sqrt{x^2+3}}+y-x=\dfrac{6}{(y-1)^2+3}.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x+y\ge 0; y\ge\dfrac{1}{2}$. Rõ ràng trường hợp $x+y=2y-1=0$ không thỏa mãn hệ.

Ngoài khả năng đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2+2x+1-y^2+y\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{2y-1}\right)+(x-y+1)\sqrt{2y-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)(x-y+1)+\frac{y(x-y+1)}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y-1}}+(x-y+1)\sqrt{2y-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(x+y+1+\frac{y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y-1}}+\sqrt{2y-1}\right)=0\Leftrightarrow y=x+1$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+1=\frac{6}{x^2+3}\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1=\frac{6}{x^2+3}-2\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1=\frac{-2x^2}{x^2+3}\Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2+3}+\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1=0.$$

Đặt $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=t$ ta thu được $2t^2+t-1=0\Leftrightarrow (2t-1)(t+1)=0\Leftrightarrow t\in\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$

❖ $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ 4x^2=x^2+3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ x\in\{-1;1\}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

❖ $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=-1\Leftrightarrow -x=\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0\\ x^2=x^2+3\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1;y=2$.

Bài toán 89. Giải hệ phương trình nghiệm thực $\begin{cases} x-y+2+(x-y+3)\sqrt{x+y}=\sqrt{2(y-1)},\\ \sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{y-1}+3\sqrt[3]{1-x^2}=3+y-x.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định. Trường hợp $x+y=2x-2=0$ không thỏa mãn hệ.

Ngoài khả năng đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x-y+2+\sqrt{x+y}-\sqrt{2y-2}+(x-y+2)\sqrt{x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+2+\frac{x-y+2}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y-2}}+(x-y+2)\sqrt{x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+2)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y-2}}+\sqrt{x+y}\right)=0\Leftrightarrow y=x+2$$

Phương trình thứ hai trở thành $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}+3\sqrt[3]{1-x^2}=5$.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{1-x}=a;\sqrt[3]{1+x}=b$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3+b^3=2\\ a+b+3ab=5\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3-3ab(a+b)=2\\ a+b=5-3ab\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (5-3ab)^3-3ab(5-3ab)=2\\ a+b=5-3ab\end{cases}\quad (*)$$

Đặt $3ab=3\sqrt[3]{1-x^2}=t\Rightarrow t\le 3$ thì

$$(*)\Leftrightarrow (5-t)^3-t(5-t)=2\Leftrightarrow t^3-16t^2+80t-123=0\Leftrightarrow (t-3)(t^2-13t+41)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3\\ t=\dfrac{13+\sqrt{5}}{2}>3\\ t=\dfrac{13-\sqrt{5}}{2}>3\end{array}\right.$$

Với $t=3\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{1-x^2}=3\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$. Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=y=0$.

Bài toán 90. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x\sqrt{x}+2(6y-x-3)\sqrt{y}+x-y=3(2y-1)\sqrt{x+3y}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{2y-1}+2x+y+2\sqrt{2y^2-x}=7. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện các căn thức xác định.
Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+3(2y-1)\left(\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}\right)+x-y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{3(2y-1)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+1\right)=0$$

Rõ ràng $\dfrac{2x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{3(2y-1)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+1>0,\forall x\ge 0;\forall y\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}+3x+2\sqrt{2x^2-x}=7$.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$. Đặt $\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}=t,t>0\Rightarrow t^2=3x-1+2\sqrt{2x^2-x}$. Phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} t+t^2+1=7 \\ t>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t^2+t-6=0 \\ t>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t\in\{-3;2\} \\ t>0 \end{cases}\Leftrightarrow t=2\Rightarrow t^2=4\Leftrightarrow 3x-1+2\sqrt{2x^2-x}=4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-x}=5-3x\Leftrightarrow\begin{cases} 5-3x\ge 0 \\ 8x^2-4x=9x^2-30x+25 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\le\dfrac{5}{3} \\ x^2-26x+25=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 91. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x-y+1)\sqrt{2x-y+1}+(y-x+3)\sqrt{x+1}=(x+4)\sqrt{y+1}, \\ (2x-y+1)(x+4)=5\sqrt{x^2+5y+28}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(2x-y+1)\sqrt{2x-y+1}-(2x-y+1)\sqrt{x+1}+(x+4)\sqrt{x+1}-(x+4)\sqrt{y+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y+1)\left(\sqrt{2x-y+1}-\sqrt{x+1}\right)+(x+4)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y+1).\frac{x-y}{\sqrt{2x-y+1}+\sqrt{x+1}}+(x+4).\frac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2x-y+1}{\sqrt{2x-y+1}+\sqrt{x+1}}+\frac{x+4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}\right)=0$$

Ta có $\dfrac{2x-y+1}{\sqrt{2x-y+1}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{x+4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}=0\Rightarrow(2x-y+1),(x+4)$ trái dấu.

Trong khi đó từ $(2x-y+1)(x+4)=5\sqrt{x^2+5y+28}\Rightarrow(2x-y+1),(x+4)$ cùng dấu, mâu thuẫn.

Với $x=y\Rightarrow(x+1)(x+4)=5\sqrt{x^2+5x+28}\Leftrightarrow x^2+5x+4=5\sqrt{x^2+5x+28}$.

Đặt $\sqrt{x^2+5x+28}=t,(t>0)\Rightarrow x^2+5x=t^2-28$. Thu được

$$t^2-28+4=5t\Leftrightarrow t^2-5t-24=0\Leftrightarrow(t+3)(t-8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=8 \end{array}\right.$$

- Loại trường hợp $t=-3$.
- Với $t=8 \Leftrightarrow x^2+5x=36 \Leftrightarrow (x-4)(x+9)=0 \Leftrightarrow x\in\{-4;9\}$.

Đối chiếu, kết luận hệ phương trình đề bài có nghiệm $x=y=9$.

Bài toán 92. Giải hệ phương trình $\begin{cases}13\sqrt{x-1}+9\sqrt{y+2}=16x,\\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1; y\ge -2; x-y+3\ge 0$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(x^2+x)\sqrt{x-y+3}-2(x^2+x)+x-y-1=0 \Leftrightarrow (x^2+x)\left(\sqrt{x-y+3}-2\right)+x-y-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+x)(x-y-1)}{\sqrt{x-y+3}+2}+x-y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y-1=0\\ \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2}=-1\end{array}\right.$$

Rõ ràng $x\ge 1 \Rightarrow \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2}>0$, dẫn đến thu được $x=y+1$. Phương trình thứ nhất trở thành

$$13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+2}=16x \Leftrightarrow 13\left(x-1-\sqrt{x-1}+\frac{1}{4}\right)+3\left(x+1-3\sqrt{x+1}+\frac{9}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{x+1}=\dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{4}$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5}{4}; y=\dfrac{1}{4}$.

Bài toán 93. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{3x+y}+(y-2x)\sqrt{x+3y}=2(x+y)\sqrt{y},\\ \left(\sqrt{2xy-1}-1\right)^2+(y-1)^2+x=y.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 0; 2xy\ge 1 \Rightarrow x>0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\left(\sqrt{3x+y}-2\sqrt{y}\right)+y\left(\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}\right)+(x-y)\sqrt{3x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x(x-y)}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+\frac{y(x-y)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+(x-y)\sqrt{3x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{3x}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\sqrt{3x+y}\right)=0$$

Rõ ràng $\dfrac{3x}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\sqrt{3x+y}>0, \forall x,y>0$.

Thế thì ta được $x=y$, phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\left(\sqrt{2x^2-1}-1\right)^2+(y-1)^2+x-y=0 \Leftrightarrow \frac{(2x^2-2)^2}{\sqrt{2x^2-1}+1}+(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=1\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 94. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực $\begin{cases}(x+y)\sqrt{x^2+y}=3y\sqrt{y(y+1)},\\ 9y^2+\sqrt{5x-3}=\sqrt{3y-x-2}+1.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{5}\\ 3y-x-2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{5}\\ 3y\ge x+2\end{cases}\Rightarrow x\ge\dfrac{3}{5};y\ge\dfrac{13}{15}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-y)\sqrt{x^2+y}+2y\left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{y^2+y}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow(x-y)\sqrt{x^2+y}+\frac{2y\left(x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{y^2+y}}=0$$
$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\sqrt{x^2+y}+\frac{2y(x+y)}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{y^2+y}}\right)=0$$

Rõ ràng $\sqrt{x^2+y}+\dfrac{2y(x+y)}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{y^2+y}}>0,\forall x>0,\forall y>0$ nên ta thu được $x=y$. Phương trình thứ hai của hệ khi đó

$$9x^2-1+\sqrt{5x-3}-\sqrt{2x-2}=0$$
$$\Leftrightarrow(3x-1)(3x+1)+\frac{3x-1}{\sqrt{5x-3}+\sqrt{2x-2}}=0$$
$$\Leftrightarrow(3x-1)\left(3x+1+\frac{1}{\sqrt{5x-3}+\sqrt{2x-2}}\right)=0$$

Lại có $3x+1+\dfrac{1}{\sqrt{5x-3}+\sqrt{2x-2}}>0,\forall x\ge 1$ nên $3x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=y=\dfrac{1}{3}$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=\dfrac{1}{3}$.

Bài toán 95. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{\dfrac{x-y}{2y+1}+1}+y=2y\sqrt{1+\dfrac{y-x}{2y+1}},\\ \left(\sqrt{2x-y}-1\right)^2+y^4+x^2+1=2y.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định. Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $y>0\Rightarrow x>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\sqrt{\frac{x+y+1}{2y+1}}+y=2y\sqrt{\frac{3y-x+1}{2y+1}}\Leftrightarrow x\sqrt{x+y+1}+y\sqrt{2y+1}=2y\sqrt{3y-x+1}$$
$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x+y+1}-\sqrt{2y+1}\right)+2y\left(\sqrt{2y+1}-\sqrt{3y-x+1}\right)+(x-y)\sqrt{2y+1}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{x(x-y)}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+\frac{2y(x-y)}{\sqrt{2y+1}+\sqrt{3y-x+1}}+(x-y)\sqrt{2y+1}=0$$
$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{x}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+\frac{2y}{\sqrt{2y+1}+\sqrt{3y-x+1}}+\sqrt{2y+1}\right)=0$$

Rõ ràng $\dfrac{x}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{2y+1}}+\dfrac{2y}{\sqrt{2y+1}+\sqrt{3y-x+1}}+\sqrt{2y+1}>0,\forall x>0;y>0$.

Thế thì ta được $x=y$, phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\left(\sqrt{x}-1\right)^2+x^4+x^2+1=2x\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+x^4+\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=x=1\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Kết luận hệ đã cho vô nghiệm.

Bài toán 96. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^3-4x^2+5y-1=\sqrt{4y-3}+\sqrt{2x-2},\\y\sqrt{2x+3y}-2x\sqrt{5y}=\left(2x+y\right)\sqrt{x+4y}.\end{cases}\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $y\geq\dfrac{3}{4},x\geq1$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}&y\sqrt{2x+3y}-y\sqrt{x+4y}+2x\sqrt{x+4y}-2x\sqrt{5y}=0\\&\Leftrightarrow y\left(\sqrt{2x+3y}-\sqrt{x+4y}\right)+2x\left(\sqrt{x+4y}-\sqrt{5y}\right)=0\\&\Leftrightarrow\frac{y\left(x-y\right)}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{x+4y}}+\frac{2x\left(x-y\right)}{\sqrt{x+4y}+\sqrt{5y}}=0\\&\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(\frac{y}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{x+4y}}+\frac{2x}{\sqrt{x+4y}+\sqrt{5y}}\right)=0\end{aligned}$$

Rõ ràng $\dfrac{y}{\sqrt{2x+3y}+\sqrt{x+4y}}+\dfrac{2x}{\sqrt{x+4y}+\sqrt{5y}}>0,\forall y\geq\dfrac{3}{4},\forall x\geq1$ nên ta được $x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned}&x^3-4x^2+5x-1=\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x-2}\\&\Leftrightarrow x-\sqrt{4x-3}+x-1-\sqrt{2x-2}+x^3-4x^2+3x=0\\&\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+3}{x+\sqrt{4x-3}}+\frac{x^2-4x+3}{x-1+\sqrt{2x-2}}+x\left(x^2-4x+3\right)=0\\&\Leftrightarrow\left(x^2-4x+3\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{4x-3}}+\frac{1}{x-1+\sqrt{2x-2}}+x\right)=0\end{aligned}$$

Dễ thấy $\dfrac{1}{x+\sqrt{4x-3}}+\dfrac{1}{x-1+\sqrt{2x-2}}+x>0,\forall x\geq1$ nên thu được

$$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x\in\left\{1;3\right\}\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(1;1\right),\left(3;3\right).$$

Kết luận hệ phương trình đề bài có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 97. Giải hệ phương trình nghiệm thực $\begin{cases}\sqrt{x+3y}=\dfrac{\sqrt{y\left(x+3y\right)}+2\sqrt{y}}{1+\sqrt{x}},\\\left(2x^2-y^2+2\right)^2+\left(x^2+2\right)\sqrt{y}=2x.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x\geq0;y\geq0$.

Từ phương trình thứ hai suy ra x dương. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x+3y}=\sqrt{y\left(x+3y\right)}+2\sqrt{y}\Leftrightarrow\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}+\sqrt{x+3y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\sqrt{x+3y}.\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x+3y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0$$

Rõ ràng $\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x+3y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0,\forall x>0,y\ge 0$ nên dẫn đến $x=y$. Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\left(x^2+2\right)^2+\left(x^2+2\right)\sqrt{x}=2x\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+2}{\sqrt{x}}\right)^2+\frac{x^2+2}{\sqrt{x}}=2\Leftrightarrow\frac{\left(x^2+2\right)^2}{x}+\frac{x^2+2}{\sqrt{x}}=2.$$

Đặt $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x}}=t,t>0$ ta thu được

$$t^2+t=2;t>0\Rightarrow t=1\Leftrightarrow x^2-\sqrt{x}+2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+x-\sqrt{x}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}\Rightarrow x\in\varnothing$$

Kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 98. Giải phương trình trên tập số thực $\begin{cases}\sqrt{x^2+xy-y^2}+\sqrt{x^2+x-xy}+\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{y}\right)^2,\\ y\left(\sqrt{2x+y}+1\right)^3+x\sqrt{4y-x}=2y.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định.

Kết hợp các điều kiện $\begin{cases}x\left(x+y\right)\ge y^2\ge 0\\2x+y\ge 0\\y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x+y\right)\ge y^2\ge 0\\x+x+y\ge 0\\y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x+y\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$

Xét $x=y=0$ thỏa mãn hệ. Xét trường hợp $x;y>0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+xy-y^2}-y+\sqrt{x^2+x-xy}-\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+xy-2y^2}{\sqrt{x^2+xy-y^2}+y}+\frac{x^2+x-xy-y}{\sqrt{x^2+x-xy}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x-y\right)\left(x+2y\right)}{\sqrt{x^2+xy-y^2}+y}+\frac{\left(x-y\right)\left(x+1\right)}{\sqrt{x^2+x-xy}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left[\frac{x+2y}{\sqrt{x^2+xy-y^2}+y}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x-xy}+\sqrt{y}}\right]=0$$

Rõ ràng $\dfrac{x+2y}{\sqrt{x^2+xy-y^2}+y}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x-xy}+\sqrt{y}}>0,\forall x,y>0$.

Thế thì $x=y$ và phương trình thứ hai trở thành $x\left(\sqrt{2x+x}+1\right)^3+x\sqrt{3x}=x\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x}+1\right)^3+\sqrt{3x}+1=2$.

Đặt $\sqrt{3x}+1=t$ ta được $t^3+t=2\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t^2+t+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t^2+t+2=0\end{array}\right.\Rightarrow t=1\Rightarrow x=0\Rightarrow x=y=0$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=0$.

Bài toán 99. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5x-2y} = \sqrt{4y^2+9x+6y}+x+2, \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{x+2y} = \sqrt{4y^2-x^2+14x-20}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+5x-2y\ge 0 \\ 4y^2+9x+6y\ge 0 \\ 4y^2-x^2+14x-20\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2\sqrt{x^2+5x-2y}-\sqrt{4y^2+9x+6y}-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-2y}-\sqrt{4y^2+9x+6y}+\sqrt{x^2+5x-2y}-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4y^2-4x-8y}{\sqrt{x^2+5x-2y}+\sqrt{4y^2+9x+6y}}+\frac{x-2y-4}{\sqrt{x^2+5x-2y}+x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2y)(x-2y-4)}{\sqrt{x^2+5x-2y}+\sqrt{4y^2+9x+6y}}+\frac{x-2y-4}{\sqrt{x^2+5x-2y}+x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y-4)\left(\frac{x+2y}{\sqrt{x^2+5x-2y}+\sqrt{4y^2+9x+6y}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+5x-2y}+x+2}\right)=0$$

Ta có $\begin{cases} x+2y\ge 0 \\ x+2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+2y}{\sqrt{x^2+5x-2y}+\sqrt{4y^2+9x+6y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5x-2y}+x+2}>0$.

Với $x-2y-4=0$ ta thu được

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-4}=\sqrt{6x-4}\Leftrightarrow 3x-2+2\sqrt{2\left(x^2-4\right)}=6x-4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2\left(x^2-4\right)}=3x+2\Leftrightarrow \begin{cases} 8\left(x^2-4\right)=9x^2-12x+4 \\ x\ge -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=6$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(6;16)$.

Bài toán 100. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2}=x+1, \\ 4\sqrt{2x+1}+x-2y+2=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{2}$. Xét phương trình thứ hai của hệ $\begin{cases} 4\sqrt{2x+1}+3x+2=x+y \\ x\ge -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y>0$.

Phương trình đầu tiên tương đương

$$\sqrt{x^2+3x+y}-\sqrt{4x+y^2}+\sqrt{x^2+3x+y}-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y-1)(x+y)}{\sqrt{x^2+3x+y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{x-y-1}{\sqrt{x^2+3x+y}+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3x+y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+y}+x+1}\right)=0$$

Ta có $x \ge -\frac{1}{2}; x+y>0 \Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{x^2+3x+y}+\sqrt{4x+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+y}+x+1}>0 \Rightarrow x=y+1$.

Phương trình thứ hai trở thành $4\sqrt{2x+1}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ 16.2x+16=x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow x=40 \Rightarrow y=39$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 101. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{(2x+y)^2-8x+3}+\sqrt{2x+2y-3}=3\sqrt{y}, \\ \sqrt{2x+y-2}+\sqrt{5x-4}+\sqrt{2-y}+6x^2-x-8=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x+y \ge 2; 0 \le y \le 2; x \ge \frac{4}{5}; (2x+y)^2-8x+3 \ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{(2x+y)^2-8x+3}-2\sqrt{y}+\sqrt{2x+2y-3}-\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+y)^2-4(2x+y)+3}{\sqrt{(2x+y)^2-8x+3}+2\sqrt{y}}+\frac{2x+y-3}{\sqrt{2x+2y-3}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+y-1)(2x+y-3)}{\sqrt{(2x+y)^2-8x+3}+2\sqrt{y}}+\frac{2x+y-3}{\sqrt{2x+2y-1}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y=3 \\ \dfrac{2x+y-1}{\sqrt{(2x+y)^2-8x+3}+2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+2y-1}+\sqrt{y}}=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Vì $2x+y \ge 2 \Rightarrow \frac{2x+y-1}{\sqrt{(2x+y)^2-8x+3}+2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{2x+2y-1}+\sqrt{y}}>0$, dẫn đến (1) vô nghiệm.

Với $2x+y=3$ thì phương trình thứ hai trở thành

$$1+\sqrt{5x-4}+\sqrt{2-(3-2x)}+6x^2-x-8=0=0 \Leftrightarrow \sqrt{5x-4}+\sqrt{2x-1}+6x^2-x-7=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x-4}-1+\sqrt{2x-1}-1+6x^2-x-5=0 \Leftrightarrow \frac{5x-5}{\sqrt{5x-4}+1}+\frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)(6x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{5}{\sqrt{5x-4}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+6x+5\right)=0 \quad (1)$$

Nhận định $\frac{5}{\sqrt{5x-4}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+6x+5>0, \forall x \ge \frac{4}{5}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 102. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5x-y}-2=\sqrt{y^2+8x}+x, \\ 2y-\sqrt{x+3}=x+11. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge -3; x^2+5x-y+2 \ge 0; y^2+8x \ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+5x-y}-(x+2)+\sqrt{x^2+5x-y}-\sqrt{y^2+8x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-2}{\sqrt{x^2+5x-y}+(x+2)}+\frac{x^2-y^2-3x-y+2}{\sqrt{x^2+5x-y}+\sqrt{y^2+8x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-2}{\sqrt{x^2+5x-y}+(x+2)}+\frac{(x-y-2)(x+y-1)}{\sqrt{x^2+5x-y}+\sqrt{y^2+8x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+5x-y}+(x+2)}+\frac{x+y-1}{\sqrt{x^2+5x-y}+\sqrt{y^2+8x}}\right]=0$$

Ta có $2y=\sqrt{x+3}+x+11\geq 8,\forall x\geq -3\Rightarrow y\geq 4\Rightarrow x+y-1\geq 0$. Do đó

$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5x-y}+(x+2)}+\dfrac{x+y-1}{\sqrt{x^2+5x-y}+\sqrt{y^2+8x}}>0\Rightarrow x=y+2$.

Phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x+3}=x-15\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 15\\ x+3=x^2-30x+225\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 15\\ x^2-31x+222=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{31+\sqrt{73}}{2};y=\frac{27+\sqrt{73}}{2}.$$

Kết luận hệ ban đầu có duy nhất nghiệm $x=\dfrac{31+\sqrt{73}}{2};y=\dfrac{27+\sqrt{73}}{2}$.

Bài toán 103. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+\left(\sqrt[3]{x-y+2}+\sqrt{1-x}\right)\left(y+2x\sqrt{3x-2y+1}\right)=2xy,\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{y}=\dfrac{4x^2}{y\sqrt{y}}+\sqrt{3x},\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0\leq x\leq 1;y>0;3x-2y+1\geq 0$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{3x}=\frac{4x^2}{y\sqrt{y}}-\sqrt{y}\Leftrightarrow \frac{y-2x}{\sqrt{x+y}+\sqrt{3x}}=\frac{4x^2-y^2}{y\sqrt{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-2x}{\sqrt{x+y}+\sqrt{3x}}=\frac{(2x-y)(2x+y)}{y\sqrt{y}}\Leftrightarrow (2x-y)\left(\frac{2x+y}{y\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{3x}}\right)=0\quad (*)$$

Ta có $\dfrac{2x+y}{y\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{3x}}>0,\forall x\in[0;1],y>0$ nên $(*)\Leftrightarrow y=2x$.

Khi đó phương trình thứ nhất trở thành

$$\left(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2x+2x\sqrt{1-x}\right)=2x^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ \left(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)=x\quad (1)\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt[3]{2-x}+\sqrt{1-x}=\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\Leftrightarrow \sqrt[3]{2-x}+\sqrt{1-x}=1-\sqrt{1-x}\Leftrightarrow \sqrt[3]{2-x}+2\sqrt{1-x}=1$$

Điều kiện $x\leq 1$. Đặt $\sqrt[3]{2-x}=a;\sqrt{1-x}=b\ (b\geq 0)\Rightarrow a^3-b^2=1$.

Phương trình đã cho trở thành $a+2b=1$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+2b=1\\ a^3-b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1-a}{2}\\ a^3-\dfrac{(1-a)^2}{4}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1-a}{2}\\ (a-1)(4a^2+3a+5)=0\end{cases}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ 4a^2+3a+5=0\quad (**)\end{array}\right.$$

- Phương trình (**) vô nghiệm vì $\Delta = -11 < 0$.
- $a = 1 \Leftrightarrow 2 - x = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = (1;2)$.

Bài toán 104. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x+3y+1)\sqrt{x-y+1} = 1 + \sqrt{2x^2+11xy+2y^2}, \\ \sqrt{x+4y-1} + \sqrt{2x^2+x+6} = x+y+3. \end{cases}$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x-y+1 \ge 0 \\ x+4y-1 \ge 0 \\ 2x^2+11xy+2y^2 \ge 0 \end{cases}$.

Từ điều kiện ta có $\begin{cases} x-y+1 \ge 0 \\ x+4y-1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 2x+3y \ge 0$, hơn nữa $\begin{cases} x-y+1 = 0 \\ x+4y-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(-\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$ không thỏa mãn hệ.

Như vậy $2x+3y > 0$ nên phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(2x+3y+1)\left(\sqrt{x-y+1}-1\right) + 2x+3y - \sqrt{2x^2+11xy+2y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3y+1)(x-y)}{\sqrt{x-y+1}+1} + \frac{(x-y)(2x+3y)}{2x+3y+\sqrt{2x^2+11xy+2y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{2x+3y+1}{\sqrt{x-y+1}+1} + \frac{2x+3y}{2x+3y+\sqrt{2x^2+11xy+2y^2}}\right] = 0$$

Dễ thấy $\frac{2x+3y+1}{\sqrt{x-y+1}+1} + \frac{2x+3y}{2x+3y+\sqrt{2x^2+11xy+2y^2}} > 0, \forall x,y$ thỏa mãn $2x+3y > 0$ nên ta được $x = y$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x^2+x+6} = 2x+3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+6} - (x+2) = x+1-\sqrt{5x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2+x+6}+(x+2)} = \frac{x^2-3x+2}{x+1+\sqrt{5x-1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2 = 0 \\ \sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{5x-1} + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \{1;2\} \\ \dfrac{x^2-4x+7}{\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{5x-1}} + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \{1;2\} \\ \dfrac{(x-2)^2+3}{\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{5x-1}} = -1 \quad (2) \end{array}\right.$$

Rõ ràng (2) vô nghiệm nên hệ đã cho có hai nghiệm $x = y = 1; x = y = 2$.

Nhận xét.

Bao quát từ bài toán số 67 đến bài toán số 104, hầu như các hệ phương trình của chúng ta, dù mang dáng dấp liên hợp – trục căn thức với nhân tử đơn giản $ax+by+c=0$, tuy nhiên đều cần đến sự trợ giúp của máy tính bỏ túi Casio Fx – 570 ES Plus với những bước đi cẩn thận, chính xác, bước đầu xuất hiện những đánh giá đòi hỏi vận dụng cao và các phương trình hệ quả phức tạp, ẩn chứa nhiều yếu tố quyết định. Sẽ có nhiều bài toán hay, khó và thú vị hơn, đòi hỏi đánh giá khéo léo, tinh tế hơn nữa, tác giả xin được đề cập ở phần cuối tài liệu này.

Sau đây là một số bài tập tương tự dành cho lớp bài toán từ 67 đến 104.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x = 3y + 1 - \sqrt{\dfrac{3x-y}{x+y}}, \\ \sqrt{x(y+2)} + \sqrt{y} = \sqrt{(x+1)^3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{x(x+2)} + \sqrt{x} = \sqrt{(x+1)^3}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{x+y+3} + (4x-4y-3)\sqrt{2y+3} = 0, \\ \dfrac{y(4xy+9x+6)}{\sqrt[3]{x(4y^2+3x+2)+1} - 1} = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\dfrac{x(4x^2+9x+6)}{\sqrt[3]{x(4x^2+3x+2)+1} - 1} = 1$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x-y)\sqrt{x+y+3} = x\sqrt{2y+3}, \\ x^2 - 7x - y + 10 = (y+2)\sqrt{2x-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $x^2 - 8x + 10 = (x+2)\sqrt{2x-1}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x - y + \sqrt{x+y-3} = 2 + (x+y)(2x-y) + \sqrt{3x-4}, \\ \sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{y-x+4}} + x^2 = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}} + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{x+3}} + x^2 = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}} + 1$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)\left(\sqrt{2y+3}+1\right) + \sqrt{x+y+4} + 1 = 0, \\ 2\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{y+3}} + x^2 - 4 = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $2\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y + x\sqrt{2x+y} - y\sqrt{x+2y} = 0, \\ x^2 + 4y + 7 = (y+4)\sqrt{2x^2 - y^2 + 7}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $x^2 + 4x + 7 = (x+4)\sqrt{x^2+7}$.

  (Câu 5; Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hà Nội; Năm học 2010 – 2011).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y + x\sqrt{2x+y} - y\sqrt{x+2y} = 0, \\ \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4} + \sqrt{x^2 + y + \dfrac{1}{4}}} = \dfrac{1}{2}\left(2y^3 + x^2 + 2y + 1\right). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ $\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \dfrac{1}{4}}} = \dfrac{1}{2}\left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right)$.

  (Câu 5; Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hà Nội; Năm học 2009 – 2010).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+2x\sqrt{2x+y}=(x+y)\sqrt{x+2y}, \\ x^2-3x+4=\left(4+3y-\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{2x-y-1}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $x^2-3x+4=\left(4+3x-\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{x-1}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x-3y+(2x-2y+1)\sqrt{x+2y+1}=\sqrt{3y+1}, \\ \left|\sqrt{y^2-4x+5}-\sqrt{x^2+6y+13}\right|=\sqrt{26+x-y}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ bài toán

  Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2+6x+13}\right|$.

  (Câu 3.2; Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề chính thức; Trường THPT Chuyên Nguyễn Trãi; Tỉnh Hải Dương; Năm học 2010 – 2011).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+x\sqrt{2x+y}-y\sqrt{x+2y}=0, \\ \sqrt{2y^3+4x^2+4y}-\sqrt[3]{16x^3+12y^2+6x-3}=4y^4+2y^3-2x-1. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ bài toán

  $$\sqrt{2x^3+4x^2+4x}-\sqrt[3]{16x^3+12x^2+6x-3}\ge 4x^4+2x^3-2x-1.$$

  (Câu 5; Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề chính thức; Trường THPT Chuyên Thái Bình; Tỉnh Thái Bình; Năm học 2010 – 2011).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} y(x-y)+(3y+x-1)\sqrt{x+2y-1}=(4y-1)\sqrt{3y-1}, \\ \sqrt[3]{y^3+16}=2x-y+1+\sqrt{y^2+x-5}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt[3]{x^3+16}=x+1+\sqrt{x^2+x-5}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+2x\sqrt{2x+y}=(x+y)\sqrt{x+2y}, \\ xy+\dfrac{y^3+8y^2+17x+4}{\sqrt{10-x^2}}=11+x-y. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $x^2+\dfrac{x^3+8x^2+17x+4}{\sqrt{10-x^2}}=11$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+x\sqrt{2x+y}-y\sqrt{x+2y}=0, \\ \dfrac{x^3+7xy+17x+y+4}{\sqrt{10-y}}+x=11. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai được làm ngược từ bài toán $\dfrac{x^3+7x^2+18x+4}{\sqrt{10-x}}+x=11$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x+y}+(y-x)\sqrt{2y}=y\sqrt{3y-x}, \\ \sqrt[3]{14+6y-x^3}=y+2+\sqrt{x^3+3xy+3x-3}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt[3]{14+6x-x^3}=x+2+\sqrt{x^3+3x^2+3x-3}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2-y}+2\sqrt[3]{x^3-4}=2(y-2), \\ 4(x-y+1)+\sqrt{3x+4y+5}+(2x-2y+1)\sqrt{7y+2}=0. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ nhất làm ngược từ $\sqrt{x^2-x-1}+2\sqrt[3]{x^3-4}=2(x-1)$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y+2}+\sqrt{3x+2y-1}=\sqrt{x+3}+2,\\ \sqrt{6x^3-x-5}+\sqrt{1-y}=3x-\sqrt{5x+y+3}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{6x^3-x-5}+\sqrt{x-1}=3x-\sqrt{4x+5}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y+1)\left(\sqrt{2y+3}+1\right)+\sqrt{x+y+5}+1=0,\\ \sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+y-2=x^6+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}\ge x^6+\dfrac{3}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x-y+1+(4x-2y+5)\sqrt{3x+y+1}=3\sqrt{x+2y},\\ \sqrt{4-x^2}+2\sqrt[3]{x^4-4x^3+(y+1)^2}=(y-x-2)^2+1-|x|.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{4-x^2}+2\sqrt[3]{x^4-4x^3+4x^2}=(x-1)^2+1-|x|$.

  (Câu 4; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ hai; Mùa thi 2015; Khối THPT Chuyên; Trường Đại học Vinh; Tỉnh Nghệ An).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{x+3y}+y\sqrt{2x-y}=2x\sqrt{y}+y\sqrt{x},\\ x^5-2x^2y+4y-1=2\sqrt{2x+y-2}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $x^5-2x^3+4x-1\le 2\sqrt{3x-2}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}(y+1)\sqrt{x+3y}+y\sqrt{3x-2y}=(3y+2)\sqrt{y},\\ 4\left|y-\sqrt{2x+y-2}\right|+\left|(y-2)\sqrt{x}\right|+2=x.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $4\left|x-\sqrt{3x-2}\right|+\left|(x-2)\sqrt{x}\right|+2\le x$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x^2+y)\sqrt{x-y+6}=2x^2-x+3y-2,\\ 2x^2+8x+7+3\sqrt[3]{2y^2-1}=\left(2-\sqrt{y}\right)\left(x-4\sqrt{x+2}+7\right).\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $2x^2-1+3\sqrt[3]{2x^2-1}=\left(2-\sqrt{x}\right)\left(x-4\sqrt{x}+7\right)$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+y}+(x^2-y^2-1)\sqrt{x+3y}+x=y,\\ \sqrt{2x^2+6y-8}+\sqrt{2y^2+4x-6}-3\sqrt{y+4}-3\sqrt{x+3}-1=0.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{2x^2+6x-8}+\sqrt{2x^2+4x-6}-3\sqrt{x+4}-3\sqrt{x+3}-1>0$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-y^2+2x+1+y\sqrt{x+y}+(x-2y+1)\sqrt{2y-1}=0,\\ \sqrt{(y+1)(2x-1)}-3\sqrt{y+5}=4-\sqrt{(x+6)(2y-3)}+3\sqrt{x+2}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$.

  (Câu IV.2; Đề thi thử sức trước kỳ thi Đại học; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2010; Khối THPT Chuyên Vật lý; Trường ĐHKH Tự nhiên; Đại học Quốc gia Hà Nội).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-y+2+(x-y+3)\sqrt{x+y}=\sqrt{2(y-1)},\\ \sqrt{x^3-x^2+y-3}=\sqrt{5+x-y+2}+\sqrt{-x+8}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

  Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{x^3-x^2+x-1}<\sqrt{5}+\sqrt{-x+8}$.

(Câu 1; Đề thi chọn Đội tuyển dự thi Kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hà Tĩnh; Năm học 2008 – 2009).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)\sqrt{x^2+y}=3y\sqrt{y(y+1)},\\ \dfrac{4x^3+10y^2+x-2}{5y-2}=\sqrt{10y-4}+\sqrt{14x-3}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Phương trình thứ hai làm ngược từ $\dfrac{4x^3+10x^2+x-2}{5x-2}>\sqrt{10x-4}+\sqrt{14x-3}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x\sqrt{x}+2(6y-x-3)\sqrt{y}+x-y=3(2y-1)\sqrt{x+3y},\\ \sqrt{y-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{y^3-4y^2+8x-5}=2y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{x^3-4x^2+8x-5}=2x$.

(Câu ; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ ba; Mùa thi 2015; Trường THPT Chuyên Hùng Vương; Thành phố Việt Trì; Tỉnh Phú Thọ).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x-y+1)\sqrt{2x-y+1}+(y-x+3)\sqrt{x+1}=(x+4)\sqrt{y+1},\\ (2x-y+1)(x+4)=3\sqrt{5x(x^2+4)}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Phương trình thứ hai làm ngược từ $x^2+5x+4=3\sqrt{5x(x^2+4)}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt[3]{x}+x=\sqrt{(y+1)^2+3}+1,\\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Phương trình thứ nhất làm ngược từ $2\sqrt[3]{x}+x=\sqrt{x^2+3}+1$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{3x+y}+(y-2x)\sqrt{x+3y}=2(x+y)\sqrt{y},\\ x(x-1)^2=\left(\sqrt{y+4}+1\right)(y+4).\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Phương trình thứ hai làm ngược từ $x(x-1)^2=\left(\sqrt{x+4}+1\right)(x+4)$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{\dfrac{x-y}{2y+1}+1}+y=2y\sqrt{1+\dfrac{y-x}{2y+1}},\\ y+(y+1)\sqrt{4y-3}=\sqrt{(8y+1)(4x-3)}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Phương trình thứ hai làm ngược từ $x+(x+1)\sqrt{4x-3}=\sqrt{(8x+1)(4x-3)}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{4x-3}+(x+2)\sqrt{8x+1}=12y-2,\\ y\sqrt{2x+3y}-2x\sqrt{5y}=(2x-y)\sqrt{x+4y}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Phương trình thứ hai làm ngược từ $x\sqrt{4x-3}+(x+2)\sqrt{8x+1}=12x-2$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y}=\dfrac{\sqrt{y(x+3y)}+2\sqrt{y}}{1+\sqrt{x}},\\ \dfrac{x}{\sqrt{5x-6}}+\dfrac{x+2}{\sqrt{9y-2}}+2(y^2-5x+5)=0.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Phương trình thứ hai làm ngược từ $\dfrac{x}{\sqrt{5x-6}}+\dfrac{x+2}{\sqrt{9x-2}}+2(x^2-5x+5)=0$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+xy-y^2}+\sqrt{x^2+x-xy}+\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{y}\right)^2, \\ \sqrt{y}+\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}}+2\left(y^2-x-1\right)=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{x}+\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}}+2\left(x^2-x-1\right)=0$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+3x-y}-\sqrt{4x+y^2}=x+1, \\ \dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}+\dfrac{x+2}{\sqrt{6x+3}}+y^2=\dfrac{2(y+1)}{x}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai làm ngược từ $\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}+\dfrac{x+2}{\sqrt{6x+3}}+(x-1)^2\ge 2$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{(2x+y)^2-8x+3}+\sqrt{2x+2y-3}=3\sqrt{y}, \\ 6x=y+x\sqrt{3x-2}+(x+1)\sqrt{(2x+y+2)x-1}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai làm ngược từ $8x-3=x\sqrt{3x-2}+(x+1)\sqrt{5x-1}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5x-y}-2=\sqrt{y^2+8x}+x, \\ x+y-2=3\sqrt{4x+1}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x^2+5x+y-1}-\sqrt{3x+y-1}+x^2-4x+2=0, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{y}=\dfrac{4x^2}{y\sqrt{y}}+\sqrt{3x}, \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai làm ngược từ $\sqrt{3x^2+7x-1}-\sqrt{5x-1}+x^2-4x+2\le 0$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x+3y+1)\sqrt{x-y+1}=1+\sqrt{2x^2+11xy+2y^2}, \\ 4\sqrt{x+4y-1}=x^4-2y^2+4x+y+4. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai làm ngược từ $4\sqrt{5x-1}=x^4-2x^2+5x+4$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)\left(\sqrt{2y+3}+1\right)+\sqrt{x+y+4}+1=0, \\ \dfrac{x^3+5xy+3}{x^2-y}+\sqrt{x-x^2}=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$

Phương trình thứ hai làm ngược từ $\dfrac{x^3+5x(x+1)+3}{x^2-x-1}+\sqrt{x-x^2}=0$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x+y}+(y-x)\sqrt{2y}=y\sqrt{3y-x}, \\ \dfrac{1}{2}x^3+x=1+\left(1-y^2\right)\sqrt{1-2y^2}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai làm ngược từ $\dfrac{1}{2}x^3+x=1+\left(1-x^2\right)\sqrt{1-2x^2}$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x+3y}+y\sqrt{2x-y}=2x\sqrt{y}+y\sqrt{x}, \\ 6x^2+3y+1=5x^2\sqrt[3]{6y^3+2x^2}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Phương trình thứ hai làm ngược từ $6x^2+3x+1=5x^2\sqrt[3]{6x^3+2x^2}$.

Bài toán 105. Trích lược câu 8; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Đề thi chính thức; Lần thứ 4; Mùa thi 2015; Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc; Thành phố Vĩnh Yên; Tỉnh Vĩnh Phúc.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-y^2+2y-x-1=\sqrt{y-1}-\sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y}+3\sqrt{2x+3y-7}=2x+7 \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0; y\in[1;6]; 2x+3y\ge 7$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-y+1)(x+2y-1)+\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(x+2y-1)+\frac{x-y+1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(x+2y-1+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}\right)=0 \quad (1)$$

Ta thấy $x+2y-1\ge 0+2.1-1=1>0,\forall x\ge 0,\forall y\in[1;6]\Rightarrow x+2y-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}>0,\forall x\ge 0,\forall y\in[1;6]$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x-y+1=0\Leftrightarrow x=y-1$, phương trình thứ hai trở thành

$$3\sqrt{6-y}+3\sqrt{5y-9}=2x+5\Leftrightarrow 8-y-3\sqrt{6-y}+3\left(y-1-\sqrt{5y-9}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-7y+10}{8-y+3\sqrt{6-y}}+\frac{y^2-7y+10}{y-1+\sqrt{5y-9}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2-7y+10\right)\left(\frac{1}{8-y+3\sqrt{6-y}}+\frac{1}{y-1+\sqrt{5y-9}}\right)=0 \quad (2)$$

Lại có $\dfrac{1}{8-y+3\sqrt{6-y}}+\dfrac{1}{y-1+\sqrt{5y-9}}>0,\forall y\in[1;6]$ nên

$$(2)\Leftrightarrow (y-2)(y-5)=0\Leftrightarrow y\in\{2;5\}\Rightarrow (x;y)=(1;2),(4;5).$$

Nhận xét.

- *Hệ phương trình trên thuộc dạng thức bán liên hợp nhưng vẫn đơn giản vì thực hiện liên hợp trực tiếp hai căn thức, dù rằng có kết hợp phân tích nhân tử đa thức hai ẩn $f(x;y)=xy-y^2+2y-x-1$, tuy nhiên điều này cũng cơ bản với sự trợ giúp của máy tính bỏ túi Casio khai phá nhân tử $x-y+1$.*
- *Điểm mấu chốt đánh giá biểu thức liên hợp $T=x+2y-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}$ đó là*

  $$x+2y-1\ge 0+2.1-1=1>0,\forall x\ge 0,\forall y\in[1;6].$$

  Điều này cảnh báo chúng ta phải luôn bám chặt điều kiện xác định.
- *Phương trình hệ quả ẩn y giải được nhờ kỹ thuật liên hợp biểu thức với hai nghiệm hữu tỷ đơn (trực thuộc phương pháp đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời), tác giả xin được miễn bình luận.*
- *Ngoài ra, đây cũng là sự trùng lặp của câu 8; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Đề thi chính thức; Mùa thi 2016; Trường THPT Lý Thái Tổ; Thành phố Bắc Ninh; Tỉnh Bắc Ninh.*
- *Rõ ràng các bạn chỉ cần bám chặt điều kiện $x\ge 0,y\ge 1$ của hai căn thức nằm trong phương trình thứ nhất, thậm chí cả điều kiện của phương trình thứ hai, chú ý thay đổi linh hoạt bộ phận đa thức của biểu thức hệ quả T là sẽ thu được vô vàn hệ phương trình mới như sau*

➢ Xuất phát điểm $T=x+y-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}$ và làm ngược $\sqrt{2x^2+2x}+(x-1)\sqrt{x}=x+1$ ta được

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 1 + \sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 0, \\ \sqrt{2x^2+2x} + (y-2)\sqrt{x} = x+1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

- Xuất phát điểm $T = x + y^2 - 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}$ và làm ngược $2+\sqrt{x+6} = \sqrt{2x+5}+\sqrt{x+3}$ ta được

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy^2 + y^2 + y + \sqrt{x} = xy + y^3 + 1 + \sqrt{y-1} = 0, \\ 2+\sqrt{y+5} = \sqrt{2x+5}+\sqrt{y+2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

- Xuất phát điểm $T = y - x + \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}$ và làm ngược $\sqrt{x+3} - \sqrt{1-x} = x+1$ ta được

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy + y + \sqrt{x} - \sqrt{y-1} = x^2 + y^2 + x, \\ \sqrt{x+3} - \sqrt{1-x} = y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

- Các bạn có thể tham khảo rất nhiều xuất phát điểm khác như sau

$$T = 2x + y^4 - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}; T = 3x + y^3 - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}$$

$$T = xy + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}; T = xy + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}$$

Bài toán 106. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 = y + 13x + 27, \\ \sqrt{9x^2 + (2x-3)(x-y)} + 4\sqrt{xy} = 7y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $9x^2 + (2x-3)(x-y) \ge 0; xy \ge 0$. Từ phương trình thứ hai ta thấy $y \ge 0$.

Hơn nữa cặp số $x = y = 0$ không thỏa mãn hệ ban đầu, xét $y > 0 \Rightarrow x > 0$. Biến đổi phương trình thứ nhất

$$x^2 + (y-6)^2 = y + 13x + 27 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 11x + 9y - 4 \Rightarrow 11x + 9y - 4 \ge 0.$$

Phương trình thứ hai tương đương với

$$\sqrt{9x^2 + (2x-3)(x-y)} - 3y + 4\sqrt{xy} - 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2 + (2x-3)(x-y) - 9y^2}{\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)} + 3y} + \frac{4y(x-y)}{\sqrt{xy}+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{11x+9y-3}{\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y} + \frac{4}{\sqrt{xy}+y}\right] = 0$$

Vì $y \ge 0; 11x + 9y - 4 \ge 0 \Rightarrow \dfrac{11x+9y-3}{\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y} + \dfrac{4}{\sqrt{xy}+y} > 0$.

Do đó $x = y \Rightarrow 2x^2 - 26x = 9 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{13+\sqrt{151}}{2}; x = \dfrac{13-\sqrt{151}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện thì hệ có nghiệm duy nhất $x = y = \dfrac{13+\sqrt{151}}{2}$.

Nhận xét.

Thoạt tiên khi nhìn vào hệ phương trình chúng ta thấy có một sự nhẹ nhàng ở phương trình thứ nhất, lóe lên tia hy vọng sử dụng kỹ thuật phân tích nhân tử hai ẩn, bằng phương trình bậc hai ẩn x (tương ứng y) hoặc mon men theo nhân tử mò được do sử dụng công cụ máy tính bỏ túi Casio Fx – 570 ES Plus.

Tuy nhiên thực tế phũ phàng, phân tích nhân tử phương trình thứ nhất thất bại, tạm thời dừng khai thác ở đây. Chuyển hướng sang phương trình thứ hai, là một phương trình hai ẩn chứa căn thức khá phức tạp, nếu sử dụng máy tính bỏ túi Casio thêm một lần nữa, rất may mắn chúng ta có kết quả

Tổ hợp phím →	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc
x	100	1000	50	200
y	100	1000	50	200
Mối liên hệ	$x=y$	$x=y$	$x=y$	$x=y$

Điều này dẫn đến khẳng định 96,69 % nhân tử trong phương trình thứ hai là $x-y$*. Vấn đề đặt ra tiếp theo là ghép biểu thức liên hợp với các căn như thế nào, chúng ta thử nghiệm như sau*

$$x=y=k\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}=\sqrt{9k^2}=3|k|\\4\sqrt{xy}=4\sqrt{k^2}=4|k|\\y=k\end{cases}$$

Để ý thêm bên ngoài các căn chỉ chứa y nên phương án được ưu tiên là ghép

$$\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}-3y+4\sqrt{xy}-4y=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{9x^2+(2x-3)(x-y)-9y^2}{\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y}+\frac{4y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{11x+9y-3}{\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y}+\frac{4}{\sqrt{xy}+y}\right]=0$$

Trước khi ghép, các bạn còn phải xét trường hợp $\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y=\sqrt{xy}+y=0\quad[1]$.

Tuy nhiên tạm thời gác lại trường hợp đó, chúng ta hãy tập trung vào một chướng ngại vật nảy sinh làm cho quá trình của mình bị chùng lại, đó là biểu thức hệ quả

$$T=\frac{11x+9y-3}{\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y}+\frac{4}{\sqrt{xy}+y}.$$

Trong biểu thức T có hai vấn đề nho nhỏ là xử lý tử số và mẫu số

$$\begin{cases}\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+3y>0,\sqrt{xy}+y>0\\11x+9y-3\ge 0\end{cases}\quad[2].$$

Nếu [2] được giải quyết thì cũng mở đường cho [1] được giải quyết.

Không quá khó để thấy các mẫu số có khả năng được giải quyết bởi vì

$$7y=\sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+4\sqrt{xy}\ge 0\Rightarrow y\ge 0.$$

Đến đây nhiều bạn vội kết hợp điều kiện $xy\ge 0\Rightarrow x\ge 0$*, thực ra điều này là chưa đúng vì* $y=0$ *thì x tùy ý bao nhiêu mà chẳng được, đây là một yếu tố tuy nhỏ nhưng rất logic, phục vụ đắc lực cho lời giải được hoàn thiện. Để tránh được trường hợp hy hữu này chúng ta cần xét cặp số* $(x;0)$ *có thỏa mãn hệ phương trình ban đầu hay không*

- Từ phương trình thứ hai ta thấy $y\ge 0$.
- Hơn nữa cặp số $x=y=0$ không thỏa mãn hệ ban đầu, xét $y>0\Rightarrow x>0$.

Đến đây thì mẫu số được giải quyết hoàn toàn. Tiếp tục xử lý vấn đề bị kẹt $11x+9y-3>0$?, *các bạn chú ý rằng do mẫu số dương nên chúng ta chỉ mới chắc chắn được 69,96%* $11x+9y-3>0$ *mà thôi, vẫn nằm trong quá trình bản biện. Vu hồi về phương trình thứ nhất gác lại ở trên, các bạn hãy thử khai triển và biểu thị* $M=11x+9y-3$ *theo các biến xem tình hình biến chuyển gì không*

$$x^2+(y-6)^2=y+13x+27\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+6=11x+9y-3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+1=11x+9y-3\Rightarrow 11x+9y-3>0$$

Các bạn có thể nhận thấy điều kiện $x\ge 0;y\ge 0$ *gần như đã được phương trình thứ hai của hệ bao hàm. Như vậy yếu tố tạo thành* $11x+9y-3\ge 0$ *đè nặng lên vai phương trình thứ nhất. Việc tạo lập phương trình thứ nhất của hệ đề bài khá đơn giản, bài toán 106 tác giả bài toán xuất phát từ các tổng bình phương cơ bản. Thực ra các bạn chỉ cần lựa chọn phương trình ẩn x hoặc ẩn y có điều kiện tối thiểu*

$$\begin{cases}9y-3\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\vee\begin{cases}11x-3\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$$

Quá trình đánh giá $11x+9y-3\ge 0$ *sẽ trở nên khó khăn hơn khi phải kết hợp đồng thời*

$$\begin{cases}mx+ny\ge\alpha\\ px+qy\ge\beta\end{cases}\Rightarrow (m+p)x+(n+q)y\ge\alpha+\beta\Rightarrow 11x+9y-3\ge 0.$$

Các bạn có thể tham khảo các hệ phương trình kế thừa như sau

- Xuất phát từ $11x+9y-3=\sqrt{3x+y+1}$.

  Giải hệ phương trình $\begin{cases}11x+9y-3=\sqrt{3x+y+1},\\ \sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+4\sqrt{xy}=7y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Xuất phát từ $11x+9y-3=x^2+y^2+\sqrt{3x+y+1}$.

  Giải hệ phương trình $\begin{cases}11x+9y-3=x^2+y^2+\sqrt{3x+y+1},\\ \sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+4\sqrt{xy}=7y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Xuất phát từ $11x+9y-3=(x+y+1)^2+(x-2)^2$.

  Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+2xy-17x+y^2-11y+8=0,\\ \sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+4\sqrt{xy}=7y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Xuất phát từ $11x+9y-3=x^2+y^2+2(x+y-1)^2$.

  Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+2xy-13x+2y^2+7y-2=0,\\ \sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+4\sqrt{xy}=7y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Xuất phát từ $\sqrt{10x+9y-4}+\sqrt{x}=1$.

  Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{10x+9y-4}+\sqrt{x}=1,\\ \sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+4\sqrt{xy}=7y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Xuất phát từ $\sqrt{3x+2y-2}+\sqrt{8x+7y-2}=2$.

  Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+2y-2}+\sqrt{8x+7y-2}=2,\\ \sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+4\sqrt{xy}=7y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{9y^2+(2y+3)(y-x)}+4\sqrt{xy}=7x,\\ (2y-1)\sqrt{1+x}+(2y+1)\sqrt{1-x}=2y.\end{cases}$ trên tập số thực.

Bài toán 107. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+2\sqrt{xy}=5x,\\(y^2+6x+13)\sqrt{4x^2+y^2-1}=(5y+16)x^2+8x+11.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Nhận xét $5x=\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+2\sqrt{xy}\ge 0\Rightarrow x\ge 0$.

Xét trường hợp $x=0$ thì hệ trở thành $\begin{cases}\sqrt{y^2}=0\\(y^2+13)\sqrt{y^2-1}=11\end{cases}\Rightarrow y\in\varnothing$.

Vậy cặp số $(0;y)$ không thỏa mãn hệ, dẫn đến $x>0\Rightarrow y>0$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}-3x+2\sqrt{xy}-2x=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{11x^2-(2x-y)(x+y)-9x^2}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2(xy-x^2)}{\sqrt{xy}+x}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{y(y-x)}{\sqrt{11x^2-(2x+y)(x+y)}+3x}+\frac{2x(y-x)}{\sqrt{xy}+x}=0$$

$$\Leftrightarrow(y-x)\left[\frac{y}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2x}{\sqrt{xy}+x}\right]=0$$

Dễ thấy $\dfrac{y}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\dfrac{2x}{\sqrt{xy}+x}>0,\forall x>0,y>0$, ta thu được $x=y$.

Phương trình thứ hai trở thành $(x^2+6x+13)\sqrt{5x^2-1}=5x^3+16x^2+8x+11$. Điều kiện $x^2\ge\dfrac{1}{5};x>0\Rightarrow x\ge\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Biến đổi đưa về

$$\sqrt{5x^2-1}=\frac{5x^3+16x^2+8x+11}{x^2+6x+13}\Leftrightarrow\sqrt{5x^2-1}-(x+2)=\frac{5x^3+16x^2+8x+11}{x^2+6x+13}-(x+2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{4x^2-4x-5}{\sqrt{5x^2-1}+x+2}=\frac{4x^3+8x^2-17x-15}{x^2+6x+13}\Leftrightarrow\frac{4x^2-4x-5}{\sqrt{5x^2-1}+x+2}=\frac{(x+3)(4x^2-4x-5)}{x^2+6x+13}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^2-4x-5=0\\(\sqrt{5x^2-1}+x+2)(x+3)=x^2+6x+13\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}4x^2-4x-5=0 & (1)\\(x+3)\sqrt{5x^2-1}=x+7 & (2)\end{array}\right.$$

- Giải $(1)\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{1-\sqrt{6}}{2};\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}\right\}$, đối chiếu $x\ge\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow x=y=\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$.
- Giải (2)

$$(2)\Leftrightarrow(x^2+6x+9)(5x^2-1)=x+7\Leftrightarrow 5x^4+30x^3+43x^2-20x-58=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(5x^3+35x^2+78x+58)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=1 & \\5x^3+35x^2+78x+58=0 & (3)\end{array}\right.$$

Rõ ràng $5x^3+35x^2+78x+58>0,\forall x\ge\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ nên ta được $x=y=1$.

Kết luận hệ phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Nhận xét.

Bài toán số 107 này tương tự bài toán số 106, tác giả xin điểm qua một số điểm nhấn trong quá trình khai thác phương trình thứ nhất của hệ như sau

A. Quan sát một lượt, vô vọng đối với phương trình thứ hai, hy vọng đối với phương trình thứ nhất.

B. Biến đổi gọn phương trình thứ nhất $\sqrt{9x^2-xy+y^2}+2\sqrt{xy}=5x$.

C. Sử dụng máy tính Casio Fx – 570ES Plus hoặc tương đương cho phương trình thứ nhất ta được bảng

Tổ hợp phím $\to$	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc
x	100	1000	50	200
y	100	1000	50	200
Mối liên hệ	$x=y$	$x=y$	$x=y$	$x=y$

D. Xác định mối quan hệ $x=y$ và thử nghiệm giá trị theo k: $x=y=k\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{9x^2-xy+y^2}=\sqrt{9k^2}=3\left|k\right|\\ 2\sqrt{xy}=2\sqrt{k^2}=2\left|k\right|\\ 5x=5k\end{cases}$

E. Ghép biểu thức liên hợp

$$\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}-3x+2\sqrt{xy}-2x=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{11x^2-(2x-y)(x+y)-9x^2}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2\left(xy-x^2\right)}{\sqrt{xy}+x}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{y(y-x)}{\sqrt{11x^2-(2x+y)(x+y)}+3x}+\frac{2x(y-x)}{\sqrt{xy}+x}=0$$

$$\Leftrightarrow(y-x)\left[\frac{y}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2x}{\sqrt{xy}+x}\right]=0$$

F. Đánh giá biểu thức hệ quả $T=\dfrac{y}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\dfrac{2x}{\sqrt{xy}+x}$.

G. Vu hồi phương trình thứ nhất $5x=\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+2\sqrt{xy}\geq 0\Rightarrow x\geq 0$.

H. Chú ý khả năng $x=0;y\in\mathbb{R}$ dẫn đến xét và loại trường hợp cặp số $(0;y)$, đồng thời kết hợp $xy\geq 0$ dẫn đến khả năng $x>0,y>0$, loại trừ trường hợp mẫu thức bằng 0 đồng thời đánh giá hoàn thiện T.

Sắp xếp theo thứ tự $H\to G\to F\to E\to D\to C\to B\to A$ ta sẽ thu được lời giải trên.

Về phương trình hệ quả ẩn x tại phương trình thứ hai, đây là một phương trình bậc cao lẫn căn thức khá phức tạp, kỹ thuật sử dụng là liên hợp nghiệm vô tỷ lồng ghép phân thức (Phương pháp sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời), tất nhiên các bạn có thể sử dụng kỹ thuật đặt ẩn phụ không hoàn toàn (Phương pháp đặt ẩn phụ) đều cho kết quả tương tự.

Ý tưởng liên hợp của bài toán cũng được sử dụng tương tự trong câu 9; Đề thi thử sức trước Kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Kim Thành; Huyện Kim Thành; Tỉnh Hải Dương với hình thức khá phức tạp như sau

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+2\sqrt{xy}=5x,\\ 5(x^2-x-6)\sqrt{5y-19}=(y+2)(y+5+4\sqrt{y-4})(\sqrt{y-3}+2).\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Bài toán 108. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x^2-xy-y^2-x+y}+6\sqrt{xy}=7y,\\ \sqrt{2y^2+18}-\sqrt{10x-5}+2y^2-12x+17=0.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2};y\ge0$. Nhận xét cặp số $(x;0)$ không thỏa mãn hệ nên $y>0;x\ge\frac{1}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương

$$\sqrt{3x^2-xy-y^2-x+y}-y+6\sqrt{xy}-6y=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{3x^2-xy-2y^2-x+y}{\sqrt{3x^2-xy-y^2-x+y}+y}+6.\frac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(3x+2y-1)}{\sqrt{3x^2-xy-y^2-x+y}+y}+\frac{6y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0$$
$$\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{3x+2y-1}{\sqrt{3x^2-xy-y^2-x+y}+y}+\frac{6y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0$$

Dễ thấy $3x-1+2y>0,\forall y>0;x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3x+2y-1}{\sqrt{3x^2-xy-y^2-x+y}+y}+\frac{6y}{\sqrt{xy}+y}>0,\forall y>0;x\ge\frac{1}{2}$.

Với $x=y$ thì phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{2x^2+18}-\sqrt{10x-5}+2x^2-12x+17=0$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+18}-x-3+x+2-\sqrt{10x-5}+2(x^2-6x+9)=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{2x^2+18-(x+3)^2}{\sqrt{2x^2+18}+x+3}+\frac{(x+2)^2-(10x-5)}{x+2+\sqrt{10x-5}}+2(x-3)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x-3)^2}{\sqrt{2x^2+18}+x+3}+\frac{(x-3)^2}{x+2+\sqrt{10x-5}}+2(x-3)^2=0$$
$$\Leftrightarrow(x-3)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+18}+x+3}+\frac{1}{x+2+\sqrt{10x-5}}+2\right)=0\quad(1)$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{2x^2+18}+x+3}+\frac{1}{x+2+\sqrt{10x-5}}+2>0,\forall x\ge\frac{1}{2}$, do đó $(1)\Leftrightarrow(x-3)^2=0\Leftrightarrow x=3$ suy ra $x=y=3$.

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=3$.

Nhận xét.

- *Đây là một bài toán tiếp nối các bài toán 106, 107, 108, motip sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức, lồng ghép đánh giá biểu thức hệ quả, duy trì dưới sự trợ giúp của máy tính Casio Fx – 570ES Plus hoặc công cụ tương đương.*
- *Với bài toán số 108 các bạn không nhất thiết phải khai thác yếu tố $y\ge0$ từ phương trình thứ nhất, nguyên do điều này đã có các ĐKXĐ $x\ge\frac{1}{2};xy\ge0$ đảm nhiệm. Tuy nhiên tình huống $y=0;x\in\mathbb{R}$ vẫn cứ xảy ra bình thường, cho nên để loại bỏ đi trường hợp mẫu thức liên hợp bằng 0 chúng ta vẫn xét và loại cặp số $(x;0)$.*

- *Về phần biểu thức hệ quả* $T=\dfrac{3x+2y-1}{\sqrt{3x^2-xy-y^2-x+y}+y}+\dfrac{6y}{\sqrt{xy}+y}$ *nhiều bạn đọc cũng thấy đây là một biểu thức không quá khó, bởi bạn nào cũng biết so sánh* $\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3x+2y-1=3x-1+2y>0,\forall y>0;x\geq\dfrac{1}{2}$*, từ đó kết hợp tổng thể* $\forall y>0;x\geq\dfrac{1}{2}$ *dẫn đến đánh giá T được hoàn chỉnh.*
- *Bài toán số 108 các bạn có thể tạo lập đề bài với hình thức khác như các bài toán trước*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+(x-y)(2x+y-1)}+6\sqrt{xy}=7y,\\ \sqrt{2y^2+18}-\sqrt{10x-5}+2y^2-12x+17=0.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).\qquad [108.1]$

- *Về việc xây dựng bài toán, dường như có một số bạn cảm thấy phương trình thứ nhất của* [108.1] *và các đề bài 106, 108 có vẻ như "dọa ma" những người yếu đuối, bởi vì cái đặc tính cồng kềnh của nó, nhưng thực ra đó đều là những gợi ý dẫn đến lời giải bài toán, nếu thu gọn lại các bạn đều thấy nó ngắn hơn nhưng làm cho quá trình đoán biết nhân tử* $x-y$ *khó khăn hơn*

$$106:\quad \sqrt{9x^2+(2x-3)(x-y)}+4\sqrt{xy}=7y\Leftrightarrow\sqrt{11x^2-2xy-3x+y^2}+4\sqrt{xy}=7y.$$

Duy chỉ có bài toán 107 đã cố tình giấu đi bản chất nhân tử $x-y$ *nhưng khai triển ra thì lại gọn gàng quá*

$$107:\quad \sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+2\sqrt{xy}=5x\Leftrightarrow\sqrt{9x^2-xy+y^2}+2\sqrt{xy}=5x.$$

Vì vậy tác giả mong muốn các bạn hãy mạnh dạn biến đổi, khai triển, tiến tới, phát hiện, thử nghiệm và tự xây dựng được cho mình những đề bài mới, thú vị và mức độ khó cao hơn, đòi hỏi kỹ năng và hàm lượng kiến thức tổng hòa nhiều hơn, nhằm phục vụ cho những bài toán khó trong tương lai và tư duy bổ trợ cho các môn liên quan.

Bài toán 109. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x-y+3,\\ 2\sqrt{x^2+(3x-y)(x-y)}+3\sqrt{xy}=5y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^2+(3x-y)(x-y)\geq 0;x\geq-\dfrac{1}{3};xy\geq 0$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $5y=2\sqrt{x^2+(3x-y)(x-y)}+3\sqrt{xy}\geq 0\Rightarrow y\geq 0$.

Nếu $y=0$ hệ trở thành $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x+3\\ 2\sqrt{4x^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$, suy ra $x=y=0$ là một cặp nghiệm của hệ.

Trường hợp $y>0\Rightarrow x>0$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$2\left[\sqrt{x^2+3(3x-y)(x-y)}-y\right]+3\left(\sqrt{xy}-y\right)=0\Leftrightarrow\frac{2\left[x^2-y^2+3(3x-y)(x-y)\right]}{\sqrt{x^2+(3x-y)(x-y)}+y}+\frac{3\left(xy-y^2\right)}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(x-y)(5x-y)}{\sqrt{x^2+(3x-y)(x-y)}+y}+\frac{3y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{4(5x-y)}{\sqrt{x^2+(3x-y)(x-y)}+y}+\frac{3y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0$$

Ta có

$$x>0\Rightarrow 3x-y=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}-3>1+2-3=0\Rightarrow 5x-y=3x-y+2x>0$$

$$\Rightarrow\frac{4(5x-y)}{\sqrt{x^2+(3x-y)(x-y)}+y}+\frac{3y}{\sqrt{xy}+y}>0,\forall x>0,y>0$$

Vậy ta thu được $x=y$ và phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=2x+3 \Leftrightarrow 2x+3-\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+4}=0$$
$$\Leftrightarrow x+1-\sqrt{3x+1}+x+2-\sqrt{5x+4}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0 \quad (1)$$

Ta thấy $\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}>0, \forall x\ge 0$ nên $(1)\Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x\in\{0;1\}$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=y=0; x=y=1$.

Bài toán 110. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x^2+(x-y)(x-3)}+11\sqrt{xy}=13y,\\ 3x^3+3x^2-4x+3=\sqrt{3y+1}+\sqrt{5y+4}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^2+(x-y)(x-3)\ge 0; xy\ge 0; y\ge -\frac{1}{3}$.

Từ phương trình thứ nhất ta có $13y=\sqrt{4x^2+(x-y)(x-3)}+11\sqrt{xy}\ge 0 \Rightarrow y\ge 0$.

Nếu $y=0$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases}\sqrt{4x^2+x(x-3)}=0\\ 3x^3+3x^2-4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(5x-3)=0\\ x(3x^2+3x-4)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0$.

Vậy hệ nhận $x=y=0$ là một nghiệm. Xét khả năng $y>0\Rightarrow x>0$, phương trình thứ nhất của bài toán trở thành

$$\sqrt{4x^2+(x-y)(x-3)}-2y+11\sqrt{xy}-11y=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4(x^2-y^2)+(x-y)(x-3)}{\sqrt{4x^2+(x-y)(x-3)}+2y}+\frac{11(xy-y^2)}{\sqrt{xy}+y}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(5x+4y-3)}{\sqrt{4x^2+(x-y)(x-3)}+2y}+\frac{11y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{5x+4y-3}{\sqrt{4x^2+(x-y)(x-3)}+2y}+\frac{11y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0$$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$$3x^3+3x^2-4x=\sqrt{3y+1}+\sqrt{5y+4}-3>\sqrt{1}+\sqrt{4}-3=0, \forall y>0$$
$$\Rightarrow \begin{cases}x(3x^2+3x-4)>0\\ x>0\end{cases} \Rightarrow x>\frac{-3+\sqrt{57}}{6}>\frac{3}{4}\Rightarrow 5x-3>0\Rightarrow 5x+4y-3>0$$
$$\Rightarrow \frac{5x+4y-3}{\sqrt{4x^2+(x-y)(x-3)}+2y}+\frac{11y}{\sqrt{xy}+y}>0, \forall x>\frac{3}{4}, y>0$$

Do đó ta được $x=y$ và phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$3x^3+3x^2-4x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$$
$$\Leftrightarrow 3x^3+3x^2-6x+x+1-\sqrt{3x+1}+x+2-\sqrt{5x+4}=0$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-x)(x+2)+x+1-\sqrt{3x+1}+x+2-\sqrt{5x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)(x+2)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left[3(x+2)+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right]=0 \quad (1)$$

Ta thấy $3(x+2)+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}>0,\forall x\ge -\frac{1}{3}$ nên đưa về $x(x-1)=0\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$.

Kết luận hệ phương trình có hai nghiệm $x=y=0;x=y=1$.

Bài toán 111. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(y^2-4y-x\right)(x+1)+x^2+2x+5=0,\\ \sqrt{x^2+(x-y)(y-3)}+7\sqrt{xy}=8y.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+(x-y)(y-3)\ge 0;xy\ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $8y=\sqrt{x^2+(x-y)(y-3)}+7\sqrt{xy}\ge 0\Rightarrow y\ge 0$.

Nếu $y=0$ thì hệ trở thành $\begin{cases}-x(x+1)+x^2+2x+5=0\\ \sqrt{x^2-3x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\ x(x-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing\Rightarrow(x;0)$ không là nghiệm.

Xét trường hợp $y>0\Rightarrow x>0$, phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x^2+(x-y)(y-3)}-y+7\sqrt{xy}-7y=0\Leftrightarrow\frac{x^2-y^2+(x-y)(y-3)}{\sqrt{x^2+(x-y)y}+y}+7.\frac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(x+2y-3)}{\sqrt{x^2+(x-y)y}+y}+\frac{7y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{x+2y-3}{\sqrt{x^2+(x-y)y}+y}+\frac{7y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0 \quad (1)$$

Từ phương trình thứ nhất ta có

$$\left(x+4y-y^2\right)(x+1)=x^2+2x+5\Leftrightarrow x+4y-y^2=\frac{x^2+2x+5}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x+4y-y^2=4+\frac{x^2-2x+1}{x+1}\Leftrightarrow x+2y-3=\frac{x^2-2x+1}{x+1}+y^2-2y+1$$

$$\Leftrightarrow x+2y-3=\frac{(x-1)^2}{x+2}+(y-1)^2\Rightarrow x+2y-3\ge 0,\forall x>0$$

Do đó $\frac{x+2y-3}{\sqrt{x^2+(x-y)y}+y}+\frac{7y}{\sqrt{xy}+y}>0,\forall y>0,x>0$, dẫn đến $(1)\Leftrightarrow x=y$.

Phương trình thứ nhất khi đó trở thành

$$\left(x^2-5x\right)(x+1)+x^2+2x+5=0\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x+5=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-2x-5\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{1;1+\sqrt{6};1-\sqrt{6}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm của hệ là $x=y=1;x=y=1+\sqrt{6}$.

Bài toán 112. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{6x^2-4xy-y^2+8y-8x}+2\sqrt{xy}=3y,\\ x^3+x^2y-5x^2-3xy+2x+4=0.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $6x^2-4xy-y^2+8y-8x\ge 0;xy\ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ $3y=\sqrt{6x^2-4xy-y^2+8y-8x}+2\sqrt{xy}\ge 0\Rightarrow y\ge 0$.

Nếu $y=0$ thì hệ trở thành $\begin{cases}\sqrt{6x^2-8x}=0\\x^3-5x^2+2x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left\{0;\dfrac{4}{3}\right\}\\x^3-5x^2+2x+4=0\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing\Rightarrow(x;0)$ không là nghiệm.

Xét trường hợp $y>0\Rightarrow x>0$, phương trình thứ nhất trở thành

$$\sqrt{x^2+(x-y)(5x+y-8)}-y+2\left(\sqrt{xy}-y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-y^2+(x-y)(5x+y-8)}{\sqrt{x^2+(x-y)(5x+y-8)}+y}+\frac{2\left(xy-y^2\right)}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(6x+2y-8)}{\sqrt{x^2+(x-y)(5x+y-8)}+y}+\frac{2y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{2(3x+y-4)}{\sqrt{x^2+(x-y)(5x+y-8)}+y}+\frac{2y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0\quad(1)$$

Phương trình thứ hai tương đương $(3x+y-4)(x+1)=(x-1)^2(x+y)\Leftrightarrow 3x+y-4=\dfrac{(x-1)^2(x+y)}{x+1}$.

Rõ ràng

$$\frac{(x-1)^2(x+y)}{x+1}\ge 0,\forall x>0,y>0\Rightarrow 3x+y-4\ge 0,\forall x>0,y>0$$

$$\Rightarrow\frac{2(3x+y-4)}{\sqrt{x^2+(x-y)(5x+y-8)}+y}+\frac{2y}{\sqrt{xy}+y}>0,\forall x>0,y>0$$

Vậy $(1)\Leftrightarrow x=y$ và phương trình thứ hai khi đó trở thành

$$2x^3-8x^2+2x+4=0\Leftrightarrow x^3-4x^2+x+2=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-3x-2\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{1;\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

So sánh với điều kiện biến dương ta thu được hai cặp nghiệm $x=y=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};x=y=1$.

Bài toán 113. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x^2-3xy-3x+3y}+3\sqrt{xy}=4y.\\\sqrt{x+2y-2}+\sqrt{3x-y-1}+x^2y+2xy=5x.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^2-3xy-3x+3y\ge 0;xy\ge 0;x+2y-2\ge 0;3x-y-1\ge 0$.

Từ điều kiện $\begin{cases}x.2y\ge 0\\x+2y\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\2y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$ vì các cặp $(0;y),(x;0)$ không thỏa mãn hệ.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\sqrt{4x^2-3xy-3x+3y}-y+3\left(\sqrt{xy}-y\right)=0\Leftrightarrow\frac{4x^2-3xy-y^2-3x+3y}{\sqrt{4x^2-3xy-3x+3y}+y}+\frac{3\left(xy-y^2\right)}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(4x+y-3)}{\sqrt{4x^2-3xy-3x+3y}+y}+\frac{3y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{4x+y-3}{\sqrt{4x^2-3xy-3x+3y}+y}+\frac{3y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0.$$

Lại có $\begin{cases} x+2y-2\geq 0 \\ 3x-y-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 4x+y-3\geq 0 \Rightarrow \dfrac{4x+y-3}{\sqrt{4x^2-3xy-3x+3y}+y}+\dfrac{3y}{\sqrt{xy}+y}>0, \forall x,y>0$.

Do đó ta được hai biến bằng nhau và phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}+x^3+2x^2-5x=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-1+\sqrt{2x-1}-1+x^3+2x^2-5x+2=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-1+\sqrt{2x-1}-1+(x-1)(x^2+3x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)(x^2+3x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x^2+3x-2\right)=0$$

Dễ thấy $\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x^2+(3x-2)>0, \forall x\geq \dfrac{2}{3}$ nên ta được $x=1\Rightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

Nhận xét.

Bài toán số 113 này các bạn đều thấy không nhất thiết phải khai thác triệt để điều kiện $y\geq 0$ từ phương trình thứ nhất như các bài toán trước bởi vì đã có phương trình thứ hai phụ hợp dưới dạng tổng – tích Viete

$$\begin{cases} x.2y\geq 0 \\ x+2y\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 2y\geq 0 \end{cases}$$

Tuy nhiên trường hợp mẫu thức bằng 0 trong phép liên hợp vẫn xảy ra nên buộc lòng chúng ta phải xét và loại các trường hợp hy hữu $(0;y),(x;0)$.

Đối với việc xử lý biểu thức hệ quả T, các bạn lưu ý đôi khi chúng ta cần kết hợp tuyến tính các điều kiện nhỏ trong ĐKXĐ tổng hòa của hệ

$$\begin{cases} x+2y-2\geq 0 \\ 3x-y-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 4x+y-3\geq 0 \Rightarrow \frac{4x+y-3}{\sqrt{4x^2-3xy-3x+3y}+y}+\frac{3y}{\sqrt{xy}+y}>0, \forall x,y>0.$$

Ngoài ra còn một số đơn cử như

- *A;* $\begin{cases} x+2y-3\geq 0 \\ 3x+y-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-6\geq 0 \\ 3x+y-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 5x+5y-7\geq 0$.
- *B;* $\begin{cases} x+2y-3\geq 0 \\ 3x+y-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3\geq 0 \\ 9x+3y-3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 10x+5y-6\geq 0$.

Khi đó các bạn cần bố trí phương trình thứ hai có các điều kiện A; B đồng thời thay thế vào biểu thức hệ quả T và làm ngược sẽ thu được những bài toán có đánh giá T theo ý muốn riêng mình

$$\ldots \Leftarrow T=\frac{5x+5y-7}{\sqrt{4x^2-3xy-3x+3y}+y}+\frac{3y}{\sqrt{xy}+y}>0, \forall x,y>0$$
$$\ldots \Leftarrow T=\frac{10x+5y-6}{\sqrt{4x^2-3xy-3x+3y}+y}+\frac{3y}{\sqrt{xy}+y}>0, \forall x,y>0$$

Bài toán 114. Trích lược bài toán T4/418; Đề ra kỳ này; Số 418; Tháng 4 năm 2012; Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ; Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam.
Tác giả: Phạm Kim Chung – Giáo viên Trường THPT Đặng Thúc Hứa; Huyện Thanh Chương; Tỉnh Nghệ An.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y},\\(x+1)\left[y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right]=4.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $xy+(x-y)\left(\sqrt{xy-2}\right)\ge 0; x\ge 0; y\ge 0$.

Xét trường hợp $y=0$ thì hệ trở thành $\begin{cases}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)+\sqrt{x}=0\\(x+1)\left(x-x^2\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{x}=0\\(x+1)\left(x-x^2\right)=4\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$.

Vậy hệ không nhận cặp nghiệm $(x;0)\Rightarrow y>0\Rightarrow x>0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy-2}\right)}-y+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0\Leftrightarrow\frac{xy-y^2+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)\left(y+\sqrt{xy}-2\right)}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0$$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$$y+\sqrt{xy}=x^2-x+\frac{4}{x+1}=x^2-2x+1+x+1+\frac{4}{x+1}-2=(x-1)^2+\frac{x^2+2x+5}{x+1}-2$$
$$=(x-1)^2+\frac{(x-1)^2+4(x+1)}{x+1}-2=(x-1)^2+\frac{(x-1)^2}{x+1}+2\ge 2,\forall x>0$$

Điều này dẫn đến $y+\sqrt{xy}-2\ge 0\Rightarrow\dfrac{x+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0,\forall x,y>0$.

Với $x=y$ thì phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{cases}x>0\\x^3-2x^2-3x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\(x-1)\left(x^2-x-4\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\in\left\{1;\frac{1+\sqrt{17}}{2};\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right\}\end{cases}\Rightarrow x\in\left\{1;\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}.$$

Kết luận hệ phương trình đề bài có hai nghiệm $x=y=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}; x=y=1$.

Nhận xét.

- *Về phần định hướng nhân tử $x-y$ bằng công cụ máy tính Casio Fx – 570ES Plus (hoặc tương đương) quen thuộc và xét trường hợp hy hữu $(x;0)\vee(0;y)$ phá bỏ mẫu thức đạt giá trị 0 tác giả xin không bình luận nữa,*
- *Mấu chốt thứ hai của bài toán là chứng minh bất đẳng thức $y+\sqrt{xy}\ge 2$ (tức là $y+\sqrt{xy}-2\ge 0$), dựa trên khai thác điều kiện tổng thể hệ phương trình. Phép chứng minh trong lời giải sử dụng biến đổi đại số thuần túy lớp 8 THCS với bám sát điểm rơi $x=1$, có thể nói đây là một biến đổi đẹp, cơ bản và rất đáng học tập. Ngoài ra các bạn có thể sử dụng một kiểu biến đổi khác nhưng tụ nhiên hơn nhiều, đó là phân tích đa thức nhân tử*

$$y+x-2=x^2-x+\frac{4}{x+1}=\frac{x^3-x+4}{x+1}=\frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}\ge 0,\forall x>0.$$

- *Nhiều bạn học sinh và độc giả đã học liên chương trình Đại số – Giải tích lớp 11 – 12 THPT có thể nghĩ ngay đến công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số để xử lý không mấy khó khăn*

- $y+x-2=x^2-x+\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{x^3-x+4}{x+1}=f(x);x>0$.
- Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(2x^2+5x+5)}{(x+1)^2}$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.
- Khảo sát biến thiên ta có $f(0)=4;f(1)=2\Rightarrow f(x)\ge \min\limits_{x>0} f(x)=f(1)=2$.
  - *Một số bạn để ý điều kiện biến dương và sẵn có đường lối tư duy chiều sâu bất đẳng thức có thể sử dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân AM – GM (thường gọi Cauchy tại Việt Nam) cũng rất khả quan như sau*

$$y+\sqrt{xy}=x^2-x+\frac{4}{x+1}=x^2-2x+1+x+1+\frac{4}{x+1}-2$$
$$=(x-1)^2+\left(x+1+\frac{4}{x+1}\right)-2\ge 0+2\sqrt{(x+1).\frac{4}{x+1}}-2=2.2-2=2$$

Bài toán 115. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y-5)\sqrt{2x+y}+(x+2y-7)\sqrt{4x-y}=(2x+3y-12)\sqrt{x+2y},\\ 3\sqrt{2+y}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-y^2}=10-3x.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Trường hợp các biến đồng thời bằng 0 không thỏa mãn hệ.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+y-5)\left(\sqrt{2x+y}-\sqrt{x+2y}\right)+(x+2y-7)\left(\sqrt{4x-y}-\sqrt{x+2y}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y-5).\frac{x-y}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+(x+2y-7).\frac{x-y}{\sqrt{4x-y}+\sqrt{x+2y}}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y-5}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\frac{x+2y-7}{\sqrt{4x-y}+\sqrt{x+2y}}\right)=0$$

Nhận xét từ điều kiện $-2\le y\le 2;x\le 2\Rightarrow\begin{cases}x+y\le 4\\ x+2y\le 6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y-5<0\\ x+2y-7<0\end{cases}$

Dẫn đến $\dfrac{x+y-5}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}+\dfrac{x+2y-7}{\sqrt{4x-y}+\sqrt{x+2y}}<0\Rightarrow x=y$.

Phương trình thứ hai trở thành $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$. Điều kiện $-2\le x\le 2$.

Đặt $\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}=t\Rightarrow t^2=10-3x-4\sqrt{4-x^2}$. Phương trình đã cho trở thành

$$3t=t^2\Leftrightarrow t(t-3)=0\Leftrightarrow t\in\{0;3\}.$$

- $t=0\Leftrightarrow\sqrt{2+x}=2\sqrt{2-x}\Leftrightarrow 2+x=8-4x\Leftrightarrow x=\dfrac{6}{5}$.
- $t=3\Leftrightarrow\sqrt{2+x}=2\sqrt{2-x}+3\Leftrightarrow 2+x=8-4x+9+12\sqrt{2-x}\Leftrightarrow 5x-15=12\sqrt{2-x}\quad (1)$.

Phương trình (1) vô nghiệm vì $5x-15<0,\forall x\le 2$. Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=y=\dfrac{6}{5}$.

Nhận xét.

- ✓ *Phương trình thứ hai của hệ được tác giả làm ngược từ câu II.2; Đề thi tuyển sinh Đại học; Môn Toán; Khối B; Đề thi chính thức; Đợt 2; Mùa thi 2011; Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam.*

✓ *Bài toán số 115 chính là bài toán có biểu thức hệ quả T cần đánh giá trên cơ sở kết hợp tuyến tính các điều kiện nhỏ trong ĐKXĐ tổng hòa của hệ*

$$-2 \le y \le 2; x \le 2 \Rightarrow \begin{cases} x+y \le 4 \\ x+2y \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-5<0 \\ x+2y-7<0 \end{cases}$$

Công bằng mà nói đây là một phép đánh giá khó, đào sâu và phải đầu tư thời gian, kinh nghiệm.

Bài toán 116. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x-2y+\sqrt{4-x^2}=2+3(2x-y)\sqrt{4-y^2}, \\ (x-3)\sqrt{3x+y}+(y-4)\sqrt{8x+y}=(2x+3y-18)\sqrt{y}. \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Trường hợp các biến đồng thời bằng 0 không thỏa mãn hệ.

Ngoài trường hợp đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-3)\sqrt{3x+y}+(y-4)\sqrt{8x+y}=\left[2(x-3)+3(y-4)\right]\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{3x+y}-2\sqrt{y}\right)+(y-4)\left(\sqrt{8x+y}-3\sqrt{y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3).\frac{3(x-y)}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+(y-4).\frac{8(x-y)}{\sqrt{8x+y}+3\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(3.\frac{x-3}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+8.\frac{y-4}{\sqrt{8x+y}+3\sqrt{y}}\right)=0$$

Rõ ràng từ điều kiện $\begin{cases} x \in [-2;2] \\ y \in [-2;2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ y-4<0 \end{cases} \Rightarrow 3.\dfrac{x-3}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+8.\dfrac{y-4}{\sqrt{8x+y}+3\sqrt{y}}<0 \Rightarrow x=y$.

Lúc đó phương trình thứ hai trở thành $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$. Điều kiện $-2 \le x \le 2$.

Đặt $x+\sqrt{4-x^2}=t \Rightarrow t^2=4+2x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x\sqrt{4-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$. Phương trình trở thành

$$t=2+3.\frac{t^2-4}{2} \Leftrightarrow 3t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow (t-2)(3t+4)=0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{4}{3};2\right\}.$$

- $t=-\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=-x-\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{4}{3} \\ 9(4-x^2)=9x^2+24x+16 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{2+\sqrt{14}}{3}$.
- $t=2 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ 4-x^2=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0;2\}$.

Rõ ràng $x=y \Rightarrow x; y$ phải cùng không âm. Kết luận nghiệm $x=y=2$.

Bài toán 117. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2y-7)\sqrt{\dfrac{x}{y}+3}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}+13=4y, \\ x^2-6x+26=6\sqrt{1+2y}. \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $xy \ge 0; y \ne 0; 1+2y \ge 0$. Từ phương trình thứ hai ta có

$$(x-3)^2+17=6\sqrt{1+2y} \Rightarrow 6\sqrt{1+2y} \ge 17 \Rightarrow 1+2y \ge \left(\frac{17}{6}\right)^2 \Rightarrow y \ge \frac{253}{71} > \frac{7}{2} \Rightarrow 2y-7>0.$$

Phương trình thứ hai đưa về

$$(2y-7)\sqrt{x+3y}+\sqrt{x}=(4y-13)\sqrt{y} \Leftrightarrow (2y-7)\sqrt{x+3y}-2(2y-7)\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$$

$$(2y-7)\left(\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}\right)+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow \frac{2(2y-7)(x-y)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{2(2y-7)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \dfrac{2(2y-7)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0 \end{array}\right.$$

Rõ ràng $\dfrac{2(2y-7)}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0, \forall y>\dfrac{7}{2}, x>0$ nên ta được $x=y$. Phương trình thứ hai trở thành

$$x^2-6x+26=6\sqrt{1+2x} \Leftrightarrow x^2-6x+26-6\sqrt{1+2x}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+1-6\sqrt{2x+1}+9+x^2-8x+16=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-3\right)^2+(x-4)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1}=3 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow x=y=4$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Bài toán số 117 được tác giả manh nha từ phương trình sử dụng phân tích tổng bình phương (phương pháp biến đổi tương đương – nâng lũy thừa)

$$x^2-6x+26=6\sqrt{1+2x} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Với lý do vế trái đưa được về hằng đẳng thức, thay biến x ở vế phải bởi y rõ ràng biến y sẽ bị co lại miền giá trị

$$(x-3)^2+17=6\sqrt{1+2y} \Rightarrow 6\sqrt{1+2y}\ge 17 \Rightarrow 1+2y\ge\left(\frac{17}{6}\right)^2 \Rightarrow y\ge\frac{253}{71}>\frac{7}{2}\Rightarrow 2y-7>0.$$

Lúc này chúng ta sẽ sử dụng một phương trình hai ẩn tồn tại khả năng liên hợp, lựa chọn $x=y$ như ở trên, cụ thể

$$\left(\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}\right)+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0 \quad (*).$$

Tại (*), việc lựa chọn căn phía sau là $\sqrt{y}$ để (*) chỉ chứa tối đa ba căn thức khác nhau, đây là yếu tố thuận lợi để làm gọn phương trình cũng như giấu đi bản chất của phép liên hợp, chống phá nhóm tách được tức khắc. Các bạn hãy để ý nếu nâng cấp (*) như sau cũng không thay đổi bản chất, ngoài việc tạo ra biểu thức hệ quả T cồng kềnh với yêu cầu đánh giá chiều sâu

$$f(x;y).\left(\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}\right)+k\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0 \qquad \left[f(x;y)>0;k>0\right].$$

Với ý tưởng này tôi lựa chọn $f(x;y)\equiv 2y-7$ và $k=1$ và tiến hành khai triển, thu được bài toán tiền đề như sau

$$\begin{cases} (2y-7)\sqrt{x+3y}+\sqrt{x}=(4y-13)\sqrt{y}, \\ x^2-6x+26=6\sqrt{1+2y}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$$

Với ý muốn giấu đi bản chất liên hợp hơn nữa, tôi đã nghĩ đến cách chia xuống, ở đây chia hai vế cho $\sqrt{y}$ dựa trên cơ sở $y>\dfrac{7}{2}$, với tinh thần cứ chia đã, đề bài như thế nào ta tính tiếp

$$\begin{cases} (2y-7)\sqrt{\dfrac{x}{y}+3}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}+13=4y, \\ x^2-6x+26=6\sqrt{1+2y}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$$

Đến đây tác giả chợt nhận ra để quy đồng tiến hành liên hợp, bắt buộc cần xác định dấu của y, và đằng nào cũng đánh giá miền giá trị của y, một công đôi việc. Nếu để nguyên và liên hợp cũng ổn thỏa nhưng cồng kềnh hơn

$$(2y-7)\sqrt{\frac{x}{y}+3}+\sqrt{\frac{x}{y}}+13=4y \Leftrightarrow (2y-7)\left(\sqrt{\frac{x}{y}+3}-2\right)+\sqrt{\frac{x}{y}}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2y-7)\left(\frac{x}{y}-1\right)}{\sqrt{\frac{x}{y}+3}+2}+\frac{\frac{x}{y}-1}{\sqrt{\frac{x}{y}}+1}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}-1\right)\left[\frac{2y-7}{\sqrt{\frac{x}{y}+3}+2}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}+1}\right]=0$$

Bài toán 118. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2(x-2)\sqrt{x}+(y^2-5)\sqrt{x+8y}=(3y^2+2x-19)\sqrt{y},\\ y^2=x+3+2(x-1)\sqrt{x-3}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge 3; y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2(x-2)\sqrt{x}+(y^2-5)\sqrt{x+8y}=\left[(3y^2-15)+2(x-2)\right]\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+(y^2-5)\left(\sqrt{x+8y}-3\sqrt{y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2).\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+(y^2-5).\frac{x-y}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{2(x-2)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{y^2-5}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}\right]=0$$

Nhận xét

$$x\ge 3\Rightarrow y^2=x+3+2(x-1)\sqrt{x-3}\ge 6>5$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ y^2>5\end{cases}\Rightarrow \frac{2(x-2)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{y^2-5}{\sqrt{x+8y}+3\sqrt{y}}>0\Rightarrow x=y$$

Khi đó phương trình thứ hai tương đương với $x^2=x+3+2(x-1)\sqrt{x-3}$.
Điều kiện $x\ge 3$. Phương trình trên tương đương

$$\left[x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{x-3}+x-3\right]-4x-4+4\sqrt{x-3}+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{x-3}\right)^2-4\left(x+1-\sqrt{x-3}\right)+3=0$$

Đặt $x+1-\sqrt{x-3}=t$ thu được $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow (t-1)(t-3)=0\Leftrightarrow t\in\{1;3\}$.

- $t=1\Leftrightarrow x=\sqrt{x-3}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ x^2-x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.
- $t=3\Leftrightarrow x-2=\sqrt{x-3}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x^2-4x+4=x-3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x+7=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Phương trình ẩn x vô nghiệm nên kết luận hệ ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 119. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x-y)\sqrt{3x+y}=(4x-2y-51)\sqrt{y}+17\sqrt{8x+y},\\ x^2-5x+24=6\sqrt{2x-y+6}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $y\ge 0; 3x+y\ge 0; 8x+y\ge 0$.
Từ phương trình thứ hai ta có

$$6\sqrt{2x-y+6}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{71}{4}\geq\frac{71}{4},\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 2x-y+6\geq\frac{1}{6}.\left(\frac{71}{4}\right)^2>52\Rightarrow 2x-y>46.$$

Hơn nữa khi đó $2x>y+46\geq 46>0\Rightarrow x>0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$(2x-y)\sqrt{3x+y}-2(2x-y)\sqrt{y}=17\left(\sqrt{8x+y}-3\sqrt{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow(2x-y)\left(\sqrt{3x+y}-2\sqrt{y}\right)=17\left(\sqrt{8x+y}-3\sqrt{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{3(2x-y)(x-y)}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}=\frac{17.8(x-y)}{\sqrt{8x+y}+3\sqrt{y}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ \dfrac{3(2x-y)}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}=\dfrac{136}{\sqrt{8x+y}+3\sqrt{y}}\quad(1)\end{array}\right.$$

Ta có nhận xét

$$\begin{cases}\sqrt{3x+y}<\sqrt{8x+y},\forall x>0\\ 2\sqrt{y}\leq 3\sqrt{y},\forall y\geq 0\end{cases}\Rightarrow 0<\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}<\sqrt{8x+y}+3\sqrt{y},\forall y\geq 0,\forall x>0.$$

Kết hợp $2x-y>46>0$ ta được

$$\frac{1}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}>\frac{1}{\sqrt{8x+y}+3\sqrt{y}}\Rightarrow\frac{3(2x-y)}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}>\frac{3.46}{\sqrt{8x+y}+3\sqrt{y}}>\frac{136}{\sqrt{8x+y}+3\sqrt{y}}.$$

Do đó (1) vô nghiệm dẫn đến hai biến bằng nhau và phương trình thứ hai trở thành

$$x^2-5x+24=6\sqrt{x+6}\Leftrightarrow x^2-5x+24-6\sqrt{x+6}=0$$

$$\Leftrightarrow x+6-6\sqrt{x+6}+9+x^2-6x+9=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+6}-3\right)^2+(x-3)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+6}=3\\ x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3\Rightarrow x=y=3$$

Đối chiếu điều kiện đi đến hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 120. Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x^2+4x+10y+\sqrt{x+2}=2y^2+3xy+\sqrt{y}+12,\\ 2y-1=\sqrt{10x-6}+\sqrt{12x-3}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x\geq\frac{3}{5};y\geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$5x^2-3xy-2y^2+4x+10y-12+\sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(5x^2+2xy-6x\right)-5xy-2y^2+6y+(10x+4y-12)+\sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y+2)(5x+2y-6)+\frac{x-y+2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y+2)\left(5x+2y-6+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}\right)=0\quad(1)$$

Từ phương trình thứ hai $2y-1=\sqrt{10x-6}+\sqrt{12x-3}\geq\sqrt{12.\frac{3}{5}-3}=\sqrt{\frac{21}{5}}\Rightarrow 2y\geq\sqrt{\frac{21}{5}}+1>3$.

Do đó $5x+2y-6>3+3-6=0,\forall x\geq\frac{3}{5},\forall 2y>3\Rightarrow 5x+2y-6+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}>0$.

Ta được $y=x+2$, phương trình thứ hai trở thành

$$2(y-2)+3=\sqrt{10x-6}+\sqrt{12x-3} \Leftrightarrow 2x+3=\sqrt{10x-6}+\sqrt{12x-3}$$

$$\Leftrightarrow x+1-\sqrt{10x-6}+x+2-\sqrt{12x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-8x+7}{x+1+\sqrt{10x-6}}+\frac{x^2-8x+7}{x+2+\sqrt{12x-3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-8x+7)\left(\frac{1}{x+1+\sqrt{10x-6}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{12x-3}}\right)=0$$

Lại có $\frac{1}{x+1+\sqrt{10x-6}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{12x-3}}>0,\forall x\ge\frac{3}{5} \Rightarrow x^2-8x+7=0 \Leftrightarrow x\in\{1;7\}$.

Kết luận hệ có nghiệm $(x;y)=(1;3),(7;9)$.

Nhận xét.

Các bước phân tích bài toán số 120 các bạn có thể tham khảo như sau

- Sử dụng máy tính bỏ túi Casio Fx – 570 ES Plus hoặc tương đương đối với phương trình thứ nhất của hệ ta có bảng

Tổ hợp phím $\rightarrow$	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc	Shift Calc
x	100	1000	50	200
y	102	1002	52	202
Mối liên hệ	$y=x+2$	$y=x+2$	$y=x+2$	$y=x+2$

- Biến đổi phương trình thứ nhất $5x^2-3xy-2y^2+4x+10y-12+\sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0$.
- Phân tích nhân tử đa thức men theo $y=x+2$: $5x^2-3xy-2y^2+4x+10y-12\equiv(x-y+2)(5x+2y-6)$.
- Ghép biểu thức liên hợp

$$(x-y+2)(5x+2y-6)+\frac{x-y+2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}=0 \Leftrightarrow (x-y+2)\left(5x+2y-6+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}\right)=0.$$

- Đánh giá biểu thức hệ quả T với $T=5x+2y-6+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}$.
- Đối mặt chướng ngại vật $f(x;y)=5x+2y-6$ và thấy ĐKXĐ $x\ge\frac{3}{5};y\ge0$ là chưa đủ.
- Thử nghiệm khai thác phương trình thứ hai theo các hướng lỏng và chặt

  Hướng 1. $2y-1=\sqrt{10x-6}+\sqrt{12x-3}>0 \Rightarrow y>\frac{1}{2} \Rightarrow 5x+2y-6\ge 5.\frac{3}{5}+2.\frac{1}{2}-6=-2 \qquad (69,96\%)$.

  Hướng 2.

$$2y-1=\sqrt{10x-6}+\sqrt{12x-3}\ge\sqrt{12.\frac{3}{5}-3}=\sqrt{\frac{21}{5}} \Rightarrow 2y\ge\sqrt{\frac{21}{5}}+1>3$$

$$\Rightarrow 5x+2y-6>5.\frac{3}{5}+3-6=0 \qquad (96,69\%)$$

- Quyết định cuối cùng là đánh giá T theo hướng 2 và thu được hai biến bằng nhau.
- Thay thế vào phương trình thứ hai và lựa chọn phương pháp giải phương trình vô tỷ.
- Sử dụng máy tính bỏ túi Casio Fx – 570 ES Plus hoặc công cụ tương đương ta thấy có hai nghiệm hữu tỷ đẹp $x=1;x=7$ nên tiến hành liên hợp biểu thức, kết luận nghiệm.

Bài toán 121. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{3x+y}+(1-x)\sqrt{x}=(x+1)\sqrt{y}, \\ \sqrt{y+4}-\sqrt{y+1}=\sqrt{2x-1}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2};y\ge 0$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $\sqrt{y+4}+\sqrt{y+1}>\sqrt{4}+\sqrt{1}=3>0\forall y\ge 0$, do đó

$$\sqrt{2x-1}=\frac{3}{\sqrt{y+4}+\sqrt{y+1}}<\frac{3}{3}=1\Rightarrow 2x-1<1\Leftrightarrow x<1\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2};1\right).$$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\sqrt{3x+y}-2x\sqrt{y}+(1-x)\sqrt{x}+(x-1)\sqrt{y}=0\Leftrightarrow x\left(\sqrt{3x+y}-2\sqrt{y}\right)+(1-x)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x(x-y)}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+\frac{(1-x)(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{3x}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0$$

Dễ thấy $\frac{3x}{\sqrt{3x+y}+2\sqrt{y}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0,\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right),y\ge 0$ nên ta được $x=y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-1}\quad(1)$.

Nhận xét $\sqrt{x+4}>\sqrt{x+1}$ với mọi x nên

$$(1)\Leftrightarrow 2x+5-2\sqrt{x^2+5x+4}=2x-1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+5x+4}=3$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-5=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-5+3\sqrt{5}}{2};\frac{-5-3\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm $x=\frac{-5+3\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=y=\frac{-5+3\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 122. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y, \\ 4\sqrt{(x+2)(y+2)}=3(x+3). \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^2+(4x-9)(x-y)\ge 0;xy\ge 0;(x+2)(y+2)\ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất ta có $3y=\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}\ge 0\Rightarrow y\ge 0$.

Nếu $y=0$ hệ trở thành $\begin{cases} \sqrt{4x^2+x(4x-9)}=0 \\ 4\sqrt{2(x+2)}=3x+9 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x(8x-9)=0 \\ 4\sqrt{2(x+2)}=3x+9 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Vậy $(x;0)$ không là nghiệm của hệ dẫn đến $y>0\Rightarrow x>0$. Phương trình thứ nhất tương đương

$$\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}-2y+\sqrt{xy}-y=0\Leftrightarrow\frac{4(x^2-y^2)+(4x-9)(x-y)}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(8x+4y-9)}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y}{\sqrt{xy}+y}\right)=0$$

Từ phương trình thứ hai của hệ, áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$4\sqrt{y+2x}=\frac{3(x+3)}{\sqrt{x+2}}=3\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\ge 3\sqrt{\sqrt{x+2}.\frac{1}{\sqrt{x+2}}}=3.2=6$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y+2x}\ge 3\Rightarrow 8x+4y-9\ge 0\Rightarrow \frac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y}{\sqrt{xy}+y}>0,\forall y>0$$

Ta thu được hai biến bằng nhau và phương trình thứ hai trở thành

$$4\sqrt{3x(x+2)}=3(x+3)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\39x^2+42x-81=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow x=y=1.$$

Đối chiếu, kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 123. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y-3\sqrt{x+3}=3\sqrt{y-5},\\\sqrt{x^2+16(y-x)}+y=2\sqrt{xy}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;y\ge 5;x^2+16(y-x)\ge 0$.

Xét phương trình đầu tiên, đặt $\sqrt{y-5}=t,t\ge 0\Rightarrow t^2-3t-3\sqrt{x+3}+5=0$.

Coi phương trình này là phương trình bậc hai ẩn *t* tham số *x*, điều kiện có nghiệm là

$$\Delta=9-4\left(-3\sqrt{x+3}+5\right)\ge 0\Leftrightarrow 4(x+3)-12\sqrt{x+3}-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{x+3}\le\frac{6+2\sqrt{10}}{4}\Rightarrow x<16$$

Phương trình thứ hai tương đương với

$$\sqrt{x^2+16(y-x)}-\sqrt{xy}-\sqrt{xy}+y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y).\frac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}}-(x-y).\frac{y}{y+\sqrt{xy}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}}-\frac{y}{y+\sqrt{xy}}\right]=0$$

Rõ ràng $\frac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}}-\frac{y}{y+\sqrt{xy}}<0,\forall x<16,\forall y\ge 5\Rightarrow x=y$.

Vì vậy phương trình thứ hai trở thành

$$2x=3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}\right)\Leftrightarrow 2x^2-9x+9=9\sqrt{x^2-2x-15}$$

$$\Leftrightarrow x^4-9x^3+9x^2+324=0\Leftrightarrow (x-6)^2\left(x^2+3x+9\right)=0\Leftrightarrow x=6$$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=y=6$.

Nhận xét.

Khi đối mặt với biểu thức hệ quả $T=\frac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}}-\frac{y}{y+\sqrt{xy}}$, chúng ta để ý các đặc tính sau

- Đại lượng âm hiển hiện $-\frac{y}{y+\sqrt{xy}}<0,\forall y\ge 5$ (1).
- Suy ra ưu tiên hàng đầu $\frac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}}<0\Leftrightarrow x<16$.

- Giả sử $\dfrac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+\sqrt{xy}}>0$ tức là húc đầu vào nhau khi so sánh với (1).

Cần xử lý bằng được điều kiện x từ phương trình thứ nhất, cách đơn giản nhất chính là phương trình bậc hai với ẩn là căn thức

- Xét phương trình đầu tiên, đặt $\sqrt{y-5}=t,t\ge 0\Rightarrow t^2-3t-3\sqrt{x+3}+5=0$.
- Coi phương trình này là phương trình bậc hai ẩn t tham số x, điều kiện có nghiệm là

$$\Delta=9-4\left(-3\sqrt{x+3}+5\right)\ge 0\Leftrightarrow 4(x+3)-12\sqrt{x+3}-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{x+3}\le\frac{6+2\sqrt{10}}{4}\Rightarrow x<16$$

Bài toán 124. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x^2+5(y-x)}=2\left(\sqrt{3x^2+y^2}-y\right),\\ 2y+x-6=\sqrt{2y}-\sqrt{2(x+y-2)}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 0;x+y-2\ge 0$. Xét trường hợp $x=y=0$ không thể thỏa mãn hệ.

Xét $y>0$ thì phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{4x^2+5(y-x)}-\sqrt{3x^2+y^2}+2y-\sqrt{3x^2+y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-y^2+5(y-x)}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}+\frac{3y^2-3x^2}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{x+y-5}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{3(x+y)}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}\right]=0$$

Rõ ràng

$$x+y-2+\sqrt{2(x+y-2)}+y-\sqrt{2y}=4\Leftrightarrow x+y-2+\sqrt{2(x+y-2)}+\left(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x+y-2+\sqrt{2(x+y-2)}\le\frac{9}{2}\Rightarrow 0\le x+y-2\le\frac{11-2\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow 2\le x+y\le\frac{15-2\sqrt{10}}{2}<5$$

Kéo theo $\dfrac{x+y-5}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}-\dfrac{3(x+y)}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}<0$. Với $x=y$ thì phương trình thứ hai trở thành

$$3x-6=\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 3(x-2)+2.\frac{x-2}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}=0\Leftrightarrow(x-2)\left(3+\frac{2}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}\right)=0.$$

Dễ thấy $3+\dfrac{1}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}>0,\forall x\ge 1\Rightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow(x;y)=(2;2)$.

Nhận xét.

Sử dụng máy tính bỏ túi Casio Fx – 570 ES Plus hoặc tương đương đối với phương trình thứ nhất của hệ ta có nhân tử $x=y$. Khi đó ta thực hiện kiểm nghiệm

- Giả sử $x=y=k\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{4x^2+5(y-x)}=\sqrt{4k^2}=2|k|\\ \sqrt{3x^2+y^2}=\sqrt{4k^2}=2|k|\end{cases}$
- Ghép cụm liên hợp $\left[\sqrt{4x^2+5(y-x)}\sim\sqrt{3x^2+y^2}\sim 2k\right];\left[\sqrt{3x^2+y^2}\sim 2y\sim 2k\right]$.

Vấn đề tiếp theo là xử lý biểu thức hệ quả

$$T=\frac{x+y-5}{\sqrt{4x^2+5(y-x)}+\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{3(x+y)}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}.$$

Có thể nói thoạt tiên quan sát, chúng ta thấy biểu thức T rất "khó nhằn", tuy nhiên với đòn bẩy mẫu thức dương và hai tử thức có chung đại lượng $x+y$, *hơn nữa* $x+y\ge 2$ *nên* $-\frac{3(x+y)}{2y+\sqrt{3x^2+y^2}}<0$, *phương hướng ta sẽ khai thác phương trình thứ hai theo đại lượng* $x+y$. *Để dọn đường cho điều đó, cần cô lập các đại lượng chứa* $x+y$ *về một chỗ, tạm thời là như sau*

$$x+y-2+\sqrt{2(x+y-2)}+y-\sqrt{2y}=4.$$

Đến đây, các bạn có thể coi đây là phương trình bậc hai ẩn $\sqrt{y}$, *tham số* $x+y$, *tuy nhiên làm thế là hơi phức tạp, có thể đơn giản thao tác này thông qua phân tích bình phương*

$$x+y-2+\sqrt{2(x+y-2)}+\left(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x+y-2+\sqrt{2(x+y-2)}\le\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 0\le x+y-2\le\frac{11-2\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow 2\le x+y\le\frac{15-2\sqrt{10}}{2}<5$$

Ở trên, chúng ta đã đặt ẩn phụ $\sqrt{2(x+y-2)}=t,t\ge 0$ *dẫn đến giải* $\frac{t^2}{2}+t\le\frac{9}{2}\Rightarrow 0\le t\le\frac{11-2\sqrt{10}}{2}$.

Bài toán 125. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y,\\ (2x+1)\left(12y+9\sqrt{xy}-x^2-x-1\right)=27(x+1).\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $xy\ge 0;4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)\ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất ta có $\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y\Rightarrow y\ge 0$.

Xét trường hợp $(x;y)=(x;0)$ không thỏa mãn hệ. Xét $y>0\Rightarrow x>0$, phương trình thứ nhất tương đương

$$\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}-2y+2\sqrt{xy}-2y=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4xy-4y^2+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}+2y}+\frac{2y(x-y)}{\sqrt{xy}+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)\left(4y+3\sqrt{xy}-7\right)}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}+2y}+\frac{2y(x-y)}{\sqrt{xy}+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{4y+3\sqrt{xy}-7}{\sqrt{4xy+\left(3\sqrt{xy}-7\right)(x-y)}+2y}+\frac{2y}{\sqrt{xy}+2y}\right]=0$$

Từ phương trình thứ hai ta có

$$12y+9\sqrt{xy}-x^2-x-1=\frac{27(x+1)}{2x+1}\Leftrightarrow 12y+9\sqrt{xy}=x^2+x+1+\frac{27x+27}{2x+1}.$$

Xét hàm số $f(x)=x^2+x+1+\frac{27x+27}{2x+1};x>0$ ta có

$$f'(x)=2x+1-\frac{27}{(2x+1)^2};f'(x)=0\Leftrightarrow(2x+1)^3=27\Leftrightarrow 2x+1=3\Leftrightarrow x=1.$$

Khảo sát sự biến thiên ta có $f(0)=28;f(1)=21\Rightarrow \underset{x>0}{Max}f(x)=f(1)=21\Rightarrow 12y+9\sqrt{xy}\ge 21\Leftrightarrow 4y+3\sqrt{xy}\ge 7$.

Kéo theo $\frac{4y+3\sqrt{xy}-7}{\sqrt{4xy+(3\sqrt{xy}-7)(x-y)+2y}}+\frac{2y}{\sqrt{xy}+2y}>0$. Khi $x=y$ thì phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{cases}2x^3-39x^2+9x+28=0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(2x^2-37x-28)=0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{1;\frac{37+3\sqrt{177}}{4}\right\}.$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;1),\left(\frac{37+3\sqrt{177}}{4};\frac{37+3\sqrt{177}}{4}\right)$

Nhận xét.

Kiểu bài toán này các bạn đã được tiếp cận trong bài toán 106 trở đi, vấn đề biểu thức hệ quả T, đa số các bạn đều nhận ra được $\frac{2y}{\sqrt{xy}+2y}>0,\forall y>0$ *với lập luận* $y>0$ *chuẩn bị trước đó. Để tránh tình trạng húc đầu vào nhau, đồng bộ hóa đánh giá chúng ta cần có* $4y+3\sqrt{xy}-7\ge 0$, *và điều này không quá khó khi phương trình thứ hai của hệ đã gợi ý chúng ta biểu diễn, cô lập ẩn*

$$12y+9\sqrt{xy}-x^2-x-1=\frac{27(x+1)}{2x+1}\Leftrightarrow 12y+9\sqrt{xy}=x^2+x+1+\frac{27x+27}{2x+1}.$$

Để đạt được $4y+3\sqrt{xy}-7\ge 0$, *rõ ràng cần có tối thiểu* $x^2+x+1+\frac{27x+27}{2x+1}\ge 21$, *để chứng minh điều này cũng có rất nhiều phương án*

- Sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số của liên chương trình Đại số, Giải tích lớp 11, 12

  Xét hàm số $f(x)=x^2+x+1+\frac{27x+27}{2x+1};x>0$ ta có

$$f'(x)=2x+1-\frac{27}{(2x+1)^2};f'(x)=0\Leftrightarrow(2x+1)^3=27\Leftrightarrow 2x+1=3\Leftrightarrow x=1.$$

  Khảo sát sự biến thiên ta có

$$f(0)=28;f(1)=21\Rightarrow \underset{x>0}{Max}f(x)=f(1)=21\Rightarrow 12y+9\sqrt{xy}\ge 21\Leftrightarrow 4y+3\sqrt{xy}\ge 7.$$

  Trong vụ này, một số bạn vội vàng "đi đường vòng" bằng cách xét hàm số sau khi đã quy đồng

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2+30x+28}{2x+1};x>0.$$

- Sử dụng biến đổi tương đương thuần túy đưa về các đại lượng không âm (Đại số lớp 8 THCS)
  Cần có tối thiểu

$$x^2+x+1+\frac{27x+27}{2x+1}\ge 21\Leftrightarrow x^2+x+\frac{27x+27}{2x+1}\ge 20$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-12x+7\ge 0\Leftrightarrow(x-1)^2(2x+7)\ge 0\quad(*)$$

  Rõ ràng (*) luôn đúng.

- Sử dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân dựa trên điểm rơi $x=1$

Biểu diễn $12y+9\sqrt{xy}-x^2-x-1=\frac{27(x+1)}{2x+1}\Leftrightarrow 12y+9\sqrt{xy}=x^2+x+1+\frac{27(x+1)}{2x+1}=M$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM

$$\begin{aligned}M&=x^2+x+1+\frac{26x+13+x+14}{2x+1}=x^2+x+14+\frac{x+14}{2x+1}\\&=x^2+x+\frac{29}{2}+\frac{1}{2}.\frac{27}{2x+1}=(x-1)^2+3x+\frac{27}{2}+\frac{1}{2}.\frac{27}{2x+1}\\&=(x-1)^2+\frac{3}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}.\frac{27}{2x+1}+12\ge 2\sqrt{\frac{3}{2}.(2x+1).\frac{1}{2}.\frac{27}{2x+1}}+12=21\end{aligned}$$

Bài toán 126. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x(y-x)-4=x(3x-2y^2),\\ \sqrt{7x^2-3xy}+\sqrt{y^2(2x+1)-4}=4y.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $7x^2-3xy\ge 0; y^2(2x+1)-4\ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất ta có $\sqrt{7x^2-3xy}+\sqrt{y^2(2x+1)-4}=4y\Rightarrow y\ge 0$.

Xét $y=0$ không thỏa mãn phương trình nên $y>0$.

Ta có $2xy-5x^2+2xy^2-4=0\Rightarrow 2x(y^2+y)=5x^2+4\Rightarrow x>0,y>0$.

Mặt khác $2xy^2-4=5x^2-2xy$ nên phương trình thứ hai tương đương với

$$\begin{aligned}&\sqrt{7x^2-3xy}+\sqrt{5x^2-2xy+y^2}=4y\\&\Leftrightarrow \sqrt{7x^2-3xy}-2y+\sqrt{5x^2-2xy+y^2}-2y=0\\&\Leftrightarrow \frac{7x^2-3xy-4y^2}{\sqrt{7x^2-3xy}+2y}+\frac{5x^2-2y-3y^2}{\sqrt{5x^2-2xy+y^2}+2y}=0\\&\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{7x+4y}{\sqrt{7x^2-3xy}+2y}+\frac{5x+3y}{\sqrt{5x^2-2xy+y^2}+2y}\right)=0\end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{7x+4y}{\sqrt{7x^2-3xy}+2y}+\frac{5x+3y}{\sqrt{5x^2-2xy+y^2}+2y}>0,\forall x,y>0$ nên $x=y$.

Phương trình thứ nhất trở thành $\begin{cases}2x^3-3x^2-4=0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(2x^2+x+2)=0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow x=y=2$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 127. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-1+\sqrt{x-y+4}=(x+1)\sqrt{x-y+1},\\ x^3+2xy^2+4x-4=3|y|\sqrt[3]{(x^3+y-1)^2}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x-y+1\ge 0$. Từ phương trình thứ hai ta có $x(x^2+2y^2+4)=4+3|y|\sqrt[3]{(x^3+y-1)^2}\Rightarrow x>0$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x-y+4}-2=(x+1)\left(\sqrt{x-y+1}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x-y+4}+2}=\frac{(x+1)(x-y)}{\sqrt{x-y+1}+2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-y+4}+2}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-y+1}+2} \quad (1) \end{array}\right.$$

Rõ ràng $x>0 \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x-y+4}+2}<\dfrac{1}{\sqrt{x-y+1}+2}<\dfrac{x+1}{\sqrt{x-y+1}+2}$.

Với $x=y$ thì phương trình thứ hai trở thành $3x^3+4x-4=3x\sqrt[3]{\left(x^3+x-1\right)^2}$

$\Leftrightarrow 4\left(x^3+x-1\right)-x^3=3x\sqrt[3]{\left(x^3+x-1\right)^2} \Leftrightarrow 4.\dfrac{x^3+x-1}{x^3}-1=3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^3+x-1}{x^3}\right)^2}$.

Đặt $\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^3+x-1}{x^3}\right)}=t$ ta được $4t^3-1=3t^2 \Leftrightarrow (t-1)\left(4t^2+t+1\right)=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x^3+x-1=x^3 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 128. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+\sqrt{x^2+4y+4}=x^2y+y+2, \\ \sqrt{x^2+x+y}+\sqrt{x}=\sqrt{(y+1)^3}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0; y\ge -1; x^2+x+y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$x^3-x^2y+\sqrt{x^2+4y+4}-(y+2)=0$$
$$\Leftrightarrow x^3(x-y)+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+4y+4}+y+2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+4y+4}+y+2}\right)=0$$

Xét $x=0$ thì hệ không thỏa mãn.
Xét trường hợp

$$x>0 \Rightarrow x^2+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+4y+4}+y+2}=\frac{x^2\sqrt{x^2+4y+4}+2x^2+x^2y+x+y}{\sqrt{x^2+4y+4}+y+2}$$
$$=\frac{x^2\sqrt{x^2+4y+4}+x^2+x+y+x^2(y+1)}{\sqrt{x^2+4y+4}+y+2}>0$$

Với trường hợp hai biến bằng nhau, phương trình thứ nhất trở thành $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x}=\sqrt{(x+1)^3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakvosky ta có

$$\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+2x}.1+1.\sqrt{x}\right)^2\le (x+1)^2(1+x)=(x+1)^3 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x}\le\sqrt{(x+1)^3}.$$

Phương trình ẩn x đã cho có nghiệm khi

$$\frac{\sqrt{x^2+2x}}{1}=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2=1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\left(x^2+x-1\right)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}; y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 129. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{5-x-y}+2x=3\sqrt{(x+1)(2-y)}+y, \\ (x-y)^2+x+y=2. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(x+1)(2-y)\ge 0; 5-x-y\ge 0$.

Từ phương trình thứ hai ta có $x,y\le\frac{9}{8}$, dẫn đến $-1\le x\le\frac{9}{8}; y\le\frac{9}{8}$.

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$\sqrt{(x+1)(2-y)}=\sqrt{x+1}.\sqrt{2-y}\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2-y}\right)^2=\left(\sqrt{5-x-y}-2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} \sqrt{3x+3}-\sqrt{6-3y}=\sqrt{5-x-y}-2 & (1) \\ \sqrt{3x+3}-\sqrt{6-3y}=\sqrt{5-x-y}+2 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow(x+y-1)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+3}+\sqrt{6-3y}}-\frac{1}{\sqrt{5-x-y}+2}\right)=0\Leftrightarrow x+y-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+3}+\sqrt{6-3y}}=\dfrac{1}{\sqrt{5-x-y}+2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x+y-1=0 & \\ 3\left(\sqrt{5-x-y}+2\right)=\sqrt{3x+3}+\sqrt{6-3y} & (3) \end{array}\right.$$

Kết hợp (2) và (3) ta được $6=2\sqrt{3x+3}-\sqrt{6-3y}<2\sqrt{3x+3}\le\sqrt{3.\frac{9}{8}+3}=\frac{\sqrt{102}}{2}$, loại.

Với $x+y-1=0$ thì phương trình thứ hai trở thành $(2x-1)^2=3\Leftrightarrow 2x-1\in\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}$.

Từ đây ta thu được hai nghiệm.

Bài toán 128. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+\sqrt{xy}+2\sqrt{x^2+xy-y^2-4(x-y)}=4y, \\ 2x+\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{x^2y-2}=5+3\sqrt[3]{x^2-4x+11}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x-y-3\ge 0; x^2y-2\ge 0; xy\ge 0; x^2+xy-y^2-4(x-y)\ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $\begin{cases} x^2y\ge 2 \\ xy\ge 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y>0 \\ x>0 \end{cases}$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$3x+2\sqrt{xy}-5y+\sqrt{x^2+xy-y^2-4(x-y)}+x-3y=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left[\left(3\sqrt{x}+5\sqrt{y}\right)+\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(3x+13y-16)}{\sqrt{x^2+xy-y^2-4(x-y)}-x+3y}\right]=0$$

Rõ ràng

$$\sqrt{xy}+2\sqrt{x^2+xy-y^2-4(x-y)}=4y-2x=2(2y-x)\Rightarrow 2y-x\ge 0$$

$$\Rightarrow 3y-x=y+2y-x>0\Rightarrow\left(3\sqrt{x}+5\sqrt{y}\right)+\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(3x+13y-16)}{\sqrt{x^2+xy-y^2-4(x-y)}-x+3y}>0$$

Vậy ta được $x=y$, phương trình thứ hai trở thành

$$2x-5+\sqrt{x-3}+\sqrt{x^3-2}=3\sqrt[3]{x^2-4x+11}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}+\sqrt{x^3-2}-5=3\sqrt[3]{x^2-4x+11}-2x$$

Ta có nhận xét

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x^3-2}-5\ge 0,\forall x\ge 3\Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2-4x+11}-2x\ge 0\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x^2-4x+11}\ge 2x$$
$$\Leftrightarrow 8x^3-27x^2+108x-297\le 0\Leftrightarrow (x-3)\left(8x^2-3x+99\right)\le 0\Leftrightarrow x\le 3\Rightarrow x=3$$

Từ đó ta thu được nghiệm duy nhất $x=y=3$.

Nhận xét.

Trung đoàn Vũ Văn Dũng (lấy theo tên một võ quan vương triều Tây Sơn) là trung đoàn mở màn dành cho phương pháp đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời đối với hệ phương trình chứa căn thức. Phương pháp liên hợp là một phương pháp rất hay, rất đặc trưng đối với các bài toán chứa căn thức. Ngoài 128 bài toán trên, các bạn có thể tự mình tương tự hóa, mở rộng, đào sâu, tổng quát hóa để thu được nhiều bài toán khó và thú vị hơn nữa. Tác giả chúc các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các bạn trẻ yêu toán sẽ tiếp thu tốt, vận dụng cao và kế thừa phát huy vượt bậc tài liệu phần 4 này. Tài liệu phần 5 mang tên trung đoàn Lý Đạo Thành, tập trung phương pháp đại lượng liên hợp – trục căn thức với nhân tử phức tạp hơn.

Bài tập tương tự.

Giải các hệ phương trình sau trên tập hợp số thực

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy-2y^2+3y-1=\sqrt{y-1}-\sqrt{x}, \\ 3\left(\sqrt{6-y}+\sqrt{2x+3y-7}\right)=2x+7. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$

  (Câu 8; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Đề chính thức; Lần thứ nhất; Mùa thi 2015; Trường THPT Đồng Đậu; Huyện Yên Lạc; Tỉnh Vĩnh Phúc).
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{2y-x-1}\left(\sqrt{x+3}-4\right)+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{y+1}+4\right)=-2\left(y+35\right), \\ \left(x-y+3\right)\sqrt{x+3}=\sqrt{y+1}. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1+\sqrt{2x+y+1}=4\left(2x+y\right)^2+\sqrt{6x+3y}, \\ \left(9x+4y\right)\left(\sqrt{19x+8y}-\sqrt{14-x-2y}\right)^2=5+4x+2y. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2+xy-5x+y+2=\sqrt{y-2x+1}-\sqrt{3-3x}, \\ x^2-y-1=\sqrt{4x+y+5}-\sqrt{x+2y-2}. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$

  (Câu 8; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Đề chính thức; Lần thứ ba; Mùa thi 2015; Trường THPT Đoàn Thượng; Huyện Gia Lộc; Tỉnh Hải Dương).
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2+9xy+5x-4y+9\sqrt{y}=7, \\ \sqrt{x-y+2}+1=9\left(x-y\right)^2=\sqrt{7x-7y}. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$

  (Bài T4/426; Đề ra kỳ này; Số 426; Tháng 12 năm 2012; Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ; Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam, đồng thời là câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Đề chính thức; Lần thứ nhất; Mùa thi 2015; Trường THPT Quỳnh Lưu 1; Huyện Quỳnh Lưu; Tỉnh Nghệ An).
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x, \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y\left(x-1\right)}=\dfrac{9}{2}. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$

  (Câu 8; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Đề chính thức; Lần thứ nhất; Mùa thi 2015; Trường THPT Triệu Sơn 5; Huyện Triệu Sơn; Tỉnh Thanh Hóa).
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2-2xy+5y^2}+y\left(3\sqrt{4x^2+5y^2}-1\right)=x\left(9x+1\right), \\ \left(x+3\right)\sqrt{3y-5}+3\left(x^3+1\right)=4\sqrt{4x-3}-13x\left(y-5\right)+2x. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{5x^2-2x\left(2y-3\right)+1}+\sqrt{3x^2-2\left(y^2-5x\right)+11}=x+y+3, \\ x\left(x-2y\right)+y\left(y-2\right)+x+2=0. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+8x+xy-y-10=\sqrt{y+12}-\sqrt{2-2x}, \\ 4\left(x+5\right)^2+6y+11=3\sqrt[3]{2y+5}. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$

  (Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Đề chính thức; Lần thứ hai; Mùa thi 2015; Trường THPT Dân lập Lương Thế Vinh; Thủ đô Hà Nội).
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}=\left(y-x\right)\left(x^2+y^2+xy+2\right), \\ x^2+y^2-xy=4. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{y}=y+\sqrt{x}, \\ y+\sqrt{x+1}=x+\sqrt{y+1}. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right).$

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4\sqrt{y-x}+2\sqrt{xy+y}=3y-x+3, \\ \sqrt{y^2-5x+2}+\sqrt{4x^2+3}=y\sqrt{3}. \end{cases}$ $(x;y)$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y+2)\sqrt{x+y+1}+x(4+x)=y^2-4, \\ \sqrt[4]{x+y-3}+\sqrt[4]{15x+1}=3\sqrt[4]{y-2}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-y+1}+\sqrt{3x+2y+6}=3x+1, \\ x\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3y+1}=(y+5)\sqrt{y+1}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy+y}+\sqrt{xy+2+x+2y}=x+y+2, \\ \sqrt{1-2x}+\sqrt{x+y}=\sqrt{\dfrac{3-2y}{1+2x}}+\sqrt{\dfrac{2y-1}{1-2x}}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+y)+\sqrt{x+y}=\sqrt{2y}.\sqrt{2y^3+1}, \\ \sqrt{y^2+15}-\sqrt{x^2+8}=x+2y+2. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y-x)^2+\sqrt{y}=y+x^2+\sqrt{2x+1}, \\ 12x^2=5y\sqrt{3\left(y-\dfrac{1}{2}\right)}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-3-y\sqrt{x-y-2}=(x-y-3)\sqrt{y+1}, \\ 2y^2+10y-3x+12=2\sqrt{x-2y-3}-\sqrt{4x-5y-12}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2-3y+1+\sqrt{y-1}=x^2+\sqrt{x}+xy, \\ \sqrt{2x+9}-\sqrt{2y-3x+4}+3x^2-14x-8=0. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  (Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Mùa thi 2016; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Bình Phước).
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}+x(x+y)=\sqrt{2y}+2y^2, \\ \sqrt{x^2+4y-3}+1=\sqrt{3x-2}+y. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  (Câu 7; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Mùa thi 2015; Trường THPT Lê Quý Đôn; Quận Hải An; Thành phố Hải Phòng).
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y(x-1)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y}, \\ x^3+6x^2+20=171y+40(y+1)\sqrt{5y-1}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  (Câu 8; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ 3; Mùa thi 2016; Trường THPT Yên Thế; Huyện Yên Thế; Tỉnh Bắc Giang).
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+x^2+2xy+4y-1=3y^2+\sqrt{2y-1}, \\ x\sqrt{x^2+xy+1}=2x^2+3y^2-xy-x-9. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  (Câu 8; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Hùng Vương; Thị xã Đồng Xoài; Tỉnh Bình Phước).
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y}-\sqrt{x+y+1}=x^3+3y(x^2+xy+y-1)+1, \\ y^2+\sqrt{y-5x}=5. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

  (Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Bình Long; Thị xã Bình Long; Tỉnh Bình Phước).

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} y+\dfrac{2x^2(x-2y)}{\sqrt{x^2-2xy+1}+1}+2x=1, \\ 2x^2+1=y(2x+1) \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x}-\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{y+1}+\sqrt{y}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}, \\ x+y+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=6. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy=\left(xy+y+2-y\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{y+1}+1\right), \\ 2\left(x^2+4y+4\right)\sqrt{y+1}=\left(y^2+2x+1\right)y. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2+3xy-7y^2}+4\left(x^2+5xy-6y^2\right)=\sqrt{3x^2-2xy-y^2}, \\ 2x^2+2y^2-2x+2y=1. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-y+2}+\dfrac{2(x-1)}{x+y}=3, \\ (x+y)\sqrt{x-y+2}=6\sqrt{x+y-2}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{(x+1)y+(x-y+1)\sqrt{y}}+\sqrt{x+1}=y+\sqrt{y}, \\ \sqrt{2x+y-9}-\sqrt{2x-y+2}=\dfrac{5}{4x}-2y-9. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y+2)\sqrt{1+x}=\sqrt{y}, \\ 3y-2+2\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}\left(4-\sqrt{1-x}\right). \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)+2(5x-3y)-4(xy-3)}-\sqrt{y}=\sqrt{x+2}, \\ \sqrt{y^2-4(x+y)+17}-\sqrt[3]{xy-3(x+y)+18}=1. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y+2}=7, \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}=7. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3=\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(-y^4+4y-3\right), \\ x^2+y^2-2x-4y+4=0. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^3-y^3\right)\sqrt{1-x-y+xy}=\sqrt{1-x}-\sqrt{1-y}, \\ 2x^3-y^3+x^2-2y^2-2x-2y+4=0. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y}, \\ (x+1)\left(y+\sqrt{xy}+x-x^2\right)=4. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y=1+\sqrt{x}\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{x}\right), \\ x^3-y^2=7. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. ***Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. ***Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. ***Toán nâng cao Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. ***Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.***
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. ***Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.***
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. ***Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.***
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. ***Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.***
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. ***Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.***
Lê Hồng Đức – Nhóm Cự Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. ***Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.***
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. ***Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.***
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. ***Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.***
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. ***Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.***
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. ***Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).***
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. ***Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.***
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. ***Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.***
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. ***Phương pháp giải toán trọng tâm.***
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. ***Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.***
Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. ***500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.***
Lê Hoành Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. ***Tam thức bậc hai và ứng dụng.***

Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.

23. ***Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số.***
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.
24. ***23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.***
Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
25. ***Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.***
Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.
26. ***Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.***
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.
27. ***Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.***
Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.
28. ***Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.***
Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuân
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.
29. ***Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.***
Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
30. ***9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
31. ***Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.***
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.
32. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.***
33. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.***
34. ***Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.***
35. ***Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.***
36. ***Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).***
37. ***Các tạp chí toán học:*** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
38. ***Các diễn đàn toán học:*** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
39. ***Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...***

THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI
