TÍCH PHÂN VẬN DỤNG CAO – PHẦN I

Nội dung live – trợ giúp kì thi THPT Quốc Gia 2018.

Bài tập có sưu tập từ nguồn đề của các trường trên toàn Quốc và của các quý thầy cô trong nhóm Vận Dụng Cao.

File giải chỉ trình bày theo cách tự luận để các em hiểu bản chất. Kỹ thuật tính nhanh và Casio các em xem ở bài live.

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2\sqrt{2}f\left(x\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]dx=\dfrac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

+) Đặt $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2\sqrt{2}f\left(x\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]dx$. Ta có

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2\sqrt{2}f\left(x\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]dx-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)dx$$

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2dx-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)dx$$

+) Có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin 2x\right)dx=\left(x+\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi-2}{2}$

+) Mà $I=\dfrac{2-\pi}{2}$ suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2dx=0$ (1).

+) Áp dụng kết quả: Nếu $f\left(x\right)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $f\left(x\right)=0$ với mọi $x\in\left[a;b\right]$.

Từ (1) suy ra $f\left(x\right)-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ hay $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

+) Do đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)dx=-\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$. Chọn B.

Câu 2. **(Đề tham khảo của BGD năm 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=7$ và $\int\limits_0^1 x^2f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

+) Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)\,dx \\ v = x^3 \end{cases}$, khi đó $\int_0^1 3x^2 f(x)\,dx = x^3.f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 f'(x)\,dx$

+) Ta có $1 = f(1) - \int_0^1 x^3 f'(x)\,dx$ suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx = -1$.

+) Áp dụng bất đẳng thức tích phân phân $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx.\int_a^b g^2(x)\,dx$. Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = kg(x)$ với k là hằng số.

Ta có $1 = \left(\int_a^b x^3 f'(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b x^6\,dx.\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 dx = 7\dfrac{x^7}{7}\Big|_0^1 = 1$. Dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = kx^3$ với k là hằng số. Mà $\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx = -1$ hay $\int_0^1 kx^6\,dx = -1$ suy ra $k = -7$.

+) Vậy $f'(x) = -7x^3$ nên $f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + c$ mà $f(1) = 0$ nên $f(x) = \dfrac{7}{4}\left(1 - x^4\right)$ suy ra $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{7}{5}$. Chọn A.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}\,f(x)\,dx \ge 3\int_0^1 \left[f'(x)\,f^2(x) + \dfrac{1}{9}\right]dx$. Tích phân $\int_0^1 f^3(x)\,dx$ bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{8}{5}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn D

+) Áp dụng bất đẳng thức tích phân phân $\int_a^b f^2(x)\,dx.\int_a^b g^2(x)\,dx \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$. Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = kg(x)$ với k là hằng số.

+) Ta có $\int_0^1 dx.\int_0^1 f'(x)\,f^2(x)\,dx \ge \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)}\,f(x)\,dx\right)^2$ (1) nên từ giả thiết suy ra

$$2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}\,f(x)\,dx \ge 3\int_0^1 \left[f'(x)\,f^2(x)\right]dx + \frac{1}{3} \ge 3\left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)}\,f(x)\,dx\right)^2 + \frac{1}{3}$$

hay $3\left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\right)^2 \le 0 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ và dấu " = " ở (1) xảy ra, tức là

ta có $\begin{cases}\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\\ \sqrt{f'(x)}f(x)=k\end{cases} \Rightarrow k=\frac{1}{3}$. Từ đó tính được $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{3}}$ suy ra $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$. Chọn D.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có tính chất $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(f(x))d(f(x))$.

Theo bài ta có : $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Lấy tích phân 2 vế ta được :

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 6x^2f(x^3)\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{6\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2f(x^3)\mathrm{d}(x^3)-\int_0^1\frac{6\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{6\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}=4$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x$.

A. -4. **B.** $e-2$. **C.** 4. **D.** $2-e$.

Lời giải

Chọn C.

Theo đề cho $f'(0).f'(2)\neq 0$ suy ra $\begin{cases}f'(0)\neq 0\\ f'(2)\neq 0\end{cases}$.

Ta có $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$ nên

$g(0).f'(0)=0\Rightarrow g(0)=0.$

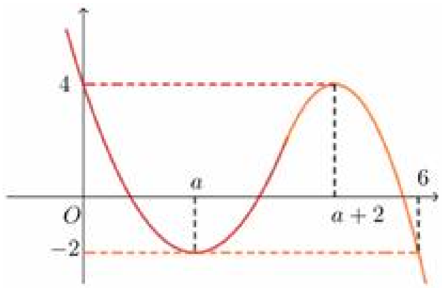
$g(2).f'(2)=0\Rightarrow g(2)=0.$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=g'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=g(x)\end{cases}$.

$I=\int_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x=f(x).g(x)\Big|_0^2-\int_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=f(x).g(x)\Big|_0^2-\int_0^2 x(x-2)e^x\mathrm{d}x$

$=f(2).g(2)-f(0).g(0)+4=4.$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $S = f(0) + f(6) - f(a) - f(a+2)$. Tập giá trị của S chứa tối đa bao nhiêu số nguyên?

A. 22. **B.** 23. **C.** 24. **D.** 25.

Lời giải

Đáp án C.

Ta có hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và căn cứ vào đồ thị ta có $\begin{cases} f'(x)+2 \ge 0 \\ 4 - f'(x) \ge 0 \end{cases}, \forall x \in [0;6]$.

Suy ra $\begin{cases} \int_0^a \left[f'(x)+2\right]dx + \int_{a+2}^6 \left[4 - f'(x)\right]dx \ge 0 \\ \int_0^a \left[4 - f'(x)\right]dx + \int_{a+2}^6 \left[f'(x)+2\right]dx \ge 0 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} f(a) - f(0) + 2a + 4(4-a) - f(6) + f(a+2) \ge 0 \\ 4a - f(a) + f(0) + f(6) - f(a+2) + 2(4-a) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2a - S \ge 0 \\ S + 2a + 8 \ge 0 \end{cases}$

Hay $-2a - 8 \le S \le 16 - 2a$.

Tuy nhiên các dấu "=" không xảy xa. Do vậy $D = (-2a-8; 16-2a)$.

Độ dài khoảng D bằng 24. Do đó khoảng D chứa tối da 24 số nguyên.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;a]$, biết rằng với mọi $x \in [0;a]$, ta có $f(x) > 0$ và $f(x).f(a-x) = k^2$ (với k là hằng số, $k > 0$). Giá trị của tích phân $\int_0^a \frac{dx}{k + f(x)}$ bằng:

A. $\frac{a}{k}$. **B.** $\frac{a}{2k}$. **C.** $\frac{ak}{2}$. **D.** ak

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_0^a \frac{dx}{k + f(x)} = -\int_a^0 \frac{dt}{k + f(a-t)} = \int_0^a \frac{dt}{k + \frac{k^2}{f(t)}} = \int_0^a \frac{f(t)dt}{k(k + f(t))}$$

$$\Rightarrow kI = \int_0^a \frac{f(t)dt}{k + f(t)} \Rightarrow kI + kI = \int_0^a \frac{kdt}{k + f(t)} + \int_0^a \frac{f(t)dt}{k + f(t)} = a \Rightarrow I = \frac{a}{2k}$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;a]$, biết rằng với mọi $x \in [0;a]$, ta có $f(x) > 0$ và $\sqrt{f(x).f(a-x)} = 1$. Giá trị của tích phân $\int_0^a \frac{dx}{1 + \sqrt{f(x)}}$ bằng:

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $2a$. **D.** $a\ln(a+1)$.

Lời giải

Chọn B.

$$I=\int_0^a \frac{dx}{1+\sqrt{f(x)}}=-\int_a^0 \frac{dt}{1+\sqrt{f(a-t)}}=\int_0^a \frac{dt}{1+\frac{1}{\sqrt{f(t)}}}=\int_0^a \frac{\sqrt{f(t)}dt}{\left(1+\sqrt{f(t)}\right)}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^a \frac{\sqrt{f(t)}dt}{k+\sqrt{f(t)}}\Rightarrow I+I=\int_0^a \frac{dt}{1+\sqrt{f(t)}}+\int_0^a \frac{\sqrt{f(t)}dt}{1+\sqrt{f(t)}}=a\Rightarrow I=\frac{a}{2}.$$

Câu 9: Cho hàm số *f(x)* liên tục trên [0;3] và $\int_0^1 f(x)dx=2$; $\int_0^3 f(x)dx=8$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)dx$ là:

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $|2x-1|=\begin{cases}-2x+1, \forall x\le \frac{1}{2}\\ 2x-1, \forall x\ge \frac{1}{2}\end{cases}$ nên

$$\int_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)dx=\int_{-1}^{0,5} f\left(-2x+1\right)dx+\int_{0,5}^1 f(2x-1)dx=E+F$$

$E=\int_{-1}^{0,5} f(-2x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^3 f(t)dt$ ta đổi biến $t=-2x+1$,

$F=\frac{1}{2}\int_{0,5}^1 f(2x-1)dx=\int_0^1 f(t)dt$, ta đổi biến $t=2x-1$,

Vậy $\int_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx=1+4=5$

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=3$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{4}{11}$ và $\int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{11}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ là

A. $\frac{35}{11}$. **B.** $\frac{65}{21}$. **C.** $\frac{23}{7}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Cách1: Xét $A=\int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x$, Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=x^4\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{5}x^5\end{cases}$

$$A=\frac{1}{5}x^5 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{11}\Leftrightarrow \frac{3}{5}-\frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{11}\Leftrightarrow \int_0^1 x^5 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{-2}{11}$$

Lại có $\int_0^1 x^{10}\mathrm{d}x=\frac{1}{11}$ nên:

$$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx + 4\int_0^1 x^5 f'(x)dx + 4\int_0^1 x^{10}dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)+2x^5\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2x^5$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-x^6}{3} + C \Rightarrow C = \frac{10}{3} (do\ f(1)=0)$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^1 \left(\frac{-x^6}{3}+\frac{10}{3}\right)dx = \frac{23}{7}$$

Cách 2: Trắc nghiệm

Từ $\begin{cases} \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \frac{4}{11} \\ \int_0^1 x^5 f'(x)dx = \frac{-2}{11} \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 f'(x)\left[f'(x)+2x^5\right]dx = 0.$

Chọn $f'(x) = -2x^5 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^6}{3} + \frac{10}{3} \Rightarrow I = \frac{23}{7}$.

Câu 11: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ (1).

Đặt $t=1-x$, thay vào (1), ta được: $2f(1-t)+3f(t)=\sqrt{t}$ hay $2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{x}$ (2).

Từ (1) & (2), ta được: $f(x)=\frac{3}{5}\sqrt{x}-\frac{2}{5}\sqrt{1-x}$.

Do đó, ta có: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{5}\int_0^1 \sqrt{x}dx - \frac{2}{5}\int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \frac{2}{5}-\frac{4}{15}=\frac{2}{15}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

<u>A.</u> $f(1)=2019e^{2018}$. **B.** $f(1)=2019e^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018e^{2018}$. **D.** $f(1)=2017.e^{2018}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)-2018f(x)}{e^{2018x}}=2018.x^{2017}$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)-2018f(x)}{e^{2018x}}dx = \int_0^1 2018.x^{2017}dx \ (1).$$

Xét $I=\int_0^1 \frac{f'(x)-2018f(x)}{e^{2018x}}dx = \int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx - \int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$

Xét $I_1=\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=2018.e^{-2018x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=-e^{-2018x} \end{cases}$

Do đó $I_1 = f(x).(-e^{-2018x})\Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x).e^{-2018x}\,dx \Rightarrow I = f(1).e^{-2018} - 2018.$

Khi đó từ (1) suy ra $I = f(1).e^{-2018} - 2018 = x^{2018}\Big|_0^1 \Leftrightarrow f(1) = 2019.e^{2018}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1 \left[f'(x)\left[f(x)\right]^2 + \frac{1}{9}\right]dx \le 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx$. Tính tích phân $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 dx$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn D.

Áp dụng BĐT Holder ta có:

$$9\left[\int_0^1 \left(f'(x)\left[f(x)\right]^2 + \frac{1}{9}\right)dx\right]^2 \le 4\left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx\right)^2 \le 4\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 9\left[\int_0^1 \left(f'(x)f^2(x) + \frac{1}{9}\right)dx\right]^2 - 4\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx \le 0$$

$$\Leftrightarrow 9\left[\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx - \frac{1}{9}\right]^2 \le 0 \Rightarrow f'(x)f^2(x) = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{f^3(x)}{3} = \frac{1}{9}x + C$$

Vì $f(0)=1$ nên $C = \frac{1}{3}$. Khi đó $f^3(x) = \frac{1}{3}x + 1.$

Vậy $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x + 1\right)dx = \frac{7}{6}.$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = x\sin x$. Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$?

A. $\frac{1}{1009}$. **B.** $\frac{2}{2019}$. **C.** $\frac{1}{2019}$. **D.** $\frac{1}{2018}$.

Lời giải.

Chọn B

Theo giả thiết $f(-x) + 2018f(x) = x\sin x. \Rightarrow f(x) + 2018f(-x) = x\sin x.$

suy ra $\left(2018^2 - 1\right)f(x) = 2017x\sin x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2019}x.\sin x$.

Do đó $I = \frac{1}{2019}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x dx = -\frac{1}{2019}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x.d(\cos x)$

$$= -\frac{1}{2019}\left(x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.dx\right) = \frac{1}{2019}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2019}.$$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn

$3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+e^{-2x}}$. Khi đó:

A. $e^3f(1)-f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{e^2+1}}-\dfrac{1}{2}\cdot$ **B.** $e^3f(1)-f(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^2+1}}-\dfrac{1}{4}\cdot$

C. $e^3f(1)-f(0)=\dfrac{(e^2+1)\sqrt{e^2+1}-\sqrt{8}}{3}\cdot$ **D.** $e^3f(1)-f(0)=(e^2+1)\sqrt{e^2+1}-\sqrt{8}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+e^{-2x}}\Rightarrow 3e^{3x}f(x)+e^{3x}f'(x)=e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}\Leftrightarrow\left[e^{3x}f(x)\right]'=e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}$.

Lấy Tích phân từ 0 đến 1 hai vễ ta được

$$\int_0^1\left[e^{3x}f(x)\right]'dx=\int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}dx\Leftrightarrow\left[e^{3x}f(x)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{e^{2x}+3}\right)^3\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow e^3f(1)-f(0)=\frac{(e^2+1)\sqrt{e^2+1}-\sqrt{8}}{3}\cdot$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1$ và $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)$. Đặt $T=f(1)-f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2\le T<-1$. **B.** $-1\le T<0$. **C.** $0\le T<1$. **D.** $1\le T<2$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có $\displaystyle\int\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int 1.\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\frac{d\left[f'(x)\right]}{\left[f'(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int 1.\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{-1}{f'(x)}=x+c$

Mà $f'(0)=-1$ nên $\begin{cases}c=-1\\ f'(x)=-\dfrac{1}{x+1}\end{cases}\Rightarrow T=\displaystyle\int_0^1-\frac{1}{x+1}=-\ln 2$

Câu 17. **[2D3-4]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\displaystyle\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$ và $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{5}$. **B.** $I=\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{343\pi}{48}$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=1$. Ta có

$$\frac{2}{5}=\int_0^1 2t.f(t)dt=t^2.f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 t^2.f'(t)dt=f(1)-\int_0^1 t^2.f'(t)dt=1-\int_0^1 t^2.f'(t)dt$$

$\Rightarrow\displaystyle\int_0^1 t^2.f'(t)dt=\frac{3}{5}$, hay $\displaystyle\int_0^1 x^2.f'(x)dx=\frac{3}{5}$ (1).

Hơn nữa ta có $\displaystyle\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$ (2) theo giả thiết và $\displaystyle\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}$ (3).

Xét tích phân

$$\int_0^1 \left(f'(x) - 3x^2 \right)^2 dx = \int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 dx - 6\int_0^1 x^2 . f'(x) dx + 9\int_0^1 x^4 dx \overset{(1);(2);(3)}{=} \frac{9}{5} - 6.\frac{3}{5} + 9.\frac{1}{5} = 0 .$$

Mà $\left(f'(x) - 3x^2 \right)^2 \geq 0$ với mọi $x \in [0;1]$. Vậy $f'(x) = 3x^2$.

Do đó $f(x) = x^3 + C$. Lại có $f(1) = 1 \Rightarrow C = 0$. Vậy $f(x) = x^3$.

Vậy $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời $f(0) = 0$; $f(1) = 1$ và $\int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

A. $\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **C.** $\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left(\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \sqrt{1+x^2} dx . \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \geq \left[\int_0^1 f'(x) dx \right]^2 = 1 .$$

Mặt khác $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \Big|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Vậy đẳng thức xảy ra, khi đó $f'(x).\sqrt[4]{1+x^2} = \frac{k}{\sqrt[4]{1+x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}$.

Vì $\int_0^1 f'(x) dx = 1$ nên $k = \frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

Suy ra $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \int_0^1 f(x) f'(x) dx = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0;-1\}$ thỏa: $x(x+1) f'(x) + f(x) = x^2 + x, \forall x \neq \{0;-1\}$ và $f(1) = -2\ln 2$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$ $(a, b \in \mathbb{Q})$. Tính $a^2 + b^2 = ?$

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x(x+1) f'(x) + f(x) = x(x+1)$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \frac{f(x)}{x(x+1)} = 1 \Leftrightarrow f'(x)\frac{x}{x+1} + \frac{f(x)}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}$$

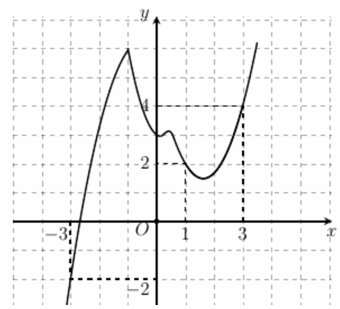
$$\Leftrightarrow \left(f(x) . \frac{x}{x+1} \right)' = \frac{x}{x+1}$$

Vậy $\int_1^2 \left(f(x).\dfrac{x}{x+1} \right)' dx = \int_1^2 \dfrac{x}{x+1} dx = \left(x - \ln|x+1| \right)\Big|_1^2 = 2 - \ln 3 - 1 + \ln 2 = 1 + \ln\dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow f(2).\dfrac{2}{3} - f(1).\dfrac{1}{2} = 1 + \ln\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}(a + b\ln 3) - \dfrac{1}{2}(-2\ln 2) = 1 + \ln\dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}a + \dfrac{2}{3}b\ln 3 = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2}.$

Câu 20 : [THPT CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 4 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(1) = 6$ và $g(x) = f(x) - \dfrac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

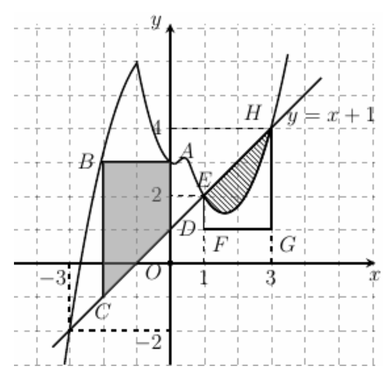
B. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $g'(x) = f'(x) - (x+1)$

Dễ thấy từ hình vẽ ta có phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm trên đoạn $[-3;3]$ là $-3;\ 1;\ 3$.

Ta có $g(1) = f(1) - 2 = 6 - 2 = 4 > 0$

$g(3) = f(3) - 8,\ g(-3) = f(-3) - 2.$

Ngoài ra ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	+	0	−	0
$g(x)$	$g(-3)$	↗	4	↘	$g(3)$

Dựa vào đồ thị ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = x+1$, $x = -3$, $x = 1$ lớn hơn diện tích hình thang $ABCD$ là 6. Do đó

$\int_{-3}^{1} \left[f'(x) - (x+1) \right] dx > 6 \Leftrightarrow f(1) - f(-3) > 6 \Leftrightarrow f(-3) < 0 \Leftrightarrow f(-3) - 2 < -2.$

Hay $g(-3) < 0$.

Tương tự, diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = x+1$, $x = 1$, $x = 3$ nhỏ hơn diện tích hình thang $EFGH$ là 4.

Nên $\int_1^3 \left[x + 1 - f'(x) \right] dx < 4 \Leftrightarrow 6 - f(3) + f(1) < 4 \Leftrightarrow f(3) > 8 \Leftrightarrow f(3) - 8 > 0$. Hay $g(3) > 0$.

Vậy phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Câu 21: [THPT NGÔ QUYỀN HẢI PHÒNG - 2018] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính giới hạn của dãy số

$$u_n=\frac{1}{n}.\left[f(1)+\sqrt{\frac{n}{3+n}}f\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}\right)+\sqrt{\frac{n}{6+n}}f\left(\sqrt{\frac{n+6}{n}}\right)+...+\sqrt{\frac{n}{4n-3}}f\left(\sqrt{\frac{4n-3}{n}}\right)\right]$$

A. $\lim u_n=2$ **B.** $\lim u_n=\frac{2}{3}$. **C.** $\lim u_n=1$. **D.** $\lim u_n=\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

$$u_n=\frac{1}{n}\left[f(1)+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}.f\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2.3}{n}}}.f\left(\sqrt{1+\frac{2.3}{n}}\right)+...+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}}.f\left(\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{f(1)}{n}+\frac{1}{n}.\left[\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}.f\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2.3}{n}}}.f\left(\sqrt{1+\frac{2.3}{n}}\right)+...+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}}.f\left(\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}\right)\right]$$

$$u_n=\frac{f(1)}{n}+\frac{1}{n}.\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}.f\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2.3}{n}}}.f\left(\sqrt{1+\frac{2.3}{n}}\right)+...+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}}.f\left(\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \lim u_n=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+3x}}.f\left(\sqrt{1+3x}\right)\mathrm{d}x$$

Đặt $t=\sqrt{1+3x}$ suy ra $\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t\mathrm{d}t$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=2$

Suy ra $\lim u_n=\frac{2}{3}\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên khoảng $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$ và thỏa mãn các điều kiện $\left[f(2)\right]^2=6+8\left[f(1)\right]^2$, $\int_1^2\frac{2x+1}{x+\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\frac{11}{16}$.

Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{f(x)+g(x)}{x+\left[f(x)\right]^2}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{21}{16}+3\ln 2$. **B.** $I=\frac{21}{32}+\frac{3}{2}\ln 2$ **C.** $I=\frac{21}{32}+\ln 2$ **D.** $I=\frac{21}{16}-\frac{3}{2}\ln 2$

Lời giải

Chọn B

Ta có $2I=\int_1^2 \frac{2\left[f(x)\right]^2+2.f'(x).f(x)}{x+\left[f(x)\right]^2}dx$

Đặt $J=\int_1^2 \frac{2x+1}{x+\left[f(x)\right]^2}dx$. Khi đó: $J+2I=\int_1^2 \frac{2x+1+2\left[f(x)\right]^2+2.f'(x).f(x)}{x+\left[f(x)\right]^2}dx$

$\Leftrightarrow \frac{11}{16}+2I=\int_1^2 2dx+\int_1^2 \frac{1+2f'(x).f(x)}{x+\left[f(x)\right]^2}dx$ (1) .

Xét $K=\int_1^2 \frac{1+2f'(x).f(x)}{x+\left[f(x)\right]^2}dx$

Ta có: $K=\int_1^2 \frac{1+2f'(x).f(x)}{x+f^2(x)}dx=\int_1^2 \frac{d\left[x+f^2(x)\right]}{x+f^2(x)}=\ln\left|x+f^2(x)\right|\Big|_1^2$

$=\ln\left(2+f^2(2)\right)-\ln\left(1+f^2(1)\right)$

Từ giả thiết suy ra :

$K=\ln\left(2+6+8\left[f(1)\right]^2\right)-\ln\left(1+\left[f(1)\right]^2\right)=\ln\left(8+8\left[f(1)\right]^2\right)-\ln\left(1+\left[f(1)\right]^2\right)=\ln 8=3\ln 2$

Thay vào (1) ta được: $2I=2-\frac{11}{16}+3\ln 2=\frac{21}{16}+3\ln 2\Rightarrow I=\frac{21}{32}+\frac{3}{2}\ln 2$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1$ và $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)$. Đặt $T=f(1)-f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2\le T<-1$. **B.** $-1\le T<0$. **C.** $0\le T<1$. **D.** $1\le T<2$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có $\int \frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}dx=\int 1.dx \Leftrightarrow \int \frac{d\left[f'(x)\right]}{\left[f'(x)\right]^2}dx=\int 1.dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f'(x)}=x+c$

Mà $f'(0)=-1$ nên $\begin{cases} c=-1 \\ f'(x)=-\frac{1}{x+1} \end{cases} \Rightarrow T=\int_0^1 -\frac{1}{x+1}=-\ln 2$

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+f(x)\cdot f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng ?

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\left(f(x)\cdot f'(x)\right)'=\left(f'(x)\right)^2+f(x)\cdot f''(x)$.

Do đó $f(x)\cdot f'(x)=\int\left(15x^4+12x\right)dx=3x^5+6x^2+C$.

Mà $f(0)=f'(0)=1$ nên $f(x)\cdot f'(x)=3x^5+6x^2+1$.

Suy ra $\int f(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x=\int(3x^5+6x^2+1)\mathrm{d}x$.

Tức là $\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^6}{2}+2x^3+x+C$, mà $f(0)=1$ nên $\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^6}{2}+2x^3+x+1$.

Vậy $f^2(1)=8$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\dfrac{1}{\pi}$. **C.** $\dfrac{2}{\pi}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\cos(\pi x)\mathrm{d}f(x)=f(x)\cos(\pi x)\Big|_0^1+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$=-f(1)-f(0)+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\left[\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$ ta có:

$\dfrac{1}{4}=\left[\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int\limits_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{1-\cos 2\pi x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2\pi x}{4}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{4}$

.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=k\sin\pi x$.

Từ đó ta có:

$\dfrac{1}{2}=\int\limits_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 k\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=k\int\limits_0^1\dfrac{1-\cos 2\pi x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{k}{2}\left(x-\dfrac{\sin 2\pi x}{2}\right)\Big|_0^1=\dfrac{k}{2}\Rightarrow k=1$.

Suy ra $f(x)=\sin\pi x$.

Do đó $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\sin\pi x dx=-\dfrac{\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^1=\dfrac{2}{\pi}$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3}{x+1}$; $f(0)=1$ và $f(1)+f(-2)=2$. Giá trị của $f(-3)$ bằng

A. $1+2\ln 2$. **B.** $1-\ln 2$. **C.** 1. **D.** $2+\ln 2$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{3}{x+1}\mathrm{d}x=3\ln|x+1|+C$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}3\ln(x+1)+C_1 & khi\ x\ge -1\\ 3\ln(-x-1)+C_2 & khi\ x<-1\end{cases}$

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)+f(-2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ 3\ln 2+C_1+C_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=1-3\ln 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3\ln(x+1)+1 \text{ khi } x\geq -1 \\ 3\ln(-x-1)+1-3\ln 2 \text{ khi } x<-1 \end{cases}$$

Vậy $f(-3)=3\ln 2+1-3\ln 2=1$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ biết $f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0$, $f(x)>0\ \forall x>0$ và $f(1)=\frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=1+f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)$.

A. $\frac{6059}{4038}$. **B.** $\frac{6055}{4038}$. **C.** $\frac{6053}{4038}$. **D.** $\frac{6047}{4038}$.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x)+(2x+3)\left[f(x)\right]^2=0 \Rightarrow \frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=2x+3 \Rightarrow \int \frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int(2x+3)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+3x+C} \Rightarrow f(1)=\frac{1}{4+C}$$

Mà $f(1)=\frac{1}{6}$ nên ta có $\frac{1}{4+C}=\frac{1}{6} \Rightarrow C=2 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

$P=1+f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2019}=\frac{6055}{4038}.$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)dx=4$. Tính $I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

A. $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

Lời giải

Chọn B

*) Đặt $t=\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2t \\ dx=2dt \end{cases}$; với $x=0 \Rightarrow t=0; x=4 \Rightarrow t=2$.

*) $I=\int_0^2 2tf'(t)2\mathrm{d}t=4\int_0^2 tdf(t)=4tf(t)|_0^2-4\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$

$=4.2.f(2)-4.\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4.2.16-4.4=112$.

Câu 29: **[2D3-3]** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $F(x)$ và $f(x)$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_{-1}^2 F(x+1)dx=1; F(3)=3$. Tính $I=\int_0^3 xf(x)dx$

A. $I=8$. **B.** $I=9$. **C.** $I=10$. **D.** $I=11$.

Lời giải

Chọn A

*) Ta có : $1=\int_{-1}^{2}F\left(x+1\right)dx=\int_{-1}^{2}F\left(x+1\right)d(x+1)=\int_{0}^{3}F\left(t\right)dt\Rightarrow\int_{0}^{3}F\left(x\right)dx=1$.

*) $I=\int_{0}^{3}xf\left(x\right)dx=\int_{0}^{3}xdF\left(x\right)=xF\left(x\right)\Big|_{0}^{3}-\int_{0}^{3}F\left(x\right)dx=3F\left(3\right)-1=8$.

Câu 30: **[2D3-3]** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(1\right)-2f\left(0\right)=2$, $\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_{0}^{3}\left(6-x\right)f'\left(\dfrac{x}{3}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=61$. B. $I=63$. C. $I=65$. D. $I=67$.

Lời giải

Chọn B

*) Đặt $t=\dfrac{x}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=3t\\dx=3dt\end{cases}$; với $x=0\Rightarrow t=0; x=3\Rightarrow t=1$.

*) $I=\int_{0}^{1}\left(6-3t\right).f'\left(t\right).3dt=9\int_{0}^{1}\left(2-t\right)df\left(t\right)=9\left[\left(2-t\right)f\left(t\right)\right]\Big|_{0}^{1}-9\int_{0}^{1}f\left(t\right)d\left(2-t\right)$

$=9\left[f\left(1\right)-2f\left(0\right)\right]+9\int_{0}^{1}f\left(t\right)dt=9.2+9.5=63$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, liên tục trên $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1}\left(x+1\right)f'\left(x\right)dx=10$ và $2f\left(1\right)-f\left(0\right)=2$. Tính $I=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx$.

A. $I=-12$. B. $I=8$. C. $I=12$. D. $I=-8$.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\dv=f'\left(x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=f\left(x\right)\end{cases}$.

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần và giả thiết bài toán, ta được:

$10=\int\limits_{0}^{1}\left(x+1\right)f'\left(x\right)dx=\left(x+1\right)f\left(x\right)\Big|_{0}^{1}-\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx=\left[2f\left(1\right)-f\left(0\right)\right]-I=2-I$

$\Rightarrow I=2-10=-8$.

Câu 32: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f\left(0\right)=0$; $f'\left(x\right)\le 10$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tìm GTLN mà $f\left(3\right)$ có thể đạt được?

A. 30. **B.** 10. **C.** 60. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Vì $10-f'\left(x\right)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên: $\int\limits_{0}^{3}\left[10-f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x\ge 0$

$\Leftrightarrow\left[10x-f\left(x\right)\right]\Big|_{0}^{3}\ge 0\Leftrightarrow\left[10.3-f\left(3\right)\right]-\left[10.0-f\left(0\right)\right]\ge 0\Rightarrow f\left(3\right)\le 30$

Vậy GTLN mà $f\left(3\right)$ có thể đạt được là 30.

Câu 33: Cho hai hàm $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ có đạo hàm trên đoạn $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f\left(1\right)+g\left(1\right)=4 \\ g\left(x\right)=-x.f'\left(x\right);\ f\left(x\right)=-x.g'\left(x\right) \end{cases}$. Tính $I=\int\limits_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right]\Rightarrow\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int -x\left[f'(x)+g'(x)\right]\mathrm{d}x$.

$=-x\left[f(x)+g(x)\right]+\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x \Rightarrow -x\left[f(x)+g(x)\right]=C \Rightarrow f(x)+g(x)=-\dfrac{C}{x}$

Vì $f(1)+g(1)=-C\Rightarrow C=-4$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\dfrac{4}{x}\mathrm{d}x=8\ln2$.

Câu 34: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\left(f'\left(x\right)\right)^2+f\left(x\right)\cdot f''\left(x\right)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=1$. Giá trị của $f^2\left(1\right)$ bằng ?

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\left(f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)\right)'=\left(f'\left(x\right)\right)^2+f\left(x\right)\cdot f''\left(x\right)$.

Do đó $f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)=\int\left(15x^4+12x\right)\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C$.

Mà $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=1$ nên $f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)=3x^5+6x^2+1$.

Suy ra $\int f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^5+6x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Tức là $\dfrac{f^2\left(x\right)}{2}=\dfrac{x^6}{2}+2x^3+x+C$, mà $f\left(0\right)=1$ nên $\dfrac{f^2\left(x\right)}{2}=\dfrac{x^6}{2}+2x^3+x+1$.

Vậy $f^2\left(1\right)=8$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và $f\left(0\right)+f\left(1\right)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 f'\left(x\right)\cos\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\dfrac{1}{\pi}$. **C.** $\dfrac{2}{\pi}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int\limits_0^1 f'\left(x\right)\cos\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\cos\left(\pi x\right)\mathrm{d}f\left(x\right)=f\left(x\right)\cos\left(\pi x\right)\Big|_0^1+\pi\int\limits_0^1 f\left(x\right)\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x$

$$= -f(1) - f(0) + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$ ta có:

$$\frac{1}{4} = \left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-\cos 2\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2\pi x}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$$

.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = k\sin\pi x$.

Từ đó ta có:

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)\sin\pi x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 k\sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = k\int_0^1 \frac{1-\cos 2\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2}\left(x - \frac{\sin 2\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 1.$$

Suy ra $f(x) = \sin\pi x$.

Do đó $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sin\pi x dx = -\frac{\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 12$. **B.** $I = 112$. **C.** $I = 28$. **D.** $I = 144$.

Lời giải

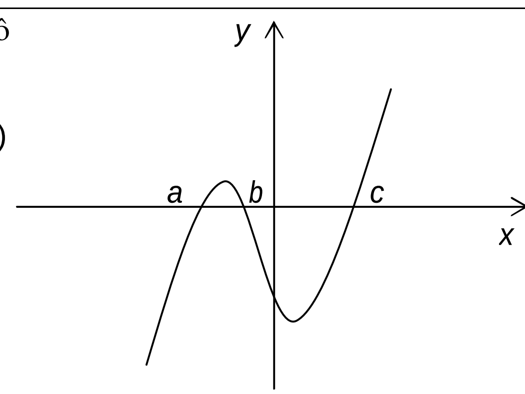
Chọn B

Đặt $u = x$, $\mathrm{d}v = f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$

Suy ra $I = \left(2xf\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^4 - 2\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 8f(2) - 4\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 112$.

Câu 37 : Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên:

Biết $f(a).f(b) < 0$ hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ít nhất bao nhiêu điểm?



A. 4. **B.** 3.
C. 2. **D.** 1.

Lời giải

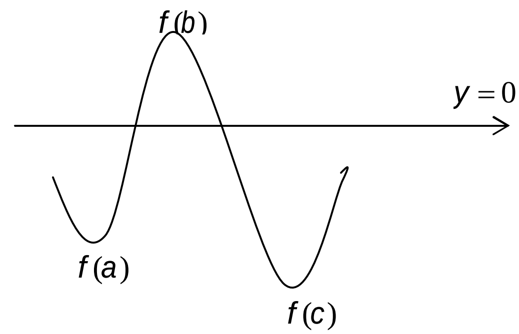
Chọn C.

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ sau đây:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

Theo đề ra và bảng biến thiên ta có:

$\begin{cases} f(a).f(b)<0 \\ f(a)<f(b) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f(b)>0 \\ f(a)<0 \end{cases}$



Ta có: $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{dx} < \int\limits_b^c -f'(x)\mathrm{dx} \longrightarrow \int\limits_a^c f'(x)\mathrm{dx}<0 \longrightarrow f(c)-f(a)<0 \longrightarrow f(c)<f(a)<0$.

Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $y=f(x)$ liên tục trên $[a;\ b]$ và $f(a).f(b)<0$ nên tồn tại $x_1 \in (a;\ b)$ sao cho $f(x_1)=0$.

Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $y=f(x)$ liên tục trên $[b;\ c]$ và $f(b).f(c)<0$ nên tồn tại $x_2 \in (b;\ c)$ sao cho $f(x_2)=0$.

Mặt khác $(a;\ b)\cap(b;\ c)=\varnothing$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại ít nhất tại hai điểm.

Câu 38: Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[1;8]$ và thỏa mãn

$$\int\limits_1^2 \left[f\left(x^3\right)\right]^2 dx + 2\int\limits_1^2 f\left(x^3\right)dx = \frac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)dx - \int\limits_1^2 \left(x^2-1\right)^2 dx$$

Tích phân $\int\limits_1^2 \left[f'(x)\right]^3 dx$ bằng:

A. $\frac{8\ln 2}{27}$. **B.** $\frac{\ln 2}{27}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t=x^3 \to dt=3x^2dx$

$$\int\limits_1^2 \left[f\left(x^3\right)\right]^2 dx + 2\int\limits_1^2 f\left(x^3\right)dx = \frac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)dx - \int\limits_1^2 \left(x^2-1\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_1^8 \frac{\left[f(t)\right]^2}{t^{\frac{2}{3}}}dt + 2\int_1^8 \frac{f(t)\left[1-t^{\frac{2}{3}}\right]}{t^{\frac{2}{3}}}dt + \int_1^8 \frac{\left[1-t^{\frac{2}{3}}\right]^2}{t^{\frac{2}{3}}}dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^8 \left[\frac{f(t)+1-t^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}\right]^2 dt = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = t^{\frac{2}{3}} - 1 \Rightarrow f'(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow \int_1^2 \left[f'(x)\right]^3 dx = \frac{8}{27}\ln t\Big|_1^2 = \frac{8}{27}\ln 2.$$

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó:

$$\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$$

$$= -\left(f(1)+f(0)\right) + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Cách 1: Ta có $\int_0^1 \left[f(x) - k\sin(\pi x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x + k^2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2} - k + \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Do đó $\int_0^1 \left[f(x) - \sin(\pi x)\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = kg(x), \forall x \in [a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx\right]^2 \le \int_0^1 f^2(x)\,dx.\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{4}$,

suy ra $f(x)=k\sin(\pi x)$.

Mà $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx=\frac{2}{\pi}$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)>0$ xác định, có đạo hàm trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} g(x)=1+2018\int_0^x f(t)\,dt \\ g(x)=f^2(x)\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 \sqrt{g(x)}\,dx$

A. $I=\frac{1009}{2}$. B. $I=505$. C. $I=\frac{1011}{2}$. D. $I=\frac{2019}{2}$

Lời giải

Chọn C.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} g'(x)=2018f(x) \\ g'(x)=2f'(x).f(x)\end{cases}\Rightarrow 2018f(x)=2f(x).f'(x)$

$\Leftrightarrow 2f(x)\left[1009-f'(x)\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=1009\end{array}\right.$

+ T/hợp $f(x)=0$ (loại)

+ T/hợp $f'(x)=1009\Rightarrow f(x)=1009x+C$

Thay ngược lại ta được: $1+2018\int_0^x\left[1009t+C\right]dt=(1009x+C)^2$

$\Leftrightarrow 1+2018\left(\frac{1009}{2}t^2+Ct\right)\Big|_0^x=(1009x+C)^2\Leftrightarrow C^2=1$

Suy ra $f(x)=1009x-1$ loại vì $f(x)>0\forall x\in[0;1]$

Hoặc $f(x)=1009x+1$

Khi đó $I=\int_0^1\sqrt{g(x)}\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(1009x+1)\,dx=\frac{1011}{2}$.

Câu 41: [THPT Chuyên Trần Phú, Hải Phòng, lần 2, 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2 dx=9$ và $\int_0^1 x^3f(x)\,dx=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^4 f(x)}{4}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x = -1$.

$\int_0^1 \left(f'(x)+9x^4\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x + 18\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x + 81\int_0^1 x^8\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x)+9x^4 = 0$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{9x^5}{5}+\frac{14}{5} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=10$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{7}{20}$. **B.** $\frac{43}{5}$. **C.** $\frac{15}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=10$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 27$ và $\int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $-\frac{9}{30}$. **B.** $\frac{59}{5}$. **C.** $\frac{23}{2}$. **D.** $\frac{9}{30}$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}+\ln 2+1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f(x)=\int\frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$.

Do hàm số $f\left(x\right)$ không xác định tại $x=1; x=-2$ $\Rightarrow f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1 \; khi\, x<-2\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_2 \; khi -2<x<1\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_3 \; khi\, x>1\end{cases}$

$f\left(-3\right)-f\left(3\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\ln 4+C_1-\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}-C_3=0 \Rightarrow C_1-C_3=-\frac{1}{3}\ln 10$.

$f\left(0\right)=\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{1}{3}\ln 2+C_2=\frac{1}{3} \Rightarrow C_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$.

$f\left(-4\right)+f\left(-1\right)-f\left(4\right)=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1+\frac{1}{3}\ln 2+C_2-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-C_3 \quad =\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\ln 2+C_2+C_1-C_3$

$=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 10 \; =\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}.4.2.\frac{1}{10}\right) \; =\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f\left(x\right)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, $f'\left(x\right)=-e^x.f^2\left(x\right), \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0=\ln 2$ là:

A. $2x+9y-2\ln 2-3=0$. **B.** $2x-9y-2\ln 2+3=0$.

C. $2x-9y+2\ln 2-3=0$. **D.** $2x+9y+2\ln 2-3=0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'\left(x\right)=-e^x.f^2\left(x\right) \Leftrightarrow -\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=e^x \Leftrightarrow \int\limits_0^{\ln 2}\left[-\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\right]dx=\int\limits_0^{\ln 2}e^x dx \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f\left(x\right)}\right)\Bigg|_0^{\ln 2}=\left(e^x\right)\Big|_0^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f\left(\ln 2\right)}-\frac{1}{f\left(0\right)}=1 \Leftrightarrow f\left(\ln 2\right)=\frac{1}{3}$.

Vậy $f'\left(\ln 2\right)=-e^{\ln 2}.f^2\left(\ln 2\right)=-2.\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{-2}{9}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{2}{9}\left(x-\ln 2\right)+\frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x+9y-2\ln 2-3=0$.

Câu 46 : Cho hàm số $y=f\left(x\right)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn:

$g\left(x\right)=1+2018\int\limits_0^x f\left(t\right)dt, g\left(x\right)=f^2\left(x\right)$. Tính $\int\limits_0^1\sqrt{g\left(x\right)}dx$.

A. $\frac{1011}{2}$. **B.** $\frac{1009}{2}$. **C.** $\frac{2019}{2}$. **D.** 505.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g(0)=1$

$$g(x)=1+2018\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow g'(x)=2018f(x)=2018\sqrt{g(x)}\Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}=2018\Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}dx=2018\int_0^t \mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{g(t)}-1\right)=2018t\Rightarrow \sqrt{g(t)}=1009t+1\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(t)}dt=\frac{1011}{2}.$$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\int_0^x \sqrt[3]{3\left(f'(t)\right)^2-3f'(t)+3}dt$. Tính $f'(x)$.

A. $f'(x)=2$. **B.** $f'(x)=-1+\sqrt[3]{2}$. **C.** $f'(x)=1+\sqrt[3]{2}$. **D.** $f'(x)=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đạo hàm hai vế ta được:

$$f'(x)=\sqrt[3]{3\left(f'(x)\right)^2-3f'(x)+3}\Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^3=3\left(f'(x)\right)^2-3f'(x)+3$$

$$\left(f'(x)-1\right)^3=2\Leftrightarrow f'(x)=1+\sqrt[3]{2}.$$

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ thỏa mãn $\sqrt{2x+1}-11=\int_a^x f(t)dt$. Tìm a

A. 120. **B.** 60. **C.** 121. **D.** 61.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\sqrt{2x+1}-11=\int_a^x f(t)dt\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x+1}}=f(x)$$

Suy ra, $\sqrt{2x+1}-11=\int_a^x \frac{1}{\sqrt{2t+1}}dt=\frac{1}{2}\int_a^x (2t+1)^{-\frac{1}{2}}d(2t+1)=(2t+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_a^x=\sqrt{2x+1}-\sqrt{2a+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-11=\sqrt{2x+1}-\sqrt{2a+1}\Leftrightarrow a=60$$

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $\int_0^{x^2} f(t)dt=x\cos(\pi x)$. Tính $f(4)$

A. $f(4)=\frac{1}{4}$. **B.** $f(4)=1$. **C.** $f(4)=4$. **D.** $f(4)=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int_0^{x^2} f(t)dt=x\cos(\pi x)\Leftrightarrow \left(x^2\right)'.f\left(x^2\right)=\cos(\pi x)-\pi x\sin(\pi x)\Leftrightarrow 2xf\left(x^2\right)=\cos\pi x-\pi x\sin(\pi x)$$

Thay $x=2$ vào hai vế ta được $4f(4)=1\Leftrightarrow f(4)=\frac{1}{4}$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)\ge x+\frac{1}{x},\forall x>0$ và $f\left(1\right)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $f\left(2\right)$.

A. $m=\frac{1}{2}+\ln 2$. **B.** $m=2+2\ln 2$. **C.** $m=1+\ln 2$. **D.** $m=\frac{5}{2}+\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$f\left(2\right)=\left[f\left(2\right)-f\left(1\right)\right]+f\left(1\right)=\int\limits_1^2 f'\left(x\right)dx+f\left(1\right)\ge\int\limits_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+1=\frac{5}{2}+\ln 2\Rightarrow m=\frac{5}{2}+\ln 2$$

Câu 51: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R thỏa mãn $f\left(x\right)=\int\limits_0^x\left[1-t^2f'\left(t\right)\right]dt$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f\left(1\right)+f\left(2\right)>2f\left(3\right)$. **B.** $f\left(1\right)+f\left(2\right)<2f\left(3\right)$.

C. $f\left(1\right)+f\left(2\right)=2f\left(3\right)$. **D.** $f\left(1\right)+f\left(2\right)\ge 2f\left(3\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đạo hàm hai vế ta được $f'\left(x\right)=1-x^2f'\left(x\right)\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}>0,\forall x$

$\Rightarrow f\left(1\right)+f\left(2\right)<f\left(3\right)+f\left(3\right)=2f\left(3\right)$

Câu 52: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên R thỏa mãn $\left[f\left(x\right)\right]^2=\int\limits_0^x\left[\left(f\left(t\right)\right)^2+\left(f'\left(t\right)\right)^2\right]dt+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f\left(1\right)=2018e$. **B.** $f\left(1\right)=\sqrt{2018}$. **C.** $f\left(1\right)=2018$. **D.** $f\left(1\right)=\sqrt{2018}e$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$2f\left(x\right).f'\left(x\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2+\left(f'\left(x\right)\right)^2\Leftrightarrow\left(f'\left(x\right)-f\left(x\right)\right)^2=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=f\left(x\right)\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=1$$

$\Leftrightarrow\ln f\left(x\right)=x+C\Leftrightarrow f\left(x\right)=e^{x+C}$

Thử vào đẳng thức đã cho suy ra

$$e^{2C}e^{2x}=\int\limits_0^x 2e^{2C}e^{2t}dt+2018\Leftrightarrow e^{2C}e^{2x}=e^{2C}.e^{2t}\Big|_0^x+2018\Leftrightarrow e^{2C}=2018\Leftrightarrow e^C=\sqrt{2018}$$

Vậy $f\left(x\right)=e^{x+C}=e^x.e^C=\sqrt{2018}e^x$. Suy ra $f\left(1\right)=\sqrt{2018}e$.

Câu 53: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên R thỏa mãn $2\left[f\left(x\right)\right]^2=\int\limits_0^x\left[4\left(f\left(t\right)\right)^2+\left(f'\left(t\right)\right)^2\right]dt+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f\left(1\right)=1009e^2$. **B.** $f\left(1\right)=\sqrt{1009}e$. **C.** $f\left(1\right)=1009e$. **D.** $f\left(1\right)=\sqrt{1009}e^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đạo hàm hai vế ta được : $4f(x).f'(x)=(2f(x))^2+(f'(x))^2 \Leftrightarrow (f'(x)-2f(x))^2=0$

$\Leftrightarrow f'(x)=2f(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2 \Leftrightarrow \ln f(x)=2x+C \Leftrightarrow f(x)=k.e^{2x}\ k>0$

Thử vào đẳng thức đã cho suy ra

$2k^2e^{4x}=\int\limits_0^x 8k^2e^{4t}dt+2018 \Leftrightarrow 2k^2e^{4x}=2k^2.e^{4t}\Big|_0^x+2018 \Leftrightarrow 2k^2=2018 \Leftrightarrow k=\sqrt{1009}$

Vậy $f(x)=\sqrt{1009}e^{2x} \Rightarrow f(1)=\sqrt{1009}e^2$

Câu 54: (THPT Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh lần 3-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0, f'(1)=\dfrac{9}{2}$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2dx=\dfrac{39}{4}$, $\int\limits_0^1 (x^2+x)f''(x)dx=\dfrac{5}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)dx$.

A. $\dfrac{14}{3}$. **B.** 14. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D.

Chọn $f(x)=ax^2+bx$, $f(0)=0$; $f'(x)=2ax+b$, $f'(1)=\dfrac{9}{2} \Rightarrow 2a+b=\dfrac{9}{2}$ (1)

$[f'(x)]^2=(ax+b)^2 \Rightarrow \int\limits_0^1 (ax+b)^2dx=\dfrac{4}{3}a^2+2ab+b^2=\dfrac{39}{4}$ (2)

Lại có: $f''(x)=2a \Rightarrow \int\limits_0^1 (x^2+x)f''(x)dx=2a\int\limits_0^1 (x^2+x)dx=\dfrac{5a}{3} \Rightarrow \dfrac{5a}{3}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$ (3)

Thay (3) vào (1) ta được $b=\dfrac{9}{2}$ Từ đây thay a,b vào (2) kiểm chứng (2) đúng.

Vậy ta tìm được $f(x)=\dfrac{3}{2}(x^2+x)$. Vậy $I=\int\limits_0^2 f(x)dx=\dfrac{3}{2}\int\limits_0^2 (x^2+x)dx=7$

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x)\ge x+\dfrac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^+$ và $f(1)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2)$.

A. 3. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{2}+\ln 2$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Theo giả thiết $f'(x)\ge x+\dfrac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^+$ nên lấy tích phân hai vế với cận từ 1 đến 2 ta được:

$$\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x \ge \int\limits_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+\ln 2.$$

Mà $\int_1^2 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = f(2) - 1$ nên $f(2) - 1 \ge \frac{3}{2} + \ln 2.$

Suy ra $f(2) \ge \frac{5}{2} + \ln 2.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0.$

Suy ra $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + C$, mà $f(1) = 1$ nên $C = \frac{1}{2}.$

Do đó $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(2) = \frac{5}{2} + \ln 2$ khi $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{2}.$

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f'(1) = g(1) = 1; f(2)g(2) = f(1) \\ 1 - f'(x)g'(x) = g(x).\left[f''(x) + \frac{1}{x}f'(x)\right] \end{cases} \quad \forall x \ne 0$$

Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)g'(x)$

A. $I = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. **B.** $I = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. **C.** $I = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. **D.** $I = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

Lời giải

Chọn D.

$1 - f'(x)g'(x) = g(x).\left[f''(x) + \frac{1}{x}f'(x)\right]$

$\Leftrightarrow x - xf'(x)g'(x) = g(x).\left[xf''(x) + f'(x)\right]$

$\Leftrightarrow g(x)\left[xf'(x)\right]' + xf'(x)g'(x) = x$

$\Leftrightarrow \left[xf'(x)g(x)\right]' = x$

$\Leftrightarrow xf'(x)g(x) = \frac{x^2}{2} + C$

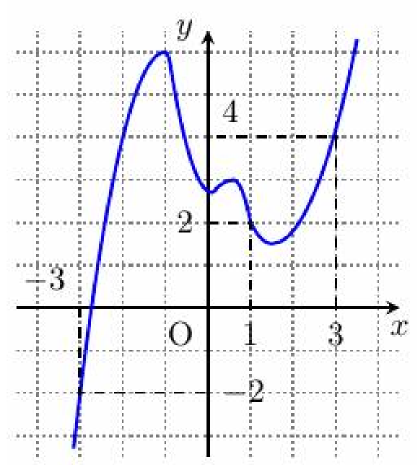
Do $f'(1) = g(1) = 1$ nên $xf'(x)g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ hay $f'(x)g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$

Lấy tích phân cận từ 1 đến 2 ta được

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)dx = \int_1^2 f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - I$

$\Rightarrow I = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-3;3]$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $f(1) = 6$ và $g(x) = f(x) - 2\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$. Kết luận nào sau đây đúng về số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ trên $[-3;3]$.

A. 2. **B.** 1.

C. 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g(x) = f(x) - 2\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$.

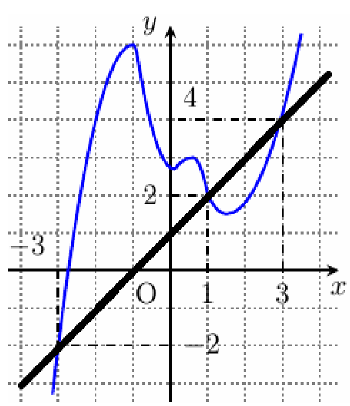
$g'(x) = f'(x) - (x+1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 6 \Rightarrow g(1) = 4$



Từ đồ thị suy ra $\int_{-3}^{1} \left[f'(x) - (x+1)\right] dx > 4 \Rightarrow g(x)\Big|_{-3}^{1} > 4 \Leftrightarrow g(1) - g(-3) > 4 \Rightarrow g(-3) < 0$.

Ta cũng có $\int_1^3 \left[(x+1)-f'(x)\right]dx<4 \Rightarrow -g(x)|_1^3<4 \Leftrightarrow -g(3)+g(1)<4 \Rightarrow g(3)>0$.

Suy đồ thị $y=g(x)$ cắt trục hoành tại một điểm thuộc $\left[-3;3\right]$.

Câu 58: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. B. $I=\frac{5}{2}$. C. $I=4\ln 2-\frac{15}{8}$. D. $I=4\ln 2+\frac{15}{8}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt: $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$

Đổi cận:

x	$\frac{1}{2}$	2
t	2	$\frac{1}{2}$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}\frac{1}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\Rightarrow 3I=2\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\left[2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right]dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}.\frac{3}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{3}{x^2}dx$$

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}+\ln 2+1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f(x)=\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$.

Do hàm số $f\left(x\right)$ không xác định tại $x=1;x=-2$ $\Rightarrow f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1\ khi\,x<-2\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_2\ khi-2<x<1\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_3\ khi\,x>1\end{cases}$

$f\left(-3\right)-f\left(3\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\ln 4+C_1-\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}-C_3=0 \Rightarrow C_1-C_3=-\frac{1}{3}\ln 10$.

$f\left(0\right)=\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}\ln 2+C_2=\frac{1}{3} \Rightarrow C_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$.

$f\left(-4\right)+f\left(-1\right)-f\left(4\right)=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1+\frac{1}{3}\ln 2+C_2-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-C_3 \quad =\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\ln 2+C_2+C_1-C_3$

$=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 10 \ =\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}.4.2.\frac{1}{10}\right) \ =\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$.

Câu 60: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, $f'\left(x\right)=-e^x.f^2\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0=\ln 2$ là:

A. $2x+9y-2\ln 2-3=0$. **B.** $2x-9y-2\ln 2+3=0$.

C. $2x-9y+2\ln 2-3=0$. **D.** $2x+9y+2\ln 2-3=0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'\left(x\right)=-e^x.f^2\left(x\right) \Leftrightarrow -\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=e^x \Leftrightarrow \int\limits_0^{\ln 2}\left[-\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\right]dx=\int\limits_0^{\ln 2}e^x dx \Leftrightarrow \left.\left(\frac{1}{f\left(x\right)}\right)\right|_0^{\ln 2}=\left.\left(e^x\right)\right|_0^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f\left(\ln 2\right)}-\frac{1}{f\left(0\right)}=1 \Leftrightarrow f\left(\ln 2\right)=\frac{1}{3}$.

Vậy $f'\left(\ln 2\right)=-e^{\ln 2}.f^2\left(\ln 2\right)=-2.\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{-2}{9}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{2}{9}\left(x-\ln 2\right)+\frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x+9y-2\ln 2-3=0$.

Câu 61 : Cho hàm số $y=f\left(x\right)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn:

$g\left(x\right)=1+2018\int\limits_0^x f\left(t\right)dt, g\left(x\right)=f^2\left(x\right)$. Tính $\int\limits_0^1\sqrt{g\left(x\right)}dx$.

A. $\frac{1011}{2}$. **B.** $\frac{1009}{2}$. **C.** $\frac{2019}{2}$. **D.** 505.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g(0)=1$

$$g(x)=1+2018\int_0^x f(t)dt$$

$$\Rightarrow g'(x)=2018f(x)=2018\sqrt{g(x)}\Rightarrow\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}=2018\Rightarrow\int_0^t\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}dx=2018\int_0^t dx.$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{g(t)}-1\right)=2018t\Rightarrow\sqrt{g(t)}=1009t+1\Rightarrow\int_0^1\sqrt{g(t)}dt=\frac{1011}{2}.$$

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(-2)+f(0)+f(4)$.

A. $P=\ln\frac{9}{5}+1$. **B.** $P=1+\ln\frac{6}{5}$. **C.** $P=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **D.** $P=\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Khi đó $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & (x<-1)\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & (-1<x<1).\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_3 & (x>1)\end{cases}$

Dễ thấy $\{-3\}\in(-\infty;-1)$; $\left\{\frac{-1}{2};0;\frac{1}{2}\right\}\in(-1;1)$; $\{3;4\}\in(1;+\infty)$.

Nên $f(-3)=\frac{1}{2}\ln 2+C_1$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 3+C_2$; $f(0)=C_2$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{2}\ln 3+C_2$;

$f(3)=\frac{-1}{2}\ln 2+C_3$ và $f(4)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_3$.

Ta có $P=f(0)+f(4)=C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_2+C_3$.

Mặt khác $f\left(\frac{-1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 3+C_2+\frac{-1}{2}\ln 3+C_2=2\Leftrightarrow C_2=1$.

Và $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 2+C_1+\frac{-1}{2}\ln 2+C_3=0\Leftrightarrow C_1+C_3=0$.

$P=f(-2)+f(0)+f(4)=\frac{1}{2}\ln 3+C_1+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Câu 63 : Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và

$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)dx = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 2-e$. **B.** $I = e-2$. **C.** $I = \frac{e}{2}$. **D.** $I = \frac{e-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Xét $A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = xe^x \end{cases}$

Suy ra $A = xe^x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x)dx = -\int_0^1 xe^x f'(x)dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x)dx = \frac{1-e^2}{4}$

Xét $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{4}$

Ta có : $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx + 2\int_0^1 xe^x f'(x)dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x) + xe^x\right)^2 dx = 0$

Suy ra $f'(x) + xe^x = 0, \forall x \in [0;1]$ (do $\left(f'(x) + xe^x\right)^2 \ge 0, \forall x \in [0;1]$)

$\Rightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x + C$

Do $f(1) = 0$ nên $f(x) = (1-x)e^x$

Vậy $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (2-x)e^x\Big|_0^1 = e-2$.

Câu 64 : Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t)dt = x.\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$

A. $f(\pi) = \frac{\pi-1}{4}$. **B.** $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$. **C.** $f(\pi) = \frac{\pi}{4}$. **D.** $f(\pi) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\int f(t)dt = F(t) \Rightarrow F'(t) = f(t)$

$\int_0^{x^2} f(t)dt = x.\sin(\pi x) \Leftrightarrow F(t)\Big|_0^{x^2} = x.\sin(\pi x)$

$\Leftrightarrow F(x^2) - F(0) = x.\sin(\pi x) \Rightarrow F'(x^2).2x = \sin(\pi x) + \pi x.\cos(\pi x)$

$\Leftrightarrow f(x^2).2x = \sin(\pi x) + \pi x.\cos(\pi x)$

$\Rightarrow f\left(4\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Câu 65: [Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội - 2018] Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left|1+x\right|-\left|1-x\right|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thảo mãn $F\left(1\right)=3$. Tính tổng $T=F\left(0\right)+F\left(2\right)+F\left(-3\right)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)=\begin{cases}2 & \text{khi } x\geq 1\\ 2x & \text{khi } -1<x<1\\ -2 & \text{khi } x\leq -1\end{cases}$.

Hàm $f\left(x\right)$ có nguyên hàm là $F\left(x\right)=\begin{cases}2x+m & \text{khi } x\geq 1\\ x^2+n & \text{khi } -1<x<1\\ -2x+p & \text{khi } x\leq -1\end{cases}$.

Vì $F\left(1\right)=3$ nên $m=1$.

Hàm $F\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$ nên suy ra $n=2$.

Hàm $F\left(x\right)$ liên tục tại $x=-1$ nên suy ra $p=1$.

Vậy ta có $T=F\left(0\right)+F\left(2\right)+F\left(-3\right)=2+5+7=14$.

Câu 66: [Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội - 2018] Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'\left(x\right)\in\left[-1;1\right]$ với $\forall x\in\left(0;2\right)$. Biết $f\left(0\right)=f\left(2\right)=1$. Đặt $I=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$, phát biểu nào dưới đây đúng?

A. $I\in\left(-\infty;0\right]$. **B.** $I\in\left(0;1\right]$. **C.** $I\in\left[1;+\infty\right)$. **D.** $I\in\left(0;1\right)$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $I=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=x-1\end{cases}$.

Khi đó:

+ $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x-1\right)f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=1+\int\limits_0^1\left(1-x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x\geq 1-\int\limits_0^1\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

+ $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x-1\right)f\left(x\right)\Big|_1^2-\int\limits_1^2\left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=1-\int\limits_1^2\left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x\geq 1-\int\limits_1^2\left(x-1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $I\geq 1$.

Câu 67: [THPT Chuyên LQĐ, LAI CHÂU, lần 1, 2018] Cho hai hàm $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức hệ thức sau với mọi $x \in [1;4]$

$$\begin{cases} f(1) = 2g(1) = 2 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{g(x)}; g'(x) = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$$. Tính $I = \int_1^4 [f(x).g(x)]dx$.

A. $4\ln 2$. **B.** 4. **C.** $2\ln 2$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Từ giả thiết ta có $f'(x).g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ và $g'(x).f(x) = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$, suy ra

$f'(x).g(x) + g'(x).f(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, hay $[f(x).g(x)]' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Do đó $f(x).g(x) = -\int \dfrac{1}{x\sqrt{x}}dx = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$. Lại có $f(1).g(1) = 2.1 = 2$ nên $C = 0$.

$\Rightarrow I = \int_1^4 [f(x).g(x)]dx = \int_1^4 \dfrac{2}{\sqrt{x}}dx = 4$.

Câu 68: [Phạm Minh Tuấn, lần 3, năm 2018- Câu 38]

Cho hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1;4\}$ thỏa mãn $\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4}f'(x) + f''(x) = \dfrac{3}{2x^2-10x+8}$, $f'(-2) = -\dfrac{1}{6}$, $f(0) = 2\ln 4 + 1$, $f(2) = 2\ln 2 - 1$ và $f(5) = \dfrac{1}{2}\ln 4$. Tính $Q = 4f(-1) + 4f(3) + f(8)$;

A. $Q = 8\ln 5 - \dfrac{1}{2}\ln 7 - 2\ln 2$.

B. $Q = 8\ln 5 - \dfrac{1}{2}\ln 7 + 2\ln 2$.

C. $Q = 8\ln 5 + \dfrac{1}{2}\ln 7 + 2\ln 2$.

D. $Q = 8\ln 5 + \dfrac{1}{2}\ln 7 - 2\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4}f'(x) + f''(x) = \dfrac{3}{2x^2-10x+8}$

$$\Leftrightarrow (2x-5)f'(x) + (x^2-5x+4)f''(x) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[(x^2-5x+4)f'(x)\right]' = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x^2-5x+4)f'(x) = \int \frac{3}{2}dx$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5x+4)f'(x) = \frac{3}{2}x + C \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3x}{2(x-4)(x-1)} + \frac{C}{(x-4)(x-1)}$$

Mà $f'(-2) = -\dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{-1}{6} + \dfrac{c}{18} = \dfrac{-1}{6} \Leftrightarrow C = 0$

Vậy $f'(x) = \dfrac{3x}{2(x-4)(x-1)} \Rightarrow f(x) = \int \dfrac{3x}{2(x-4)(x-1)}dx = 2\ln|x-4| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + C$

Xét trên $(-\infty;1)$ ta có $f(0) = 2\ln 4 + 1 \Leftrightarrow 2\ln 4 - \dfrac{1}{2}\ln 1 + C = 2\ln 4 + 1 \Leftrightarrow C = 1$

$\Rightarrow 4f(-1) = 8\ln 5 - 2\ln 2 + 4$

Xét trên $(1;4)$ ta có $f(2) = 2\ln 2 - 1 \Leftrightarrow 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 + C = 2\ln 2 - 1 \Leftrightarrow C = -1$

$\Rightarrow 4f(3) = 8\ln 1 - 2\ln 2 - 4 = -2\ln 2 - 4$

Xét trên $(4;+\infty)$ ta có $f(5) = \frac{1}{4}\ln 4 \Leftrightarrow 2\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 4 + C = \frac{1}{2}\ln 4 \Leftrightarrow C = \ln 4$

$\Rightarrow f(8) = 2\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 7 + \ln 4 = 3\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 7$

Vậy $Q = 4f(-1) + 4f(3) + f(8) = 8\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 7 + 2\ln 2$.

Câu 69. [Phạm Minh Tuấn, lần 3, năm 2018- Câu 49]

Cho hàm số $f(x)$ dương và có đạo hàm liên tục trên $[0;\ 1]$ thỏa mãn $f(0) = 4f(1) = \frac{1}{16}$,

$f'(x) < 0 \forall x \in [0;\ 1]$ và $\int_0^1 (x+1)^3 . f'(x)dx = \frac{-1}{8}$, $\int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2}dx = \frac{1}{64}$. Tính tích phân

$\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{1}{24}$. **B.** $\frac{1}{32}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải.

Chọn B.

Ta có:

$$\int_0^1 (x+1)^3 f'(x)dx = (x+1)^3 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 3(x+1)^2 f(x)dx$$

mà $f(0) = 4f(1) = \frac{1}{16}$, $\int_0^1 (x+1)^3 . f'(x)dx = \frac{-1}{8}$

Nên $\int_0^1 (x+1)^2 f(x)dx = \frac{1}{16}$.

Vì $f(x) > 0$, $f'(x) < 0 \forall x \in [0;\ 1]$ nên $\frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} > 0$; $-(x+1)f'(x) > 0\ \ \forall x \in [0;\ 1]$

$$\frac{1}{16} = \int_0^1 (x+1)^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{f(x)}{\sqrt[3]{[f'(x)]^2}}\right)\left((x+1)^2 . \sqrt[3]{[f'(x)]^2}\right)dx$$

$$\le \sqrt[3]{\int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2}dx} . \sqrt[3]{\left(\int_0^1 -(x+1)^3 f'(x)dx\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} . \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} = k(x+1)^3 f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \ln[f(x)] = \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\ln(x+1) + C$$

Do $f\left(0\right)=\frac{1}{4}$, $f\left(1\right)=\frac{1}{16}$ nên $C=\ln\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}=-2\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{\left(x+1\right)^2}$ $\Rightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{32}$

Câu 50. THPT ĐẶNG THÚC HỨA LẦN 1- 2018

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\ 1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$,

$f'\left(x\right)<0\forall x\in\left[0;\ 1\right]$ và $\int_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$, $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{3}{5}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{3}{4}$. **D.** $I=\frac{1}{5}$