

CHỦ ĐỀ 17: BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

✎ Dạng 1: Lập phương trình mặt cầu

Phương pháp giải:

- Phương trình **chính tắc** của mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
- Phương trình **tổng quát** của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với tâm $I(a; b; c)$ bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

Chú ý:

- Nếu A, B thuộc mặt cầu $(S) \Rightarrow IA = IB = R$.

- Nếu $IA = IB$ thì ta có: $2\vec{AB} \cdot \vec{OI} = OB^2 - OA^2 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2}$

Chứng minh: Ta có: $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow \vec{IA}^2 = \vec{IB}^2 \Leftrightarrow (\vec{IO} + \vec{OA})^2 = (\vec{IO} + \vec{OB})^2$

$$\Leftrightarrow 2\vec{IO} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = OB^2 - OA^2 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2}.$$

- Với bài toán: Viết phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D ta sẽ làm như sau:

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu thì: $IA = IB = IC = ID$ khi đó $I(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \vec{AC} \cdot \vec{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ \vec{AD} \cdot \vec{OI} = \frac{OD^2 - OA^2}{2} \end{cases} \longrightarrow \text{CASIO suy ra tọa độ điểm } I.$$

Trong đó $O(0; 0; 0)$ là gốc tọa độ, giải hệ phương trình suy ra tọa độ điểm I .

Ví dụ 1: Lập phương trình của mặt cầu (S) biết:

a) Tâm I thuộc Oy , đi qua $A(1; 1; 3); B(-1; 3; 3)$.

b) Tâm I thuộc Oz , đi qua $A(2; 1; 1); B(4; -1; -1)$.

Lời giải

a) Gọi $I(0; y; 0)$ ta có: $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 1 + (y-1)^2 + 9 = 1 + (y-3)^2 + 9 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow R = IA = \sqrt{14}$

Suy ra $(S): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 14$.

b) Gọi $I(0; 0; z)$ ta có: $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 4 + 1 + (z-1)^2 = 16 + 1 + (z+1)^2$

$$\Leftrightarrow 4z = -12 \Leftrightarrow z = -3 \Rightarrow I(0; 0; -3); R = \sqrt{21}.$$

Phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 21$

Ví dụ 2: Lập phương trình mặt cầu (S) biết:

a) Tâm I thuộc $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ và đi qua $A(3; 0; -1); B(1; 4; 1)$.

b) Tâm I thuộc $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ và đi qua $A(3; 6; -1); B(5; 4; -3)$.

Lời giải

a) Gọi $I(1+t; t; 2t)$ là tâm mặt cầu ta có:

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (t-2)^2 + t^2 + (2t+1)^2 = t^2 + (t-4)^2 + (2t-1)^2$$

$$\Leftrightarrow -12t = -12 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2; 1; 2) \Rightarrow R = \sqrt{11}.$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 11$.

b) Gọi $I(2-t; 1+t; 2t)$ là tâm mặt cầu ta có:

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (t+1)^2 + (t-5)^2 + (2t+1)^2 = (t+3)^2 + (t-3)^2 + (2t+3)^2$$

$$\Leftrightarrow -16t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow I(2; 1; 0) \Rightarrow R = 3\sqrt{3}$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 27$.

Ví dụ 3: Lập phương trình mặt cầu (S) biết (S)

a) Đi qua 4 điểm $A(2; 4; -1); B(1; -4; -1); C(2; 4; 3); D(2; 2; -1)$.

b) Đi qua 4 điểm $A(3; 3; 0); B(3; 0; 3); C(0; 3; 3); D(3; 3; -3)$.

Lời giải

Áp dụng: $IA = IB = IC = ID$ thì $I(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OD^2 - OA^2}{2} \end{cases}$$

a) Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ta có:
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OD^2 - OA^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-45}{2} \\ z = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Phương trình mặt cầu: $\left(x + \frac{45}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = \frac{2421}{4}$.

b) Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ta có:
$$\begin{cases} (0; -3; 3)(x; y; z) = 0 \\ (-3; 0; 3)(x; y; z) = 0 \\ (0; 0; -3)(x; y; z) = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Phương trình mặt cầu: $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{171}{4}$.

Ví dụ 4: Lập phương trình mặt cầu (S) biết

a) (S) đi qua $A(2; 0; 1); B(1; 0; 0); C(1; 1; 1)$ và $I \in (P): x + y + z - 2 = 0$.

b) (S) đi qua $A(-2; 4; 1); B(3; 1; -3); C(-5; 0; 0)$ và $I \in (P): 2x + y - z + 3 = 0$.

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu

a) Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1; 0; -1)(x; y; z) = -2 \\ (-1; 1; 0)(x; y; z) = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Khi đó $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5; -3; -4)(x; y; z) = -1 \\ (-3; -4; -1)(x; y; z) = 2 \\ 2x + y - z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Khi đó $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 49$.

Ví dụ 5: [Đề thi THPT Quốc gia 2017] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$; $N(2;-1;-1)$; $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng: $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$.

A. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$.

Lời giải

Giả sử mặt cầu có tâm $I(x; y; z)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{ON^2 - OM^2}{2} \\ \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OP^2 - OM^2}{2} \\ 2x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0; -4; -4)(x; y; z) = -8 \\ (-4; -4; 0)(x; y; z) = -4 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 16$ hay $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

Chọn B.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-4;0)$, $B(0;0;4)$, $C(-1;0;3)$. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3y - 4z = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$.

Lời giải

$$\text{Gọi } I(x; y; z) \text{ là tâm mặt cầu ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{OA^2}{2} \\ \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{OB^2}{2} \\ \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{OC^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2; -4; 0)(x; y; z) = 10 \\ (0; 0; 4)(x; y; z) = 8 \\ (-1; 0; 3)(x; y; z) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 9$ hay $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 2 điểm $A(3;2;-3)$; $B(-1;-2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc (P) đi qua A, B sao cho tam giác OIA vuông tại gốc tọa độ O .

A. $(S): (x+5)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 84.$

B. $(S): (x-5)^2 + (y+6)^2 + (z-1)^2 = 84.$

C. $(S): (x+5)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 42.$

D. $(S): (x-5)^2 + (y+6)^2 + (z-1)^2 = 42.$

Lời giải

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là: $(Q): x + y - z - 2 = 0.$

Gọi $d = (P) \cap (Q) \Rightarrow d \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \Rightarrow I(t; 1 - t; -1). \\ z = -1 \end{cases}$

Ta có: $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow 3t + 2 - 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -5 \Rightarrow I(-5; 6; -1).$

Vậy PT mặt cầu $(S): (x+5)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 84.$ **Chọn A.**

Ví dụ 8: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(3; 1; 1); B(0; 1; 4); C(-1; -3; 1)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 4 = 0$ là:

A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9.$

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9.$

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 81.$

D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 81.$

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu

Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3; 0; 3)(x; y; z) = 3 \\ (-4; -4; 0)(x; y; z) = 0 \\ x + y - 2z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \\ z = 2 \end{cases}$$

Khi đó phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9.$ **Chọn A.**

Ví dụ 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B . Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9.$

B. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36.$

C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36.$

D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9.$

Lời giải

Ta có $A \in Oz \Rightarrow A(0; 0; a)$ mà $A \in (P) \Rightarrow 2.0 + 6.0 + a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow A(0; 0; 3).$

Lại có $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \\ z = 6 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ mà $B \in d \Rightarrow B(t+5; 2t; 6-t)$.

Hơn nữa $B \in (P) \Rightarrow 2(t+5) + 6.2t + (6-t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 13t + 13 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(4; -2; 7)$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(2; -1; 5)$.

Mặt cầu đường kính AB có bán kính $R = \frac{1}{2}AB$.

Mà $\overline{AB} = (4; -2; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = 6 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

Chọn A.

✎ Dạng 2: Bài toán mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng

Có hai đặc điểm quan trọng của bài toán về trường hợp mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

- Điều kiện tiếp xúc $d(I; (P)) = R$.
- Tâm I sẽ nằm trên đường thẳng Δ đi qua điểm tiếp xúc và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Ví dụ 1: Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc $(P): 3x + y + z - 4 = 0$ tại điểm $M(1; -2; 3)$ và đi qua $A(-1; 0; 1)$.

Lời giải

Do (S) tiếp xúc với (P) tại $M(1; -2; 3)$ nên $IM \perp (P) \Rightarrow IM$ qua $M(1; -2; 3)$ và có vector chỉ phương

$$\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (3; 1; 1) \text{ suy ra } IM: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Gọi $I(1+3t; -2+t; 3+t)$. Ta có $IM^2 = IA^2 \Leftrightarrow 11t^2 = (3t+2)^2 + (t-2)^2 + (t+2)^2$

$$\Leftrightarrow 12t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Suy ra $I(-2; -3; 2); R = IA = \sqrt{11} \Rightarrow (S): (x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 11$.

Ví dụ 2: Lập phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc $(P): x + 2y + 3z + 10 = 0$ tại điểm $M(2; -3; -2)$ và đi qua $A(0; 1; 2)$.

Lời giải

Do (S) tiếp xúc với (P) tại $M(2; -3; -2)$ nên $IM \perp (P) \Rightarrow IM$ qua $M(2; -3; -2)$ và có vectơ chỉ

phương $\vec{u} = \overrightarrow{n_{(P)}} = (1; 2; 3)$ suy ra $IM: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

Gọi $I(2+t; -3+2t; -2+3t)$. Ta có $IM^2 = IA^2 \Leftrightarrow 14t^2 = (t+2)^2 + (2t-4)^2 + (3t-4)^2$

$$\Leftrightarrow 36 - 36t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(3; -1; 1); R = IA = \sqrt{14}.$$

Phương trình mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 14$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(-1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$?

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu tâm I là: $R = d(I; (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 2 - 2 - 3|}{\sqrt{4+1+4}} = 3$.

Do đó phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\alpha): x + y + z = 0$ đồng thời tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$?

A. 1.

B. 0.

C. vô số.

D. 2.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(1; 1; 1)$; $R = \sqrt{3}$.

Mặt phẳng cần tìm có dạng $(P): x + y + z + m = 0$ (Do $(P) // (\alpha) \Rightarrow m \neq 0$).

Điều kiện tiếp xúc: $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|m+3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = -6 \end{cases}$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và hai mặt phẳng

$(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z + 7 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có $I \in d$ và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình là:

$$\text{A. } (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{9}{4}.$$

$$\text{B. } (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}.$$

$$\text{C. } (x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{9}{4}.$$

$$\text{D. } (x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}.$$

Lời giải

Gọi $I(t; -1; -t) \in d$, do (S) tiếp xúc với cả 2 mặt phẳng (P) và (Q) nên:

$$d(I; (P)) = d(I; (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|1-t|}{3} = \frac{|5-t|}{3} \Leftrightarrow t=3 \Rightarrow R = \frac{2}{3}.$$

Phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 2 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng d có bán kính nhỏ nhất, tiếp xúc với (P) và đi qua điểm $A(1; -1; 1)$ là:

$$\text{A. } (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1.$$

$$\text{B. } (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4.$$

$$\text{C. } (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1.$$

$$\text{D. } (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4.$$

Lời giải

Do $I \in d$ ta gọi $I(1+3t; -1+t; t)$ khi đó $IA = d(I; (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{11t^2 - 2t + 1} = \frac{|5t+3|}{3} = R \Leftrightarrow 9(11t^2 - 2t + 1) = (5t+3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow R=1 \\ t=\frac{24}{37} \Rightarrow R=\frac{77}{37} \end{cases}$$

Do (S) có bán kính nhỏ nhất nên ta chọn $t=0; R=1 \Rightarrow I(1; -1; 1) \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$.

Chọn A.

Ví dụ 7: [Đề thi chuyên ĐH Vinh 2017] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2; -2; 5)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng $(\alpha): x=1$; $(\beta): y=-1$; $(\gamma): z=1$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng:

$$\text{A. } \sqrt{33}.$$

$$\text{B. } 1.$$

$$\text{C. } 3\sqrt{2}.$$

$$\text{D. } 3.$$

Lời giải

Gọi $I(a; b; c)$ ta có: $d(I; (\alpha)) = d(I; (\beta)) = d(I; (\gamma))$ suy ra $R = |a-1| = |b+1| = |c-1|$.

Do điểm $A(2; -2; 5)$ thuộc miền $x > 1$; $y < -1$; $z > 1$ nên $I(a; b; c)$ cũng thuộc miền $x > 1$; $y < -1$; $z > 1$.

Khi đó $I(R+1; -1-R; R+1)$. Mặt khác $IA = R \Rightarrow (R^2 - 1) + (R-1)^2 + (R-4)^2 = R^2 \Leftrightarrow R = 3$. **Chọn D.**

🔗 Dạng 3: Bài toán tương giao mặt cầu với mặt phẳng

Phương pháp giải:

- Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính r khi $d(I; (P)) < R$. Khi đó $d^2(I; (P)) + r^2 = R^2$.
- Tâm đường tròn giao tuyến của (S) và (P) và hình chiếu vuông góc của điểm I trên mặt phẳng (P) .

Ví dụ 1: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $I(1; 2; -2)$ và $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$.

Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I sao cho giao tuyến của (S) và (P) là đường tròn có chu vi 8π .

Lời giải

Do chu vi đường tròn giao tuyến $C = 2\pi r = 8r \Rightarrow r = 4$. Ta có: $d(I; (P)) = \frac{|2+4-2+5|}{\sqrt{4+4+1}} = 3$.

Bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{r^2 + d^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Phương trình mặt cầu là: $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$.

Ví dụ 2: Cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với (α) và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng 6π .

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm $I(1; 0; -2)$ bán kính $R = 3$.

Do diện tích đường tròn giao tuyến $S = \pi r^2 = 6\pi \Rightarrow r = \sqrt{6} \Rightarrow d(I; (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{3}$.

Mặt phẳng (P) song song với $(\alpha) \Rightarrow (P): x + y - z + D = 0$

Ta có: $d(I; (P)) = \frac{|1+2+D|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D = -6 \end{cases}$.

Do đó $(P): x + y - z = 0$ hoặc $x + y - z + 6 = 0$.

Ví dụ 3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 19 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho mặt phẳng qua M và vuông góc với d cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$, bán kính $R = 5$. Do $C = 2\pi r \Rightarrow r = 4$ do vậy mặt phẳng qua M vuông góc với d cắt (S) theo 1 đường tròn có bán kính bằng 4.

VTCP của d là $\vec{u}_d = (2; 1; -2)$ khi đó $M \in d \Rightarrow (3 + 2t; 2 + t; 1 - 2t)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2(x - 3 - 2t) + (y - 2 - t) - 2(z - 1 + 2t) = 0$

Hay $2x + y - 2z - 9t - 6 = 0$

Ta có: $d(I; (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{|9t + 9|}{3} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$

Từ đó suy ra $M(3; 2; 1), M(-1; 0; 5)$ là các điểm cần tìm.

Ví dụ 4: Trong không gian cho mặt cầu có phương trình $(S): (x + 3)^2 + (y - 5)^2 + (z - 7)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 4 = 0$. Biết mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn (C) . Tính chu vi đường tròn (C) .

A. 8π .

B. 4π .

C. 2π .

D. $4\pi\sqrt{2}$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-3; 5; 7)$ và bán kính $R = 2$.

Khoảng cách từ tâm I đến (P) là: $d = \frac{|-3 - 5 + 7 + 4|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Bán kính đường tròn (C) là: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$.

Chu vi đường tròn (C) là: $C = 2\pi r = 2\pi$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oy và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π .

A. $3x + z = 0$.

B. $3x + z + 2 = 0$.

C. $3x - z = 0$.

D. $x - 3z = 0$.

Lời giải

Ta có: $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 16 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 4$.

Bán kính của đường tròn là: $r = \frac{C}{2\pi} = 4 = R \Rightarrow$ đường tròn đi qua tâm của mặt cầu (S) .

Vtcp của Oy là $\vec{u}(0; 1; 0)$, điểm $A(0; 1; 0) \in Oy$.

Ta có: $\vec{IA} = (1; 1; 3) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{IA}; \vec{u}] = (-3; 0; 1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua O và nhận $\vec{n}$ làm vtpt suy ra phương trình mặt phẳng (α) là: $(\alpha): 3x - z = 0$.

Chọn C.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$. Biết rằng mặt cầu (S) có bán kính bằng $2\sqrt{2}$ và cắt mặt phẳng (Oxz) theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tọa độ tâm I .

A. $I(1; -2; 2); I(5; 2; 10)$.

B. $I(1; -2; 2); I(0; -3; 0)$.

C. $I(5; 2; 10); I(0; -3; 0)$.

D. $I(1; -2; 2); I(-1; 2; -2)$.

Lời giải

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxz) là $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$.

Điểm $I \in d$ suy ra $I(t; t-3; 2t) \Rightarrow d(I; (P)) = |t-3| = 2 \Rightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(5; 2; 10) \\ I(1; -2; 2) \end{cases}$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $S(0; 0; 1)$. Hai điểm $M(m; 0; 0); N(0; n; 0)$ thay đổi sao cho $m+n=1$ và $m>0; n>0$. Biết rằng mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Bán kính mặt cầu đó bằng: $R = \sqrt{2}$.

A. $R = \sqrt{2}$.

B. $R = 2$.

C. $R = 1$.

D. $R = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (SMN) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$. Gọi $P(x_0; y_0; z_0)$

Ta có: $d = d(P; (SMN)) = \frac{\left| \frac{x_0}{m} + \frac{y_0}{n} + z_0 - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + 1}}$.

Lại có $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + 1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)^2 - \frac{2}{mn} + 1 = \left(\frac{m+n}{mn} \right)^2 - \frac{2}{mn} + 1 = \left(\frac{1}{mn} \right)^2 - \frac{2}{mn} + 1 = \left(\frac{1}{mn} - 1 \right)^2$

$d = \frac{\left| \frac{x_0}{m} + \frac{y_0}{n} + z_0 - 1 \right|}{\left| \frac{1}{mn} - 1 \right|}$. Ta chọn $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{\left| \frac{m+n}{mn} - 1 \right|}{\left| \frac{1}{mn} - 1 \right|} = 1$ với mọi $m>0; n>0$.

Do đó mặt cầu cần tìm là mặt cầu tâm $P_0(1; 1; 0)$ bán kính $R = 1$. **Chọn C.**

Dạng 4: Bài toán tương giao mặt cầu với đường thẳng

Phương pháp giải:

Xét sự tương giao của mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R và đường thẳng Δ ta có:

- Δ tiếp xúc với mặt cầu $(S) \Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$.
- Δ cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt A, B khi $d(I; \Delta) < R$ khi đó hình chiếu vuông góc của điểm I trên Δ là trung điểm của AB và $d^2(I; \Delta) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2$.

Ví dụ 1: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, lập phương trình mặt cầu tâm $I(2; 3; -1)$ cắt đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 + t \\ z = -15 - 2t \end{cases} \text{ tại } A, B \text{ với } AB = 16.$$

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -5; -15)$ và có vtcp là $\vec{u}_d = (2; 1; -2)$; $\vec{IM} = (-1; -8; -14)$.

$$\text{Khi đó } d(I; d) = \frac{|\vec{IM} \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{u}_d|} = \frac{|(30; -30; -15)|}{|2; 1; -2|} = 15 \Rightarrow R = \sqrt{d^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$

Do đó phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = -2 \end{cases}$, $(P): x + y + z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với

(P) tại $M(1; 0; -2)$ và cắt d tại A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $E(1; -2; -2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_d(1; -1; 0)$.

Gọi I là tâm mặt cầu suy ra đường thẳng $IM \perp (P) \Rightarrow IM: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

$$\text{Khi đó gọi } I(1+t; t; -2+t) \Rightarrow d^2(I; d) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow d^2(I; d) + 2 = IM^2$$

$$\text{Trong đó } d(I; d) = \frac{|\vec{IE} \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{u}_d|} = \frac{|(-t; -t; 2t+2)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6t^2 + 8t + 4}}{\sqrt{2}} \text{ và } IM^2 = 3t^2$$

$$\text{Suy ra } 3t^2 + 4t + 2 + 2 = 3t^2 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(0; -1; -3); R = IM = \sqrt{3}.$$

Phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 3$.

Ví dụ 3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và điểm $I(2;1;0)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt d tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB vuông.

Lời giải

Ta có: $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$, gọi H là trung điểm của AB ta có: $IH \perp AB$.

Khi đó $H(-1+t; 2t; 1-t) \Rightarrow \overrightarrow{IH}(-3+t; 2t-1; 1-t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow -3+t+4t-2+t-1=0$

$$\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(0; 2; 0)$$

Tam giác IAB vuông cân tại I nên ta có: $R = \sqrt{2}IH = \sqrt{2}\sqrt{4+1} = \sqrt{10}$

Do đó phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 10$.

Ví dụ 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua $M(1; -1; 0)$ cắt đường thẳng d đồng thời cắt mặt cầu (S) tại A, B sao cho $AB = 4$.

Lời giải

Ta có: $I(1; -2; 0), R = \sqrt{5}$. Gọi $N(2-t; 3+2t; 1+t)$. Ta có: $\vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN}(1-t; 4+2t; 1+t)$

Mặt khác $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + d^2(I; \Delta) = R^2 \Rightarrow d(I; \Delta) = 1$

$$d(I; \Delta) = \frac{|\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{MN}|} = \sqrt{\frac{2t^2 + 2}{6t^2 + 16t + 18}} = 1 \Leftrightarrow 4t^2 + 16t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

Với $t = -2 \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ là đường thẳng cần tìm.

Ví dụ 5: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 10 = 0$ và 2 đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc Δ_1 đồng thời tiếp xúc với Δ_2 và (P) .

Lời giải

Gọi $I(2+t; t; t+1) \in \Delta_1$ là tâm của mặt cầu. Δ_2 xác định qua $M(2; 0; -3), \vec{u}_{\Delta_2} = (1; 1; 4)$

Ta có: $d(I; \Delta_2) = d(I; (P))$. Khi đó $d(I; (P)) = \frac{|2+t-2t-2(1+t)+10|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|10-3t|}{3}$.

$$\overrightarrow{IM}(-t; -t; -4-t) \Rightarrow d(I; \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{u_{\Delta_2}}|}{|\overrightarrow{u_{\Delta_2}}|} = \frac{\sqrt{2(3t-4)^2}}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{|3t-4|}{3}$$

$$\text{Cho } \frac{|10-3t|}{3} = \frac{|3t-4|}{3} \Leftrightarrow t = \frac{7}{3} \Rightarrow I\left(\frac{13}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu } (S): \left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{10}{3}\right)^2 = 1.$$

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2; -4; 5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông.

A. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 40.$

B. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 82.$

C. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 58.$

D. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 90.$

Lời giải

Gọi $H(0; 0; 5)$ là hình chiếu vuông góc của A xuống trục Oz .

Khi đó tam giác OHB vuông cân tại H suy ra $OH = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = OH\sqrt{2} = 2\sqrt{10}.$

Suy ra $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 40.$ **Chọn A.**

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $I(2; -1; 1)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I .

A. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9.$

B. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9.$

C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8.$

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \frac{80}{9}.$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng $d \Rightarrow H(2t+2; 2t+1; -t-1)$. Đường thẳng d có

vecto pháp tuyến $\overrightarrow{u_d} = (2; 2; -1)$. Sử dụng $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow H\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow IH = 2.$

$$\text{Hoặc ta có } IH = d(I; d) = \frac{|\overrightarrow{IM_0}; \overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{u_d}|} = 2.$$

Tam giác IAB vuông cân tại I nên $R = IA = \sqrt{2} \cdot IH = 2\sqrt{2}.$

Suy ra phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8.$ **Chọn C.**

Ví dụ 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -6 + t \\ z = 2 - t \end{cases}; \Delta: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ và mặt

phẳng $(P): x + 3y - z - 1 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc d , tiếp xúc với cả Δ và (P) . Biết hoành độ điểm I là số nguyên. Tung độ điểm I là

- A. 2. B. 0. C. -4. D. -2.

Lời giải

Gọi $I(t; -6 + t; 2 - t)$ là tâm của mặt cầu và R là bán kính của mặt cầu (S) .

$$\text{Ta có } R = d(I; (P)) = \frac{|t + 3(-6 + t) - (2 - t) - 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|5t - 21|}{\sqrt{11}} \quad (1).$$

Điểm $A(5; 1; -1) \in (\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (t - 5; t - 7; 3 - t)$ suy ra VTCP của Δ là $u = (2; 1; -1)$.

$$\text{Mặt khác } R = d(I; (\Delta)) = \frac{\left| \left[\vec{u}; \overrightarrow{AI} \right] \right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{2t^2 - 20t + 98}}{\sqrt{6}} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) ta được } \frac{|5t - 21|}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{2t^2 - 20t + 98}}{\sqrt{6}} \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x_I = 2 \Rightarrow y_I = -4. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 10: [Đề thi THPT Quốc gia năm 2018] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

- A. $6x + 8y + 11 = 0$. B. $3x + 4y + 2 = 0$. C. $3x + 4y - 2 = 0$. D. $6x + 8y - 11 = 0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1; -1; -1)$, bán kính $R = 3$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IA} = (3; 4; 0) \Rightarrow IA = 5.$$

Vì AM là tiếp tuyến của mặt cầu nên ta có: $AM \perp IM \Rightarrow AM = \sqrt{IA^2 - IM^2} = 4$.

Gọi (S') là mặt cầu tâm A , bán kính $R' = 4$.

$$\text{Ta có phương trình mặt cầu } (S'): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$$

Vì $AM = 4$ nên điểm M luôn thuộc mặt cầu (S)

Vậy $M \in (S) \cap (S') \Rightarrow$ tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9 & (1) \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} 6x + 8y - 11 = -7 \text{ hay } M \in (P): 3x + 4y - 2 = 0. \text{ Chọn C.}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, nếu mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz) thì

- A. $|a|=1$ B. $|b|=1$ C. $|c|=1$ D. $a+b+c=1$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và đường d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Tính đường kính của mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d .

- A. $5\sqrt{2}$. B. $10\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, nếu mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oy và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π .

- A. $3x + z = 0$. B. $3x + z + 2 = 0$. C. $3x - z = 0$. D. $x - 3z = 0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu (S) tâm $I(2;3;4)$ và cắt trục Ox tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 10. Viết phương trình mặt cầu (S) .

- A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 26$. B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 50$.
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$. D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 29$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2.

- A. $(Q): 2y - z = 0$. B. $(Q): 2y + z = 0$. C. $(Q): y - z = 0$. D. $(Q): 2x - z = 0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với d , (P) tiếp xúc với (S) đồng thời (P) cắt trục Oz tại điểm có cao độ dương.

- A. $2x - 2y + z + 2 = 0$ B. $2x - 2y + z - 16 = 0$
C. $2x - 2y + z - 10 = 0$ D. $2x - 2y + z - 5 = 0$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$ theo giao tuyến là đường tròn tâm H , bán kính R . Tìm tọa độ tâm H và tính bán kính R .

A. $H(1;2;0), R = \sqrt{5}$

B. $H(-1;-2;0), R = \sqrt{5}$

C. $H(1;2;0), R = 5$

D. $H(1;0;2), R = \sqrt{5}$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;3;-1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+7}{2} = \frac{y+9}{1} = \frac{z+7}{-2}$.

Viết phương trình mặt cầu tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 40$.

A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25^2$

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 25^2$

C. $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25$

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y - 3z + 6 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = 25$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r = \sqrt{5}$

B. $r = 5$

C. $r = 6$

D. $r = \sqrt{6}$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 5 = 0$. Diện tích hình tròn thiết diện của (P) và (S) là.

A. 25π

B. 9π

C. 16

D. 16π

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 10z + 14 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Tính chu vi đường tròn đó.

A. 2π

B. 8π

C. 4π

D. $4\sqrt{3}\pi$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -6 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ và $\Delta: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ và

mặt phẳng $(P): x + 3y - z - 1 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc d , tiếp xúc với cả Δ và (P) . Biết hoành độ điểm I là số nguyên. Tung độ của điểm I là.

A. 2

B. 0

C. -4

D. -2

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), B(0;4;0)$ và $C(0;0;6)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 56$

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 28$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 28$

Câu 14: Cắt mặt cầu $S(I, R)$ bởi mặt phẳng (P) cách tâm I một khoảng $\frac{R}{2}$ ta nhận được giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng bao nhiêu?

- A. $\pi R\sqrt{3}$ B. πR C. $2\pi R$ D. $2\pi R\sqrt{3}$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) tâm $I(1; -3; 3)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm $H(2; 0; 1)$, bán kính $r = 2$. Phương trình của (S) là

- A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 4$ B. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 4$
C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 18$ D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 18$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y - 3z + 6 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = 25$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn giao tuyến đó

- A. $r = 6$. B. $r = 5$. C. $r = \sqrt{6}$. D. $r = \sqrt{5}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(-2; 3; 4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) ?

- A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2$ B. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4$
C. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 2$ D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 4$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$ và điểm $M(1; -2; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M .

- A. $(P): x + y + \sqrt{3}z + 1 - \sqrt{3} = 0$ B. $(P): z - 1 = 0$
C. $(P): y = -2$ D. $(P): 3x + y - z = 0$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5$ có tâm I và một điểm $A(0; -2; 1)$. Một mặt phẳng (P) cắt và vuông góc với đoạn thẳng IA và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính $r = 2$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) .

- A. $x + 2z - 7 - \sqrt{5} = 0$. B. $x + 2z - 7 - \sqrt{5} = 0$ và $x + 2z - 7 + \sqrt{5} = 0$.
C. $x + 2z - 7 + \sqrt{5} = 0$. D. $x + 2z + 3 - \sqrt{5} = 0$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn lớn và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm

$A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;3) (a, b > 0)$. Tính tổng $T = a + b$ khi thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $T = 18$.

B. $T = 9$.

C. $T = 11$.

D. $T = 3$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 6y - 2z - 4 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 7$.

B. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 1$.

C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 49$.

D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{49}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) tại điểm $A(3;4;3)$.

A. $(\alpha): 2x + 4y + z - 25 = 0$.

B. $(\alpha): 2x + 2y + z - 17 = 0$.

C. $(\alpha): 2x + 4y - 2z - 22 = 0$.

D. $(\alpha): x + y + z - 10 = 0$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + x - y + z - 1 = 0$ cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là đường tròn. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn này.

A. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), r = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

B. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), r = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $I(-1;1;0), r = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;6;2), B(5;1;3), C(4;0;6), D(5;0;4)$. Viết phương trình mặt cầu tâm D tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) .

A. $(x-5)^2 + y^2 + (z-4)^2 = \frac{2}{223}$.

B. $(x-5)^2 + y^2 + (z-4)^2 = \frac{4}{\sqrt{446}}$.

C. $(x+5)^2 + y^2 + (z+4)^2 = \frac{8}{223}$.

D. $(x-5)^2 + y^2 + (z-4)^2 = \frac{8}{223}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$. Biết rằng (S) có bán kính $R = 2\sqrt{2}$ và cắt mặt phẳng Oxz theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tọa độ tâm I .

A. $I(1;-2;2), I(5;2;10)$.

B. $I(1;-2;2), I(0;-3;0)$.

C. $I(5;2;10), I(0;-3;0)$.

D. $I(1;-2;2), I(-1;2;-2)$.

Câu 26: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(-1;2;0), B(-2;1;1)$ và có tâm nằm trên trục Oz .

A. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 5 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 5 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 5 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - y - 5 = 0$.

Câu 27: Viết phương trình mặt phẳng (P) qua $A(0;0;1), B(0;0;-2)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 8 = 0$.

A. $4x + 3y = 0$.

B. $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

D. $z = 0$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 8π .

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 5$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 16$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Ox và tiếp xúc với hai mặt phẳng đã cho?

A. $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$. Tính bán kính mặt cầu (S) đi qua A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) .

A. $\sqrt{34}$.

B. $\sqrt{26}$.

C. 34.

D. 26.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6)$ và $D(2;4;6)$.

Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4$

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1$.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, giả sử đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = m + t \\ y = n + 2t \\ z = 2 - mt \end{cases}$ cắt mặt cầu

$(S): x^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 9$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Tìm cặp số $(m; n)$.

A. $(m; n) = (1; 2)$. **B.** $(m; n) = (1; 0)$. **C.** $(m; n) = (2; 0)$. **D.** $(m; n) = (0; 2)$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và điểm $A(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết rằng điểm B thuộc mặt cầu (S) , có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

A. $x - y - 2z = 0$ **B.** $x - y - z = 0$ **C.** $x - y + z = 0$ **D.** $x - y + 2z = 0$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $R = d(I; (Oxz)) = |b| \Rightarrow |b| = 1$. **Chọn B.**

Câu 2: Ta có $\vec{u_d} = (2; 1; 1)$, $M(-1; 2; -3) \in d$. Ta có $[\vec{u_d}, \vec{AM}] = (2; -14; -10)$, $\vec{AM} = (-2; 4; -6)$

$$\text{Ta có } R = d(M, d) = \frac{|\vec{u_d}, \vec{AM}|}{|\vec{u_d}|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-14)^2 + (-10)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = 5\sqrt{2}. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 3: Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 4$. Do (α) chứa Oy nên $(\alpha): ax + cz = 0$

Bán kính của thiết diện là $r = 4 = R \Rightarrow (\alpha)$ qua $I(1; 2; 3) \Rightarrow a + 3c = 0 \Rightarrow$ chọn $a = 3, c = -1$

Do đó phương trình mặt phẳng (α) là $3x - z = 0$. **Chọn C.**

Câu 4: Giả sử $A(a; 0; 0), B(b; 0; 0)$.

$$\text{Ta có } IA = IB \Leftrightarrow (a-2)^2 + 3^2 + 4^2 = (b-2)^2 + 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow b = 4 - a$$

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(2; 0; 0)$.

$$\text{Ta có } S_{IAB} = \frac{1}{2} IM \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{2S_{IAB}}{IM} = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4$$

$$\text{Ta có } AB = 4 \Leftrightarrow |4 - 2a| = 4 \Leftrightarrow |2 - a| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow R = IA = \sqrt{29}$$

Do đó phương trình mặt cầu là $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 29$. **Chọn D.**

Câu 5: Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$, bán kính $R = 3$. Do (Q) chứa Ox nên $(Q): by + cz = 0$

$$\text{Ta có } d(I; (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}. \text{ Ta có } d(I; (Q)) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-2b + c|}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 4bc + 4c^2 = 0 \Leftrightarrow b = -2c \Rightarrow \text{chọn } b = 2, c = -1 \Rightarrow (Q): 2y - z = 0. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 6: Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 1)$, bán kính $R = 3$. Đường thẳng d có $\vec{u_d} = (2; -2; 1)$, $M(-1; -1; 0) \in d$

Do (P) vuông góc với d nên $\vec{n_p} = \vec{u_d} = (2; -2; 1) \Rightarrow (P): 2x - 2y + z + m = 0$

$$\text{Do } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \Rightarrow d(I; (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|m+7|}{3} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -16 \end{cases}$$

Do (P) cắt Oz tại điểm có cao độ dương nên chọn $m = -16 \Rightarrow (P): 2x - 2y + z - 16 = 0$. **Chọn B.**

Câu 7: Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R' = \sqrt{14}$.

$$\text{Ta có } d(I; (Oxy)) = 3 \Rightarrow R = \sqrt{R'^2 - d^2(I; (Oxy))} = \sqrt{5}$$

Tâm H là hình chiếu của $I(1; 2; 3)$ lên $(Oxy) \Rightarrow H(1; 2; 0)$. **Chọn C.**

Câu 8: Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow IH \perp AB \Rightarrow IH = d(I; d)$

Ta có $\vec{u_d} = (2; 1; -2), M(-7; -9; -7) \in d$. Ta có $\left[\vec{u_d}, \overrightarrow{IM} \right] = (30; -30; 15) \Rightarrow d(I; d) = \frac{\left| \left[\vec{u_d}, \overrightarrow{IM} \right] \right|}{\left| \vec{u_d} \right|} = 15$

Bán kính mặt cầu $R = \sqrt{AH^2 + d^2(I; d)} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$

$\Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25^2$. **Chọn A.**

Câu 9: Mặt cầu (S) có tâm $I(4; -5; -2)$, bán kính $R = 5$. Ta có $d(I; (P)) = \sqrt{19}$

Bán kính của giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (P))} = \sqrt{5^2 - 19} = \sqrt{6}$. **Chọn D.**

Câu 10: Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; 1)$, bán kính $R = 5$. Ta có $d(I; (P)) = 3$

Bán kính thiết diện là $r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (P))} = 4 \Rightarrow$ diện tích là $\pi r^2 = 16\pi$. **Chọn A.**

Câu 11: Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -5)$, bán kính $R = 4$. Ta có $d(I; (P)) = 2\sqrt{3}$

Bán kính thiết diện là $r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (P))} = 2 \Rightarrow$ chu vi là $2\pi r = 4\pi$. **Chọn C.**

Câu 12: Do $I \in d \Rightarrow I(t; -6+t; 2-t)$. Ta có $d(I; (P)) = \frac{|5t-21|}{\sqrt{11}}$. Ta có $\vec{u_\Delta} = (2; 1; -1), M(5; 1; -1) \in \Delta$.

Ta có $\left[\vec{u_\Delta}, \overrightarrow{IM} \right] = (-4; t-1; t-9) \Rightarrow d(I; \Delta) = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (t-1)^2 + (t-9)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2t^2 - 20t + 98}}{\sqrt{6}}$

Mà (S) tiếp xúc với Δ và (P) nên $d(I; (P)) = d(I; \Delta) \Leftrightarrow \frac{|5t-21|}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{2t^2 - 20t + 98}}{\sqrt{6}}$

$\Leftrightarrow \frac{(5t-21)^2}{11} = \frac{2t^2 - 20t + 98}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\frac{49}{8}(l) \end{cases} \Rightarrow I(2; -4; 0)$. **Chọn A.**

Câu 13: Giả sử $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu.

Ta có $\begin{cases} IO = IA \\ IO = IB \\ IO = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x-2)^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-4)^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

Suy ra tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = IO = \sqrt{14} \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$. **Chọn C.**

Câu 14: Bán kính giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ chu vi là $2\pi r = \pi R\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 15: Ta có $\overrightarrow{IH} = (1; 3; -2) \Rightarrow IH = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

$$\Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + r^2} = \sqrt{18} \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 18. \text{ Chọn C.}$$

Câu 16: Mặt cầu có tâm $I(4; -5; -2)$ và bán kính $R = 5$.

$$\text{Ta có } d(I; (P)) = \frac{|3 \cdot 4 - 5 - 3 \cdot (-2) + 6|}{\sqrt{3^2 + 1 + (-3)^2}} = \sqrt{19} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - 19} = \sqrt{6}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 17: $(Oyz): x = 0 \Rightarrow R = d(I; (Oyz)) = 2 \Rightarrow (S): (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4. \text{ Chọn B.}$

Câu 18: Mặt cầu có tâm $I(1; -2; 3)$.

Mặt phẳng (P) qua M và nhận $\overrightarrow{MI} = (0; 0; 2)$ là một VTPT $\Rightarrow (P): 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow z-1 = 0. \text{ Chọn B.}$

Câu 19: Ta có $I(1; -2; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (1; 0; 2)$ là một VTPT của $(P) \Rightarrow (P): x + 2z + m = 0$

$$\Rightarrow d(I; (P)) = \frac{|m-3|}{\sqrt{5}} = h \longrightarrow h^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow \frac{(m-3)^2}{5} + 4 = 5 \Leftrightarrow m = 3 \pm \sqrt{5}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 20: Ta có $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{3} = 1$ qua tâm $I(2; 1; 1) \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{3}.$

$$\text{Lại có } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot 3 = \frac{1}{2} ab.$$

$$\text{Ta có } \frac{2}{3} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow ab \geq 18 \Rightarrow V_{OABC} \geq 9.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{1}{b} > 0 \\ ab = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 6 \end{cases} \Rightarrow a + b = 9. \text{ Chọn B.}$$

Câu 21: Ta có $R = d(A; (P)) = \frac{|3 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = 1 \Rightarrow (S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 1. \text{ Chọn B.}$

Câu 22: Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ có tâm $I(1; 2; 2)$.

Mặt phẳng (α) qua A và nhận $\overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$ là một VTPT

$$\Rightarrow (\alpha): 2(x-3) + 2(y-4) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 17 = 0. \text{ Chọn B.}$$

Câu 23: Ta có $(Oxy): z = 0$.

Mặt cầu $(S): \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$ có tâm $K\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

$$\text{Ta có } h = d(I; (Oxy)) = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - h^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Đường tròn cần tìm có tâm I là hình chiếu của $K\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ trên $(Oxy) \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right). \text{ Chọn A.}$

Câu 24: Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -5; 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3; -6; 4) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-14; -13; -9)$ là một VTPT của (ABC)

$\Rightarrow \vec{n} = (14; 13; 9)$ là một VTPT của (ABC)

$\Rightarrow (ABC): 14(x-1) + 13(y-6) + 9(z-2) = 0 \Leftrightarrow 14x + 13y + 9z - 110 = 0$

$\Rightarrow R = d(D; (ABC)) = \frac{|14.5 + 13.0 + 9.4 - 110|}{\sqrt{14^2 + 13^2 + 9^2}} \Rightarrow (S): (x-5)^2 + y^2 + (z-4)^2 = \frac{8}{223}$. **Chọn D.**

Câu 25: Ta có $d: \begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow I(t; t-3; 2t)$.

Lại có $(Oxz): y = 0 \Rightarrow h = d(I; (Oxz)) = |t-3|$.

Ta có $R^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow 8 = (t-3)^2 + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow I(1; -2; 2) \\ t = 5 \Rightarrow I(5; 2; 10) \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 26: Ta có tâm $I \in Oz \Rightarrow I(0; 0; t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI} = (1; -2; t) \\ \overrightarrow{BI} = (2; -1; t-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AI = \sqrt{t^2 + 5} \\ BI = \sqrt{(t-1)^2 + 5} \end{cases}$

Ép cho $AI = BI \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow R = AI = \frac{\sqrt{21}}{2}$

$\Rightarrow (S): x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - z - 5 = 0$. **Chọn A.**

Câu 27: Gọi $(P): ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$).

Ta có $A, B \in (P) \Rightarrow \begin{cases} c + d = 0 \\ -2c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow c = d = 0 \Rightarrow (P): ax + by = 0$.

Mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1 \Rightarrow I(-2; 1; -2), R = 1$.

Ta có $d(I; (P)) = \frac{|-2a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R = 1 \Rightarrow 4a^2 + b^2 - 4ab = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a = 4b \end{cases}$

+) Với $a = 0 \Rightarrow (P): y = 0$.

+) Với $3a = 4b$, chọn $a = 4 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow (P): 4x + 3y = 0$. **Chọn C.**

Câu 28: Đường tròn có bán kính $r = \frac{8\pi}{2\pi} = 4$.

Ta có $d(A; (P)) = \frac{|2.1 + 2.2 - 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$.

Chọn A.

Câu 29: Ta có tâm $I \in Ox \Rightarrow I(t; 0; 0)$.

$$\text{Ta có } d(I; (P)) = d(I; (Q)) \Leftrightarrow \frac{|t-2|}{3} = \frac{|t+4|}{3} \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow R = d(I; (P)) = 1$$

$$\Rightarrow (S): (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 30: Gọi tâm } I(a; b; 0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI} = (a-1; b-2; 4) \\ \overrightarrow{BI} = (a-1; b+3; -1) \\ \overrightarrow{CI} = (a-2; b-2; -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AI^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + 16 \\ BI^2 = (a-1)^2 + (b+3)^2 + 1 \\ CI^2 = (a-2)^2 + (b-2)^2 + 9 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 - 4b = 10 + 6b \\ 17 - 2a = 13 - 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow R = IA = \sqrt{26}. \text{ Chọn B.}$$

$$\text{Câu 31: Gọi } M(x; y; z) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x-2; y; z) \\ \overrightarrow{BM} = (x; y-4; z) \\ \overrightarrow{CM} = (x; y; z-6) \\ \overrightarrow{DM} = (x-2; y-4; z-6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} = (4x-4; 4y-8; 4z-12)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}| = \sqrt{(4x-4)^2 + (4y-8)^2 + (4z-12)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 32: Mặt cầu có bán kính } R = 3 = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB \text{ qua tâm } I(0; 2; 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = m + t \\ 2 = n + 2t \\ 2 = 2 - mt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + t = 0 \\ n + 2t = 2 \\ m = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0; n = 2. \text{ Chọn D.}$$

Câu 33: Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{3}$. Ta thấy $O, A \in (S)$

$$\text{Ta có } OA = 2\sqrt{2} \Rightarrow R_{OAB} = \frac{OA\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \text{ Gọi } H \text{ là tâm tam giác đều } OAB.$$

$$\text{Do } O, A, B \in (S) \Rightarrow IH = d(I; (OAB)) = \sqrt{R^2 - R_{OAB}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Giả sử } (OAB): ax + by + cz = 0 \text{ do } A \in (OAB) \Rightarrow 2a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -b \Rightarrow (OAB): ax - ay + cz = 0$$

$$\text{Ta có } d(I; (OAB)) = \frac{|c|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -c \end{cases}$$

Với $a = c$ chọn $a = 1, c = 1 \Rightarrow (P): x - y + z = 0 \Rightarrow B(-2; 2; 4)$ (loại)

Với $a = -c$ chọn $a = 1, c = -1 \Rightarrow (P): x - y - z = 0 \Rightarrow B(2; -2; 4)$. **Chọn B.**