

Bài 1. Giải phương trình

$$(2x+3) \cdot \sqrt{4x+5} + (6x+7) \cdot \sqrt{8x+9} = 2.$$

Bài 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2, \quad a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}, \quad \forall n \geq 3.$$

Tính a_{2023} .

Bài 3. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) , (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Giả sử $DE; AB$ cắt nhau tại X và $DF; AC$ cắt nhau tại Y và S trên BC sao cho $IA; IS$ vuông góc nhau. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của XF, YE .

- Chứng minh OI và MN vuông góc nhau;
- Chứng minh ba đường thẳng MN, EF và AS đồng quy;
- Lấy điểm K thỏa $KN \parallel IC; KM \parallel IB$. Chứng minh đường thẳng qua K song song OI chia đôi EF .

Bài 4. Với mỗi số nguyên dương n , đặt $a_n = 2^{n^3+1} - 3^{n^2+1} + 5^{n+1}$.

- Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho có vô hạn giá trị nguyên dương n mà a_n không chia hết cho p ;
- Chứng minh rằng: tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho có giá trị nguyên dương n mà $a_n \equiv p$.

Bài 5. Cho $2n$ số thực đôi một khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$. Viết các số vào bảng $n \times n$ như sau: Ở ô $(i; j)$ (hàng i và cột j) là số $(a_i + b_j)$. Đặt

$$\pi_j = (b_j + a_1)(b_j + a_2) \dots (b_j + a_n)$$

là tích các số trên cột thứ j . Xét đa thức

$$P(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$$

và giả sử $\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_n = C$.

- Chứng minh rằng đa thức $P(x) - C$ là tích của n đa thức bậc nhất có hệ số ứng với x là 1.
- Chứng minh tích tất cả các số trên mỗi hàng cũng bằng nhau.