

**TRƯỜNG THPT CHUYÊN
HÀ NỘI – AMSTERDAM
TỔ TOÁN – TIN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II
MÔN TOÁN LỚP 11
Năm học: 2019 – 2020
Thời gian làm bài: 90 phút**

Mã đề thi T010

A – TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) , $n \geq 1$ có $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

- A. $S_{10} = -511$ B. $S_{10} = -1025$ C. $S_{10} = 1025$ D. $S_{10} = 1023$

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) , $n \geq 1$ thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$

Câu 3. Tính tổng $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$

- A. $S = \sqrt{2} + 1$ B. $S = 2$ C. $S = 2\sqrt{2}$ D. $S = \frac{1}{2}$

Câu 4. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $u_n = \frac{n^2 - 2}{2n + 3n^2}$ B. $u_n = \frac{1 - 3n^2}{4n + 3n^2}$ C. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{2n + 3n^2}$ D. $u_n = \frac{1 - 3n}{4n + 3n^2}$

Câu 5. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1}$ là:

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. 0 D. $+\infty$

Câu 6. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[(x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} \right]$ là:

- A. 1 B. $+\infty$ C. 0 D. $-\infty$

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x - 3} - x} & \text{khi } x > 3 \\ 1 - a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ B. $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ C. $a = -\frac{4}{3}$ D. $a = \frac{4}{3}$

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$.

- A. $y' = -2\sin(4x) + \frac{\pi}{2}$ B. $y' = 2\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \frac{\pi}{2}$
C. $y' = 2\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \frac{\pi}{2}x$ D. $y' = -2\sin(\pi - 4x)$

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - mx^2 - x + 2020$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $y' > 0$ vô nghiệm là:

- A. $m \in \emptyset$ B. $-1 \leq m \leq 0$ C. $m < -1$ D. $-1 \leq m < 0$

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.

- A. $y = 2; y = 1$ B. $y = 2; y = -2$ C. $y = -2; y = -1$ D. $y = -2; y = 1$

Câu 11. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Mệnh đề nào là mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau?

- A. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $(\alpha) \parallel b$ B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $(\alpha) \parallel b$ thì $b \parallel a$
C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $(\alpha) \perp b$ D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$

Câu 12. Cho tứ diện ABCD, biết $\triangle ABC$ và $\triangle BCD$ là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Khẳng định nào **đúng** trong các khẳng định sau?

- A. $AC \perp (ADH)$ B. $BC \parallel (ADH)$ C. $AB \perp (ADH)$ D. $BC \perp (ADH)$

Câu 13. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'A'}$?

- A. 90° B. 45° C. 135° D. 60°

Câu 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

- A. 45° B. 60° C. 90° D. 30°

Câu 15. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 2. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') là:

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D. Đáp án khác

Câu 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành thỏa mãn $SA = SB = SC = 22$, $\angle SBC = 30^\circ$, $\angle SAB = 60^\circ$ và $\angle SCA = 45^\circ$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD là:

- A. $2\sqrt{22}$ B. $4\sqrt{11}$ C. $\frac{\sqrt{22}}{2}$ D. Đáp án khác

B – TỰ LUẬN:

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - 6x + 1} - x\sqrt{3})$.

b) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2 - 5 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = -1$.

Câu 2 (1,5 điểm).

a) Giải phương trình: $f'(x) \geq 0$, biết $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

b) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (m là tham số). Gọi M là một điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng (-1) . Tìm giá trị của m để tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M song song với đường thẳng $3x - y = 0$.

Câu 3 (3 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và CD. Biết $(SAN) \perp (ABCD)$ và $(SBM) \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh rằng: $BM \perp AN$, từ đó chứng minh mặt phẳng $(SAN) \perp (SBM)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và SB biết $SM = \frac{9a\sqrt{5}}{10}$.

c) Với giả thiết ở câu b, hãy tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAN).

A – TRẮC NGHIỆM

- | | | | |
|------|------|-------|------------|
| 1. D | 5. C | 9. B | 13. C |
| 2. B | 6. C | 10. B | 14. D |
| 3. C | 7. A | 11. D | 15. B |
| 4. D | 8. A | 12. D | 16. D (bỏ) |

HD câu 16.

• Do $SA = SB = 22$ và $\angle SAB = 60^\circ$ nên ΔSAB đều $\Rightarrow AB = 22$

Do $SA = SC = 22$ và $\angle SCA = 45^\circ$ nên ΔASC vuông tại $S \Rightarrow AC = 22\sqrt{2}$

ΔSBC có $SB = SC = 22$, $\angle SBC = 30^\circ$

$$SC^2 = SB^2 + BC^2 - 2SB \cdot BC \cdot \cos SBC \Rightarrow BC = 22\sqrt{3}$$

Do $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

• Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Do $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$

• $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{22^2 - (11\sqrt{3})^2} = 11$

• Trong $(ABCD)$, kẻ HK , $BL \perp CD$ thì $HK // \frac{1}{2}BL = \frac{1}{2}AC = 11\sqrt{2}$

Trong (SHK) , kẻ $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SCD)$

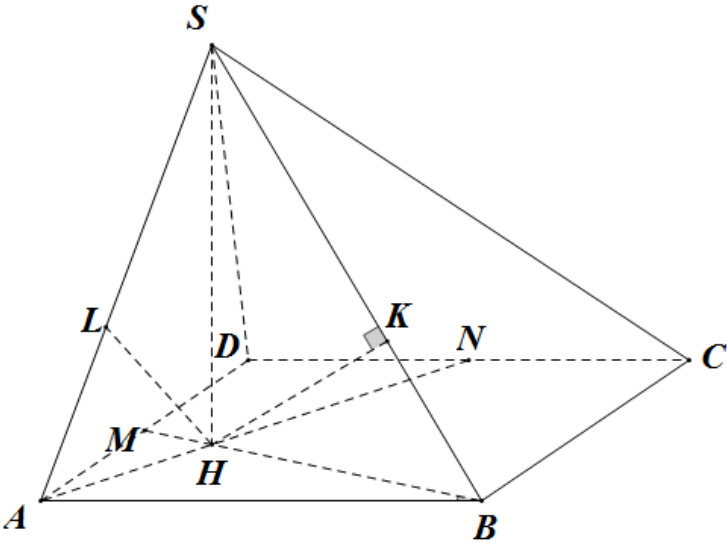
$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{(11\sqrt{2})^2} = \frac{3}{242} \Rightarrow HI = \frac{11\sqrt{6}}{3}$$

• $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(B, (SCD)) = 2d(H, (SCD)) = 2HI = \frac{22\sqrt{6}}{3}$

B – TỰ LUẬN

CÂU	ĐÁP ÁN	BIỂU ĐIỂM
Câu 1:	a) Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - 6x + 1} - x\sqrt{3})$	0,5
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - 6x + 1} - x\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{3 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{3} \right)$	0,25
	Vì: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{3 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{3} \right) = -2\sqrt{3} < 0 \end{cases}$ Nên: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - 6x + 1} - x\sqrt{3}) = +\infty$	0,25

CÂU	ĐÁP ÁN	BIỂU ĐIỂM
	b) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2 - 5 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số f(x) tại x = -1.	1
	Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$, chứa $x = -1$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (3x - 1) = -4$	0,5
	$f(-1) = (-1)^2 - 5 = -4$ $\Rightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ Vậy hàm số liên tục tại $x = -1$	0,5
Câu 2:	a) Giải phương trình: $f'(x) \geq 0$, biết $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$	0,75
	ĐKXĐ: $1 \leq x \leq 3$ Ta có: $f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} = \frac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$	0,25
	$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2 \geq 0 \\ -x^2 + 4x - 3 > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$ (t/m ĐKXĐ) Vậy: $S = (1; 2]$	0,5
	b) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (m là tham số). Gọi M là một điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng (-1). Tìm giá trị của m để tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M song song với đường thẳng $3x - y = 0$.	0,75
	Ta có: $y' = x^2 - mx$. Điểm M có tọa độ $M\left(-1; -\frac{m}{2}\right)$. Tiếp tuyến tại M của đồ thị hàm số có phương trình là: $y + \frac{m}{2} = y'(-1) \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = (1 + m)x + \frac{m + 2}{2}$	0,25
	Tiếp tuyến song song với đường $3x - y = 0$ (hay $y = 3x$) khi và chỉ khi: $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m = 3 \\ \frac{m + 2}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$ Vậy $m = 2$.	0,5
Câu 3:	Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và CD. Biết (SAN) $\perp$ (ABCD) và (SBM) $\perp$ (ABCD).	3

CÂU	ĐÁP ÁN	BIỂU ĐIỂM
	a) Chứng minh rằng: $AN \perp BM$, từ đó chứng minh mặt phẳng $(SAN) \perp (SBM)$.  Trong $(ABCD)$: $AN \cap BM = H \Rightarrow SH = (SAN) \cap (SBM)$ Theo giả thiết, ta có $(SAN) \perp (ABCD)$ và $(SBM) \perp (ABCD)$ $\Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BM$ (1) $\Delta ABM = \Delta DAN \Rightarrow \angle ABH = \angle MAH$ $\Rightarrow \angle ABH + \angle BAH = \angle MAH + \angle BAH \stackrel{AB \perp DA}{=} 90^\circ$ $\Rightarrow AN \perp BM$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow BM \perp (SAN)$ mà $BM \subset (SBM) \Rightarrow (SAN) \perp (SBM)$.	1.5đ
		0.5
	$\Delta ABM = \Delta DAN \Rightarrow \angle ABH = \angle MAH$ $\Rightarrow \angle ABH + \angle BAH = \angle MAH + \angle BAH \stackrel{AB \perp DA}{=} 90^\circ$ $\Rightarrow AN \perp BM$ (2)	0.5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow BM \perp (SAN)$ mà $BM \subset (SBM) \Rightarrow (SAN) \perp (SBM)$.	0.5
	b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và SB biết $SM = \frac{9a\sqrt{5}}{10}$.	1
	$AN \perp BM, SH \Rightarrow AN \perp (SHB)$. Trong ΔSHB, kẻ $HK \perp SB \Rightarrow HK$ là đường vuông góc chung của AN và SB	0.5
	Ta có $BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ $AM^2 = MH \cdot MB \Rightarrow \frac{a^2}{4} = MH \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{5}}{10}$ Áp dụng định lý Pitago cho ΔSHM: $SH^2 = SM^2 - MH^2 = \left(\frac{9a\sqrt{5}}{10}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{10}\right)^2 = 4a^2 \Rightarrow SH = 2a$ $BH = BM - MH = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{10} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$	0.25
	$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{3}{2a^2}$ $\Rightarrow HK = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ là khoảng cách giữa AN và SB.	0.25

CÂU	ĐÁP ÁN	BIỂU ĐIỂM
	c) Với giả thiết ở câu b, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAN).	0.5
	$(SAB) \cap (SAN) = SA$ Trong $\triangle SHA$, kẻ $HL \perp SA$. Vì $BH \perp (SAN) \Rightarrow BH \perp SA$ $\Rightarrow SA \perp (BHL) \Rightarrow \angle HLB$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAN)	0.25
	Ta có: $\frac{1}{HL^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{21}{4a^2}$ $\Rightarrow HL = \frac{2a}{\sqrt{21}}.$ Lại có $BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \tan HLB = \frac{HB}{HL} = \frac{2a\sqrt{5}}{5} : \frac{2a}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{105}}{5}$ Vậy góc giữa (SAB) và (SAN) là $\angle HLB \approx 63,98^\circ$.	0.25