

Mục lục

Chương 1.	Số phức	2
1.1	Tập hợp biểu diễn số phức	2
1.2	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	28
1.3	Bài tập	28
Chương 2.	Tiếp tuyến	31
2.1	Hàm phân thức	31
2.2	Hàm bậc ba	36

Chương 1

Số phức

1.1 Tập hợp biểu diễn số phức

Tính chất 1.1

Cho hai số phức z và z_1 . Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z , A là điểm biểu diễn cho số phức z_1 . Đại lượng $|z - z_1|$ là độ dài đoạn thẳng AM .

Chứng minh. Gọi $M(x, y)$, $A(x_1, y_1)$. Ta có

$$|z - z_1| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

□

Tính chất 1.2

Cho số phức $z_1 = a + bi$, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả $|z - z_1| = R$ là đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R .

Chứng minh. Gọi $M(x, y)$. Từ giả thiết ta có

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

□

Ví dụ 1.1

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thoả $|z + 2 - i| = 3$ là đường tròn tâm $(-2, 1)$ bán kính $R = 3$.

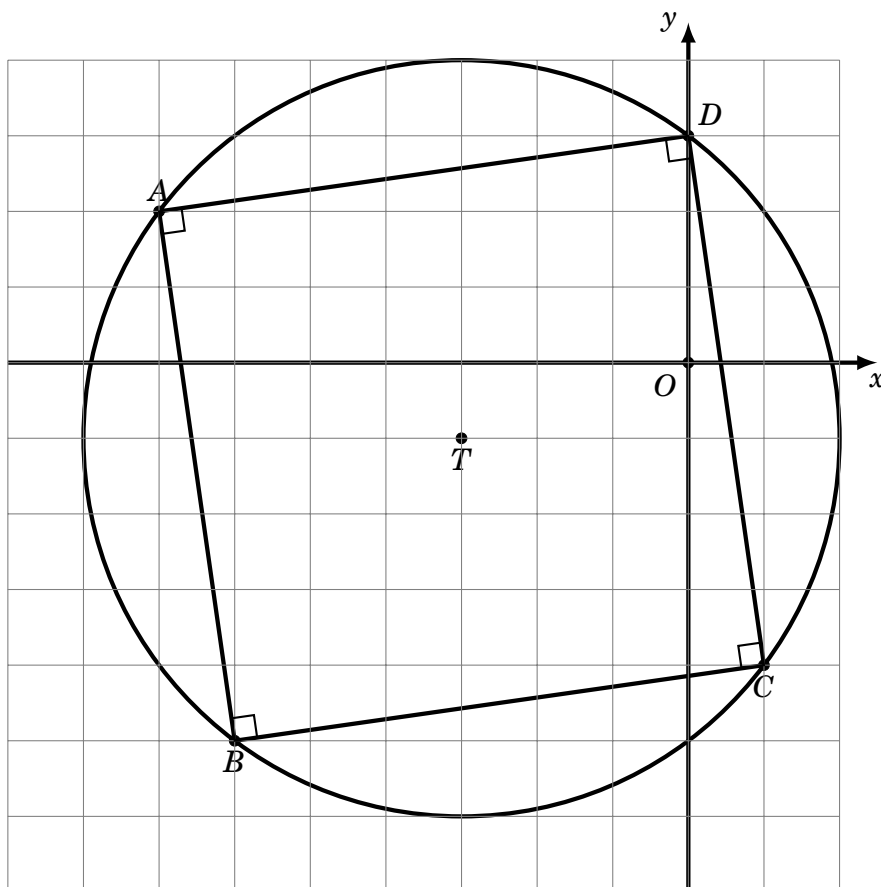
Ví dụ 1.2

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thoả $|z + i| = 1$ là đường tròn tâm $(0, -1)$ bán kính $R = 1$.

Ví dụ 1.3

Cho số phức z thỏa $|z + 3 + i| = 5$. Tính giá trị của biểu thức

$$E = |z + 7 - 2i|^2 + |z + 6 + 5i|^2 + |z - 3i|^2 + |z - 1 + 4i|^2.$$



Lời giải. Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z , thì M thuộc đường tròn tâm $T(-3, -1)$, bán kính $R = 5$.

Xét các điểm $A(-7, 2)$, $B(-6, -5)$, $C(1, -4)$, $D(0, 3)$. Ta có

$$E = AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2.$$

Để ý rằng, $ABCD$ là hình vuông có các đỉnh thuộc đường tròn, nên

$$E = AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 8R^2 = 200.$$

◇

Lời bình. Cho đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ nội tiếp trong đường tròn ($\mathcal{C}$) có tâm O , bán kính R . Với M là điểm tùy ý trong mặt phẳng chứa đường tròn, ta có

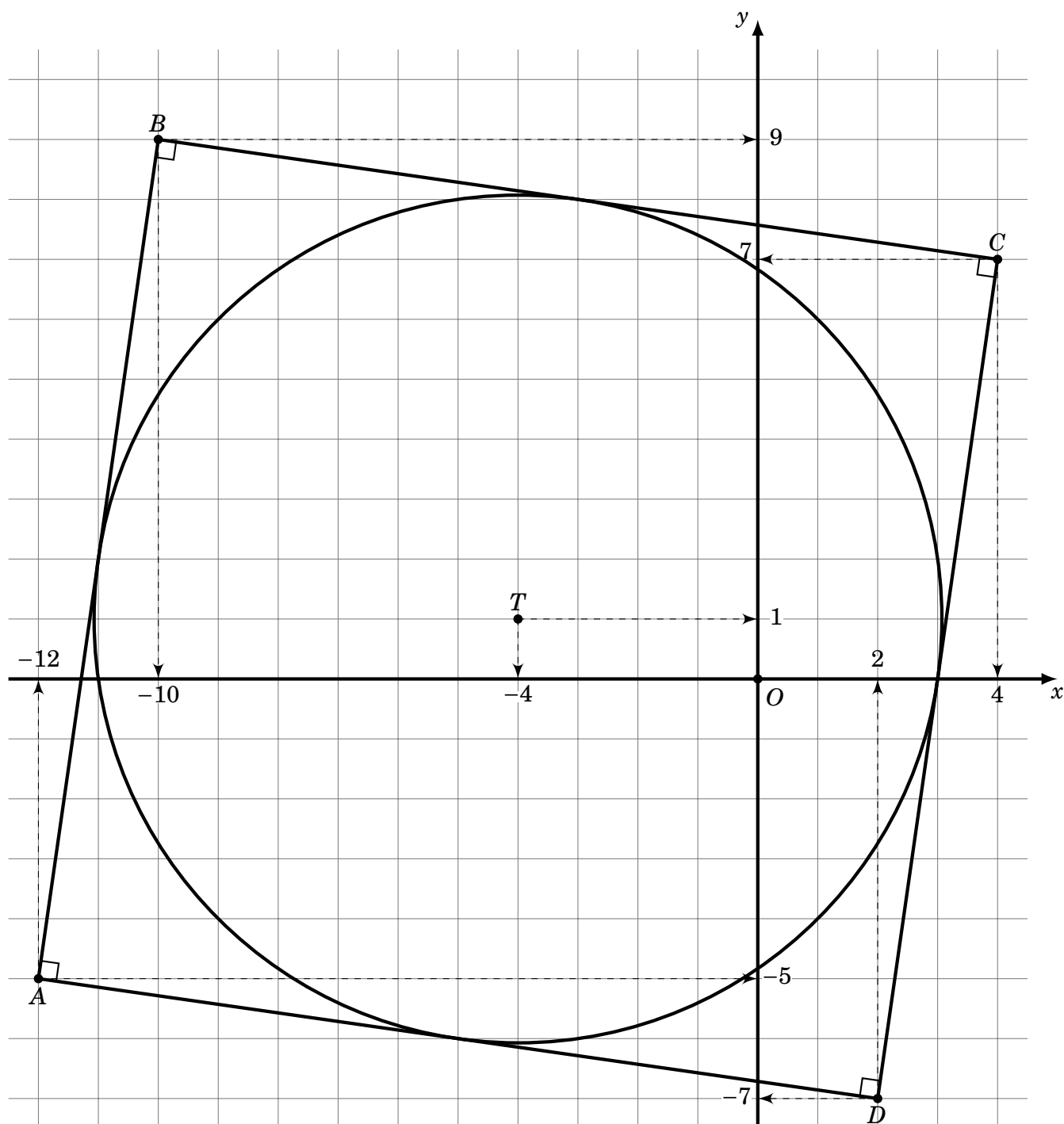
$$A_1M^2 + A_2M^2 + \dots + A_nM^2 = n(R^2 + OM^2).$$

♣

Ví dụ 1.4

Cho số phức z thoả $|z + 4 - i| = 5\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$E = |z + 12 + 5i|^2 + |z + 10 - 9i|^2 + |z - 4 - 7i|^2 + |z - 2 + 7i|^2.$$



Lời giải. Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z , thì M thuộc đường tròn ($\mathcal{C}$) có tâm $T(-4, 1)$, bán kính $R = 5\sqrt{2}$.

Xét các điểm $A(-12, -5)$, $B(-10, 9)$, $C(4, 7)$, $D(2, -7)$. Ta có

$$E = AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2.$$

Để ý rằng, $ABCD$ là hình vuông ngoại tiếp đường tròn ($\mathcal{C}$), nên

$$E = AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 3AB^2 = 600.$$

◇

Tính chất 1.3

Cho các số phức z, z_1, z_2 thoả $|z - z_1| = R$. Tập hợp biểu diễn của số phức $w = z + z_2$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 + z_2$ và bán kính bằng R .

Chứng minh. Ta có $w = z + z_2$, nên

$$w - z_2 - z_1 = z - z_1.$$

Do đó

$$|w - z_2 - z_1| = |z - z_1|.$$

Hay

$$|w - (z_1 + z_2)| = R.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 + z_2$ và bán kính bằng R . □

Ví dụ 1.5

Cho số phức z thoả $|z + 2 - 3i| = 3$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z + 3 + i$.

Lời giải. Ta viết lại giả thiết thành

$$|z - (-2 + 3i)| = 3.$$

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z + 3 + i$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức

$$(-2 + 3i) + (3 + i) = 1 + 4i.$$

Tức có tâm là điểm $I(1, 4)$. Bán kính của đường tròn là $R = 3$. ◇

Ví dụ 1.6

Cho số phức z thoả $|z - i| = 4$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z - 5 + 2i$.

Lời giải. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z - 5 + 2i$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức

$$i + (-5 + 2i) = -5 + 3i.$$

Tức có tâm là điểm $I(-5, 3)$. Bán kính của đường tròn là $R = 4$. $\diamond$

Ví dụ 1.7

Cho số phức z thoả $|z - 1 - i| = 5$. Xét số phức $w = z + 2 + 3i$. Tìm giá trị lớn nhất của môđun w .

Lời giải. Với $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho w là đường tròn ($\mathcal{C}$) có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 + z_2 = 3 + 4i$, bán kính $R = 5$. Phương trình đường tròn ($\mathcal{C}$) là

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Để ý rằng ($\mathcal{C}$) qua gốc toạ độ O . Do đó, $|w|$ lớn nhất khi và chỉ khi $|w|$ là đường kính của ($\mathcal{C}$). Vậy $\max|w| = 10$. $\diamond$

Tính chất 1.4

Cho các số phức z, z_1, z_2 ($z_2 \neq 0$), z_3 với $|z - z_1| = R$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z \cdot z_2 + z_3$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 \cdot z_2 + z_3$, bán kính bằng $|z_2|R$.

Chứng minh. Ta có

$$w = z \cdot z_2 + z_3 \Leftrightarrow \frac{w - z_3}{z_2} = z.$$

Dẫn đến

$$\frac{w - z_3}{z_2} - z_1 = z - z_1.$$

Lấy môđun hai vế, ta được

$$\frac{|w - z_3 - z_1 \cdot z_2|}{|z_2|} = |z - z_1|.$$

Hay

$$|w - (z_1 \cdot z_2 + z_3)| = |z_2|R.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 \cdot z_2 + z_3$, bán kính bằng $|z_2|R$. $\square$

Ví dụ 1.8

(Câu 34, Đề minh hoạ môn Toán kì thi THPT quốc gia 2017 của Bộ GD&ĐT).

Cho số phức z thoả mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

Lời giải. Bán kính $r = |3 + 4i| \cdot 4 = 20$.

◇

Ví dụ 1.9

Cho số phức z thoả mãn $|z + i| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (4 + 3i)z + 2 + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

Lời giải. Tâm của đường tròn biểu diễn số phức w là điểm biểu diễn cho số phức

$$(-i)(4 + 3i) + 2 + i = 5 - 3i,$$

tức tâm đường tròn là điểm $(5, -3)$.

Bán kính của đường tròn là

$$r = |4 + 3i| \cdot 2 = 10.$$

◇

Ví dụ 1.10

Cho số phức z thoả mãn $|z + 1 + 2i| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (5 + 12i)z + 3 - i$ là một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính r của đường tròn đó.

Lời giải. Ta có

$$|z + 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z - (-1 - 2i)| = 3.$$

Tâm của đường tròn biểu diễn số phức w là điểm biểu diễn cho số phức

$$(-1 - 2i)(5 + 12i) + 3 - i = 22 - 23i,$$

tức tâm đường tròn là điểm $(22, -23)$.

Bán kính của đường tròn là

$$r = |5 + 12i| \cdot 3 = 39.$$

◇

Tính chất 1.5

Cho các số phức z, z_1, z_2 ($z_2 \neq 0$), z_3 với $|z - z_1| = R$. Tìm tập hợp biểu diễn của số phức $w = \frac{z}{z_2} + z_3$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $\frac{z_1}{z_2} + z_3$, bán kính đường tròn bằng $\frac{R}{|z_2|}$.

Chứng minh. Chứng minh tương tự, tập hợp biểu diễn của số phức $w = \frac{z}{z_2} + z_3$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $\frac{z_1}{z_2} + z_3$, bán kính đường tròn bằng $\frac{R}{|z_2|}$. □

Ví dụ 1.11

Cho số phức z thỏa điều kiện $|z - 5| = 3$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn cho số phức $w = \frac{z}{3+4i} + 1 - i$.

Lời giải. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức $w = \frac{z}{3+4i} + 1 - i$ là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức

$$\frac{5}{3+4i} + 1 - i = \frac{8}{5} - \frac{9i}{5}.$$

Bán kính của đường tròn bằng $\frac{5}{|3+4i|} = 1$.

$$\text{Đáp số. } \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{5}\right)^2 = 1.$$

◇

Ví dụ 1.12

Cho số phức z thỏa điều kiện $|z - 4 - 3i| = 3$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn cho số phức $w = \frac{z}{5-12i} + 2 + i$.

Tính chất 1.6

Cho hai số phức z, z_1 thỏa $|z - z_1| = R$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $|z_1| + R$ và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $||z_1| - R|$.

Chứng minh. Gọi I là điểm biểu diễn cho số phức z_1 và M là điểm biểu diễn cho số phức z .

- Với ba điểm O, I, M , ta có $OI + IM \geq OM$ hay $|z_1| + R \geq |z|$. Do đó, Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $|z_1| + R$.
- Mặt khác $|OI - IM| \leq OM$ hay $||z_1| - R| \leq |z|$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $||z_1| - R|$.

□

Ví dụ 1.13

Cho số phức z thỏa $|z + 5 + 12i| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Lời giải. Số phức $-5 - 12i$ có môđun là $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $3 + 13 = 16$.

Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $13 - 3 = 10$.

◇

Tính chất 1.7

Cho hai số phức z, z_1 thoả $|z - z_1| = R$. Giá trị lớn nhất của $|z + z_2|$ là $|z_1 + z_2| + R$ và giá trị nhỏ nhất của $|z + z_2|$ là $||z_1 + z_2| - R|$.

Ví dụ 1.14

Cho số phức z thoả $|z + 3 + i| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 6 + 5i|$.

Lời giải. Ta viết lại giả thiết như sau:

$$|z + 3 + i| = 3 \Leftrightarrow |z - (-3 - i)| = 3.$$

Giá trị lớn nhất của $|z + 6 + 5i|$ là

$$3 + |(-3 - i) + 6 + 5i| = 3 + |3 + 4i| = 3 + 5 = 8.$$

Giá trị nhỏ nhất của $|z + 6 + 5i|$ là

$$|(-3 - i) + 6 + 5i| - 3 = |3 + 4i| - 3 = 5 - 3 = 2.$$

◇

Ví dụ 1.15: (Thi thử lần IV trường Đại học Vinh, 2016–2017).

Cho số phức z thoả mãn không phải là số thực và số $w = \frac{z}{2 + z^2}$ là số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = |z + 1 - i|$.

Tính chất 1.8

Cho các số phức z, z_1 ($z_1 \neq 0$), z_2 thoả $|z \cdot z_1 + z_2| = R$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\frac{R + |z_2|}{|z_1|}$;

Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\frac{|R - |z_2||}{|z_1|}$.

Chứng minh. Ta có

$$|z \cdot z_1 + z_2| = R \Leftrightarrow \left| z + \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{R}{|z_1|}.$$

Dựa theo Tính chất 1.1, ta có được các kết quả của Tính chất 1.1. □

Bài tập 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ trong các trường hợp sau:

1) $|z(3 - 4i) + i| = 2$.

2) $|2z + (5 + 12i)| = 3$.

Đáp số. $5 \leq |z| \leq 8$.

3) $|z(4 + 3i) + 3 + 4i| = 10$.

Đáp số. $1 \leq |z| \leq 3$.

4) $|z(3 + 4i) + 5 + 12i| = 10$.

Đáp số. $\frac{3}{5} \leq |z| \leq \frac{23}{5}$.

Tính chất 1.9

Cho các số phức z, z_1 ($z_1 \neq 0$), z_2 thoả $|z \cdot z_1 + z_2| = R$. Giá trị lớn nhất của $|z + z_3|$ là $\frac{R}{|z_1|} + |z_4|$; Giá trị nhỏ nhất của $\left| \frac{R}{|z_1|} - |z_4| \right|$, ở đây, $z_4 = z_3 - \frac{z_2}{z_1}$.

Chứng minh. Ta có

$$|z \cdot z_1 + z_2| = R \Leftrightarrow \left| z + \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{R}{|z_1|}.$$

Hay

$$\left| z + z_3 - \left(z_3 - \frac{z_2}{z_1} \right) \right| = \frac{R}{|z_1|}.$$

Đặt $w = z + z_3$, $z_4 = z_3 - \frac{z_2}{z_1}$, ta được

$$|w - z_4| = \frac{R}{|z_1|}.$$

Dựa theo Tính chất 1.1, ta có được các kết quả của Tính chất 1.1. □

Ví dụ 1.16

Cho số phức z thoả $|(8 + 15i)z + 3 + 4i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 3i|$.

Đáp số. $3 \leq |z + 3i| \leq \frac{53}{17}$.

Ví dụ 1.17

Cho số phức z thoả $|(3 - 4i)z + 12 - 5i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 3i|$.

Đáp số. $\frac{12}{5} \leq |z + 3i| \leq \frac{16}{5}$.

Ví dụ 1.18

Cho số phức z thoả $|(3 + 4i)z + 5 + 12i| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i|$.

Đáp số. $\frac{18}{5} \leq |z + 4i| \leq \frac{24}{5}$.

Ví dụ 1.19

Cho số phức z thoả $|(3 - 4i)z + 1 + 2i| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$.

Đáp số. $\frac{2}{5} \leq |z - 1 + i| \leq \frac{8}{5}$.

Tính chất 1.10

Cho các số phức z, z_1, z_2, z_3 thoả $|z - z_1| = |z - z_2|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của môđun số phức $w = z + z_3$.

Chứng minh. Ta có $z = w - z_3$. Thay vào giả thiết đã cho, ta được

$$|w - (z_1 + z_3)| = |w - (z_2 + z_3)|. \quad (1.1)$$

Gọi A là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 + z_3$; B là điểm biểu diễn cho số phức $z_2 + z_3$; M là điểm biểu diễn cho số phức w . Từ (1.1), ta có $AM = BM$. Như vậy M thuộc đường trung trực (Δ) của đoạn AB .

Ta có $|w|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi OM nhỏ nhất hay OM là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (Δ) . □

Ví dụ 1.20

(Thi thử trường THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, lần III, 2016 – 2017)

Cho số phức z thoả mãn

$$|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i|.$$

Đặt $w = z + 2 - 3i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

Đáp số. $\frac{11}{\sqrt{10}}$.

Ví dụ 1.21

Cho số phức z thoả mãn

$$|z - 3 + 4i| = |z + 2 + 3i|.$$

Đặt $w = z + 1 + 4i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

Tính chất 1.11

Cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ và hai điểm $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$.

Đặt

$$f(x, y) = ax + by + c.$$

Ta có

1) C và D ở cùng phía của Δ khi và chỉ khi

$$(ax_1 + by_1 + c) \cdot (ax_2 + by_2 + c) > 0.$$

2) C và D ở khác phía của Δ khi và chỉ khi

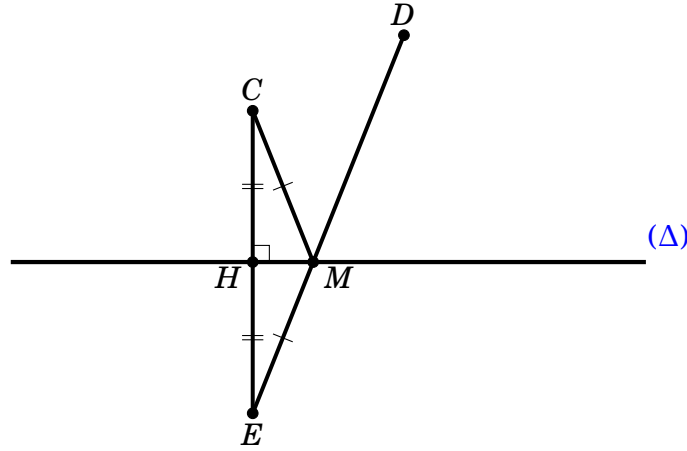
$$(ax_1 + by_1 + c) \cdot (ax_2 + by_2 + c) < 0.$$

Tính chất 1.12

Cho các số phức z, z_1, z_2, z_3, z_4 thoả $|z - z_1| = |z - z_2|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$W = |z - z_3| + |z - z_4|.$$

Chứng minh. Gọi A, B, C, D, M lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z_3, z_4, z . Từ giả thiết, ta có $AM = BM$, tức M thuộc đường trung trực (Δ) của đoạn AB . Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $CM + DM$. Có hai khả năng sau:



- Hai điểm C và D ở khác phía của đường thẳng (Δ) . Khi đó M là giao điểm của (Δ) và đường thẳng CD . Giá trị nhỏ nhất cần tìm chính là CD hay cũng là môđun của số phức $z_3 - z_4$.
- Hai điểm C và D ở cùng phía của đường thẳng (Δ) . Gọi E là điểm đối xứng của C qua (Δ) . Giá trị nhỏ nhất cần tìm chính là ED hay cũng là môđun của số phức $z_5 - z_4$, ở đây E là điểm biểu diễn cho số phức z_5 . Lúc đó, M là giao điểm của đường ED và Δ .

□

Ví dụ 1.22

Cho số phức z thoả

$$|z - 1 - 6i| = |z - 5 - 4i|.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 3 - i| + |z - 1 + 7i|$.

Lời giải. Gọi $A(1, 6), B(5, 4), C(-3, 1), D(1, -7), M(x, y)$. Từ giả thiết, ta có $AM = BM$, như vậy M thuộc đường trung trực Δ của đoạn AB . Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $CM + DM$.

Phương trình Δ qua trung điểm $T(3, 5)$ của đoạn AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (4, -2)$ làm vectơ pháp tuyến là

$$4(x - 3) - 2(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0.$$

Đặt

$$f(x, y) = 2x - y - 1.$$

Ta có

$$f(-3, 1) \cdot f(1, -7) = [2 \cdot (-3) - 1 - 1] \cdot [2 \cdot 1 + 7 - 1] = -64 < 0,$$

nên hai điểm C và D ở khác phía của (Δ) . Do đó, M là giao điểm của đường thẳng CD và (Δ) . Toạ độ $M(-1, -3)$. Lúc đó, $CM + DM = CD = 4\sqrt{5}$.

◇

Lời bình. Ta có thể lí luận như sau để biết giao điểm của đường thẳng CD với (Δ) ở trong hay ở ngoài đoạn CD như sau:

Phương trình đường thẳng CD là $2x + y + 5 = 0$.

Gọi I là giao điểm của Δ và CD , thì $I(-1, -3)$. Ta có $\vec{IC} = (-2, 4)$, $\vec{ID} = (2, -4)$. Do đó, $\vec{IC} = -\vec{ID}$, nên I là trong đoạn CD và M trùng với I .

Giá trị nhỏ nhất của $CM + DM$ là $CD = 4\sqrt{5}$.

♣

Ví dụ 1.23

Cho số phức z thoả

$$|z + 1 - 3i| = |z + 4 - i|.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = |z + 1 - 2i| + |z + 5 + i|$.

Đáp số. $\min E = 5$ tại $M\left(-2, \frac{5}{4}\right)$.

Ví dụ 1.24

Cho số phức z thoả

$$|z + 5 + 6i| = |z + 7 + 4i|.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = |z + 1 + 2i| + |z + 3 + 4i|$.

Đáp số. $\min E = 4$ tại $M(-3, -2)$.

Ví dụ 1.25

Cho số phức z thoả

$$|z - 2 - 3i| = |z - 4 - 5i|.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = |z + 1 + 2i| + |z + 3 - 4i|$.

Đáp số. $\min E = 4\sqrt{10}$ tại $M\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Tính chất 1.13

Cho đường tròn ($\mathcal{C}$) và hai điểm A, B cố định thuộc ($\mathcal{C}$). Điểm M trên ($\mathcal{C}$) sao cho $MA + MB$

- 1) nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng với A hay M trùng với B .
- 2) lớn nhất khi M là một trong hai giao điểm của đường trung trực đoạn AB với đường tròn ($\mathcal{C}$).

Chứng minh.

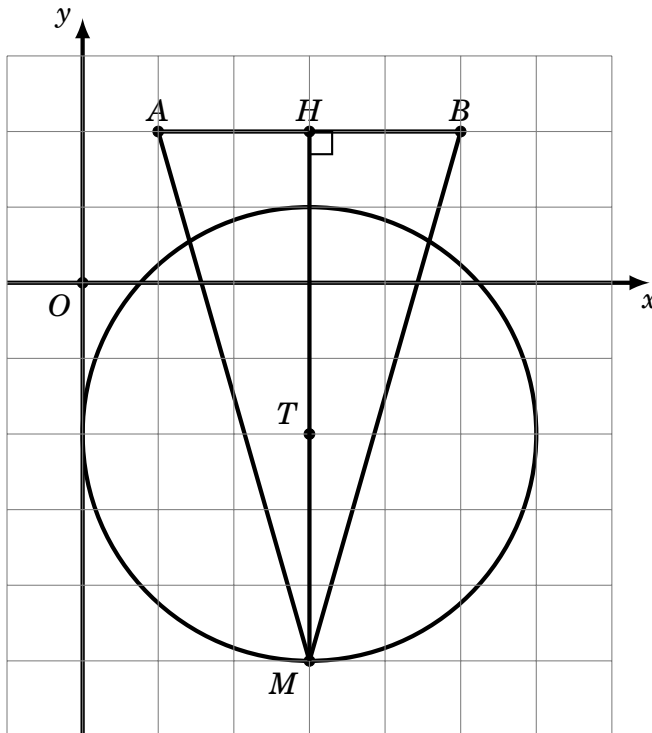
- 1) Ta có $MA + MB \geq AB$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng với A hay M trùng với B . Khi đó, giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ là AB .

□

Ví dụ 1.26

Cho số phức z và w thỏa $|w + i| = \frac{\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$|z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i|.$$



Lời giải.

◇

Ví dụ 1.27

Cho số phức z thoả $|z - 1 - 2i| = 5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w = |z + 2 + 2i| + |z - 4 - 6i|.$$

Đáp số. $10 \leq w \leq 10\sqrt{2}$.

Ví dụ 1.28

Cho số phức z thoả $|z + 1 + 3i| = 5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w = |z + 4 - i| + |z - 2 + 7i|.$$

Đáp số. $10 \leq w \leq 10\sqrt{2}$.

Ví dụ 1.29

Cho số phức z thoả $|z + 1 + 3i| = 5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w = |z - 5 - 5i| + |z - 2 - i|.$$

Đáp số. $5 \leq w \leq 25$.

Ví dụ 1.30

Cho số phức z thoả $|z - 2 + i| = 13$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$w = |z + 10 + 6i| + |z - 14 - 4i|.$$

Đáp số. $\min w = 26$, tại $z = -10 - 6i$ và $\max w = 26\sqrt{2}$, tại $z = -3 - 11i$.

Ví dụ 1.31

Cho số phức z thoả $|z - 1 - 2i| = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$w = |z + 3 + i| + |z - 4 - 6i|.$$

Đáp số. $\min w = 7\sqrt{2}$, tại $z = -3 - i$.

Ví dụ 1.32

Cho số phức z thoả $|z + 1 + 3i| = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$w = |z + 3 + 4i| + |z - 2 - i|.$$

Đáp số. $\min w = 5\sqrt{2}$, tại $z = 2 + i$.

Ví dụ 1.33

Cho số phức z thỏa $|z + 1 - 2i| = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$w = |z - 2 - 6i| + |z - 3 - 5i|.$$

Đáp số. $\min w = \sqrt{2}$, tại $z = 2 + 6i$.

Bài tập 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của w , biết rằng:

1) z thỏa $|z - 2 + 4i| = 5$ và $w = |z + 6 + 10i| + |z - 10 - 2i|$.

Đáp số. $\min w = 20$, tại $z = -2 - 7i$ và $\max w = 10\sqrt{5}$, tại $z = -1$.

2) z thỏa $|z - 2 + 4i| = 20$ và $w = |z + 4 + 12i| + |z - 8 - 4i|$.

Đáp số. $\min w = 40$, tại $z = -10 - 20i$ và $\max w = 20\sqrt{5}$, tại $z = -4 + 8i$.

3) z thỏa $|z - 2 - 3i| = 20$ và $w = |z + 7 + 9i| + |z - 11 - 15i|$.

Đáp số. $\min w = 40$, tại $z = -10 - 13i$ và $\max w = 50$, tại $z = -14 + 15i$.

4) z thỏa $|z - 2 - 3i| = 10$ và $w = |z + 7 - 15i| + |z - 11 + 9i|$.

Đáp số. $\min w = 30$, tại $z = -4 + 11i$ và $\max w = 10\sqrt{13}$, tại $z = -6 - 3i$.

Tính chất 1.14

Cho hai số phức z, z_1 thỏa

$$|z - z_1| + |z + z_1| = k.$$

Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\frac{k}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\sqrt{\frac{k^2}{4} - |z_1|^2}$.

Chứng minh. Ta có

$$k = |z - z_1| + |z + z_1| \geq |z - z_1 + z + z_1| = 2|z| \Leftrightarrow |z| \leq \frac{k}{2}.$$

Mặt khác

$$k \leq \sqrt{2(|z - z_1|^2 + |z + z_1|^2)}.$$

Sử dụng tính chất

$$|z - z_1|^2 + |z + z_1|^2 = 2(|z|^2 + |z_1|^2),$$

ta suy ra

$$k^2 \leq 4(|z|^2 + |z_1|^2).$$

Do đó,

$$|z| \geq \sqrt{\frac{k^2}{4} - |z_1|^2}.$$

□

Ví dụ 1.34

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$, biết rằng

$$|z + 5| + |z - 5| = 26.$$

Lời giải. Ngoài kết quả đã chứng minh ở trên, ta có thể giải ví dụ bằng phương pháp hình học như sau.

Gọi $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $M(x, y)$ là tập hợp các điểm biểu diễn cho z . Từ giả thiết, ta có $MF_1 + MF_2 = 26$. Do đó, tập hợp các điểm M là một elip (E).

Đặt $2a = 26$, hay $a = 13$. Do $2c = F_1F_2 = 10$, nên $c = 5$.

Mặt khác, $a^2 = b^2 + c^2$, nên $b^2 = a^2 - c^2 = 144$.

Vậy phương trình của (E) là $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.

Độ dài nửa trục lớn của (E) là 13 và độ dài nửa trục nhỏ của (E) là 12.

Do đó, $|z|$ lớn nhất là 13, tại $z = 13$ hoặc $z = -13$ và $|z|$ nhỏ nhất là 12, tại $z = 12i$ hoặc $z = -12i$. ◇

Ví dụ 1.35

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$, biết rằng

$$\left| z + 2\sqrt{3} + 2i \right| + \left| z - 2\sqrt{3} - 2i \right| = 10.$$

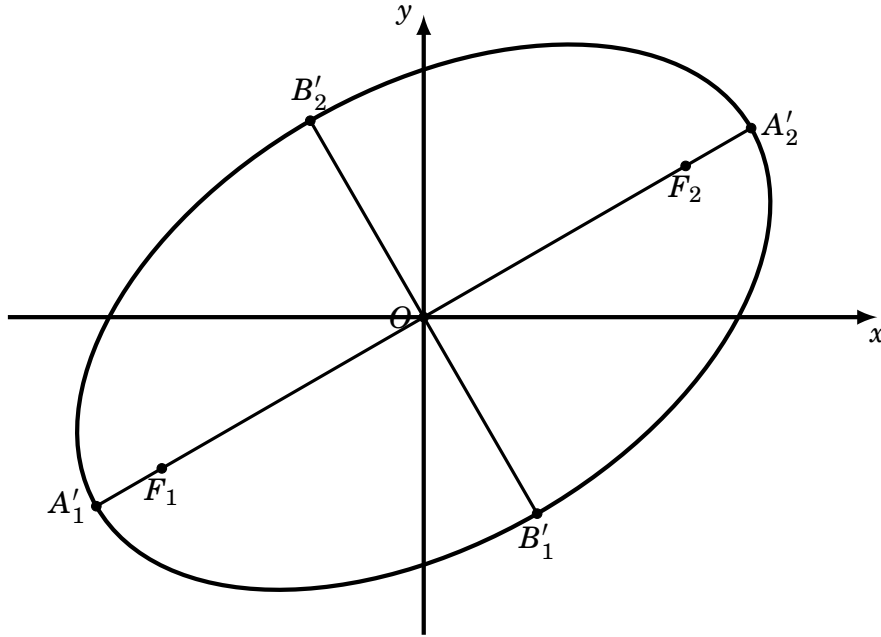
Lời giải. Một lần nữa, ta cũng giải bằng phương pháp hình học.

Gọi $F_1(-2\sqrt{3}, -2)$, $F_2(2\sqrt{3}, 2)$, $M(x, y)$ là tập hợp các điểm biểu diễn cho z . Từ giả thiết, ta có $MF_1 + MF_2 = 10$. Do đó, tập hợp các điểm M là một elip (E).

Ta có $2a = 10$, hay $a = 5$. Do $2c = F_1F_2 = 8$, nên $c = 4$.

Mặt khác, $b^2 = a^2 - c^2 = 9$.

Độ dài nửa trục lớn của (E) là 5 và độ dài nửa trục nhỏ của (E) là 3.



Do đó, $|z|$ lớn nhất là 5, bằng là nửa độ dài đoạn $A'_1A'_2$ (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng A'_1 hoặc A'_2) và $|z|$ nhỏ nhất là 3, bằng là nửa độ dài đoạn $B'_1B'_2$ (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng B'_1 hoặc B'_2).

- Chú ý rằng, phương trình đường thẳng F_1F_2 là $x - y\sqrt{3} = 0$. Toạ độ các điểm A'_1 và A'_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y\sqrt{3} = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta có được $A'_1\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ và $A'_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Do đó, $|z|$ lớn nhất là 5 tại $z = -\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$ hoặc $z = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$.

- Đường thẳng $B'_1B'_2$ qua O và vuông góc với đường thẳng $A'_1A'_2$, nên có phương trình $\sqrt{3}x + y = 0$. Toạ độ các điểm B'_1 và B'_2 là nghiệm của hệ phương trình

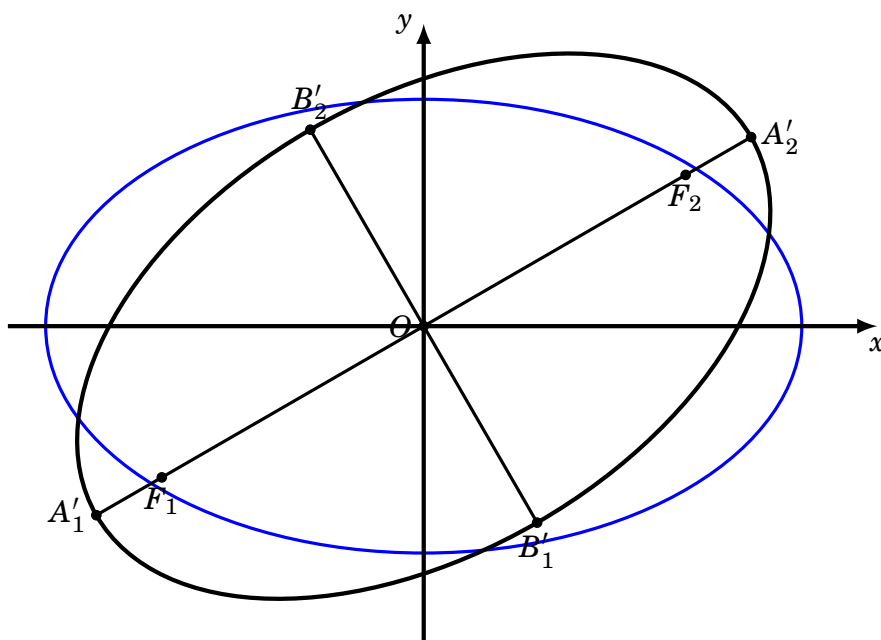
$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta có được $B'_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ và $B'_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Do đó, $|z|$ nhỏ nhất là 3 tại $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ hoặc $z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

◇

Lời bình. Phương trình elip có trong bài trên không có dạng chính tắc. Elip có được bằng cách quay elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ một góc 30° , với tâm quay là điểm $O(0,0)$.



Bài tập 3. Tìm phương trình biểu diễn các số phức z thỏa

1) $|z + 3| + |z - 3| = 10$.

Đáp số. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

2) $|z + 4| + |z - 4| = 10$.

Đáp số. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3) $|z + 5| + |z - 5| = 26$.

Đáp số. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.

4) $|z + 12| + |z - 12| = 26$.

Đáp số. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Bài tập 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$, biết rằng

1) $|z + 9| + |z - 9| = 30$.

Đáp số. $\max|z| = 15$, tại $z = -15$; $\min|z| = 12$, tại $z = -12i$.

2) $|z + 4i| + |z - 4i| = 10$.

Đáp số. $\max|z| = 5$, tại $z = -5$; $\min|z| = 3$, tại $z = -3i$.

3) $|z - 4 + 3i| + |z + 4 - 3i| = 26$.

Đáp số. $\max|z| = 13$, tại $z = -\frac{52}{5} + \frac{39}{5}i$; $\min|z| = 12$, tại $z = -\frac{36}{5} - \frac{48}{5}i$.

4) $|z - 9 + 12i| + |z + 9 - 12i| = 34$.

Đáp số. $\max|z| = 17$, tại $z = -\frac{51}{5} + \frac{68}{5}i$; $\min|z| = 8$, tại $z = -\frac{32}{5} - \frac{24}{5}i$.

5) $|z - 9 + 12i| + |z + 9 - 12i| = 50$.

Đáp số. $\max|z| = 25$, tại $z = -15 + 20i$; $\min|z| = 20$, tại $z = -16 - 12i$.

6) $|z - 2 + i| + |z + 2 - i| = 6$.

Đáp số. $\max|z| = 3$, tại $z = -\frac{6\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5}i$; $\min|z| = 2$, tại $z = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{4\sqrt{5}}{5}i$.

Tính chất 1.15

Cho hai số phức z, z_1 thoả

$$m|z - z_1| + n|z + z_1| = k.$$

Tìm giá trị lớn nhất của và giá trị nhỏ nhất $|z|$.

Ví dụ 1.36

Cho số phức z thoả

$$|z + 1| + 4|z - 1| = 25.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Đáp số. $\frac{22}{5} \leq |z| \leq \frac{28}{5}$.

Lời giải. Gọi $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $M(x, y)$ là điểm biểu diễn cho z . Để ý $O(0, 0)$ là trung điểm của đoạn AB và $AB = 2$. Từ giả thiết ta có $AM + 4BM = 25$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn OM .

Đặt $a = AM$, $b = BM$ ($a, b > 0$) thoả $a + 4b = 25$ hay $a = 25 - 4b$.

Ta có $|MA - MB| \leq AB$ hay

$$|a - b| \leq 2 \Leftrightarrow |25 - 4b - b| \leq 2 \Leftrightarrow \frac{23}{5} \leq b \leq \frac{27}{5}.$$

Mặt khác,

$$OM^2 = \frac{AM^2 + BM^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{(25 - 4b)^2 + b^2}{2} - 1 = \frac{17b^2}{2} - 100b + \frac{623}{2}.$$

Xét hàm số $f(b) = \frac{17b^2}{2} - 100b + \frac{623}{2}$ với $\frac{23}{5} \leq b \leq \frac{27}{5}$, ta được giá trị lớn nhất của $f(b)$ là $\frac{784}{25}$ và giá trị nhỏ nhất của $f(b)$ là $\frac{484}{25}$. Khi đó, giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\frac{28}{5}$ và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\frac{22}{5}$. ◇

Lời bình. Việc tìm $\max|z|$ có thể làm đơn giản như sau: Ta có

$$\begin{aligned} |5z| &= |(z + 1) + 4(z - 1) + 3| \\ &\leq |z + 1| + 4|z - 1| + |3| \\ &\leq 25 + 3. \end{aligned}$$

Do đó, giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\frac{28}{5}$.



Ví dụ 1.37

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ biết z thỏa

$$|z - 15 + 36i| + 3|z - 10 + 24i| = 21.$$

Lời giải. Đặt

$$t = z + \frac{(-15 + 36i) + (-10 + 24i)}{2} = z - \frac{25}{2} + 30i.$$

Hay

$$z = t + \frac{25}{2} - 30i.$$

Khi đó

$$z - 15 + 36i = t + \frac{25}{2} - 30i - 15 + 36i = t - \frac{5}{2} + 6i$$

và

$$z - 10 + 24i = t + \frac{25}{2} - 30i - 10 + 24i = t + \frac{5}{2} - 6i.$$

Giả thiết đã cho thành

$$\left| t - \frac{5}{2} + 6i \right| + 3 \left| t + \frac{5}{2} - 6i \right| = 21.$$

Gọi $A\left(\frac{5}{2}, -6\right)$, $B\left(-\frac{5}{2}, 6\right)$, $M(x, y)$ là điểm biểu diễn cho t . Để ý $O(0, 0)$ là trung điểm của đoạn AB và $AB = 13$. Từ giả thiết ta có $AM + 3BM = 21$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn OM .

Đặt $a = AM$, $b = BM$ ($a, b > 0$) thỏa $a + 3b = 21$ hay $a = 21 - 3b$.

Ta có $|MA - MB| \leq AB$ hay

$$|a - b| \leq 13 \Leftrightarrow |21 - 3b - b| \leq 13 \Leftrightarrow 2 \leq b \leq \frac{17}{2}.$$

Mặt khác,

$$OM^2 = \frac{AM^2 + BM^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{(21 - 3b)^2 + b^2}{2} - \frac{13^2}{4} = 5b^2 - 63b + \frac{713}{4}.$$

Xét hàm số $f(b) = 5b^2 - 63b + \frac{713}{4}$ với $2 \leq b \leq \frac{17}{2}$, ta được giá trị lớn nhất của $f(b)$ là $\frac{289}{4}$ và giá trị nhỏ nhất của $f(b)$ là 0. Khi đó, giá trị lớn nhất của $|t|$ là $\frac{17}{2}$ tại $b = 2$ và giá trị nhỏ nhất của $|t|$ là 0 tại $\diamond$

Bài tập 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ trong các trường hợp sau:

1) $4|z + i| + 3|z - i| = 10.$

Đáp số. $\max|z| = \frac{11}{7}$, tại $z = \frac{11}{7}$; $\min|z| = 1$, tại $z = -\frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$.

2) $2|z + 1| + 5|z - 1| = 25.$

Đáp số. $\max|z| = 4$, tại $z = 4$; $\min|z| = \frac{22}{7}$, tại $z = -\frac{22}{7}$.

3) $2|z + 2i| + 5|z - 2i| = 12$.

Đáp số. $\max|z| = \frac{18}{7}$, tại $z = \frac{18}{7}i$; $\min|z| = \frac{2}{3}$, tại $z = \frac{2}{3}i$.

4) $|z - 4 + 3i| + 4|z + 4 - 3i| = 20$.

Đáp số. $\max|z| = 7$, tại $z = -\frac{28}{5} + \frac{21}{5}i$; $\min|z| = \frac{5}{3}$, tại $z = -\frac{4}{3} + i$.

5) $|z - 5 + 12i| + 2|z + 5 - 12i| = 30$.

Đáp số. $\max|z| = \frac{43}{3}$, tại $z = -\frac{215}{39} + \frac{172}{13}i$; $\min|z| = 9$, tại $z = -\frac{45}{13} + \frac{108}{13}i$.

6) $3|z + 4 + 3i| + 2|z - 4 - 3i| = 26$.

Đáp số. $\max|z| = \frac{31}{5}$, tại $z = -\frac{124}{25} - \frac{93}{25}i$; $\min|z| = 1$, tại $z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

Bài tập 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ trong các trường hợp sau:

1) $3|z - 4 - 3i| + 4|z - 8 - 6i| = 20$.

Đáp số. $\max|z| = \frac{75}{7}$, tại $z = \frac{60}{7} + \frac{45}{7}i$; $\min|z| = 5$, tại $z = 4 + 3i$.

2) $4|z + 4 - 3i| + |z + 8 - 6i| = 20$.

Đáp số. $\max|z| = 10$, tại $z = -8 + 6i$; $\min|z| = 2$, tại $z = -\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$.

3) $5|z + 4 - 3i| + 3|z + 8 - 6i| = 17$.

Đáp số. $\max|z| = 6$, tại $z = -\frac{24}{5} + \frac{18}{5}i$; $\min|z| = \frac{19}{4}$, tại $z = -\frac{19}{5} + \frac{57}{20}i$.

4) $4|z - 9 + 12i| + |z - 6 + 8i| = 20$.

Đáp số. $\max|z| = 18$, tại $z = \frac{54}{5} - \frac{72}{5}i$; $\min|z| = 10$, tại $z = 6 - 8i$.

Ví dụ 1.38

Cho số phức z có $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$w = 3|z + 3| + 4|z - 3|.$$

Lời giải. Đặt $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Khi đó,

$$w = 3|\cos \varphi + i \sin \varphi + 3| + 4|\cos \varphi + i \sin \varphi - 3|.$$

Lấy môđun các số phức ở vế phải của biểu thức trên, ta được

$$w = 3 \cdot \sqrt{10 + 6 \cos \varphi} + 4 \cdot \sqrt{10 + 6 \cos \varphi}.$$

Đặt $t = \cos \varphi$, $-1 \leq t \leq 1$, w trở thành

$$f(t) = \sqrt{2} \left(3 \cdot \sqrt{5 + 3t} + 4 \cdot \sqrt{5 - 3t} \right).$$

Đạo hàm của hàm số $f(t)$ là

$$f'(t) = \sqrt{2} \left(-\frac{6}{\sqrt{5-3t}} + \frac{9}{2\sqrt{5+3t}} \right).$$

Nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = -\frac{7}{15}$. Ta có,

$$f(-1) = 22, \quad f(1) = 20, \quad f\left(-\frac{7}{15}\right) = 10\sqrt{5}.$$

- Giá trị nhỏ nhất của w là 20, đạt được tại $t = 1$. Khi đó $\cos \varphi = 1$. Dẫn đến $z = 1$.
- Giá trị lớn nhất của w là $10\sqrt{5}$, đạt được tại $t = -\frac{7}{15}$.

Khi đó $\cos \varphi = -\frac{7}{15}$ và $\sin \varphi = -\frac{4\sqrt{11}}{15}$. Số phức cần tìm là $z = -\frac{7}{15} - \frac{4\sqrt{11}}{15}i$.

◇

Ví dụ 1.39

Cho số phức z có $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$w = 5|z - 3 - 4i| + 12|z + 3 + 4i|.$$

Lời giải. Vì $|z| = 1$, nên đặt $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Khi đó,

$$w = 5|\cos \varphi + i \sin \varphi - 3 - 4i| + 12|\cos \varphi + i \sin \varphi + 3 + 4i|.$$

Lấy mô đun các số phức trên, ta được

$$w = 5\sqrt{(\cos \varphi - 3)^2 + (\sin \varphi - 4)^2} + 12\sqrt{(\cos \varphi + 3)^2 + (\sin \varphi + 4)^2}.$$

Hay

$$w = 5\sqrt{26 - 6\cos \varphi - 8\sin \varphi} + 12\sqrt{26 + 6\cos \varphi + 8\sin \varphi}.$$

Đặt $t = 6\cos \varphi + 8\sin \varphi$, chú ý $-10 \leq t \leq 10$, ta thu được

$$f(t) = 5\sqrt{26 - t} + 12\sqrt{26 + t}, \quad -10 \leq t \leq 10.$$

Ta có

$$f'(t) = -\frac{5}{2\sqrt{26-t}} + \frac{6}{\sqrt{26+t}}.$$

Giải phương trình $f'(t) = 0$, ta được $t = \frac{238}{13}$. Giá trị này không thoả điều kiện $-10 \leq t \leq 10$. Mặt khác, $f(-10) = 78$, $f(10) = 92$.

- Giá trị lớn nhất của $f(t)$, cũng là giá trị lớn nhất của w là 92, đạt được tại $t = 10$. Để tìm số phức z , ta giải hệ

$$\begin{cases} 6\cos\varphi + 8\sin\varphi = 10, \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{3}{5}, \\ \sin\varphi = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Số phức z là $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.

- Giá trị nhỏ nhất của $f(t)$, cũng là giá trị nhỏ nhất của w là 78, đạt được tại $t = -10$. Để tìm số phức z , ta giải hệ

$$\begin{cases} 6\cos\varphi + 8\sin\varphi = -10, \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = -\frac{3}{5}, \\ \sin\varphi = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Số phức z là $z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$.

◇

Bài tập 7. Cho số phức z có $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

1) $w = 4|z + 1| + 3|z - 1|$.

Đáp số. $\max w = 10$, tại $z = \frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$, $\min w = 6$, tại $z = -i$.

2) $w = 5|z - i| + 12|z + i|$.

Đáp số. $\max w = 26$, tại $z = -\frac{120}{169} + \frac{119}{169}i$, $\min w = 10$, tại $z = -i$.

3) $w = 5|z - i| - 12|z + i|$.

Đáp số. $\max w = 10$, tại $z = -i$, $\min w = -24$, tại $z = i$.

4) $w = 3|z + 5 - 12i| + 4|z - 5 + 12i|$.

Đáp số. $90 \leq w \leq 92$.

Đáp số. $\max w = 92$, tại $z = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$, $\min w = 90$, tại $z = \frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$.

5) $w = 2|z + 5 + 12i| + 3|z - 5 - 12i|$.

Đáp số. $\max w = 66$, tại $z = -\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$, $\min w = 64$, tại $z = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$.

Tính chất 1.16

Cho $(\mathcal{C})$ là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và M là điểm trên $(\mathcal{C})$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng

$$S = AM + BM + CM + DM.$$

Ví dụ 1.40

Cho số phức z thoả mãn điều kiện $|z - 5 - i| = 5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng

$$S = |z - 1 + 2i| + |z - 2 - 5i| + |z - 8 + 3i| + |z - 9 - 4i|.$$

Tính chất 1.17

Với hai số phức z_1, z_2 tuỳ ý, ta có

$$1) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2);$$

$$2) (|z_1| + |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } |z_1| = |z_2|.$$

Chứng minh. Đặt $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$. Gọi $M(a, b), N(c, d)$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho z_1 và z_2 . Ta có $|z_1| = OM, |z_2| = ON$.

Ta có

$$z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i.$$

Gọi $C(a + c, b + d)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z_1 + z_2$. Khi đó, $|z_1 + z_2| = OC$.

Mặt khác

$$z_1 - z_2 = a - c + (b - d)i.$$

Để ý rằng $\overrightarrow{NM} = (a - c, b - d)$, nên $|z_1 - z_2| = MN$. Ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, nên tứ giác $OMCN$ là hình bình hành. Do đó

$$OC^2 + MN^2 = 2(OM^2 + ON^2), \quad (1.2)$$

hay

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Mặt khác, ta có

$$(OM + ON)^2 \leq 2(OM^2 + ON^2). \quad (1.3)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $OM = ON$.

Từ (1.2) và (1.3), suy ra

$$(OM + ON)^2 \leq OC^2 + MN^2,$$

hay

$$(|z_1| + |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2.$$

□

Lời bình. Ta có thể chứng minh đẳng thức

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

như sau:

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)\end{aligned}$$



Ví dụ 1.41

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thoả

$$|z - 3 - 4i|^2 + |z + 3 + 4i|^2 = 150.$$

Lời giải. Đặt $z_1 = 3 + 4i$. Giả thiết đã cho được viết lại thành

$$|z - z_1|^2 + |z + z_1|^2 = 150.$$

Tương đương

$$2(|z_1|^2 + |z|^2) = 150 \Leftrightarrow 2(25 + |z|^2) = 150 \Leftrightarrow |z|^2 = 50.$$

Vậy tập hợp cần tìm là đường tròn có tâm là gốc toạ độ, bán kính $R = 5\sqrt{2}$.



Ví dụ 1.42

Cho các số phức z, z_1, z_2 và số thực k thoả $k > \frac{|z_1 - z_2|^2}{2}$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thoả

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = k.$$

Lời giải. Cách 1. Gọi M, A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức z, z_1, z_2 . Từ giả thiết dẫn đến

$$AM^2 + BM^2 = k.$$

Gọi I là trung điểm đoạn AB . Áp dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác MAB , ta có

$$IM^2 = \frac{AM^2 + BM^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Từ đây, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $\frac{z_1 + z_2}{2}$, bán kính $R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}}$.

Cách 2. Đặt

$$t = \frac{(z - z_1) + (z - z_2)}{2} = z - \frac{z_1 + z_2}{2},$$

hay

$$z = t + \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Ta có

$$z - z_1 = t + \frac{z_1 + z_2}{2} - z_1 = t - \frac{z_1 - z_2}{2},$$

$$z - z_2 = t + \frac{z_1 + z_2}{2} - z_2 = t + \frac{z_1 - z_2}{2}.$$

Từ giả thiết, ta có

$$\left| t - \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 + \left| t + \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 = k.$$

Dẫn đến,

$$2 \left(|t|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right) = k.$$

Suy ra

$$|t|^2 = \frac{k}{2} - \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}.$$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức t là đường tròn tâm $O(0,0)$, bán kính $R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}}$.

Mà $z = t + \frac{z_1 + z_2}{2}$, nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn cho số phức $\frac{z_1 + z_2}{2}$, bán kính $R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}}$. $\diamond$

Bài tập 8. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z , biết rằng

1) $|z - 4|^2 + |z + 4|^2 = 40;$

Đáp số. $x^2 + y^2 = 4.$

2) $|z - 2i|^2 + |z + 2|^2 = 12;$

Đáp số. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0.$

3) $|z - 6|^2 + |z + 8i|^2 = 68;$

Đáp số. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 - 9 = 0.$

4) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26;$

Đáp số. $x^2 + y^2 = 9.$

5) $|z - i|^2 + |z + 3|^2 = 13.$

Đáp số. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 = 0.$

Ví dụ 1.43: (Thi thử lần III, THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, 2016 – 2017)Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn

$$|z_1 - z_2| = 1, \quad |z_1 + z_2| = 3.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$.

Ví dụ 1.44: (Thi thử lần IV, Đại học Vinh, 2016 – 2017)

Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn

$$|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1.$$

Tính $|z_1 + z_2|$.

Ví dụ 1.45: (Thi thử lần II, Đại học Vinh, 2017 – 2018)

Cho z_1, z_2 là hai trong số các số phức thoả mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm môđun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

1.2 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Ví dụ 1.46: (Thi thử lần II, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, 2017 – 2018)

Có bao nhiêu số phức z thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z - 10 + 2i| = |z + 2 - 14i|$ và $|z - 1 - 10i| = 5$?

Lời giải. Gọi $M(x; y)$ biểu diễn cho z , ta có hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 12 = 0, \\ (x - 1)^2 + (y - 10)^2 = 25. \end{cases}$$

Để ý đường thẳng $3x - 4y + 12 = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 10)^2 = 25$, nên chỉ có một số phức. ◇

Ví dụ 1.47

Cho hai số phức z_1, z_2 đồng thời thoả mãn hai điều kiện:

$$|z - 1| = \sqrt{34}, \quad |z + 1 + mi| = |z + m + 2i|,$$

trong đó, $m \in \mathbb{R}$ và sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất. Khi đó, giá trị của $|z_1 + z_2|$ là bao nhiêu?

1.3 Bài tập

Bài tập 9. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z , biết rằng:

1) $|z + i + 1| = |\bar{z} - 3i|;$

Đáp số. $2x - 4y - 7 = 0$.

$$2) |z - 2 + i| = |\bar{z} + 1 - 3i|;$$

$$\text{Đáp số. } 6x + 4y + 5 = 0.$$

$$3) \left| \frac{z + i}{z - 5i + 1} \right| = 1.$$

$$\text{Đáp số. } 2x - 12y + 25 = 0.$$

Bài tập 10. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z , biết rằng:

$$1) z \cdot \bar{z} + (1 + i) \cdot \bar{z} + (1 - i)z + 1 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } (x + 1)^2 + (y + 1)^2 - 1 = 0.$$

$$2) z \cdot \bar{z} + (2 + i) \cdot \bar{z} + (2 - i)z = 4;$$

$$\text{Đáp số. } (x + 2)^2 + (y + 1)^2 - 9 = 0.$$

$$3) z \cdot \bar{z} + (3 + i) \cdot \bar{z} + (3 - i)z = 6.$$

$$\text{Đáp số. } (x + 3)^2 + (y + 1)^2 - 16 = 0.$$

Bài tập 11. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z , biết rằng:

$$1) |2z + i| = |-z + i + 3|;$$

$$\text{Đáp số. } (x + 1)^2 + (y + 1)^2 - 5 = 0.$$

$$2) |z + 3 - 2i| = |2z - 2i + 1|;$$

$$\text{Đáp số. } \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{29}{9} = 0.$$

$$3) \left| \frac{3z + 2 + 3i}{2z + i - 1} \right| = 1.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{58}{25} = 0.$$

Bài tập 12. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện cho trước. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w , biết rằng

$$1) |z + 1 - 2i| = 1, \quad w + z = -2 - 5i;$$

$$\text{Đáp số. } (x + 1)^2 + (y + 7)^2 = 1.$$

$$2) |z + 2 + 5i| = 3, \quad w - z = 1 + 2i;$$

$$\text{Đáp số. } (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9.$$

$$3) |z + 3 - 2i| = 4, \quad w = iz + 2;$$

$$\text{Đáp số. } x^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

$$4) |z + 1 - 3i| = 2, \quad 2w - z = -2 + 3i.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

Bài tập 13. Cho số phức z . Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w , biết rằng

$$1) w = iz + 2i - 1, \quad |z - 2i| \leq 2;$$

$$\text{Đáp số. Hình tròn } (x + 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4.$$

$$2) w = i\bar{z} + 3 - 2i, \quad |z + 2i + 4| \leq 3;$$

$$\text{Đáp số. Hình tròn } (x - 1)^2 + (y + 6)^2 \leq 9.$$

$$3) w = iz + 3 - i, \quad |2z + i|^2 \geq 4;$$

$$\text{Đáp số. } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 - 1 \geq 0.$$

$$4) w = 2z + 3 - i, \quad |2z + i|^2 - z \cdot \bar{z} - 1 \leq 0.$$

$$\text{Đáp số. } (x - 3)^2 + \left(y + \frac{7}{3}\right)^2 \leq \frac{16}{9}.$$

Bài tập 14. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z , biết rằng

1) $|z + 3i| = |z + 2\bar{z} + 2i|;$

Đáp số. Parabol $y = \frac{1}{10}(8x^2 - 5).$

2) $|5z + i + 1| = |2z - 3\bar{z} + 2i|;$

Đáp số. Parabol $y = \frac{1}{5}(12x^2 + 5x - 1).$

3) $|z + i - 2| = |2z + \bar{z} + 1|.$

Đáp số. Parabol $y = 4x^2 + 5x - 2.$

4) $|z - i| = |2z - 3\bar{z} + 2i|.$

Đáp số. Hai đường thẳng $y = -\frac{3}{4} \vee y = -\frac{1}{6}.$

Bài tập 15. Tìm số phức z có modul nhỏ nhất trong các trường hợp sau:

1) $|z + 3i + 4| = |z - 5i + 10|.$

Đáp số. $z = -3 + 4i.$

2) $|z - 3i + 4| = |z + 5i + 10|;$

Đáp số. $z = -3 - 4i.$

3) $|z + 2 + i| = |\bar{z} + 5 + 2i|;$

Đáp số. $z = -2 + 2i.$

4) $|z + 2i - 3| = |\bar{z} - i - 8|;$

Đáp số. $z = 5 + i.$

5) $|z + 3i + 2| = |z - i + 8|.$

Đáp số. $z = -3 + 2i.$

Bài tập 16. Tìm số phức z có modul nhỏ nhất, lớn nhất biết rằng

1) $|z - 3i + 4| = 5;$

Đáp số. $z = 0, \quad z = -8 + 6i.$

2) $|z - 3i - 4| = 10;$

Đáp số. $z = -3 - 4i, \quad z = 9 + 12i.$

3) $|z - 5 + 12i| = 39;$

Đáp số. $z = -10 + 24i, \quad z = 20 + 48i.$

4) $|z - i + 1| = 2 \cdot \sqrt{2};$

Đáp số. $z = 1 - i, \quad z = -3 + 3i.$

5) $|z - 2 - 2i| = 4 \cdot \sqrt{2};$

Đáp số. $z = -2 - 2i, \quad z = 6 + 6i.$

6) $|z - 2 + 2i| = \sqrt{2};$

Đáp số. $z = 1 - i, \quad z = 3 - 3i.$

7) $|z + 4 + 4i| = \sqrt{2}.$

Đáp số. $z = -3 - 3i, \quad z = -5 - 5i.$

Bài tập 17. Cho số phức z thoả mãn $|z + i| = 3$. Biết tập hợp biểu diễn của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Đáp số. 15.

Bài tập 18. Cho số phức z thoả mãn $|z - 1 + i| = 7$. Biết tập hợp biểu diễn của số phức $w = (3 + 4i)z$ là một đường tròn. Xác định tâm và bán kính đường tròn đó.

Đáp số. Tâm $I(7; 1), R = 35.$

Bài tập 19. Xét số phức z thoả mãn

$$|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}.$$

Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $m + M$.

Đáp số. $\frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}.$

Chương 2

Tiếp tuyến

2.1 Hàm phân thức

Ví dụ 2.1

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc \neq 0$ và $c \neq 0$. Biện luận số tiếp tuyến đi qua điểm $M(m,n)$ đối với đồ thị ($\mathcal{C}$).

Lời giải. Gọi Δ là đường thẳng qua $M(m,n)$ với hệ số góc k . Phương trình Δ có dạng

$$y = k(x - m) + n.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d} = k(x-m) + n, \\ \frac{ad-bc}{(ax+b)^2} = k. \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$(2.1b)$$

Thay k từ phương trình (2.1b) vào phương trình (2.1a), ta thu được phương trình

$$\frac{c(a-cn)x^2 + 2c(b-d)x + adm - bcm - d^2n + bd}{(cx+d)^2} = 0. \quad (2.2)$$

Với điều kiện $cx+d \neq 0$, (2.2) tương đương với

$$c(a-cn)x^2 + 2c(b-d)x + adm - bcm - d^2n + bd = 0. \quad (2.3)$$

Biệt thức của (2.3) là

$$\Delta = -4c(ad-bc)(b+am-dn-cmn).$$

Để ý rằng (2.3) có nghiệm là $-\frac{d}{c}$ khi và chỉ khi

$$\frac{(ad-bc)(d+cm)}{c} = 0 \Leftrightarrow d+cm = 0.$$

Ta có các khả năng sau:

- 1) Qua M vẽ được hai tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi (2.3) có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$. Hay

$$\begin{cases} c(a - cn) \neq 0, & (2.4a) \\ d + cm \neq 0, & (2.4b) \\ -c(ad - bc)(b + am - dn - cmn) > 0. & (2.4c) \end{cases}$$

- (2.4a) có nghĩa là M không thuộc tiệm cận ngang của $(\mathcal{C})$.
- Từ (2.4b) suy ra M không thuộc tiệm cận đứng của $(\mathcal{C})$.
- Từ (2.4c), ta lại xét hai khả năng xảy ra.
 - Nếu $ad - bc > 0$, tức hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định, khi đó

$$b + am - dn - cmn < 0 \Leftrightarrow am + b < n(cm + d),$$

tương đương

$$\begin{cases} cm + d > 0, \\ \frac{am + b}{cm + d} < n \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} cm + d < 0, \\ \frac{am + b}{cm + d} > n. \end{cases}$$

Điều này có nghĩa là, nếu M nằm ở bên phải của tiệm cận đứng, thì M phải nằm phía dưới nhánh đồ thị của $(\mathcal{C})$ ở bên phải của tiệm cận đứng hoặc nếu M nằm ở bên trái của tiệm cận đứng, thì M phải nằm phía trên nhánh đồ thị của $(\mathcal{C})$ ở bên trái của tiệm cận đứng.

- 2) Qua M vẽ được một tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi (2.3) có đúng một nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

◇

Ví dụ 2.2

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Biện luận số tiếp tuyến đi qua điểm $M(a, b)$ đối với đồ thị $(\mathcal{C})$.

Lời giải. Gọi Δ là đường thẳng qua $M(a, b)$ với hệ số góc k . Phương trình Δ có dạng

$$y = k(x - a) + b.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} = k(x-a) + b, & (2.5a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} = k. & (2.5b) \end{cases}$$

Thay k từ phương trình (2.5b) vào phương trình (2.5a), ta thu được phương trình

$$(b-1)x^2 + 2(b+1)x + 1 - 2a + b = 0. \quad (2.6)$$

Số tiếp tuyến đi qua M cũng là số nghiệm khác -1 của phương trình (2.6).

Để ý rằng định thức của (2.6) là

$$\Delta = 8(1 - a + b + ab)$$

và $x = -1$ là nghiệm của (2.6) khi và chỉ khi $a = -1$. Các khả năng xảy ra như sau:

- (2.6) có hai nghiệm phân biệt khác -1 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b - 1 \neq 0, \\ a \neq -1, \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 1, \\ a \neq -1, \\ b(a + 1) > a - 1. \end{cases}$$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} b \neq 1, \\ a > -1, \\ b > \frac{a-1}{a+1} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} b \neq 1, \\ a < -1, \\ b < \frac{a-1}{a+1}. \end{cases}$$

Hệ thứ nhất có nghĩa là M không nằm trên tiệm cận ngang của $(\mathcal{C})$ ($b \neq 1$), và nếu M nằm phía bên phải của đường tiệm cận đứng ($a > -1$), thì M phải nằm phía trên của $(\mathcal{C})$ $\left(b > \frac{a-1}{a+1}\right)$.

Hệ thứ hai có nghĩa là M không nằm trên tiệm cận ngang của $(\mathcal{C})$ ($b \neq 1$), và nếu M nằm phía bên trái của đường tiệm cận đứng ($a < -1$), thì M phải nằm phía dưới của $(\mathcal{C})$ $\left(b < \frac{a-1}{a+1}\right)$.

Từ những điều trên, ta có kết quả là, qua M kẻ được hai tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$ khi và chỉ khi M thuộc miền không bị gạch và không thuộc hai đường tiệm cận của $(\mathcal{C})$.

- Trường hợp 2. Phương trình (2.6) có đúng một nghiệm khác -1 .

– (2.6) là phương trình bậc hai và có nghiệm kép khác -1

$$\begin{cases} b - 1 \neq 0, \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 1, \\ b(a + 1) = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 1, \\ b = \frac{a-1}{a+1} \end{cases}$$

Hệ sau cùng có nghĩa M không thuộc tiệm cận ngang và M thuộc $(\mathcal{C})$.

Ta chỉ cần M thuộc $(\mathcal{C})$ là đương nhiên M không thuộc tiệm cận ngang.

– (2.6) có hai nghiệm phân biệt, trong đó, có một nghiệm là -1 .

$$\begin{cases} b \neq 1, \\ b(a + 1) > a - 1, \\ a = -1. \end{cases}$$

Điều này có nghĩa M thuộc đường tiệm cận đứng của $(\mathcal{C})$ nhưng không trùng với giao điểm của hai tiệm cận.

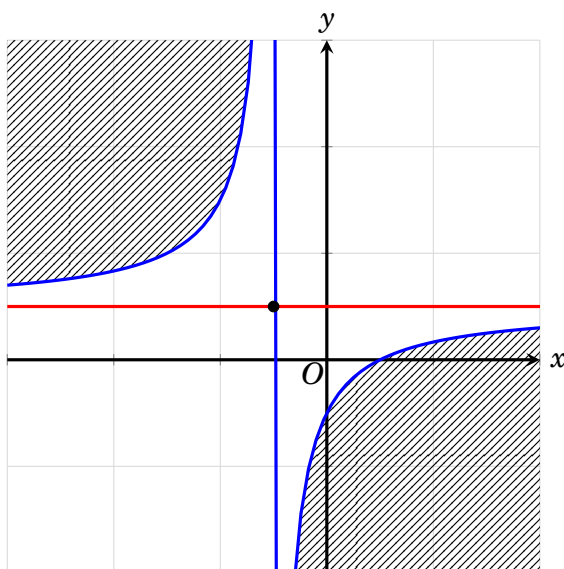
– (2.6) là phương trình bậc nhất và có nghiệm khác -1 . Dẫn đến

$$\begin{cases} b = 1, \\ a \neq -1. \end{cases}$$

Điều này có nghĩa M thuộc đường tiệm cận ngang của $(\mathcal{C})$ nhưng không trùng với giao điểm của hai tiệm cận.

Từ những điều trên, suy ra rằng, qua M kẻ được đúng một tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$ khi và chỉ khi M thuộc $(\mathcal{C})$ hoặc M thuộc một trong các đường tiệm cận của $(\mathcal{C})$ nhưng không trùng với giao điểm của hai tiệm cận.

- Qua M không kẻ được tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$ khi và chỉ khi M thuộc miền bị gạch hoặc M trùng với giao điểm của hai tiệm cận.



◇

Lời bình. Kết quả trên cũng đúng cho hàm số có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc \neq 0$, $c \neq 0$. ♣

Ví dụ 2.3

Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị $(\mathcal{C})$ và điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của $(\mathcal{C})$ qua A . Tính tổng giá trị các phần tử của S .

Lời giải. $(\mathcal{C})$ có phương trình tiệm cận đứng là $x = 1$ và phương trình tiệm cận ngang là $y = -1$. Điểm A thuộc đường thẳng Δ có phương trình $y = 1$, Δ song song với tiệm cận ngang.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi A là giao điểm của đồ thị $(\mathcal{C})$ và Δ hoặc A là giao điểm của đường tiệm cận đứng và Δ .

- Hệ phương trình

$$\begin{cases} y = \frac{-x+2}{x-1}, \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Do đó, tọa độ giao điểm của đồ thị $(\mathcal{C})$ và Δ là $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

- Dễ thấy, tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và Δ là $(1, 1)$.

Như vậy, $a = \frac{3}{2}$ hoặc $a = 1$. Do đó, $S = \left\{\frac{3}{2}, 1\right\}$. Tổng các phần tử của S là $\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$. ◇

Ví dụ 2.4

Cho hàm số $y = \frac{-x-7}{x+1}$ có đồ thị $(\mathcal{C})$.

- 1) Tìm tọa độ các điểm trên đường thẳng $\Delta: y = 2x + 9$ mà từ đó kẻ được một tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$.
- 2) Có bao nhiêu điểm thuộc đường tròn có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

mà từ đó kẻ được một tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$?

Lời giải. 1) $(\mathcal{C})$ có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -1$. Giao điểm hai tiệm cận là $I(-1, -1)$ không thuộc Δ . Các điểm cần tìm chính là giao điểm của Δ và $(\mathcal{C})$ và các tiệm cận.

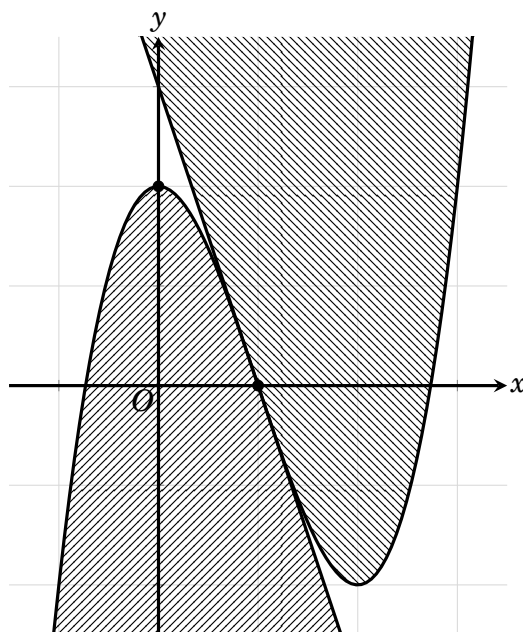
Đáp số. $\{(-4, 1), (-2, 5), (-1, 7), (-5, -1)\}$.

- 2) Đáp số.

$$\{(-4, 1), (-2, 5), (1, -4), (5, -2), (1 - \sqrt{21}, -1), (1 + \sqrt{21}, -1), (-1, 1 - \sqrt{21}), (-1, 1 + \sqrt{21})\}.$$

◇

2.2 Hàm bậc ba



Ta có kết quả sau: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là $(\mathcal{C})$ và $\Delta: y = 3 - 3x$ là tiếp tuyến của $(\mathcal{C})$ tại điểm uốn (điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$). Tập hợp các điểm trong mặt phẳng sao cho từ đó có thể kẻ được

- một tiếp tuyến với $(\mathcal{C})$ là miền bị gạch và điểm uốn của $(\mathcal{C})$;
- hai tiếp tuyến với $(\mathcal{C})$ là những điểm nằm trên $(\mathcal{C})$ hoặc những điểm nằm trên Δ nhưng không kể điểm uốn của $(\mathcal{C})$;
- ba tiếp tuyến với $(\mathcal{C})$ là những điểm thuộc miền không bị gạch.

Ví dụ 2.5

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là $(\mathcal{C})$.

- 1) Qua điểm $P(-2, -18)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$?
- 2) Tìm những điểm trên đường thẳng $(\ell): y = 4x + 2$ mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$. Nghiệm của phương trình $y'' = 0$ là $x = 1$. Khi đó, $y = 0$. Điểm uốn của $(\mathcal{C})$ là $A(1, 0)$.

Tiếp tuyến Δ tại $A(1, 0)$ có phương trình là

$$y = y'(1)(x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = 3 - 3x.$$

- 1) Để ý điểm P thuộc $(\mathcal{C})$ và không là điểm uốn của $(\mathcal{C})$, nên qua A có hai tiếp tuyến đến $(\mathcal{C})$.

- 2) Đường thẳng (ℓ) không đi qua điểm điểm uốn của ($\mathcal{C}$), nên tập hợp những điểm cần tìm là giao điểm của (ℓ) và ($\mathcal{C}$) hoặc giao điểm của (ℓ) và Δ .

Phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = 4x + 2$ có ba nghiệm là $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 4$ và phương trình $4x + 2 = 3 - 3x$ có nghiệm là $x = \frac{1}{7}$.

Vậy có bốn điểm trên đường thẳng (ℓ) mà từ mỗi điểm đó kẻ được hai tiếp tuyến đến ($\mathcal{C}$).

◇

Đồng Nai, năm học 2018 – 2019,
Sắp chữ bằng $\text{\LaTeX}$ bởi Trần Văn Toàn,
Giáo viên trường THPT chuyên Lương Thế Vinh,
Biên Hoà, Đồng Nai.