

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để hàm số $y = |x-1| + |x+3|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải: Chọn B

$$\text{Ta có } y = |x-1| + |x+3| = \begin{cases} 2x+2, & x \geq 1 \\ 4, & -3 \leq x < 1 \\ -2x-2, & x < -3 \end{cases}$$

Trên $1; +\infty$, ta có $y \geq 4$ và dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

Trên $-3; 1$, ta có $y=4$ và có bốn giá trị nguyên của x thuộc khoảng này.

Trên $-\infty; -3$, ta có $y = -2x-2 > 4$.

Vậy $y_{\min} = 4$ và có 5 giá trị nguyên của x để $y_{\min} = 4$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = |x-1| + |x+2| + |x+5| + |x-10|$ và hàm số $g(x) = |x^3 - 3x + m - 1|$. Khi hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $g(x)$ đạt giá lớn nhất bằng 8. Hỏi tổng tất cả các giá trị tuyệt đối của tham số thực m thỏa mãn bài toán bằng bao nhiêu?

A. 12

B. 2

C. 8

D. 7

Lời giải: Chọn A

$$\text{Xét hàm số } f(x) = |x-1| + |x+2| + |x+5| + |x-10| = |x-1| + |-2-x| + |-5-x| + |x-10|$$

$\geq |(x-1) + (-2-x) + (-5-x) + (x-10)| = 4$, dấu bằng xảy ra khi $x-1; -2-x; -5-x; x-10$ có cùng dấu hay $-2 \leq x \leq 1$. Vậy yêu cầu bài toán là hàm số

$g(x) = |x^3 - 3x + m - 1|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 8 với $-2 \leq x \leq 1$. Lập bảng biến thiên, suy ra các trường hợp sau:

Th1: $m-3 \geq 0$. Khi đó, $\max_{x \in [-2; 1]} |g(x)| = g(-1) = m+1 = 8$ hay $m = 7$.

Th2: $m-3 < 0 < m+1$. Khi đó, $\max_{x \in [-2; 1]} |g(x)| = \max \{|g(-1)|, |g(-2)| = |g(1)|\} = \max \{3-m, m+1\} = 8$.

Th3: $m+1 \leq 0$. Khi đó, $\max_{x \in [-2; 1]} |g(x)| = |g(-1)| = |g(1)| = 3-m = 8$ hay $m = -5$.

Câu 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |2x-1| + |3x+2| + |7x-4|$ là $\frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương, phân

số $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó $a+b$ bằng

A. 5.

B. 34.

C. 12.

D. 41.

Lời giải: Chọn B

$$\text{Ta có: } y = |2x-1| + |3x+2| + |7x-4| = \begin{cases} 3-12x & \text{khi } x < -\frac{2}{3} \\ 7-6x & \text{khi } -\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{2} \\ 5-2x & \text{khi } \frac{1}{2} \leq x < \frac{4}{7} \\ 12x-3 & \text{khi } x \geq \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } g(0) = a; g(1) = a + 1; g(2) = a.$$

$$\alpha = \max_{[0;2]} g(x) = \max \{g(0); g(1); g(2)\} = a + 1.$$

$$\beta = \min_{[0;2]} g(x) = \min \{g(0); g(1); g(2)\} = a.$$

$$\text{Trường hợp 1: } a > 0 \Rightarrow \begin{cases} M = a + 1 \\ m = a \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } M \leq 2m \Leftrightarrow a + 1 \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1, a \in [-3; 2] \Rightarrow a \in \{1; 2\}.$$

$$\text{Trường hợp 2: } a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < -1 \Rightarrow \begin{cases} M = -a \\ m = -a - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2a - 2 \Leftrightarrow a \leq -2, a \in [-3; 2] \Rightarrow a \in \{-3; -2\}.$$

$$\text{Trường hợp 3: } a(a + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 0$$

$$\text{Khi đó } M = \max \{|a + 1|, |a|\} = \max \{|a + 1|, |-a|\} \geq \frac{|a + 1| + |-a|}{2} \geq \frac{|a + 1 - a|}{2} = \frac{1}{2} > 0 = m.$$

Như vậy có tất cả 4 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = |x^2 + 2x + m - 4| \text{ trên đoạn } [-2; 1] \text{ bằng } 5?$$

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải: Chọn A

$$\text{Đặt } t = x^2 + 2x - 4, x \in [-2; 1] \Rightarrow t \in [-5; -1]$$

$$\text{Ta có: } y = |t + m|$$

$$\Rightarrow y_{\max} = \max \{|m - 1|; |m - 5|\} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 1| = 5 \\ |m - 1| \geq |m - 5| \\ |m - 5| = 5 \\ |m - 1| < |m - 5| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = 0 \end{cases}.$$

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 26.

B. 13.

C. 14.

D. 27.

Lời giải: Chọn D

$$\text{Xét } u = x^4 - 38x^2 + 120x + 4m \text{ trên đoạn } [0; 2] \text{ ta có } u' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 76x + 120 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \max_{[0;2]} u = \max \{u(0), u(2)\} = \max \{4m, 4m + 104\} = 4m + 104 \\ \min_{[0;2]} u = \min \{u(0), u(2)\} = \min \{4m, 4m + 104\} = 4m \end{cases}$$

Khi đó $\min_{[0;2]} \left\{ \min y \right\} = 0 \Leftrightarrow 4m(4m+104) \leq 0 \Leftrightarrow -26 \leq m \leq 0$. có 27 số nguyên thỏa mãn.

***Chú ý ôn tập lại kiến thức đã học:**

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |u(x)|$ và $u = (u(x))^{2n}$.

Gọi $m = \min_{[a;b]} u(x)$; $M = \max_{[a;b]} u(x)$. Khi đó $\max_{[a;b]} y = \max \{ |M|, |m| \} = \frac{|M| + |m| + ||M| - |m||}{2}$.

Giá trị nhỏ nhất không có công thức nhanh mà phụ thuộc và dấu của M và m

$$m \geq 0 \Rightarrow \min_{[a;b]} y = m$$

$$M \leq 0 \Rightarrow \min_{[a;b]} y = -m$$

$$M.m < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a;b) \left| y(x_0) = 0 \Rightarrow \min_{[a;b]} y = 0 \right.$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 3x^2 + m|$ có bao nhiêu số nguyên m để $\min_{[-1;3]} f(x) \leq 3$.

A. 4.

B. 8.

C. 31.

D. 39.

Lời giải: Chọn D

$$\text{Xét } t = 2x^3 - 3x^2 + m \Rightarrow t' = 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } \min_{[-1;3]} t(x) = m - 5; \max_{[-1;3]} t(x) = m + 27.$$

$$\text{Nếu } m - 5 \geq 0 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = m - 5 \leq 3 \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 8 \Rightarrow m \in \{5; 6; 7; 8\}.$$

$$\text{Nếu } m + 27 \leq 0 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = -(m + 27) \leq 3 \Leftrightarrow -30 \leq m \leq -27 \Rightarrow m \in \{-30; -29; -28; -27\}.$$

$$\text{Nếu } (m - 5)(m + 27) \leq 0 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = 0.$$

Vậy, $m \in \{-30; -29; \dots; 8\}$ có tất cả 39 số nguyên thỏa mãn.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[0;3]} |x^2 - 2x + m| \leq 5$?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải: Chọn B

Đặt $f(x) = x^2 - 2x + m$. là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$

Ta có: $f'(x) = 2x - 2$. Với mọi $x \in [0;3]$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$f(0) = m$$

$$\text{Mặt khác: } f(1) = m - 1.$$

$$f(3) = m + 3$$

$$\text{Ta có: } \max_{[0;3]} |f(x)| = \max \{ |f(0)|; |f(1)|; |f(3)| \}.$$

$$\text{Theo bài: } \max_{[0;3]} |f(x)| \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |f(0)| \leq 5 \\ |f(1)| \leq 5 \\ |f(3)| \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq 5 \\ |m - 1| \leq 5 \\ |m + 3| \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m \leq 5 \\ -5 \leq m - 1 \leq 5 \\ -5 \leq m + 3 \leq 5 \end{cases}.$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m \leq 5 \\ -4 \leq m \leq 6 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}. \\ -8 \leq m \leq 2 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ không lớn hơn 3?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 3.

Lời giải: Chọn D

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x + m$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ có $g'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\max_{[0;3]} f(x) = \max \{|g(0)|, |g(3)|, |g(1)|\} = \max \{|m|, |m+3|, |m-1|\} = \max \{|m+3|, |m-1|\}.$$

$$\max_{[0;3]} f(x) \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+3| \leq 3 \\ |m-1| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m+3 \leq 3 \\ -3 \leq m-1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Các giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán của tham số m là $-2, -1, 0$.

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5; 5]$ để $\min_{1;3} |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2$.

- A. 6. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải: Chọn B

$$\text{Ta có } \min_{1;3} |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2 \Leftrightarrow |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2; \forall x \in 1;3 \quad 1.$$

$$\text{Giải} \quad 1: \quad |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2; \forall x \in 1;3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m \geq 2; \forall x \in 1;3 \\ x^3 - 3x^2 + m \leq -2; \forall x \in 1;3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 \geq 2 - m; \forall x \in 1;3 \\ x^3 - 3x^2 \leq -2 - m; \forall x \in 1;3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \leq \min_{1;3} x^3 - 3x^2 \\ -2 - m \geq \max_{1;3} x^3 - 3x^2 \end{cases} *.$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$ trên $1;3$. Hàm số xác định và liên tục trên $1;3$ mà

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Ta có: } f(1) = -2; f(3) = 0; f(2) = -4.$$

$$\text{Do đó } \max_{1;3} f(x) = 0; \min_{1;3} f(x) = -4. \text{ Từ } * \text{ suy ra } \begin{cases} 2 - m \leq -4 \\ -2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -2 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} m \in [-5; 5] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ nên } m \in \{-5; -4; -3; -2\}.$$

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Đặt $t = x^3 - 3x^2$, với $x \in 1;3 \Rightarrow t \in [-4; 0]$. Khi đó bài toán trở thành $\min_{-4;0} |t + m| \geq 2$.

$$\text{TH1: } -m \leq -4 \Rightarrow \min_{-4;0} |t + m| = |-4 + m| = m - 4 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 6.$$

$$\text{TH2: } -m \geq 0 \Rightarrow \min_{-4;0} |t + m| = |m| = -m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2.$$



Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} m \in -5; 5 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ suy ra $m \in -5; -4; -3; -2$.

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[0;3]} |x^2 - 2x + m| = 4$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

- A. -2. B. 2. C. -4. D. 4.

Lời giải: Chọn A

Đặt $t = x^2 - 2x$. Với $x \in [0; 3] \Rightarrow t \in [-1; 3]$.

Nên $\max_{[0;3]} |x^2 - 2x + m| = \max_{[-1;3]} |t + m| = \max \{|m - 1|; |m + 3|\}$.

$$\max_{[0;3]} |x^2 - 2x + m| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 1| = 4 \\ |m + 3| \leq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5(l) \\ m = -3 \\ m = 1 \\ m = -7(l) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{-3; 1\}.$$

Vậy tổng giá trị các phần tử của S bằng -2.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

- A. Vô số. B. 4. C. 6. D. 5.

Lời giải: Chọn D

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	1	2	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$m - 2$	$m - 4$	m

Ta thấy $\max_{[1;3]} f(x) = f(3) = m$ và $\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = m - 4$.

Ta có $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| = \max \{|m|; |m - 4|\}$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} |m| \leq |m - 4| \\ \max \{|m|; |m - 4|\} = |m - 4| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \leq m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m - 4 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 0 \leq m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m| > |m - 4| \\ \max \{|m|; |m - 4|\} = |m| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 4,$$



mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4\}$.

Vậy, có 5 giá trị nguyên của tham số m .

Vậy **Chọn D**

Câu 14. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 4x$ bằng -1 ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải: Chọn A

$$\text{Ta có ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 2x + m| + 4x \geq -1 & (1) \\ \exists x_0 : |x_0^2 - 2x_0 + m| + 4x_0 = -1 & (2) \end{cases}$$

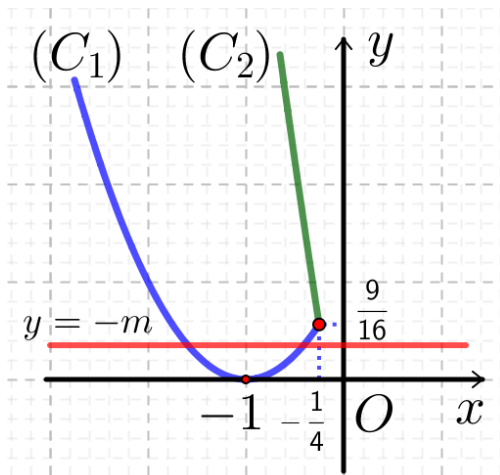
$$(1) \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| \geq -4x - 1$$

Nếu $-4x - 1 < 0 \Rightarrow (2)$ không thỏa mãn.

$$\text{Nếu } -4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x^2 - 2x + m \geq -4x - 1 \\ x^2 - 2x + m \leq 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geq -m & (3) \\ x^2 - 6x - 1 \leq -m & (4) \end{cases}.$$

$$(3), (4). \text{ Xét } (C_1): y = x^2 - 2x + 1, x \leq -\frac{1}{4} \text{ và } (C_2): y = x^2 - 6x - 1, x \leq -\frac{1}{4}.$$



$$+ -m < 0 \Rightarrow (2) \text{ không thỏa mãn.}$$

$$+ -m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ thỏa mãn.}$$

$$+ -m \in \left(0; \frac{9}{16}\right] \text{ thì } S_1 = (-\infty; x_1] \cup \left[x_2; -\frac{1}{4}\right], S_2 = \emptyset \Rightarrow S_1 \cup S_2 \not\subset \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$$

$$+ \text{Tương tự } -m \in \left(\frac{9}{16}; +\infty\right) \text{ thì } S_1 \cup S_2 \not\subset \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right].$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 15. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m bằng

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 5

Lời giải: Chọn B

Cách 1:

$$\text{Xét hàm số } y = f(x) = x^2 + 2x + m - 4 \text{ trên } [-1; 2]$$





$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in [-2; 1]$$

$$f(-2) = m - 4; f(1) = m - 1; f(-1) = m - 5$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2;1]} y = \max\{|m-1|; |m-4|; |m-5|\}$$

Biện luận:

$$\text{TH1: } m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4$$

$$\max_{[-2;1]} y = \max\{|m-1|; |m-4|; |m-5|\} = m - 1 \geq 3 \quad (1)$$

$$\text{TH2: } m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$$

$$\max_{[-2;1]} y = \max\{|m-1|; |m-4|; |m-5|\} = 5 - m \geq 4 \quad (2)$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} m - 1 \geq 0 \\ m - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$$

$$\Rightarrow \max_{[-2;1]} y = \max\{m - 1; 5 - m\}$$

$$\text{i) Xét } 3 \leq m \leq 4 \Rightarrow m - 1 \geq 5 - m$$

$$\text{Do đó } \max_{[-2;1]} y = \max\{m - 1; 5 - m\} = m - 1 \geq 2 \quad (3)$$

$$\text{ii) Xét } 1 \leq m \leq 3 \Rightarrow 5 - m \geq m - 1$$

$$\text{Do đó } \max_{[-2;1]} y = \max\{m - 1; 5 - m\} = 5 - m \geq 2 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4)

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi giá trị của tham số $m = 3$.

Cách 2: Thử với $m = 1, 3, 4, 5$ rút ra kết luận.

Câu 16. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$.

Lời giải: Chọn C

Xét $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$ trên đoạn $[-2; 1]$.

Đạo hàm $g'(x) = 2x + 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in [-2; 1]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} g(-2) = m - 4 \\ g(-1) = m - 5 \\ g(1) = m - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \max_{[-2;1]} g(x) = m - 1 \\ \min_{[-2;1]} g(x) = m - 5 \end{cases}$$

$$\text{Cách 1. Suy ra } \max_{[-2;1]} f(x) = \max\{|m-1|, |m-5|\} \geq \frac{(m-1) + (5-m)}{2} = 2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m - 1 = 5 - m \Leftrightarrow m = 3.$$

$$\text{Cách 2. • Nếu } (m-1) + (m-5) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3 \text{ thì } \max_{[-2;1]} f(x) = m - 1 \geq 2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m = 3.$$

$$\bullet \text{ Nếu } (m-1) + (m-5) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 3 \text{ thì } \max_{[-2;1]} f(x) = -(m-5) \geq 2.$$



Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 3$.

Câu 17. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 + 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 10. Số phần tử của S là:

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải: Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 + 3x + m$ trên đoạn $[0; 2]$

$$y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in [0; 2].$$

$$\text{Vậy: } \max_{[0; 2]} y = \max_{[0; 2]} |f(x)| = \max \{ |f(0)|; |f(2)| \} = \max \{ |m+14|; |m| \}$$

$$\text{TH1. Với } \max_{[0; 2]} y = |m+14|, \text{ ta có } \begin{cases} |m+14| \geq |m| \\ |m+14| = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+14| \geq |m| \\ m = -4 \\ m = -14 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$$

$$\text{TH2. Với } \max_{[-1; 2]} y = |m|, \text{ ta được } \begin{cases} |m| \geq |m+14| \\ |m| = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \geq |m+14| \\ m = -10 \\ m = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = -10$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị m để hàm số $f(x) = |x^2 - 4x + m|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 4]$ bằng 6?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải: Chọn B

$$\text{Đặt } t = x^2 - 4x.$$

$$\text{Vì } x \in [1; 4] \Rightarrow t \in [-4; 0]. \text{ Ta được hàm số: } f(t) = |t + m|, t \in [-4; 0].$$

Vì hàm số $g(t) = t + m$ là hàm số bậc nhất nên $f(t) = |t + m|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong 2 điểm mút -4 hay 0 và $-m \notin [-4; 0]$.

$$\text{Do đó: } \min_{[1; 4]} f(x) = \min_{[-4; 0]} f(t) = \min \{ |-4 + m|; |m| \}.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} |-4 + m| \geq |m| \\ |m| = 6 \\ -m \notin [-4; 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 10 \end{cases} \cdot \text{Chọn B}$$

Câu 19. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

- A. -1. B. 2. C. -2. D. 1.

Lời giải: Chọn B

$$\text{+) Đặt } t = (x-1)^2, \text{ với } x \in [-1; 2] \text{ thì } t \in [0; 4], \text{ hàm số trở thành: } y = |t + m - 1|$$



+) Hàm số $y = t + m - 1$ luôn đồng biến trên đoạn $0; 4$ nên $\max_{0;4} y = \max |m-1|; |m+3|$

Nếu $|m-1| \geq |m+3| \Leftrightarrow m \leq -1$ thì $|m-1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} m = 6 & (\text{ktm}) \\ m = -4 & (\text{tm}) \end{cases}$

Nếu $|m-1| < |m+3| \Leftrightarrow m > -1$ thì $|m+3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} m = -8 & (\text{ktm}) \\ m = 2 & (\text{tm}) \end{cases}$

Đáp số: có 2 giá trị của tham số m

Câu 20. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = 1$. B. $a = 2$. C. Một giá trị khác. D. $a = 3$.

Lời giải: Chọn D

Xét $y = x^2 + 2x + a - 4 \Rightarrow y' = 2x + 2$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Ta có $(x+1)^2 + a - 5 \geq a - 5$

Vì $x \in [-2; 1] \Rightarrow (x+1)^2 + a - 5 \leq (1+1)^2 + a - 5 = a - 1$

Ta có $M = \max_{[-2;1]} y = \max \{|a-5|; |a-1|\}$

Lại có $2M = |a-5| + |a-1| \geq |5-a+a-1| = 4 \Rightarrow M \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |a-5| = |a-1| \\ (5-a)(a-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$, Chọn D

Câu 21. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng các phần tử của S bằng

Câu 22. A. 108. B. 120. C. 210. D. 136.

Lời giải: Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $g'(x) = x^3 - 28x + 48$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \notin [0; 2] \\ x = 2 \\ x = 4 \notin [0; 2] \end{cases}$

Bảng biến thiên:

Dựa vào BBT, để $\max_{[0;2]} |g(x)| \leq 30 \Rightarrow \begin{cases} g(0) \geq -30 \\ g(2) \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-30 \geq -30 \\ m+14 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 2; \dots; 15; 16\} \rightarrow$ tổng các phần tử của S là 136.

Câu 23. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất.

Giá trị của m thuộc khoảng?

A. $(0; 1)$. B. $[-1; 0]$. C. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.



Lời giải: Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$, $g'(x) = 3x^2 - 3$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Trên $[0; 2]$ ta có $g(0) = 2m - 1$; $g(1) = 2m - 3$; $g(2) = 1 + 2m$.

Khi đó $\max_{[0; 2]} y = \max \{|2m - 3|; |2m + 1|\} = \frac{|2m - 3 + 2m + 1|}{2} + \frac{|2m - 3 - (2m + 1)|}{2} = |2m - 1| + 1 \geq 1$

Suy ra để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất thì

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Câu 24. Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x + 1} \right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $M \geq 2m$.

A. 15.

B. 14.

C. 15.

D. 16.

Lời giải: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^4 + ax + a}{x + 1}$. Ta có $f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$

Do đó $f(1) \leq f(x) \leq f(2), \forall x \in [1; 2]$ hay $a + \frac{1}{2} \leq f(x) \leq a + \frac{16}{3}, \forall x \in [1; 2]$

Ta xét các trường hợp sau:

Th1: Nếu $a + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}$ thì $M = a + \frac{16}{3}; m = a + \frac{1}{2}$

Theo đề bài $a + \frac{16}{3} \geq 2\left(a + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \leq \frac{13}{3}$

Do a nguyên nên $a \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Th2: Nếu $a + \frac{16}{3} < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{16}{3}$ thì $m = -\left(a + \frac{16}{3}\right); M = -\left(a + \frac{1}{2}\right)$

Theo đề bài $-\left(a + \frac{1}{2}\right) \geq -2\left(a + \frac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{61}{6}$

Do a nguyên nên $a \in \{-10; -9; \dots; -6\}$.

Th3: Nếu $a + \frac{1}{2} \leq 0 \leq a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow -\frac{16}{3} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ thì $M \geq 0; m = 0$

Do a nguyên nên $a \in \{-5; -4; \dots; -1\}$

Vậy có 15 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25. Cho biết M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 2ax + b|$ trên đoạn $[-1; 2]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất có thể thì giá trị của biểu thức $(M + a + 3b)$ bằng:

A. $\frac{9}{8}$.

B. -2.

C. 3.

D. -1.

Lời giải: Chọn D

Ta có: $M = \max_{x \in [-1; 2]} f(x)$ nên suy ra:



$$+ M \geq f(-1) = |2a + b + 1| (1)$$

$$+ M \geq f(2) = |4 - 4a + b| (2)$$

$$+ M \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{4} - a + b\right| \Leftrightarrow 2M \geq \left|-\frac{1}{2} + 2a - 2b\right| (3)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3) theo vế ta có:

$$4M \geq |2a + b + 1| + |4 - 4a + b| + \left|-\frac{1}{2} + 2a - 2b\right| \geq \left|2a + b + 1 + 4 - 4a + b - \frac{1}{2} + 2a - 2b\right| = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow M \geq \frac{9}{8} (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi dấu "=" ở (1), (2), (3) cùng đồng thời xảy ra và sao cho các giá trị

$(1 + 2a + b), (4 - 4a + b), \left(-\frac{1}{2} + 2a - 2b\right)$ cùng dấu với nhau.

$$\text{Tức điều kiện dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} \begin{cases} 1 + 2a + b = M = \frac{9}{8} \\ 4 - 4a + b = M = \frac{9}{8} \\ -\frac{1}{2} + 2a - 2b = M = \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{7}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + 2a + b = M = -\frac{9}{8} \\ 4 - 4a + b = M = -\frac{9}{8} \\ -\frac{1}{2} + 2a - 2b = M = -\frac{9}{8} \end{cases} \quad (VN) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \left|x^2 - x - \frac{7}{8}\right|$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của M là: $\frac{9}{8}$ khi $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{7}{8}$

$$\text{Vậy } M + a + 3b = -1.$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = |x^6 + x^3 + m| - 2x^3$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. 2.

D. 0.

Lời giải: Chọn B

Tập xác định: $\mathbb{R}$

$$y = f(x) = |x^6 + x^3 + m| - 2x^3.$$

Đặt $t = x^3$ hàm số ban đầu trở thành hàm số $y = g(t) = |t^2 + t + m| - 2t$.

Tam thức bậc hai $h(t) = t^2 + t + m$ có biệt thức $\Delta = 1 - 4m$. Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\Delta = 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4} \Rightarrow h(t) = t^2 + t + m$ có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 ($t_1 < t_2$).



Vì $t_1 + t_2 = -1 < 0$ nên $t_1 < t_2 < 0$ hoặc $t_1 < 0 \leq t_2$.

+) Nếu $t_1 < t_2 < 0$ thì $P = t_1 t_2 = m > 0$ kết hợp với $m < \frac{1}{4}$ ta có $0 < m < \frac{1}{4}$. Khi đó.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{3}{4} + m\right| - 1 < 0.$$

+) Nếu $t_1 < 0 \leq t_2$ thì $g(t_2) = -2t_2 \leq 0$.

Suy ra trong trường hợp này hàm số $y = g(t)$ không thể có giá trị nhỏ nhất bằng 1 trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $\Delta = 1 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4} \Rightarrow h(t) = t^2 + t + m \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Khi đó, $y = g(t) = t^2 + t + m - 2t = t^2 - t + m = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + m - \frac{1}{4} \geq m - \frac{1}{4}, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{t \in \mathbb{R}} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = m - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Theo đề } \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{4} \\ m - \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{4} \\ m = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}.$$

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right| \text{ trên đoạn } [1; 2] \text{ bằng 2?}$$

A. 3

B. 4

C. 1

D. 2

Lời giải: Chọn D

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x+1}.$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = \left(\frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right)' = \frac{(2x+m)(x+1) - (x^2 + mx + m)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dễ thấy trên đoạn $[1; 2]$ thì $g(x)$ đồng biến và $g(1) = \frac{1+2m}{2}; g(2) = \frac{4+3m}{3}$

Ta xét 3 trường hợp

TH1: Đồ thị của hàm số $g(x)$ trên $[1; 2]$ nằm phía trên trục hoành

$$\text{Suy ra } g(1) \cdot g(2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+2m}{2} \cdot \frac{4+3m}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{-4}{3} \\ m \geq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \max f(x) = g(2) \Leftrightarrow g(2) = 2 \Leftrightarrow \frac{4+3m}{3} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

TH2: Đồ thị của hàm số $g(x)$ trên $[1; 2]$ nằm phía dưới trục hoành



$$\text{Suy ra } g(1).g(2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+2m}{2} \cdot \frac{4+3m}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{-4}{3} \\ m \geq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \max f(x) = -g(1) \Leftrightarrow -g(1) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1+2m}{2} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{-5}{2}$$

TH3: Đồ thị của hàm số $g(x)$ trên $[1; 2]$ cắt trục hoành

$$\text{Suy ra } g(1).g(2) < 0 \Leftrightarrow \frac{1+2m}{2} \cdot \frac{4+3m}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} < m < \frac{-1}{2}$$

$$\text{Khi đó } \max f(x) = g(2) \text{ hoặc } \max f(x) = -g(1)$$

$$\square \quad \max f(x) = g(2) \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$\square \quad \max f(x) = -g(1) \Leftrightarrow m = \frac{-5}{2}$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 28. Đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành tại các điểm M, N, P có hoành độ lần lượt là m, n, p ($m < n < p$). Khi $f(1) = -\frac{3}{4}$ và $f'(-1) = 1$ thì

$\max_{[m; p]} |f(x)|$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. 4.

C. 0.

D. 1.

Lời giải: Chọn D

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

Vì đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành nên đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ suy ra $f(0) = 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -\frac{3}{4} \\ f'(-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = -\frac{3}{4} \\ -4a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \text{ suy ra } m = -2, n = 0, p = 2.$$

$$\text{Vậy } \max_{[m; p]} |f(x)| = \max_{[-2; 2]} |f(x)|.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = |f(x)| = \left| \frac{1}{4}x^4 - x^2 \right| \text{ trên } [-2; 2].$$



$$g'(x) = \frac{(x^3 - 2x)\left(\frac{1}{4}x^4 - x^2\right)}{\left|\frac{1}{4}x^4 - x^2\right|}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ và } g'(x) \text{ không xác định tại các điểm } x = 0, x = \pm 2.$$

$$g(-2) = g(2) = g(0) = 0, g(\sqrt{2}) = g(-\sqrt{2}) = 1$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-2;2]} g(x) = 1$$

$$\text{Vậy } \max_{[m;p]} |f(x)| = 1.$$

Câu 29. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a|$ trên đoạn $-3; 2$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in -2019; 2019$ để $2m \geq M$.

A. 3209.

B. 3213.

C. 3215.

D. 3211.

Lời giải: Chọn B

Cách 1

Xét $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a$ với $x \in [-3; 2]$.

$$g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g(0) = a; g(-1) = -5 + a; g(2) = -32 + a; g(-3) = 243 + a.$$

Bảng biến thiên $g(x)$

x	-3	-1	0	2	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	243+a	-5+a	a	-32+a	

Có $\max_{[-3;2]} |g(x)| = \max\{|g(-3)|, |g(-1)|, |g(0)|, |g(2)|\}$ nên xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a \geq 32$. Khi đó $M = 243 + a$; $m = -32 + a$.

$$\text{Ta có: } M \leq 2m \Leftrightarrow 243 + a \leq 2(a - 32) \Leftrightarrow a \geq 307. \quad \text{Với } \begin{cases} a \in (-2019; 2019) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow a \in \{307; 308; \dots; 2017; 2018\}$. Vậy trong trường hợp này có 1712 giá trị a .

Trường hợp 2: $a + 243 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -243$. Khi đó $M = 32 - a$; $m = -(243 + a)$.

$$\text{Ta có } M \leq 2m \Leftrightarrow 32 - a \leq -2(243 + a) \Leftrightarrow a \leq -518. \quad \text{Với } \begin{cases} a \in (-2019; 2019) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow a \in \{-2018; -2017; \dots; -519; -518\}$. Vậy trong trường hợp này có 1501 giá trị a .

Trường hợp 3: $-243 < a < 32$. Khi đó $(243 + a)(a - 32) < 0$ nên $M > 0; m = 0$. Vậy trong trường



hợp này 0 có giá trị a để $M \leq 2m$.

Tóm lại có 3213 giá trị a cần tìm.

Cách 2

Đặt $t = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

Ta xét hàm xét $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ liên tục trên $[-3; 2]$. Có

$$g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \\ x = 2 \end{cases}$$

$g(0) = 0; g(-1) = -5; g(2) = -32; g(-3) = 243$. Suy ra $t \in [-32; 243]$ với $x \in [-3; 2]$.

Đặt $f(t) = |t + a|$, khi $t \in [-32; 243]$ thì $f(t)$ liên tục trên $[-32; 243]$ nên

$$\max_{[-32; 243]} |f(t)| = \max \{|-32 + a|, |243 + a|\}.$$

Trường hợp 1: $a \geq 32$. Khi đó $M = 243 + a; m = -32 + a$.

Ta có: $M \leq 2m \Leftrightarrow 243 + a \leq 2(a - 32) \Leftrightarrow a \geq 307$. Với $\begin{cases} a \in (-2019; 2019) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \{307; 308; \dots; 2017; 2018\}$. Vậy trong trường hợp này có 1712 giá trị a.

Trường hợp 2: $a + 243 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -243$. Khi đó $M = 32 - a; m = -(243 + a)$.

Ta có $M \leq 2m \Leftrightarrow 32 - a \leq -2(243 + a) \Leftrightarrow a \leq -518$. Với $\begin{cases} a \in (-2019; 2019) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \{-2018; -2017; \dots; -519; -518\}$. Vậy trong trường hợp này có 1501 giá trị a.

Trường hợp 3: $-243 < a < 32$. Khi đó $(243 + a)(a - 32) < 0$ nên $M > 0; m = 0$. Vậy trong trường hợp này 0 có giá trị a để $M \leq 2m$.

Tóm lại có 3213 giá trị a cần tìm.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x + a|$. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc $[-4; 4]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 4. B. 6. C. 7. D. 5.

Lời giải: Chọn C

Đặt $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

Vì $x \in [0; 2] \Rightarrow g(x) \in [a; a+1] \Rightarrow \max_{[0; 2]} f(x), \min_{[0; 2]} f(x) \in \{|a|; |a+1|\}$.

TH1: $|a+1| \geq |a| \Rightarrow M = |a+1|; m = |a|$.

Theo giả thiết, ta có: $M \leq 2m \Leftrightarrow |a+1| \leq 2|a|$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} |a+1| \geq |a| \\ |a+1| \leq 2|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1 \geq 0 \\ 3a^2 - 2a - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{1}{2} \\ a \leq -\frac{1}{3} \vee a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq a \leq -\frac{1}{3} \\ a \geq 1 \end{cases}$.

TH2: $|a+1| \leq |a| \Rightarrow M = |a|; m = |a+1|$.

Theo giả thiết, ta có: $M \leq 2m \Leftrightarrow |a| \leq 2|a+1|$.



Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} |a+1| \leq |a| \\ |a| \leq 2|a+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1 \leq 0 \\ 3a^2+8a+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -\frac{1}{2} \\ a \leq -2 \vee a \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} \leq a \leq -\frac{1}{2} \\ a \leq -2 \end{cases}$$

Kết hợp 2 TH $\Rightarrow a \leq -2 \vee -\frac{2}{3} \leq a \leq -\frac{1}{2} \vee a \geq 1$.

Mà $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in [-4; 4] \end{cases} \Rightarrow a \in \{-4; -3; -2; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 31. Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Gọi m là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) \leq m$. Khi đó m bằng

A. 8. B. 4. C. 3. D. 7.

Lời giải: Chọn D

Đặt $x = 2t$.

Ta có $x \in [-2; 2] \Leftrightarrow t \in [-1; 1]$.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |4at^2 + 2bt + c| = |2f(t) + 2at^2 - c| = |2f(t) + f(1) + f(-1)t^2 - 2ct^2 - c| \\ &\leq |2f(t)| + |f(1) + f(-1)|t^2 + 2|f(0)|t^2 + |f(0)| \leq 7. \end{aligned}$$

Suy ra $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) \leq 7$.

Chọn $f(x) = 2x^2 - 1$ thì $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$ và $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) = 7$.

Do đó $m = 7$.

Câu 32. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, tính $a + 2b$.

A. 7. B. -5. C. -4. D. -6.

Lời giải: Chọn C

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1 - a + b| \\ M \geq |9 + 3a + b| \\ M \geq |1 + a + b| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b|$$

$$\geq |1 - a + b + 9 + 3a + b + 2(-1 - a - b)| \Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2.$$

Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1 - a + b| = |9 + 3a + b| = |-1 - a - b| = 2$ và $1 - a + b, 9 + 3a + b, -1 - a - b$ cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = 2 \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$.

Ngược lại, khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 2x - 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 3] \Rightarrow M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2$.

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$. Ta có: $a + 2b = -4$.

Câu 33. Cho hai số thực x, y thỏa mãn:

$$\log_{\sqrt{3}}(y^2 + 8y + 16) + \log_2(5 - x)(1 + x) = 2\log_3 \frac{5 + 4x - x^2}{3} + \log_2(2y + 8)^2.$$

Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - m \right|$ không vượt quá 10. Hỏi S có bao nhiêu tập con không phải là tập rỗng?

- A. 2047. B. 16383. C. 16384. D. 32.

Lời giải: Chọn B

Điều kiện: $y \neq -4; -1 < x < 5$.

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}(y^2 + 8y + 16) + \log_2(5 - x)(1 + x) = 2\log_3 \frac{-x^2 + 4x + 5}{3} + \log_2(2y + 8)^2$ (1)

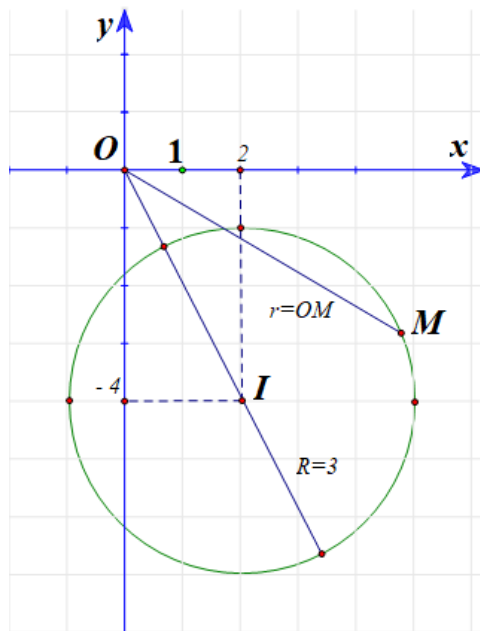
$$\Leftrightarrow 2\log_3(y + 4)^2 + \log_2(-x^2 + 4x + 5) = 2\left[\log_3(-x^2 + 4x + 5) - 1\right] + \log_2\left[4(y + 4)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(y + 4)^2 - \log_2(y + 4)^2 = 2\log_3(-x^2 + 4x + 5) - \log_2(-x^2 + 4x + 5).$$

Xét hàm số $f(t) = 2\log_3 t - \log_2 t, t > 0$, ta có: $f'(t) = \frac{2}{t \ln 3} - \frac{1}{t \ln 2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{2 \ln 2 - \ln 3}{\ln 2 \cdot \ln 3} > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến với $t > 0$, suy ra: $(2) \Leftrightarrow (y + 4)^2 = -x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$

$\Rightarrow$ Tập hợp các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn là đường tròn (C) tâm là $I(2; -4)$ và bán kính $R = 3$ bỏ bớt 2 điểm $(-1; -4), (5; -4)$.



Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đường tròn (C) $\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$ là khoảng cách từ M đến gốc O .

Vì $IO = 2\sqrt{5} > 3$ nên O nằm ngoài (C) và ta có:

$$2\sqrt{5} - 3 \leq r \leq 2\sqrt{5} + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} - 3 - m \leq r - m \leq 2\sqrt{5} + 3 - m$$

$$\Rightarrow \text{Với } P = |r - m|, \max P = \max \left\{ \left| 2\sqrt{5} - 3 - m \right|, \left| 2\sqrt{5} + 3 - m \right| \right\}$$



$$\Rightarrow \text{Để thỏa mãn bài toán ta phải có: } \begin{cases} |2\sqrt{5}-3-m| \leq 10 \\ |2\sqrt{5}+3-m| \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leq 2\sqrt{5}-3-m \leq 10 \\ -10 \leq 2\sqrt{5}+3-m \leq 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{5}-13 \leq m \leq 2\sqrt{5}+7 \\ 2\sqrt{5}-7 \leq m \leq 13+2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{5}-7 \leq m \leq 2\sqrt{5}+7.$$

Ta có: $2\sqrt{5}-7 \approx -2,5; 2\sqrt{5}+7 \approx 11,5 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; \dots; 11\} \Rightarrow$ Tập S có 14 phần tử $\Rightarrow$ Số tập con khác rỗng của tập S là: $2^{14}-1=16383$.

Câu 34. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2;4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4. B. 36. C. 140. D. 0.

Lời giải: Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m$ có $g'(x)=3x^2-6x$. Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ trên $[-2;4]$ là:

$$\max_{x \in [-2;4]} y = \max \{y(0); y(-2); y(2); y(4)\} = \max \{|m|; |m-4|; |m-20|; |m+16|\}.$$

Trường hợp 1: Giả sử $\max y = |m| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m=50 \\ m=-50 \end{cases}$.

Với $m=50$ thì $|m+16|=66 > 50$.

Với $m=-50$ thì $|m-20|=70 > 50$.

Trường hợp 2: Giả sử $\max y = |m-4| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m=54 \\ m=-46 \end{cases}$.

Với $m=54 \Rightarrow |m|=54 > 50$.

Với $m=-46$ thì $|m-20|=66 > 50$.

Trường hợp 3: Giả sử $\max y = |m-20| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m=70 \\ m=-30 \end{cases}$

Với $m=70$ thì $|m+16|=86 > 50$.

Với $m=-30$ thì $|m+16|=14 < 50, |m|=30 < 50; |m-4|=34 < 50$.

Trường hợp 4: Giả sử $\max y = |m+16| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m=34 \\ m=-66 \end{cases}$.

Với $m=34$ thì $|m|=34 < 50, |m-4|=30 < 50, |m-20|=14 < 50$.

Với $m=-66$ thì $|m|=66 > 50$.

Vậy $S \in \{-30; 34\}$. Do đó tổng các phần tử của S là: $-30+34=4$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=|3x^3-9x^2+12x+m+2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-20;20]$ sao cho với mọi số thực $a, b, c \in [1;3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

A. 20.

B. 27.

C. 25.

D. 4.

Lời giải: Chọn C

+ Xét hàm số $y = g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m - 7$

$$g'(x) = 6x^2 - 12x + 12$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow g(1) = m-2 \\ x=2 \Rightarrow g(2) = m-3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		0	-	0	+
$g(x)$		$m-2$	$m-3$	$m+2$	

$f(a); f(b); f(c)$ là ba cạnh của một tam giác $\begin{cases} f(a) + f(b) > f(c) \\ f(b) + f(c) > f(a) \\ f(a) + f(c) > f(b) \end{cases}, \forall a, b, c \in \{1; 3\}$

$$\Leftrightarrow 2 \min_{1;3} f(x) > \max_{1;3} f(x)$$

+ TH1: $m-3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$

* $\Leftrightarrow 2(m-3) > m+2 \Leftrightarrow m > 8 \Rightarrow m \in \{9; 10; \dots; 20\}$ có 12 giá trị của m .

+ TH2: $m+2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$

* $\Leftrightarrow 2(-m-2) > 3-m \Leftrightarrow m < -7 \Rightarrow m \in \{-8; -9; \dots; -20\}$ có 13 giá trị của m .

Vậy có tất cả 25 giá trị của m .

Câu 36. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x-2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. $-\frac{8}{3}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải: Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x-2} = x + 2 + \frac{4}{x-2} - m$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Có $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Khi đó $f(-1) = -\frac{1}{3} - m$; $f(0) = -m$; $f(1) = -1 - m$.

+ Nếu $-1 - m \geq 0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x-2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng $-m$.

Suy ra $-m = 3 \Leftrightarrow m = -3$.



+ Nếu $\begin{cases} -m > 0 \\ -1-m < 0 \\ -m \geq 1+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > -1 \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq -\frac{1}{2}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x-2} \right|$ trên

đoạn $[-1;1]$ bằng $-m$. Suy ra $-m=3 \Leftrightarrow m=-3$.

+ Nếu $\begin{cases} -m > 0 \\ -1-m < 0 \\ -m < 1+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > -1 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x-2} \right|$ trên

đoạn $[-1;1]$ bằng $1+m$. Suy ra $1+m=3 \Leftrightarrow m=2$.

+ Nếu $-m < 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x-2} \right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng

$1+m$. Suy ra $1+m=3 \Leftrightarrow m=2$.

Vậy $\begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$

Câu 37. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

- A. 3. B. 4. C. -4. D. 2.

Lời giải: Chọn C

Ta có: $\begin{cases} M \geq |f(-1)| = |b-a+1|; M \geq |f(3)| = |b+3a+9| & (1) \\ M \geq |f(1)| = |b+a+1| \Rightarrow 2M \geq |-2b-2a-2| & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2), kết hợp với $|x| + |y| + |z| \geq |x+y+z|$, ta được:

$$4M \geq |b-a+1| + |b+3a+9| + |-2b-2a-2| \geq |b-a+1+b+3a+9-2b-2a-2| = 8$$

$\Leftrightarrow M \geq 2$. Vậy $M \geq 2$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |b-a+1| = 2 \\ |b+3a+9| = 2 \text{ và } b-a+1; b+3a+9; -2b-2a-2 \text{ cùng dấu.} \\ |b+a+1| = 2 \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a+2b = 4$.

Câu 38. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \sqrt{4-x^2} + x - \frac{1}{2} \right| + m$ là 18. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $5 < m < 10$. B. $10 < m < 15$. C. $15 < m < 20$. D. $0 < m < 5$.

Lời giải: Chọn C

Cách 1: $y = \left| \sqrt{4-x^2} + x - \frac{1}{2} \right| + m$, TXĐ: $[-2;2]$. Đặt $x = 2\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Xét biểu thức $A = \left| \sqrt{4-4\sin^2 t} + 2\sin t - \frac{1}{2} \right| = \left| 2\cos t + 2\sin t - \frac{1}{2} \right| = \left| 2\sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \right|$



$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \left(t + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq 2\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \leq 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{nên } 0 \leq \left|2\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $t = -\frac{\pi}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\sqrt{4-x^2} + x - \frac{1}{2}\right| + m$ là $\frac{5}{2} + m$

Theo giả thiết $\frac{5}{2} + m = 18$ nên $m = 15,5$.

Vậy $15 < m < 20$.

Cách 2:

Xét $f(x) = \sqrt{4-x^2} + x - \frac{1}{2}$, Tập xác định $D = [-2; 2]$.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x, x \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên

x	-2	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{-1+4\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên có $0 \leq |f(x)| \leq \frac{5}{2}$.

$$\Rightarrow y = |f(x)| + m \leq \frac{5}{2} + m.$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [-2; 2]} y = \frac{5}{2} + m, \text{ khi } x = \sqrt{2}, \text{ theo giả thiết có } \max_{x \in [-2; 2]} y = 18.$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} + m = 18 \Rightarrow m = \frac{31}{2} = 15,5. \text{ Vậy } 15 < m < 20.$$

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = |x^6 + x^3 + m| - 2x^3$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. 2.

D. 0.

Lời giải: Chọn B

Tập xác định: $\mathbb{R}$

$$y = f(x) = |x^6 + x^3 + m| - 2x^3.$$



Đặt $t = x^3$ hàm số ban đầu trở thành hàm số $y = g(t) = |t^2 + t + m| - 2t$.

Tam thức bậc hai $h(t) = t^2 + t + m$ có biệt thức $\Delta = 1 - 4m$. Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\Delta = 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4} \Rightarrow h(t) = t^2 + t + m$ có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 ($t_1 < t_2$).

Vì $t_1 + t_2 = -1 < 0$ nên $t_1 < t_2 < 0$ hoặc $t_1 < 0 \leq t_2$.

+) Nếu $t_1 < t_2 < 0$ thì $P = t_1 t_2 = m > 0$ kết hợp với $m < \frac{1}{4}$ ta có $0 < m < \frac{1}{4}$. Khi đó.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{3}{4} + m\right| - 1 < 0.$$

+) Nếu $t_1 < 0 \leq t_2$ thì $g(t_2) = -2t_2 \leq 0$.

Suy ra trong trường hợp này hàm số $y = g(t)$ không thể có giá trị nhỏ nhất bằng 1 trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $\Delta = 1 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4} \Rightarrow h(t) = t^2 + t + m \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Khi đó, $y = g(t) = t^2 + t + m - 2t = t^2 - t + m = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + m - \frac{1}{4} \geq m - \frac{1}{4}, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{t \in \mathbb{R}} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = m - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Theo đề } \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{4} \\ m - \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{4} \\ m = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}.$$

Câu 40. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm

số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải: Chọn D

Đặt $f(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x + 1}$, ta có hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1; 2]$.

Có: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$.

Suy ra: $\max_{[1; 2]} f(x) = f(2) = \frac{4 + 3m}{3}; \min_{[1; 2]} f(x) = f(1) = \frac{1 + 2m}{2}$.

Do đó $\max_{[1; 2]} |f(x)| = \max\{|f(2)|; |f(1)|\}$. Theo bài ta có: $\begin{cases} |f(2)| = 2 \\ |f(1)| \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} |f(1)| = 2 \\ |f(2)| \leq 2 \end{cases}$

Trường hợp 1:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} |f(2)| = 2 \\ |f(1)| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{4 + 3m}{3} \right| = 2 \\ \left| \frac{1 + 2m}{2} \right| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \vee m = -\frac{10}{3} \\ -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

Trường hợp 2:



Ta có:
$$\begin{cases} |f(1)| = 2 \\ |f(2)| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{1+2m}{2} \right| = 2 \\ \left| \frac{4+3m}{3} \right| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \vee m = -\frac{5}{2} \\ -\frac{10}{3} \leq m \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}.$$

Vậy có giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán. Do đó tập S có hai phần tử.

