SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH LONG **ĐỀ CHÍNH THỨC**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 CẤP TỈNH NĂM HỌC 2018 – 2019 Môn thi: TOÁN Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*)

Bài 1. (4.0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin x+\cos x+2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$.

Bài 2. (3.0 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số thực a_1,a_2,b_1,b_2; $b_1>0,b_2>0$ ta có $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}\ge\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}$.

b) Cho x,y là các số thực không âm thoả mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3\sqrt{1+2x^2}+2\sqrt{40+9y^2}.$$

Bài 3. (3.0 điểm)

a) Cho cấp số nhân có bốn số hạng có tổng các số hạng bằng 15 và tổng bình phương của các số hạng này bằng 85. Tìm cấp số nhân đó.

b) Cho m,n là các số nguyên dương, $m\ne n$ và (u_n) là một cấp số cộng có tính chất $u_n=\frac{1}{m}$ và $u_m=\frac{1}{n}$. Tính tổng S_{mn} của mn số hạng đầu tiên của cấp số cộng trên theo m,n.

Bài 4. (4.0 điểm)

a) Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển nhị thức Newton $(3+x)^n$ biết

$$C_{n+6}^3-C_n^3=440.$$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho cả hai số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương.

Bài 5. (4.0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AD//BC$, $AB=BC=a$, $AD=2a$, tam giác SAD vuông cân tại S và $SB=a\sqrt{3}$.

a) Gọi M là trung điểm của SA, chứng minh rằng $BM//(SCD)$.

b) Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng BM và CD.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD, H là giao điểm của BG và mặt phẳng (SAC). Tính tỉ số $\frac{HB}{HG}$.

Bài 6. (2.0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$. Xét hình chữ nhật $MNPQ$ với M thuộc đoạn AB, N thuộc đoạn AC và P,Q nằm trong đoạn BC. Xác định tọa độ điểm M sao cho hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

...HẾT...

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
VĨNH LONG

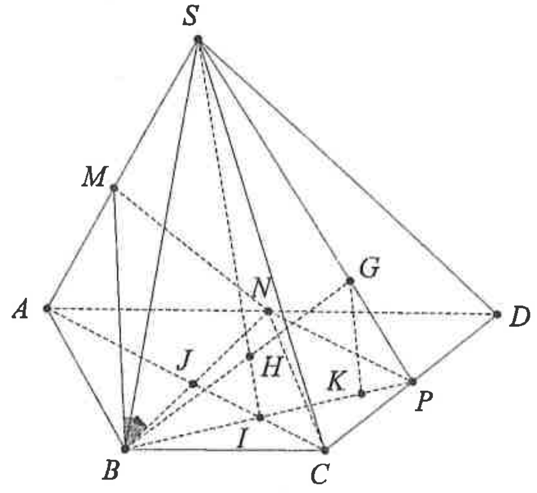
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2018 – 2019

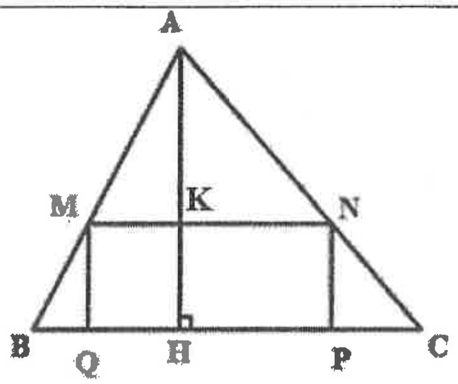
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Bài	Nội dung	Điểm
1		**4.0**
	a) Giải phương trình $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin x+\cos x+2$. (1)	
	$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin x+\cos x+2 \Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=3\sin x+\cos x+2$ $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=3\sin x+\cos x+2$ $\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x-3\right)+2\cos^2 x-\cos x-3=0$ $\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x-3\right)+\left(\cos x+1\right)\left(2\cos x-3\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(2\cos x-3\right)\left(\sin x+\cos x+1\right)=0$	1.0
	$\Leftrightarrow \sin x+\cos x+1=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=-1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$.	1.0
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$	
	Điều kiện: $\begin{cases} xy\ge 0 \\ x\ge -1, y\ge -1 \end{cases}$.	0.25
	Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2\ge 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} S-\sqrt{P}=3 \\ S+2+2\sqrt{S+P+1}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S\ge 3; P=\left(S-3\right)^2 \\ 2\sqrt{S+\left(S-3\right)^2+1}=14-S \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\le S\le 14; P=\left(S-3\right)^2 \\ 4\left(S^2+8S+10\right)=196-28S+S^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\le S\le 14; P=\left(S-3\right) \\ S^2+30S-52=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=9 \end{cases}$	0.75
	$\Rightarrow x=y=3$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(3;3\right)$.	0.5
2	a) Chứng minh rằng với mọi số thực $a_1,a_2,b_1,b_2;\ b_1>0,b_2>0$ ta có $$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}\ge\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}.$$ b) Cho x,y là các số thực không âm thoả mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3\sqrt{1+2x^2}+2\sqrt{40+9y^2}$.	**3.0**

	a) Ta có $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}\ge\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}\Leftrightarrow(a_1b_2-a_2b_1)^2\ge 0$ (đúng) $\Rightarrow$ đpcm. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.	1.0
	b) Ta có $3\sqrt{1+2x^2}=3\sqrt{\frac{3^2}{9}+\frac{4x^2}{2}}\ge 3\sqrt{\frac{(3+2x)^2}{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}(3+2x)$ (1) $2\sqrt{40+9y^2}=2\sqrt{\frac{40^2}{40}+\frac{36y^2}{4}}\ge 2\sqrt{\frac{(40+6y)^2}{44}}=\frac{\sqrt{11}}{11}(40+6y)$ (2)	1.0
	Từ (1),(2) $\Rightarrow P\ge\frac{3\sqrt{11}}{11}(3+2x)+\frac{\sqrt{11}}{11}(40+6y)=\frac{\sqrt{11}}{11}(49+6x+6y)=5\sqrt{11}$	0.5
	Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow(x;y)=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.	0.5
3		**3.0**
	a) Cho cấp số nhân có bốn số hạng có tổng các số hạng bằng 15 và tổng bình phương của các số hạng này bằng 85. Tìm cấp số nhân đó.	
	Giả sử (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q. Theo đề bài $q\neq 0$. $+\ u_1+u_2+u_3+u_4=15\Leftrightarrow u_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=15\Leftrightarrow u_1(1+q)\left(1+q^2\right)=15$ (1) $+\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85\Leftrightarrow u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85\Leftrightarrow u_1^2\left(1+q^2\right)\left(1+q^4\right)=85$.	0.5
	Từ $(1)\Rightarrow u_1^2(1+q)^2\left(1+q^2\right)^2=225$. Kết hợp (2) ta được: $\frac{(1+q)^2\left(1+q^2\right)^2}{\left(1+q^2\right)\left(1+q^4\right)}=\frac{45}{17}\Leftrightarrow\frac{(1+q)^2\left(1+q^2\right)}{1+q^4}=\frac{45}{17}$ $\Leftrightarrow 28q^4-34q^3-34q^2-34q+28=0\Leftrightarrow 28q^2-34q-34-\frac{34}{q}+\frac{28}{q^2}=0$ $\Leftrightarrow 28\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-34\left(q+\frac{1}{q}\right)-34=0$. Đặt $t=q+\frac{1}{q}$. Điều kiện $\|t\|\ge 2$ ta được: $28t^2-34t-90=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{5}{2}\\ t=-\frac{9}{7}\ (L)\end{array}\right.$	0.5
	$t=\frac{5}{2}$ ta có $q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q=2\\ q=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. Với $q=2\Rightarrow u_1=1$. Cấp số nhân có hạng đầu $u_1=1$ và $q=2$. Với $q=\frac{1}{2}\Rightarrow u_1=8$. Cấp số nhân có hạng đầu $u_1=8$ và $q=\frac{1}{2}$.	0.5

	b) Cho m,n là các số nguyên dương, $m \neq n$ và (u_n) là một cấp số cộng có tính chất $u_n = \frac{1}{m}$ và $u_m = \frac{1}{n}$. Tính tổng S_{mn} của mn số hạng đầu tiên theo m,n.	
	Gọi d là công sai của cấp số cộng, ta có $\begin{cases} u_1 + (n-1)d = \frac{1}{m} \\ u_1 + (m-1)d = \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow (n-m)d = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$ $\Leftrightarrow (n-m)d = \frac{n-m}{mn}$. Do $m \neq n$ nên $d = \frac{1}{mn}$.	0.5
	Từ đó ta có $u_1 = \frac{1}{m} - \frac{n-1}{mn} = \frac{1}{mn}$ $u_{mn} = u_1 + (mn-1).d = \frac{1}{mn} + \frac{mn-1}{mn} = 1$. $S_{mn} = \frac{(u_1 + u_{mn}).mn}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{mn} + 1\right).mn = \frac{1}{2}(mn+1)$.	1.0
4		**4.0**
	a) Tìm hệ số chứa x^9 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức $(3+x)^n$ biết $C_{n+6}^3 - C_n^3 = 440$.	
	Ta có: $C_{n+6}^3 - C_n^3 = 440$. Điều kiện: $\begin{cases} n \geq 3 \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Ta được: $C_{n+6}^3 - C_n^3 = 440 \Leftrightarrow \frac{(n+6)!}{(n+3)!.3!} - \frac{n!}{(n-3)!.3!} = 440$ $\Leftrightarrow \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 440 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -14 \quad (l) \end{array}\right.$.	1.0
	Khi $n = 10$ ta được: $(3+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^{10-k} x^k$. Số hạng chứa x^9 thì $k = 9$. Vậy, hệ số của số hạng chứa x^9 là: $C_{10}^9.3 = 30$.	1.0
	b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho cả hai số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương.	
	$n = 0$ thỏa mãn bài toán.	0.25
	Xét $n > 0$, nếu cả hai số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương thì số $A_n = (9n+16)(16n+9) = (12n)^2 + (9^2+16^2)n + 12^2$ cũng là số chính phương.	0.5
	Mặt khác ta lại có $(12n+12)^2 < (12n)^2 + (9^2+16^2)n + 12^2 < (12n+15)^2$	0.5
	Suy ra $A_n = (12n+13)^2$ hoặc $A_n = (12n+14)^2$, từ đó thay vào giải ra hai trường hợp ta được $n = 1; 52$. Vậy có ba giá trị của n thỏa mãn là 0;1;52.	0.75
5	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AD//BC$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$; tam giác SAD vuông cân tại S và $SB = a\sqrt{3}$.	**4.0**

		
	a) Gọi M là trung điểm của SA, chứng minh rằng $BM//(SCD)$. Gọi N là trung điểm của AD, ta có $BC = DN = a$ và $BC//DN \Rightarrow$ $BCDN$ là hình bình hành $\Rightarrow BN//CD$. Vì M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD nên $MN//SD \Rightarrow (BMN)//(SCD)$ mà $BM \subset (BMN) \Rightarrow BM//(SCD)$.	1.0
	b) Tính góc giữa hai đường thẳng BM và CD. Do $BN//CD \Rightarrow \widehat{(BM,CD)} = \widehat{(BN.BM)}$. Vì tam giác SAD vuông cân tại S có cạnh huyền $AD = 2a$ nên $SA = SD = a\sqrt{2}$ ΔSAB có $SA^2 + AB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = SB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại A. Ta có $BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ và $BN = CD = a$; $MN = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Áp dụng định lí côsin trong tam giác BMN ta được : $$\cos\widehat{MBN} = \frac{BM^2 + BN^2 - MN^2}{2.BM.BN} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$	1.5
	c) Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD, H là giao điểm của BG và mp(SAC). Tính tỉ số $\frac{HB}{HG}$. Gọi P là trung điểm của CD, $I = AC \cap BP$; $H = SI \cap BG \Rightarrow$ H=BG$\cap$(SAC). Gọi J là giao điểm của BN và AC, vì $BCNA$ là hình bình hành nên J là trung điểm của BN, mà $IJ//NP$ nên I là trung điểm của BP. Trong tam giác SBP vẽ $GK//SI$, ta có: $\frac{HB}{HG} = \frac{IB}{IK} = \frac{IP}{IK} = \frac{SP}{SG} = \frac{3}{2}$ (do G là trọng tâm của tam giác SCD).	1.5
6	Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ *Oxy*, cho ΔABC có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$. Xét hình chữ nhật $MNPQ$ với M thuộc đoạn AB, N thuộc đoạn AC và P,Q nằm trong đoạn BC. Xác định tọa độ điểm M sao cho hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.	**2.0**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Gọi H là chân đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh A, MN cắt AH tại K.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Đặt $MQ = x\left(0 < x < AH\right)$; $MN = y \Rightarrow AK = AH - x$
Do $MN//BC \Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AK}{AH} \Leftrightarrow \dfrac{y}{BC} = \dfrac{AH - x}{AH} \Rightarrow y = \dfrac{BC(AH - x)}{AH}$</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Gọi S là diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ thì:
$S = xy = \dfrac{BC}{AH}.x\left(AH - x\right) \le \dfrac{BC}{AH}.\dfrac{\left[x + \left(AH - x\right)\right]^2}{2} = \dfrac{BC.AH}{4}$</td>
<td>0.75</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Dấu "=" xảy ra khi $x = AH - x \Leftrightarrow x = \dfrac{AH}{2} \Rightarrow MQ = \dfrac{AH}{2}$ suy ra M là trung điểm của AB nên tọa độ $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.</td>
<td>0.75</td>
</tr>
</table>

HẾT./.