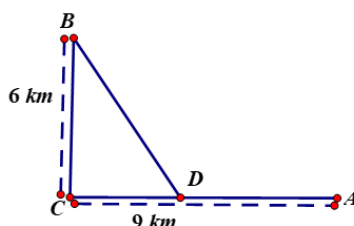


Câu 1 (2,0 điểm).

- a) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1^{2020} - z_2^{2020}|$.
- b) Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho ở vị trí A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo (xem hình minh họa). Vị trí B trên hòn đảo cách bờ biển 6 km, gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên đoạn bờ biển AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB . Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí cho việc lắp đặt đường ống dẫn là thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100 triệu đồng và dưới nước là 260 triệu đồng.

**Câu 2 (2,0 điểm).**

- a) Cho phương trình $\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} - 8m - 4 = 0$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$.
- b) Cho đa thức $P(x) = (2x+1)^3 + (2x+1)^4 + (2x+1)^5 + \dots + (2x+1)^{100}$. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển đa thức $P(x)$ và so sánh hệ số đó với 666000.

Câu 3 (2,0 điểm). Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi $x_1 = 3$ và $x_{n+1} = \sqrt{21 + \sqrt{2x_n + 6}}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC có $AB < AC$, đường tròn ω nội tiếp tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm A, P đồng thời cắt đường thẳng AD tại hai điểm A, K . Hai đường thẳng PI, EF cắt nhau tại điểm H , đường tròn ngoại tiếp tam giác DKH cắt đường tròn ω tại hai điểm D, N .

- a) Chứng minh rằng hai đường thẳng DH và EF vuông góc với nhau.
- b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC tiếp xúc với đường tròn ω .

Câu 5 (2,0 điểm). Cho R là tập các số tự nhiên có 7 chữ số lập được từ hai chữ số 1 và 2. Ta xây dựng tập con S của R theo quy tắc sau: phần tử đầu tiên của S có thể chọn bất kì phần tử nào của R ; hai phần tử phân biệt của S phải có ít nhất ba cặp chữ số ở ba hàng nào đó khác nhau. (chẳng hạn hai phần tử 1.111.111 và 1.111.222 là phân biệt vì có ba cặp chữ số ở hàng trăm, chục, đơn vị là khác nhau). Chứng tỏ rằng, theo quy tắc này, với mọi cách xây dựng tập S , số phần tử của S không vượt quá 16.

----- **HẾT** -----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1.a	Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^{2020} - z_2^{2020}$.	1,0
	Ta có $z^2 - z + 1 = 10 \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$. Do $(1 + \sqrt{3}i)^3 = (1 - \sqrt{3}i)^3 = -8$ nên $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^3 = -1$.	0,5
	Suy ra $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{2020} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{3 \cdot 673} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ và $\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{2020} = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{3 \cdot 673} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ Từ đó suy ra $P = z_1^{2020} - z_2^{2020} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}$.	0,5
1.b	Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất...	1,0
	Đặt $AD = x$ km, $(0 < x < 9)$. Ta có $CD = 9 - x$; $BD = \sqrt{36 + (9 - x)^2}$ Giá thành lắp đặt là: $T = 100x + 260\sqrt{36 + (9 - x)^2} = 20 \cdot [5x + 13\sqrt{36 + (9 - x)^2}]$	0,5
	Xét hàm số $f(x) = 5x + 13\sqrt{36 + (9 - x)^2}$, $(0 < x < 9)$. Ta có $f'(x) = 5 - 13 \cdot \frac{9 - x}{\sqrt{36 + (9 - x)^2}} = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{36 + (9 - x)^2} = 13(9 - x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ 25[36 + (9 - x)^2] = 169(9 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ (9 - x)^2 = \frac{900}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$ Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; 9)$ ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{13}{2}$. Vậy $AD = 6.5$ km.	0,5

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
2.a	Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$.	1,0
	Điều kiện: $x > 2$. Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2)^2 + 4(m - 5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x - 2} - 8m - 4 = 4\log_2^2(x - 2) + 4(m - 5)\log_2(x - 2) - 8m - 4$	0,5

	Đặt $\log_2(x-2) = t$ với $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$ PT trở thành $t^2 + (m-5)t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t - 1}{-t + 2} = m$	
	Xét hàm $f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{-t + 2}, t \in [-1; 1]$. Ta có: $f'(t) = \frac{-t^2 + 4t - 11}{(-t + 2)^2} < 0 \quad \forall t \in [-1; 1]$ Do đó $f(1) = -5 \leq f(t) \leq f(-1) = \frac{5}{3}, \forall t \in [-1; 1]$ Do đó phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} - 8m - 4 = 0$ có nghiệm thuộc $\left[\frac{5}{2}; 4\right] \Leftrightarrow -5 \leq m \leq \frac{5}{3}$.	0,5
2.b	<i>Tìm hệ số của x^2 trong khai triển đa thức ...</i>	1,0
	Hệ số cần tìm là $a = 4.(C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{100}^2)$	0,5
	Rút gọn để có $a = 4(C_{101}^3 - C_3^3) = 666.596 > 666.000$.	0,5

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
3	<i>Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi $x_1 = 3$ và $x_{n+1} = \sqrt{21 + \sqrt{2x_n + 6}}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.</i>	2,0
	Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được $x_n \geq 3 \quad \forall n = 1, 2, \dots$ Ta có $x_1 = 3 \geq 3$ Giả sử $x_n \geq 3$. Khi đó $x_{n+1} = \sqrt{21 + \sqrt{2x_n + 6}} \geq \sqrt{21 + \sqrt{12}} > 3$ theo nguyên lý quy nạp suy ra $x_n \geq 3, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Ta có $x_1 = 3, x_2 = \sqrt{21 + \sqrt{2x_1 + 6}} \leq \sqrt{21 + 4} = 5$ Giả sử $x_n \leq 5$. Khi đó $x_{n+1} = \sqrt{21 + \sqrt{2x_n + 6}} \leq \sqrt{21 + 4} = 5$ theo nguyên lý quy nạp suy ra $x_n \leq 5, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Tóm lại ta đã chứng minh được $3 \leq x_n \leq 5, \forall n = 1, 2, \dots$ (1)	0,5
	Ta có $x_1 < x_2$. Giả sử $x_{n-1} < x_n$. khi đó $x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \frac{(21 + \sqrt{2x_n + 6}) - (21 + \sqrt{2x_{n-1} + 6})}{x_{n+1} + x_n} = \frac{\sqrt{2x_n + 6} - \sqrt{2x_{n-1} + 6}}{x_{n+1} + x_n} >$ Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học suy ra dãy số đã cho là dãy số tăng. Dãy (x_n) tăng và bị chặn trên do đó dãy có giới hạn hữu hạn.	0,5
	Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} = L$, ta có $3 \leq L \leq 5$. Từ $x_{n+1} = \sqrt{21 + \sqrt{2x_n + 6}}, \forall n = 1, 2, \dots$ cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $L = \sqrt{21 + \sqrt{2L + 6}}. \quad (2)$ Với điều kiện $3 \leq L \leq 5$ ta có	0,5

	$(2) \Leftrightarrow L^2 = 21 + \sqrt{2L+6} \Leftrightarrow (L^2 - 25) + (4 - \sqrt{2L+6}) = 0$ $\Leftrightarrow (L^2 - 25) + \frac{10-2L}{4+\sqrt{2L+6}} = 0 \Leftrightarrow (L-5) \left[L+5 - \frac{2}{4+\sqrt{2L+6}} \right] = 0 \quad (3)$	
	Để thấy $L+5 - \frac{2}{4+\sqrt{2L+6}} > 0 \quad \forall 3 \leq L \leq 5$. Vậy phương trình (3) có nghiệm duy nhất $L = 5$. Vậy dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 5$	0,5

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
4	Cho tam giác ABC có $AB < AC$, đường tròn ω nội tiếp tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm A, P đồng thời cắt đường thẳng AD tại hai điểm A, K. Hai đường thẳng PI, EF cắt nhau tại điểm H, đường tròn ngoại tiếp tam giác DKH cắt đường tròn ω tại hai điểm D, N. a) Chứng minh rằng hai đường thẳng DH và EF vuông góc với nhau. b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC tiếp xúc với đường tròn ω.	2,0
	a) Kí hiệu (XY) là đường tròn đường kính XY và (XYZ) là đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Để thấy đường tròn (AEF) là đường tròn đường kính AI. Suy ra $IK \perp AK$, do đó IK là trục đẳng phương của hai đường tròn (AI) và (DI). Gọi M là giao điểm của EF và BC. Ta có $P_{M/(AI)} = MF \cdot ME = P_{M/\omega} = MD^2 = P_{M/(DI)}$, suy ra M thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (AI) và (DI). Suy ra M, K, I thẳng hàng. Đường tròn ω tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F suy ra $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1 \Rightarrow AD, BE, CF$ đồng quy (theo định lý Ceva). Nên theo tính chất cơ bản của hàng điểm điều hòa ta có $(M, D, B, C) = -1 \Rightarrow H(M, D, B, C) = -1$ (1). Ta có	0,5
		0,5

	$\begin{cases} \widehat{AFP} = \widehat{AEP} \Rightarrow \widehat{PFB} = \widehat{PEC} \\ \widehat{PBF} = \widehat{PCE} \text{ (cùng chắn cùng AP)} \end{cases} \Rightarrow \Delta PFB \sim \Delta PEC (g - g) \Rightarrow \frac{PF}{PE} = \frac{FB}{EC} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$ Để thấy I là điểm chính giữa cung EF của đường tròn (AEF), suy ra PI là phân giác của $\widehat{FPE} \Rightarrow \frac{PF}{PE} = \frac{FH}{EH} \quad (3)$. Từ (2), (3) ta có $\frac{FH}{EH} = \frac{FB}{EC}$, lại có $\widehat{HFB} = \widehat{HEC}$ nên suy ra $\Delta HFB \sim \Delta HEC (g - g) \Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{FB}{EC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow HD$ là phân giác của $\widehat{BHC} \quad (4)$. Từ (1) và (4) theo tính chất của chùm điều hòa suy ra $DH \perp EF$.	
	b) Từ BC, EF, IK đồng quy tại M và $IK \perp DA, DH \perp EF$ suy ra DM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác DKH. Gọi S là trung điểm DM, suy ra $SD = SN$ mà $ID = IN$, suy ra SI là trung trực của DN. Ta lại có SD là tiếp tuyến của đường tròn ω, suy ra SN là tiếp tuyến của $\omega \quad (5)$.	0,5
	Từ $(M, D, B, C) = -1$ và S là trung điểm MD, nên theo hệ thức Niu-ton ta có $SD^2 = SB \cdot SC$ mà $SD = SN$, suy ra $SN^2 = SB \cdot SC$, suy ra SN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $BNC \quad (6)$. Từ (5) và (6) suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC tiếp xúc với đường tròn ω. Nhận xét: Có thể chứng minh ND là phân giác của $\widehat{BNC}$, từ đó xét phép vị tự tâm N biến D thành D_1 (với D_1 là giao điểm của ND với đường tròn (BNC)) để chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC tiếp xúc với đường tròn ω.	0,5

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
5	Chứng tỏ rằng, theo quy tắc này, với mọi cách xây dựng tập S, số phần tử của S không vượt quá 16.	2,0
	Với mỗi số $a \in S$, ta kí hiệu S_a là tập hợp các số b của R sao cho b khác a tại đúng một vị trí chữ số ở 1 hàng nào đó, hoặc trùng với a. Khi đó, với mọi a, ta có $S_a = 8$. Nên $\sum_{a \in S} S_a = 8 \cdot S \quad (*)$	0,75
	Bây giờ lại chứng tỏ, với 2 phần tử a, b phân biệt trong S thì ta có $S_a \cap S_b = \emptyset$. Thật vậy, vì nếu có số $c \in S_a \cap S_b$ thì ta có c khác a ở nhiều nhất 1 chữ số, mà b khác a ở ít nhất 3 chữ số nên c khác b ở ít nhất 2 chữ số, mâu thuẫn với việc c thuộc S_b.	0,75
	Khi đó ta có $\sum_{a \in S} S_a = \bigcup_{a \in S} S_a \leq R = 2^7 \quad (**)$. Từ (*) và (**) ta suy ra đpcm.	0,5