

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{a+b+c+1}$.

Câu 2. (3,0 điểm) Cho dãy số thực $(x_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi

$$x_1 = 3, x_2 = 1 \text{ và } x_{n+1} = \frac{n x_n^2}{1 + (n+1)x_n}, \forall n \geq 2.$$

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = nx_n$ và $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{x_k}$.

2.1. Chứng minh rằng dãy số (y_n) là dãy số giảm.

2.2. Tìm giới hạn của dãy số (z_n) .

Câu 3. (3,0 điểm) Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f((x-y)f(x)) = f(yf(x-y)) + (x-y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$$

3.1. Chứng minh rằng f là hàm số lẻ.

3.2. Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn (1).

Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng AM và AH cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm L, K (L, K khác A). Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm T (T khác A).

4.1. Hai tiếp tuyến tại T và tại K của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm J . Chứng minh rằng J thuộc đường thẳng BC và J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HKT .

4.2. Gọi P là giao điểm của EF và BC , X là giao điểm của HP và KL . Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp tam giác HTX và tam giác TML tiếp xúc nhau.

Câu 5. (3,0 điểm) Tìm tất cả các bộ (p, q, r, n) với p, q, r là các số nguyên tố và n là số tự nhiên sao cho $p^2 = q^2 + r^n$.

Câu 6. (3,0 điểm) Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 2024\}$. Gọi A là tập con gồm k phần tử của tập S sao cho trong A luôn tồn tại ba phần tử x, y, z thỏa $x = a + b, y = b + c, z = c + a$, với a, b, c là các phần tử đôi một khác nhau thuộc S . Tìm giá trị nhỏ nhất của k .

HẾT

Ghi chú: Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký CBCT 1:..... Chữ ký CBCT 2:.....