

Câu 1: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018) Cho hai số thực x, y thỏa mãn phương trình $x + 2i = 3 + 4yi$. Khi đó giá trị của x và y là:

- A. $x = 3, y = 2$. B. $x = 3i, y = \frac{1}{2}$. C. $x = 3, y = \frac{1}{2}$. D. $x = 3, y = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ } x + 2i = 3 + 4yi \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } x = 3, y = \frac{1}{2}.$$

Câu 2: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018) Phần thực và phần ảo của số phức $z = 1 + 2i$ lần lượt là:

- A. 2 và 1 B. 1 và $2i$. C. 1 và 2. D. 1 và i .

Lời giải

Chọn C

Số phức $z = 1 + 2i$ có phần thực và phần ảo lần lượt là 1 và 2.

Câu 3: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018) Cho hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$). Tìm phần ảo của số phức zz' .

- A. $(ab' + a'b)i$. B. $ab' + a'b$. C. $ab' - a'b$. D. $aa' - bb'$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$$

Vậy phần ảo của số phức zz' là $ab' + a'b$.

Câu 4: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018) Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$ trên tập số phức $\mathbb{C}$.

- A. $1 + 2i; 1 - 2i$. B. $1 + i; 1 - i$. C. $-1 + 2i; -1 - 2i$. D. $-1 + i; -1 - i$.

Lời giải:

Chọn C

$$\Delta' = 1^2 - 5 = -4 = 4i^2.$$

$$\text{Suy ra phương trình có hai nghiệm phức: } \begin{cases} z_1 = -1 - 2i \\ z_2 = -1 + 2i \end{cases}.$$

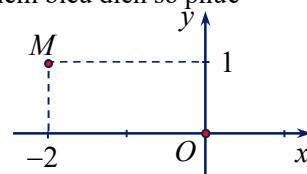
Câu 5: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

- A. $z = -2 + i$. B. $z = 1 - 2i$.
C. $z = 2 + i$. D. $z = 1 + 2i$.

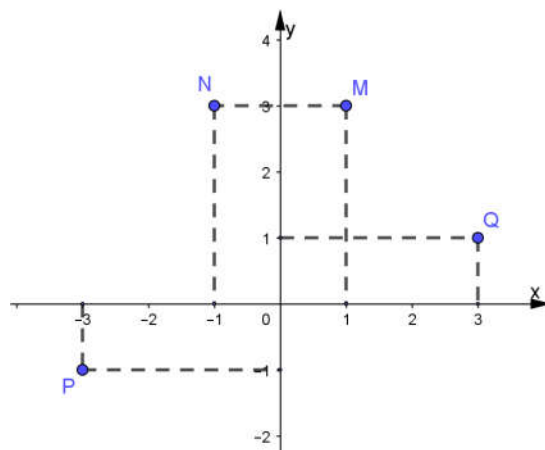
Lời giải

Chọn A

Điểm $M(-2; 1)$ biểu diễn số phức $z = -2 + i$.



Câu 1: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = (1+i)(2-i)$?



- A. P . B. M . C. N . **D. Q .**

Lời giải

Chọn D

Ta có $z = (1+i)(2-i) \Leftrightarrow z = 3+i$. Điểm biểu diễn của số phức z là $Q(3;1)$.

Câu 2: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Số phức z thỏa mãn $z = 5-8i$ có phần ảo là

- A. 8 . B. $-8i$. C. 5 . **D. -8 .**

Lời giải

Chọn D

Ta có $z = 5-8i$ suy ra phần ảo của z là -8 .

Câu 3: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ là:

- A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. B. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. C. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **D. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.**

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ và $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$.

Vậy nghiệm phức có phần ảo dương là $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 4: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hai số phức $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -4-5i$. Số phức $z = z_1 + z_2$ là

- A. $z = 2+2i$. **B. $z = -2-2i$.** C. $z = 2-2i$. D. $z = -2+2i$.

Lời giải

Chọn B

$z = z_1 + z_2 = 2+3i-4-5i = -2-2i$.

Câu 5: (THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm giá trị cực tiểu của hàm số

$$y = x^4 - 4x^2 + 3$$

A. $y_{CT} = 4$.

B. $y_{CT} = -6$.

C. $y_{CT} = -1$.

D. $y_{CT} = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow y = -1 \\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-1		3		-1		$+\infty$

Vậy giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = -1$ tại $x_{CT} = \sqrt{2}$, $x_{CT} = -\sqrt{2}$.

Câu 1: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là
A. $-3i$. B. 3 . **C. -3 .** D. $3i$.

Lời giải

Chọn C

Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là -3 .

Câu 2: (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức $z = 2018 - 2017i$. Điểm M biểu diễn của số phức liên hợp của z là
A. $M(-2018; 2017)$. B. $M(2018; -2017)$. C. $M(-2018; -2017)$. **D. $M(2018; 2017)$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $\bar{z} = 2018 + 2017i$, nên $M(2018; 2017)$.

Câu 3: (THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức $z = 1 + 2i$. Số phức liên hợp của z là
A. $\bar{z} = -1 + 2i$. B. $\bar{z} = -1 - 2i$. C. $\bar{z} = 2 + i$. **D. $\bar{z} = 1 - 2i$.**

Lời giải

Chọn D

Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = 1 - 2i$.

Câu 4: (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức
 $z = \frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$.

A. $(-1; -4)$. B. $(1; 4)$. C. $(1; -4)$. D. $(-1; 4)$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } z = \frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i} = \frac{5-14i}{3+2i} = \frac{(5-14i)(3-2i)}{13} = \frac{-13-52i}{13} = -1-4i.$$

Do đó điểm biểu diễn cho số phức z có tọa độ $(-1; -4)$.

Câu 5: (THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 6 + 5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 6z_1 + 5z_2$
A. $\bar{z} = 51 + 40i$. B. $\bar{z} = 51 - 40i$. C. $\bar{z} = 48 + 37i$. **D. $\bar{z} = 48 - 37i$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } z = 6z_1 + 5z_2 = 6(3 + 2i) + 5(6 + 5i) = 48 + 37i.$$

Suy ra $\bar{z} = 48 - 37i$.

Câu 6: (THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Xác định phần ảo của số phức $z = 18 - 12i$.
A. -12 . B. 18 . C. 12 . D. $-12i$.

Lời giải

Chọn A

Phần ảo của số phức $z = 18 - 12i$ là -12 .

Câu 7: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là
A. $1 + 2i$. B. $-1 - 2i$. C. $2 - i$. D. $-1 + 2i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là $\bar{z} = 1 + 2i$.

Câu 8: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Tìm phần ảo của số phức z , biết $(1+i)z = 3-i$.

A. 2.

B. -2.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (1+i)z = 3-i \Leftrightarrow z = \frac{3-i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow z = 1-2i.$$

Vậy phần ảo của số phức z bằng -2.

Câu 9: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Hỏi điểm $M(3;-1)$ là điểm biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z = -1 + 3i$.

B. $z = 1 - 3i$.

C. $z = 3 - i$.

D. $z = -3 + i$.

Lời giải

Chọn C

Điểm $M(a;b)$ trong một hệ tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$.

Do đó điểm $M(3;-1)$ là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - i$.

Câu 10: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Cho số phức $z = -4 + 5i$. Biểu diễn hình học của z là điểm có tọa độ

A. $(-4;5)$.

B. $(-4;-5)$.

C. $(4;-5)$.

D. $(4;5)$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $z = -4 + 5i$ có phần thực $a = -4$; phần ảo $b = 5$ nên điểm biểu diễn hình học của số phức z là $(-4;5)$.

Câu 11: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) Cho số phức $z = 2 - 3i$. Môđun của số phức $w = (1+i)z$

A. $|w| = \sqrt{26}$.

B. $|w| = \sqrt{37}$.

C. $|w| = 5$.

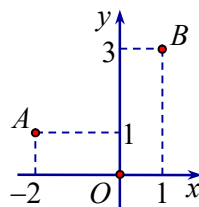
D. $|w| = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } w = (1+i)z = (1+i)(2-3i) = 5-i, |w| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}.$$

Câu 12: (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm A , B như hình vẽ bên. Trung điểm của đoạn thẳng AB biểu diễn số phức.



A. $-\frac{1}{2}+2i$.

B. $-1+2i$.

C. $2-i$.

D. $2-\frac{1}{2}i$.

Lời giải

Chọn A

Trung điểm AB là $I\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ biểu diễn số phức là $z = -\frac{1}{2} + 2i$.

Câu 13: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Số phức z nào sau đây thỏa $|z| = \sqrt{5}$ và z là số thuần ảo?

A. $z = \sqrt{5}$.

B. $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

C. $z = 5i$.

D. $z = -\sqrt{5}i$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = bi$, với $b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ là số thuần ảo $\Rightarrow$ loại A, B.

Ta có $|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |b| = \sqrt{5} \Rightarrow$ Chọn D

Câu 14: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = mi$, ($m \in \mathbb{R}$). Tìm phần ảo của số phức $\frac{1}{z}$?

A. $-\frac{1}{m}$.

B. $\frac{1}{m}$.

C. $-\frac{1}{m}i$.

D. $\frac{1}{m}i$.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{mi} = \frac{1}{mi \cdot i} i = -\frac{1}{m}i.$$

Câu 15: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho số phức $(1-i)z = 4+2i$. Tìm môđun của số phức $w = z+3$.

A. 5.

B. $\sqrt{10}$.

C. 25.

D. $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z = \frac{4+2i}{1-i} = 1+3i$. Do đó: $w = z+3 = 4+3i$.

Vậy $|w| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Câu 16: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Phần ảo của số phức $z = 5+2i$ bằng

A. 5.

B. $5i$.

C. 2.

D. $2i$.

Lời giải

Chọn C

Câu 17: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = -1+2i$. Số phức $\bar{z}$ được biểu diễn bởi điểm nào dưới đây trên mặt phẳng tọa độ?

A. $P(1; 2)$.

B. $N(1; -2)$.

C. $Q(-1; -2)$.

D. $M(-1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z = -1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = -1 - 2i$. Suy ra điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$ là $Q(-1; -2)$.

Câu 18: (Chuyên ĐB Sông Hồng – Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 - 5i$.

Tính $z = z_1 + z_2$.

- A.** $z = -2 - 2i$. **B.** $z = -2 + 2i$. **C.** $z = 2 + 2i$. **D.** $z = 2 - 2i$.

Lời giải

Chọn A

$$z = z_1 + z_2 = 2 + 3i + (-4 - 5i) = -2 - 2i.$$

Câu 19: Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tính $|z|$.

- A.** $|z| = \sqrt{5}$. **B.** $|z| = \sqrt{13}$. **C.** $|z| = 5$. **D.** $|z| = 13$.

Câu 20: (THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tính $|z|$.

- A.** $|z| = \sqrt{5}$. **B.** $|z| = \sqrt{13}$. **C.** $|z| = 5$. **D.** $|z| = 13$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Câu 21: (THPT Chuyên ĐHSPT – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = -3 + 4i$. Môđun của z là

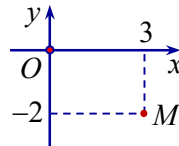
- A.** 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

Câu 22: (THPT Chuyên ĐHSPT – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho số phức z có biểu diễn hình học là điểm M ở hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A.** $z = 3 + 2i$. **B.** $z = -3 + 2i$. **C.** $z = -3 - 2i$. **D.** $z = 3 - 2i$.

Lời giải

Chọn D

Điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$ là $M(a; b)$.

Câu 23: (THPT Chuyên ĐHSPT – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = 1 + i$. Số phức nghịch đảo của z là

- A.** $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. **B.** $1-i$. **C.** $\frac{1-i}{2}$. **D.** $\frac{-1+i}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } z = 1 + i \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}.$$

Câu 24: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Tìm số phức liên hợp của số phức

$$z = -i.$$

A. -1 .

B. 1 .

C. $-i$.

D. i .

Lời giải

Chọn D

Câu 25: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 5 - i$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $\sqrt{5} + \sqrt{26}$.

B. 5 .

C. 25 .

D. $\sqrt{37}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } A(1; 2), B(5; -1) \Rightarrow AB = 5.$$

Câu 26: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = \sqrt{7} - 3i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = 3$.

C. $|z| = 4$.

D. $|z| = -4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{7^2 + 9} = 4.$$

Câu 27: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Mô đun của số phức $z = 7 - 5i$ bằng

A. 74 .

B. 24 .

C. $\sqrt{74}$.

D. $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}.$$

Câu 28: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Phần thực của số phức $z = (3 - i)(1 - 4i)$ là

A. -1 .

B. 13 .

C. 1 .

D. -13 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } z = (3 - i)(1 - 4i) = -1 - 13i.$$

Câu 29: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018)

Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + i) = 3 - 5i$. Tính môđun của z .

A. $|z| = \sqrt{17}$.

B. $|z| = 16$.

C. $|z| = 17$.

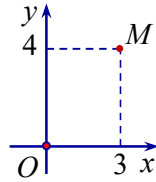
D. $|z| = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } z(1 + i) = 3 - 5i \Leftrightarrow z = \frac{3 - 5i}{1 + i} = -1 - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}.$$

Câu 30: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z .



Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

A. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng 3.

B. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng $3i$.

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4.

D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $4i$.

Lời giải

Chọn C

Từ hình vẽ ta có $M(3;4)$ nên $z = 3 + 4i$.

Vậy Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4.

Câu 31: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = -2 + i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $P(-2;1)$.

B. $N(2;1)$.

C. $Q(1;2)$.

D. $M(-1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

$w = iz = i(-2 + i) = -1 - 2i \Rightarrow$ điểm $P(-2;1)$ là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ.

Câu 32: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$.

A. $\bar{z} = 3 - 2i$.

B. $\bar{z} = -3 - 2i$.

C. $\bar{z} = 2 - 3i$.

D. $\bar{z} = -2 - 3i$.

Lời giải

Chọn A

$\bar{z} = 3 - 2i$.

Câu 33: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = 1 - 2i$ thì số phức liên hợp $\bar{z}$ có

A. phần thực bằng 1 và phần ảo bằng -2 .

B. phần thực bằng -2 và phần ảo bằng 1.

C. phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 2.

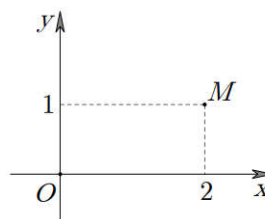
D. phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 1.

Lời giải

Chọn C

$\bar{z} = 1 + 2i$. Do đó số phức liên hợp $\bar{z}$ có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 2.

Câu 34: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z . Số phức $\bar{z}$ là



A. $2 - i$.

B. $1 + 2i$.

C. $1 - 2i$.

D. $2 + i$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào hình vẽ ta có $z = 2 + i$, suy ra $\bar{z} = 2 - i$.

Câu 35: (SGD Nam Định – năm 2017 – 2018) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2, phần ảo là -3 .
B. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2, phần ảo là $-3i$.
C. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2, phần ảo là $3i$.
D. Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực là 2, phần ảo là 3.

Lời giải

Chọn A

Mỗi số phức $z = a + bi$ có phần thực là a , phần ảo là b .

Câu 36: (SGD Nam Định – năm 2017 – 2018) Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$. Tìm số

phức $z = \frac{z_2}{z_1}$.

- A.** $z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$. **B.** $z = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$. **C.** $z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$. **D.** $z = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{3-i}{1+2i} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$.

Câu 1: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Tính môđun của số phức $z = 3 + 4i$.

- A. 3. **B. 5.** C. 7. D. $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B

Môđun của số phức $z = 3 + 4i$ là: $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Câu 2: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Số phức liên hợp của số phức $z = i(1 - 2i)$ có điểm biểu diễn là điểm nào dưới đây?

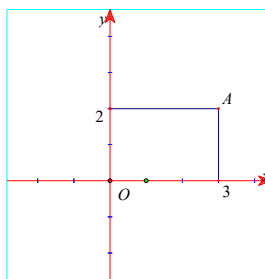
- A. $E(2; -1)$.** B. $B(-1; 2)$. C. $A(1; 2)$. D. $F(-2; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z = i(1 - 2i) = 2 + i \Rightarrow \bar{z} = 2 - i$ nên điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$ là $E(2; -1)$.

Câu 3: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Điểm A trong hình vẽ bên dưới biểu diễn cho số phức z . Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. Phần thực là 3, phần ảo là 2.** B. Phần thực là 3, phần ảo là $2i$.
C. Phần thực là -3 , phần ảo là $2i$. D. Phần thực là -3 , phần ảo là 2.

Lời giải

Chọn A

Câu 4: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = z + i\bar{z}$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A. $M(3; 3)$. B. $Q(3; 2)$. C. $N(2; 3)$. D. $P(-3; 3)$.

Lời giải

Chọn A

$w = z + i\bar{z} = 1 + 2i + i(1 - 2i) = 3 + 3i$.

Vậy điểm biểu diễn của số phức $w = z + i\bar{z}$ là $M(3; 3)$.

Câu 5: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + i$. Giá trị của biểu thức $|z_1 + 3z_2|$ là

- A. $\sqrt{55}$. B. 5. C. 6. **D. $\sqrt{61}$.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $|z_1 + 3z_2| = |2 + 3i + 3(1 + i)| = |5 + 6i| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.

Câu 6: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính iz_0 .

- A.** $iz_0 = 3 - i$. **B.** $iz_0 = -3i + 1$. **C.** $iz_0 = -3 - i$. **D.** $iz_0 = 3i - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + 3i \\ z = -1 - 3i \end{cases} \Rightarrow z_0 = -1 + 3i \Rightarrow iz_0 = -3 - i.$$

Câu 7: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Phần thực và phần ảo của số phức liên hợp của số phức $z = 1 + i$ là:

- A.** Phần thực là 1, phần ảo là -1 . **B.** Phần thực là 1, phần ảo là $-i$.
C. Phần thực là 1, phần ảo là i . **D.** Phần thực là 1, phần ảo là 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có số phức liên hợp của số phức $z = 1 + i$ là $\bar{z} = 1 - i$, suy ra Phần thực và phần ảo của số phức liên hợp của số phức $z = 1 + i$ là và -1 .

Câu 8: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Điểm biểu diễn của số phức z là $M(1; 2)$. Tọa độ của điểm biểu diễn cho số phức $w = z - 2\bar{z}$ là

- A.** $(2; -3)$. **B.** $(2; 1)$. **C.** $(-1; 6)$. **D.** $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } z = 1 + 2i \text{ nên } w = z - 2\bar{z} = (1 + 2i) - 2(1 - 2i) = -1 + 6i.$$

Do đó, số phức $w = z - 2\bar{z}$ có điểm biểu diễn là $(-1; 6)$.

Câu 9: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $P = (z_1 - 2z_2) \cdot \overline{z_2} - 4z_1$ bằng:

- A.** -10 . **B.** 10 . **C.** -5 . **D.** -15 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = (z_1 - 2z_2) \cdot \overline{z_2} - 4z_1 = (2 + i - 2(2 - i)) \cdot (2 + i) - 4(2 + i) = -15.$$

Câu 10: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Mô đun của số phức $z = \sqrt{7} - 3i$ là.

- A.** $|z| = 5$. **B.** $|z| = 10$. **C.** $|z| = 16$. **D.** $|z| = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } |z| = \sqrt{7 + 9} = 4.$$

Câu 11: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Số phức liên hợp của số phức $z_1 + 2z_2$ là?

A. $-3+2i$.

B. $3-2i$.

C. $2+i$.

D. $2-i$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -1+2i \\ z_2 = -1-2i \end{cases}$ (Vì z_1 có phần ảo dương)

Suy ra: $z_1 + 2z_2 = -1+2i + 2(-1-2i) = -3-2i$.

Vậy: Số phức liên hợp của số phức $z_1 + 2z_2$ là $-3+2i$.

Câu 12: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Cho số phức $z = (1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là:

A. 2 .

B. 4 .

C. -2 .

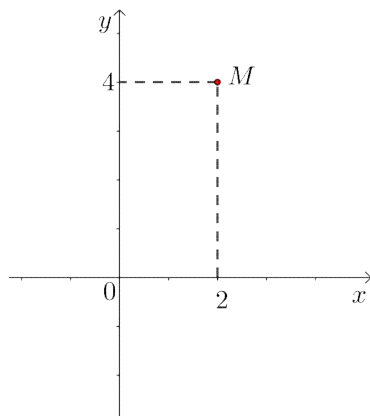
D. $2i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z = (1+i)^2(1+2i) = 2i(1+2i) = -4+2i$. Vậy số phức z có phần ảo là 2 .

Câu 13: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn cho số phức



A. $z = 4-2i$.

B. $z = 2+4i$.

C. $z = 4+2i$.

D. $z = 2-4i$.

Lời giải

Chọn B

Điểm M biểu diễn cho số phức $z = 2+4i$.

Câu 14: Cho hai số phức $z_1 = 1+2i$ và $z_2 = 2-3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

A. 1 .

B. 11 .

C. 12 .

D. $12i$.

Câu 15: Cho hai số phức $z_1 = 1+2i$ và $z_2 = 2-3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

A. 1 .

B. 11 .

C. 12 .

D. $12i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $w = 3z_1 - 2z_2 = 3(1+2i) - 2(2-3i) = -1+12i$.

Vậy phần ảo của số phức w là 12 .

Câu 16: Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

B. $\bar{z} = a-bi$.

C. z^2 là số thực.

D. $z.\bar{z}$ là số thực.

Câu 17: Cho hai số phức z và z' . Trong các mệnh đề sai, mệnh đề nào **sai**?

A. $|z + z'| = |z| + |z'|$. **B.** $|z.z'| = |z|.|z'|$. **C.** $\overline{z.z'} = \overline{z.z'}$. **D.** $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

Câu 18: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. **B.** $\overline{z} = a - bi$. **C.** z^2 là số thực. **D.** $z.\overline{z}$ là số thực.

Lời giải

Chọn C

Đáp án A và B **đúng** theo định nghĩa.

Đáp án C: Ta có $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2bi - b^2$ là số phức có phần ảo khác 0 khi $b \neq 0 \rightarrow$ **Sai**.

Đáp án D: $z.\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$ là một số thực $\rightarrow$ **Đúng**.

Câu 19: Cho hai số phức z và z' . Trong các mệnh đề sai, mệnh đề nào **sai**?

A. $|z + z'| = |z| + |z'|$. **B.** $|z.z'| = |z|.|z'|$. **C.** $\overline{z.z'} = \overline{z.z'}$. **D.** $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

Lời giải

Chọn A

Với hai số phức z và z' , ta có: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Câu 20: Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 4 - i$. Tính môđun của số phức $z_1^2 + \overline{z_2}$.

A. 12. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 15.

Câu 21: Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 4 - i$. Tính môđun của số phức $z_1^2 + \overline{z_2}$.

A. 12. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1^2 + \overline{z_2} = (3 - i)^2 + (4 + i) = 12 - 5i$ nên $|z_1^2 + \overline{z_2}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

Câu 22: Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$.

A. $M(3; -4)$. **B.** $M(-3; 4)$. **C.** $M(-3; -4)$. **D.** $M(3; 4)$.

Câu 23: Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$.

A. $M(3; -4)$. **B.** $M(-3; 4)$. **C.** $M(-3; -4)$. **D.** $M(3; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có điểm $M(3; -4)$ biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$.

Câu 24: Số phức $z = 4 + 2i$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là M . Tìm tọa độ điểm M

A. $M(4; 2)$. **B.** $M(2; 4)$. **C.** $M(4; -2)$. **D.** $M(-4; -2)$.

Câu 25: Số phức $z = 4 + 2i$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là M . Tìm tọa độ điểm M

A. $M(4; 2)$. **B.** $M(2; 4)$. **C.** $M(4; -2)$. **D.** $M(-4; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $z = 4 + 2i$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là $M(4; 2)$.

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $(1 + z)(1 + i) - 5 + i = 0$. Số phức $w = 1 + z$ bằng

A. $-1 + 3i$. **B.** $1 - 3i$. **C.** $-2 + 3i$. **D.** $2 - 3i$.

Câu 27: Cho số phức z thỏa mãn $(1+z)(1+i)-5+i=0$. Số phức $w=1+z$ bằng
A. $-1+3i$. **B.** $1-3i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $2-3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(1+z)(1+i)-5+i=0 \Leftrightarrow 1+z=2-3i \Leftrightarrow z=1-3i$.

Vậy $w=1+z=1+1-3i=2-3i$.

Câu 28: Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức

$z = |1-\sqrt{3}i|(1+2i) + |3-4i|(2+3i)$. Giá trị của $a-b$ là

A. 7. **B.** -7. **C.** 31. **D.** -31.

Câu 29: Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức

$z = |1-\sqrt{3}i|(1+2i) + |3-4i|(2+3i)$. Giá trị của $a-b$ là

A. 7. **B.** -7. **C.** 31. **D.** -31.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z = |1-\sqrt{3}i|(1+2i) + |3-4i|(2+3i) = 2(1+2i) + 5(2+3i) = 12+19i$

Vậy $a-b=12-19=-7$.

Câu 30: Cho số phức z có số phức liên hợp $\bar{z}=3-2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng.

A. 1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z=(1+2i)-(-2+i)$. Mô đun của z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 32: Cho số phức z có số phức liên hợp $\bar{z}=3-2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng.

A. 1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $z=3+2i$. Vậy tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng 5.

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z=(1+2i)-(-2+i)$. Mô đun của z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$(1+2i)z=(1+2i)-(-2+i) \Leftrightarrow (1+2i)z=3+i \Leftrightarrow z=\frac{3+i}{1+2i}=1-i$. Vậy $|z|=\sqrt{2}$.

Câu 34: Cho các số phức $z_1=2+3i$, $z_2=4+5i$. Số phức liên hợp của số phức $w=2(z_1+z_2)$ là

A. $\bar{w}=8+10i$. **B.** $\bar{w}=12-16i$. **C.** $\bar{w}=12+8i$. **D.** $\bar{w}=28i$.

Câu 35: Cho các số phức $z_1=2+3i$, $z_2=4+5i$. Số phức liên hợp của số phức $w=2(z_1+z_2)$ là

A. $\bar{w}=8+10i$. **B.** $\bar{w}=12-16i$. **C.** $\bar{w}=12+8i$. **D.** $\bar{w}=28i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w = 2(6 + 8i) = 12 + 16i \Rightarrow \bar{w} = 12 - 16i$.

Câu 36: Cho số phức $z = a + bi$ với a, b là các số thực bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Phần ảo của z là bi .
 B. Môđun của z^2 bằng $a^2 + b^2$.
 C. $z - \bar{z}$ không phải là số thực.
 D. Số z và $\bar{z}$ có môđun khác nhau.

Câu 37: Cho số phức $z = a + bi$ với a, b là các số thực bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Phần ảo của z là bi .
 B. Môđun của z^2 bằng $a^2 + b^2$.
 C. $z - \bar{z}$ không phải là số thực.
 D. Số z và $\bar{z}$ có môđun khác nhau.

Lời giải

Chọn B

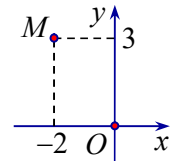
$$|z^2| = |z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Câu 38: Cho số phức $z = 3 + i$. Tính $|\bar{z}|$.

- A. $|\bar{z}| = 2\sqrt{2}$.
 B. $|\bar{z}| = 2$.
 C. $|\bar{z}| = 4$.
 D. $|\bar{z}| = \sqrt{10}$.

Câu 39: Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu thị cho số phức

- A. $3 - 2i$.
 B. $-2 + 3i$.
 C. $2 - 3i$.
 D. $3 + 2i$.



Câu 40: Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + 1 = 0$ (trong đó số phức z_1 có phần ảo âm). Tính $z_1 + 3z_2$.

- A. $z_1 + 3z_2 = \sqrt{2}i$.
 B. $z_1 + 3z_2 = -\sqrt{2}$.
 C. $z_1 + 3z_2 = -\sqrt{2}i$.
 D. $z_1 + 3z_2 = \sqrt{2}$.

Câu 41: Cho số phức $z = 3 + i$. Tính $|\bar{z}|$.

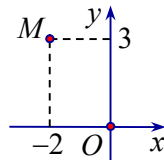
- A. $|\bar{z}| = 2\sqrt{2}$.
 B. $|\bar{z}| = 2$.
 C. $|\bar{z}| = 4$.
 D. $|\bar{z}| = \sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } |z| = |\bar{z}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Câu 42: Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu thị cho số phức



- A. $3 - 2i$.
 B. $-2 + 3i$.
 C. $2 - 3i$.
 D. $3 + 2i$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ, tung độ của điểm M là phần thực, phần ảo của số phức $\Leftrightarrow z = -2 + 3i$.

Câu 43: Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + 1 = 0$ (trong đó số phức z_1 có phần ảo âm). Tính $z_1 + 3z_2$.

A. $z_1 + 3z_2 = \sqrt{2}i$. **B.** $z_1 + 3z_2 = -\sqrt{2}$. **C.** $z_1 + 3z_2 = -\sqrt{2}i$. **D.** $z_1 + 3z_2 = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$. Khi đó: $z_1 + 3z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i + 3\frac{\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2}i$.

Câu 44: Trong mặt phẳng phức gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$), M' là điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** M' đối xứng với M qua Oy .
B. M' đối xứng với M qua Ox .
C. M' đối xứng với M qua đường thẳng $y = x$.
D. M' đối xứng với M qua O .

Câu 45: Trong mặt phẳng phức gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$), M' là điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** M' đối xứng với M qua Oy .
B. M' đối xứng với M qua Ox .
C. M' đối xứng với M qua đường thẳng $y = x$.
D. M' đối xứng với M qua O .

Lời giải

Chọn B

Ta có M' là điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z} = a - bi \Rightarrow M'(a; -b)$ nên M' đối xứng với M qua Ox .

Câu 46: Gọi z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm của phương trình $z^3 - 1 = 0$. Tính $S = |z_1| + |z_2| + |z_3|$

- A.** $S = 1$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 3$.

Câu 47: Gọi z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm của phương trình $z^3 - 1 = 0$. Tính $S = |z_1| + |z_2| + |z_3|$

- A.** $S = 1$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$. Do đó: $S = |1| + \left| \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| + \left| \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 3$.

Câu 48: Trong mặt phẳng phức, cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z}$ là điểm nào sau đây

- A.** $M(-1; -2)$. **B.** $Q(1; 2)$. **C.** $P(-1; 2)$. **D.** $N(-2; 1)$.

Câu 49: Trong mặt phẳng phức, cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z}$ là điểm nào sau đây

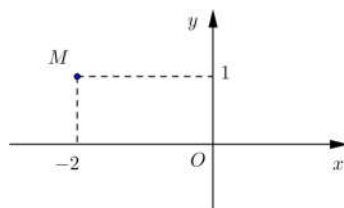
- A.** $M(-1; -2)$. **B.** $Q(1; 2)$. **C.** $P(-1; 2)$. **D.** $N(-2; 1)$.

Lời giải

Chọn B

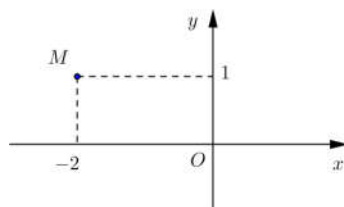
Ta có: $z = 1 - 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 + 2i$ nên có điểm biểu diễn là $(1; 2)$.

Câu 50: Trong mặt phẳng Oxy , điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z . Số phức $\bar{z}$ là



- A.** $-2 + i$. **B.** $1 - 2i$. **C.** $-2 - i$. **D.** $1 + 2i$.

Câu 51: Trong mặt phẳng Oxy , điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z . Số phức $\bar{z}$ là



- A.** $-2 + i$. **B.** $1 - 2i$. **C.** $-2 - i$. **D.** $1 + 2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $z = -2 + i \Rightarrow \bar{z} = -2 - i$.

Câu 52: Cho số phức $z = 11 + i$. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là điểm nào dưới đây?

- A.** $Q(-11; 0)$. **B.** $M(11; 1)$. **C.** $P(11; 0)$. **D.** $N(11; -1)$.

Câu 53: Cho số phức $z = 11 + i$. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là điểm nào dưới đây?

- A.** $Q(-11; 0)$. **B.** $M(11; 1)$. **C.** $P(11; 0)$. **D.** $N(11; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\bar{z} = 11 - i$ nên điểm biểu diễn số phức liên hợp z là $N(11; -1)$.

Câu 54: Phần thực của số phức $z = 1 - 2i$ bằng

- A.** -2 . **B.** -1 . **C.** 1 . **D.** 3 .

Câu 55: Phần thực của số phức $z = 1 - 2i$ bằng

- A.** -2 . **B.** -1 . **C.** 1 . **D.** 3 .

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phần thực của số phức $z = 1 - 2i$ bằng 1.

Câu 56: Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$. Tích $z_1 \cdot z_2$ bằng:

A. $-5i$.

B. $6-6i$.

C. $5i$.

D. $12+5i$.

Câu 57: Số phức nghịch đảo z^{-1} của số phức $z = 2-2i$ là

A. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.

B. $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$.

C. $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$.

D. $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.

Câu 58: Cho hai số phức $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 3-2i$. Tích $z_1 \cdot z_2$ bằng:

A. $-5i$.

B. $6-6i$.

C. $5i$.

D. $12+5i$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } z_1 \cdot z_2 = (2+3i) \cdot (3-2i) = 12+5i.$$

Câu 59: Số phức nghịch đảo z^{-1} của số phức $z = 2-2i$ là

A. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.

B. $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$.

C. $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$.

D. $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } z^{-1} = \frac{1}{2-2i} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i.$$

Câu 60: Cho số phức $z = (1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. 2.

B. 4.

C. -2.

D. $2i$.

Câu 61: Cho số phức $z = (1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. 2.

B. 4.

C. -2.

D. $2i$.

Lời giải

Chọn A

$$z = (1+i)^2(1+2i) = (1+2i+i^2)(1+2i) = 2i(1+2i) = 2i+4i^2 = 2i-4 \text{ có phần ảo là } 2.$$

Câu 62: Số phức $z = 15-3i$ có phần ảo bằng

A. -3.

B. 15.

C. $3i$.

D. 3.

Câu 63: Cho hai số phức $z = 3-5i$ và $w = -1+2i$. Điểm biểu diễn số phức $z' = \bar{z} - w \cdot z$ trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A. $(-4; -6)$.

B. $(4; -6)$.

C. $(4; 6)$.

D. $(-6; -4)$.

Câu 64: Số phức $z = 15-3i$ có phần ảo bằng

A. -3.

B. 15.

C. $3i$.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Câu 65: Cho hai số phức $z = 3-5i$ và $w = -1+2i$. Điểm biểu diễn số phức $z' = \bar{z} - w \cdot z$ trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A. $(-4; -6)$.

B. $(4; -6)$.

C. $(4; 6)$.

D. $(-6; -4)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } z' = \bar{z} - w \cdot z = 3+5i - (-1+2i)(3-5i) = 3+5i - (7+11i) = -4-6i.$$

Câu 66: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 3 + 2i$.

- A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$. B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$. D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 .

Câu 67: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 3 + 2i$.

- A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$. B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$. D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 .

Lời giải

Chọn D

Số phức $z = 3 + 2i$ có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 .

Câu 68: Cho số phức $z = 2 + 4i$. Hiệu phần thực và phần ảo của z bằng.

- A. 2 . B. $2\sqrt{5}$. C. -2 . D. 6 .

Câu 69: Cho số phức $z = 2 + 4i$. Hiệu phần thực và phần ảo của z bằng.

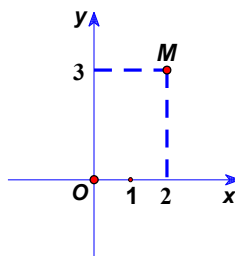
- A. 2 . B. $2\sqrt{5}$. C. -2 . D. 6 .

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phần thực và phần ảo lần lượt là 2 và 4 . Vậy hiệu phần thực và phần ảo của z bằng -2 .

Câu 70: Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu diễn số phức $\bar{z}$.



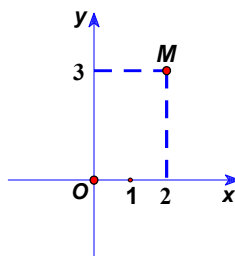
Số phức z bằng

- A. $2 - 3i$. B. $2 + 3i$. C. $3 + 2i$. D. $3 - 2i$.

Câu 71: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1^2| + |z_2^2|$ bằng.

- A. 10 . B. 20 . C. 6 . D. $6 - 8i$.

Câu 72: Điểm M trong hình vẽ dưới đây biểu diễn số phức $\bar{z}$.



Số phức z bằng

- A. $2 - 3i$. B. $2 + 3i$. C. $3 + 2i$. D. $3 - 2i$.

Lời giải

Chọn A

Theo hình vẽ thì $\bar{z} = 2 + 3i \Rightarrow z = 2 - 3i$.

Câu 73: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1^2| + |z_2^2|$ bằng.

A. 10.

B. 20.

C. 6.

D. $6-8i$.

Lời giải

Chọn A

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - i = z_1 \\ z = 2 + i = z_2 \end{cases}.$$
$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 5 + 5 = 10.$$

Câu 74: Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$ là

A. $M(-1; 2)$.

B. $M(-1; -2)$.

C. $M(1; -2)$.

D. $M(2; 1)$.

Câu 75: Cho phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 . Tính $A = |z_1| + |z_2| + z_1 z_2$.

A. $A = 25 + 2\sqrt{5}$.

B. $A = 0$.

C. $A = 5 - 2\sqrt{5}$.

D. $A = 5 + 2\sqrt{5}$.

Câu 76: Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm biểu diễn của số phức $\bar{z}$ là

A. $M(-1; 2)$.

B. $M(-1; -2)$.

C. $M(1; -2)$.

D. $M(2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\bar{z} = 1 - 2i$ có điểm biểu diễn là $M(1; -2)$.

Câu 77: Cho phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 . Tính $A = |z_1| + |z_2| + z_1 z_2$.

A. $A = 25 + 2\sqrt{5}$.

B. $A = 0$.

C. $A = 5 - 2\sqrt{5}$.

D. $A = 5 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } A = |z_1| + |z_2| + z_1 z_2 = 5 + 2\sqrt{5}.$$

Câu 78: Cho số phức $z = 3 - 4i$. Môđun của z bằng

A. 25.

B. 7.

C. -1.

D. 5.

Câu 79: Cho số phức $z = 3 - 4i$. Môđun của z bằng

A. 25.

B. 7.

C. -1.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

Câu 80: Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

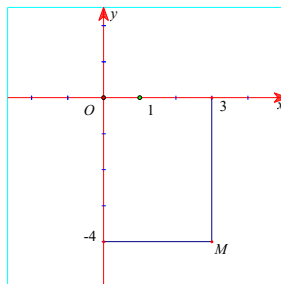
A. $z = \sqrt{3} + 2i$.

B. $z = -2 + 3i$.

C. $z = 2i$.

D. $z = -2$.

Câu 81: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z .



Tìm z ?

- A.** $z = -4 + 3i$. **B.** $z = -3 + 4i$. **C.** $z = 3 - 4i$. **D.** $z = 3 + 4i$.

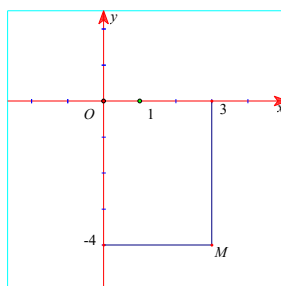
Câu 82: Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

- A.** $z = \sqrt{3} + 2i$. **B.** $z = -2 + 3i$. **C.** $z = 2i$. **D.** $z = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 83: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z .



Tìm z ?

- A.** $z = -4 + 3i$. **B.** $z = -3 + 4i$. **C.** $z = 3 - 4i$. **D.** $z = 3 + 4i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Số phức z có phần thực $a = 3$ và phần ảo $b = -4$ nên $z = 3 - 4i$.

Câu 84: Cho số phức $z = -1 - 4i$. Tìm phần thực của số phức $\bar{z}$.

- A.** -1 . **B.** 1 . **C.** 4 . **D.** -4 .

Câu 85: Tìm các số thực x, y thỏa mãn $2x - 1 + (1 - 2y)i = 2 - x + (3y + 2)i$.

- A.** $x = 1; y = \frac{3}{5}$. **B.** $x = 3; y = \frac{3}{5}$. **C.** $x = 3; y = -\frac{1}{5}$. **D.** $x = 1; y = -\frac{1}{5}$.

Câu 86: Cho số phức $z = -1 - 4i$. Tìm phần thực của số phức $\bar{z}$.

- A.** -1 . **B.** 1 . **C.** 4 . **D.** -4 .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\bar{z} = -1 + 4i$. Vậy phần thực của số phức $\bar{z}$ là (-1) .

Câu 87: Tìm các số thực x, y thỏa mãn $2x - 1 + (1 - 2y)i = 2 - x + (3y + 2)i$.

- A.** $x = 1; y = \frac{3}{5}$. **B.** $x = 3; y = \frac{3}{5}$. **C.** $x = 3; y = -\frac{1}{5}$. **D.** $x = 1; y = -\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$2x-1+(1-2y)i=2-x+(3y+2)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=2-x \\ 1-2y=3y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

Câu 88: Trong mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

- A.** $z=3+2i$. **B.** $z=-3+2i$. **C.** $z=-3-2i$. **D.** $z=3-2i$.

Câu 89: Trong mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

- A.** $z=3+2i$. **B.** $z=-3+2i$. **C.** $z=-3-2i$. **D.** $z=3-2i$.

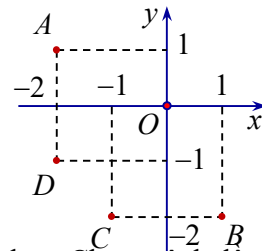
Lời giải

Chọn B

Điểm $M(-3;2)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-3+2i$.

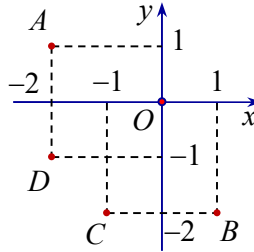
Câu 90: Cho bốn điểm A, B, C, D trên hình vẽ biểu diễn 4 số phức khác nhau. Chọn mệnh đề **sai**.

- A.** B là biểu diễn số phức $z=1-2i$.
B. D là biểu diễn số phức $z=-1-2i$.
C. C là biểu diễn số phức $z=-1-2i$.
D. A là biểu diễn số phức $z=-2+i$.



Câu 91: Cho bốn điểm A, B, C, D trên hình vẽ biểu diễn 4 số phức khác nhau. Chọn mệnh đề **sai**.

- A.** B là biểu diễn số phức $z=1-2i$. **B.** D là biểu diễn số phức $z=-1-2i$.
C. C là biểu diễn số phức $z=-1-2i$. **D.** A là biểu diễn số phức $z=-2+i$.



Lời giải

Chọn B

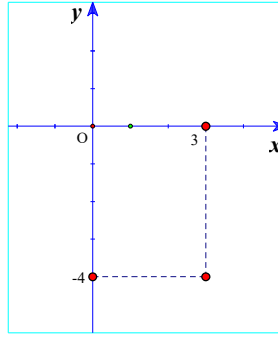
Theo hình vẽ thì điểm D là biểu diễn số phức $z=-2-i$. Suy ra B sai.

Câu 92: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+1=0$. Giá trị của biểu thức

$P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2$ bằng:

- A.** $P=-1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=1$. **D.** $P=0$.

Câu 93: Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức z .



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
- B. Số phức z phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
- C. Số phức z phần thực là -4 và phần ảo là 3.
- D. Số phức z phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Câu 94: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$ bằng:

- A. $P = -1$.
- B. $P = 2$.
- C. $P = 1$.
- D. $P = 0$.

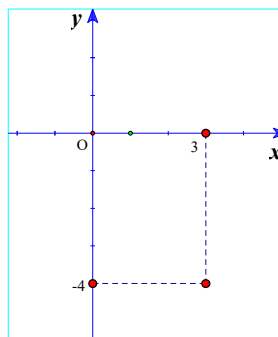
Lời giải

Chọn D

$$z^2 + z + 1 = 0 \text{ có } z_1 + z_2 = -1 \text{ và } z_1 \cdot z_2 = 1$$

$$\text{Khi đó } P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2 = (z_1 + z_2)^2 - z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow P = 0.$$

Câu 95: Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức z .



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

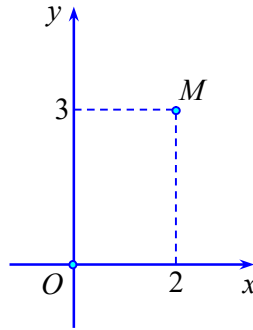
- A. Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
- B. Số phức z phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
- C. Số phức z phần thực là -4 và phần ảo là 3.
- D. Số phức z phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Lời giải

Chọn A

Điểm M biểu diễn cho số phức $z = 3 - 4i$.

Câu 96: Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z . Số phức $\bar{z}$ bằng



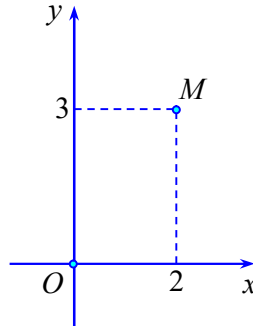
A. $2+3i$.

B. $2-3i$.

C. $3+2i$.

D. $3-2i$.

Câu 97: Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z . Số phức $\bar{z}$ bằng



A. $2+3i$.

B. $2-3i$.

C. $3+2i$.

D. $3-2i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M(2;3)$ là điểm biểu diễn số phức $z = 2+3i$.

Do đó $\bar{z} = 2-3i$.

Câu 98: Cho hai số phức $z_1 = 2-2i$, $z_2 = -3+3i$. Khi đó số phức $z_1 - z_2$ là

A. $-5+5i$.

B. $-5i$.

C. $5-5i$.

D. $-1+i$.

Câu 99: Cho hai số phức $z_1 = 2-2i$, $z_2 = -3+3i$. Khi đó số phức $z_1 - z_2$ là

A. $-5+5i$.

B. $-5i$.

C. $5-5i$.

D. $-1+i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1 - z_2 = (2-2i) - (-3+3i) = 5-5i$.

Câu 100: Tìm tọa độ của điểm biểu diễn hình học của số phức $z = 8-9i$.

A. $(8;9)$.

B. $(8;-9)$.

C. $(-9;8)$.

D. $(8;-9i)$.

Câu 101: Cho số phức $z = a+bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $z + \bar{z} = 2bi$.

B. $z - \bar{z} = 2a$.

C. $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$.

D. $|z^2| = |z|^2$.

Câu 102: Tìm tọa độ của điểm biểu diễn hình học của số phức $z = 8-9i$.

A. $(8;9)$.

B. $(8;-9)$.

C. $(-9;8)$.

D. $(8;-9i)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 103: Cho số phức $z = a+bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $z + \bar{z} = 2bi$.

B. $z - \bar{z} = 2a$.

C. $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$.

D. $|z^2| = |z|^2$.

Lời giải

Chọn D

Câu 104: Số phức nào dưới đây là số thuần ảo ?

A. $z = -2$.

B. $z = -2i$.

C. $z = 2 + 2i$.

D. $z = -1 + \sqrt{2}i$.

Câu 105: Số phức nào dưới đây là số thuần ảo ?

A. $z = -2$.

B. $z = -2i$.

C. $z = 2 + 2i$.

D. $z = -1 + \sqrt{2}i$.

Lời giải

Chọn B

Câu 106: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1$ và $\bar{z}_2(z_2 - 1 + i) - 6i + 2$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$.

A. $18 - 6\sqrt{2}$.

B. $3 - \sqrt{2}$.

C. $18 + 6\sqrt{2}$.

D. $18 - 9\sqrt{2}$.

Câu 107: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1$ và $\bar{z}_2(z_2 - 1 + i) - 6i + 2$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$.

A. $18 - 6\sqrt{2}$.

B. $3 - \sqrt{2}$.

C. $18 + 6\sqrt{2}$.

D. $18 - 9\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z_2 = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

$$\bar{z}_2(z_2 - 1 + i) - 6i + 2 = x^2 + y^2 - x + y + 2 + (x + y - 6)i.$$

Vì $\bar{z}_2(z_2 - 1 + i) - 6i + 2$ là số thực nên $x + y - 6 = 0$.

Ta có

$$P = |z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 - 1.$$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z_1 , suy ra A nằm trên đường tròn (C) tâm O bán kính $r = 1$.

Gọi B là điểm biểu diễn số phức z_2 , suy ra B nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 6 = 0$.

Ta có $P = AB^2 - 1$.

$$\text{Mà } AB \geq d(O; \Delta) - r = \frac{|0 + 0 - 6|}{\sqrt{2}} - 1 = 3\sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Nên } P \geq (3\sqrt{2} - 1)^2 - 1 = 18 - 6\sqrt{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi B là hình chiếu vuông góc của O trên Δ và A là giao điểm của đoạn OB với đường tròn (C) .

Câu 1: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực âm và phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = i^{2017} z_0$?

- A. $M(3; -1)$. B. $M(3; 1)$. C. $M(-3; 1)$. **D. $M(-3; -1)$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + 3i \\ z = -1 - 3i \end{cases}$. Suy ra $z_0 = -1 + 3i$.

$$w = i^{2017} z_0 = i(-1 + 3i) = -3 - i.$$

Suy ra : Điểm $M(-3; -1)$ biểu diễn số phức w .

Câu 2: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn: $z(2-i) + 13i = 1$. Tính mô đun của số phức z .

- A. $|z| = 34$. **B. $|z| = \sqrt{34}$.** C. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$. D. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $z(2-i) + 13i = 1 \Rightarrow z = \frac{1-13i}{2-i} \Rightarrow |z| = \frac{|1-13i|}{|2-i|} = \sqrt{34}$.

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{-11}{5}\right)^2 + \left(\frac{27}{5}\right)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{850}{25}} = \sqrt{34}.$$

Cách 2: Dùng máy tính Casio bấm $|z| = \left| \frac{1-13i}{2-i} \right|$.

Câu 3: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Trong mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $(z - \bar{z})^2$ với $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$). Chọn kết luận đúng.

- A. M thuộc tia Ox . B. M thuộc tia Oy .
C. M thuộc tia đối của tia Ox . D. M thuộc tia đối của tia Oy .

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = a + bi$

$$(z - \bar{z})^2 = (a + bi - a + bi)^2 = -4b^2.$$

Câu 4: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Tìm số phức z thỏa mãn $|z-2| = |z|$ và $(z+1)(\bar{z}-i)$ là số thực.

- A. $z = 1 + 2i$. B. $z = -1 - 2i$. C. $z = 2 - i$. **D. $z = 1 - 2i$.**

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} \begin{cases} |z-2|=|z| \\ (z+1)(\bar{z}-i) \in \mathbb{R} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \\ (x+1+iy)(x-iy-i) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \\ (x+1+iy)(x-iy-i) \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (-x-1)(y+1)+xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 5: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Cho bốn điểm M, N, P, Q là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $-i, 2+i, 5, 1+4i$. Hỏi, điểm nào là trọng tâm của tam giác tạo bởi ba điểm còn lại?

A. M .

B. N .

C. P .

D. Q .

Lời giải

Chọn B

Tọa độ các điểm: $M(0; -1), N(2; 1), P(5; 0), Q(1; 4)$.

$$\text{Để thấy } \begin{cases} \frac{0+5+1}{3} = 2 \\ \frac{-1+0+4}{3} = 1 \end{cases} \text{ nên } N \text{ là trọng tâm của tam giác } MPQ.$$

Câu 6: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Trong các số phức: $(1+i)^3, (1+i)^4, (1+i)^5, (1+i)^6$ số phức nào là số phức thuần ảo?

A. $(1+i)^3$.

B. $(1+i)^4$.

C. $(1+i)^5$.

D. $(1+i)^6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$.

Do đó:

$$\checkmark (1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = 2i+2i^2 = -2+2i.$$

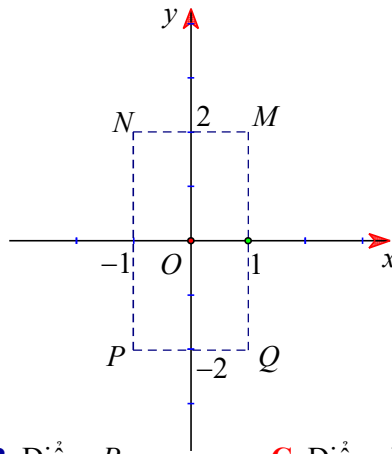
$$\checkmark (1+i)^4 = (1+i)^2(1+i)^2 = 2i \cdot 2i = 4i^2 = -4.$$

$$\checkmark (1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = -4(1+i) = -4-4i.$$

$$\checkmark (1+i)^6 = \left[(1+i)^3 \right]^2 = (2i)^3 = -8i.$$

Câu 7: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = -1+3i$.

Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình dưới đây?



- A. Điểm Q . B. Điểm P . **C. Điểm M .** D. Điểm N .

Lời giải

Chọn C

Ta có $z = \frac{-1+3i}{1+i} = \frac{(-1+3i)(1-i)}{2} = \frac{-1+3+3i+i}{2} = 1+2i$. Do đó điểm biểu diễn số phức z là điểm $M(1;2)$.

Câu 8: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Phần thực và phần ảo của số phức $z = (1+2i)i$ lần lượt là

- A. 1 và 2. **B. -2 và 1.** C. 1 và -2. D. 2 và 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z = (1+2i)i = -2+i$. Vậy phần thực của số phức z bằng -2 và phần ảo của số phức z bằng 1.

Câu 9: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z_1 là:

- A. $M(-1; -\sqrt{2})$.** B. $M(-1; 2)$. C. $M(-1; -2)$. D. $M(-1; -\sqrt{2}i)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\Delta' = 1-3 = -2 = 2i^2$ nên phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$ có hai nghiệm phức là $z = -1 \pm \sqrt{2}i$.

Do nghiệm cần tìm có phần ảo âm nên $z_1 = -1 - \sqrt{2}i$. Vậy $M(-1; -\sqrt{2})$.

Câu 10: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ nằm trên đường thẳng có phương trình là:

- A. $y = 7$.** **B. $x = 7$.** C. $y = x + 7$. D. $y = x$.

Lời giải

Chọn B

Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ là $M(7; b)$.

Rõ ràng điểm $M(7; b)$ thuộc đường thẳng $x = 7$.

Câu 11: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$.

Tìm môđun của $\bar{z} + iz$.

- A. $4\sqrt{2}$. B. 4. C. $8\sqrt{2}$. D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\bar{z} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{1 - i} \Leftrightarrow \bar{z} = -4 - 4i \Rightarrow z = -4 + 4i$$

$$iz = i(-4 - 4i) = -4 - 4i$$

$$\bar{z} + iz = -4 - 4i + (-4 - 4i) = -8 - 8i$$

$$|\bar{z} + iz| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}$$

Câu 12: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện

$(1 + i)(z - i) + 2z = 2i$. Môđun của số phức $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$ là:

- A. $\sqrt{10}$. B. $\sqrt{8}$. C. $-\sqrt{10}$. D. $-\sqrt{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(1 + i)(z - i) + 2z = 2i \Leftrightarrow (3 + i)z = -1 + 3i \Leftrightarrow z = i$.

$$\text{Suy ra } w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2} = \frac{-i - 2i + 1}{i^2} = -1 + 3i.$$

$$\text{Vậy } |w| = \sqrt{10}.$$

Câu 13: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Cho z là số phức có môđun bằng 2017

và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z + w}$. Môđun của số phức w là:

- A. 2015. B. 0. C. 1. D. 2017.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z + w} \Rightarrow (z + w)^2 = zw \Leftrightarrow w^2 + wz + z^2 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{-z \pm z\sqrt{3}i}{2}.$$

$$\bullet \text{ Với } w = \frac{-z - z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \frac{|-z - z\sqrt{3}i|}{2} = |-z| \cdot \frac{|1 + i\sqrt{3}|}{2} = |z| = 2017.$$

$$\bullet \text{ Với } w = \frac{-z + z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \frac{|-z + z\sqrt{3}i|}{2} = |-z| \cdot \frac{|1 - i\sqrt{3}|}{2} = |z| = 2017.$$

Câu 14: (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Tính môđun số phức nghịch đảo của số phức

$$z = (1 - 2i)^2.$$

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}.$

B. $\sqrt{5}.$

C. $\frac{1}{25}.$

D. $\frac{1}{5}.$

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có $z = -3 - 4i$.

$$\text{Suy ra } \frac{1}{z} = \frac{1}{-3 - 4i} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$$\text{Nên } |z| = \sqrt{\left(\frac{-3}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{1}{5}.$$

Cách 2: Ta có $z = -3 - 4i$. Do đó $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}$

Câu 15: (THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn

$$z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7). \text{ Khi đó, môđun của } z \text{ bằng bao nhiêu?}$$

A. $|z| = 5.$

B. $|z| = \sqrt{3}.$

C. $|z| = \sqrt{5}.$

D. $|z| = 3.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $\bar{z} = a - bi$.

$$\text{Ta có } z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7) \Leftrightarrow a + bi + 4(a - bi) = 7 + i(a + bi - 7)$$

$$\Leftrightarrow a + bi + 4a - 4bi = 7 + ai - b - 7i \Leftrightarrow 5a + b - (a + 3b)i = 7 - 7i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = 7 \\ a + 3b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Do đó $z = 1 + 2i$. Vậy $|z| = \sqrt{5}$.

Câu 16: (THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn

$$(1 + 3i)z - 5 = 7i. \text{ Mệnh đề nào sau đây đúng?}$$

A. $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i.$

B. $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i.$

C. $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i.$

D. $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } (1 + 3i)z - 5 = 7i \Leftrightarrow z = \frac{5 + 7i}{1 + 3i} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i.$$

Câu 17: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình

$$4z^2 - 4z + 3 = 0. \text{ Giá trị của biểu thức } |z_1| + |z_2| \text{ bằng}$$

A. $3\sqrt{2}.$

B. $2\sqrt{3}.$

C. 3.

D. $\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 4z^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } |z_1| + |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

Câu 1: (THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho $\int_1^2 f(x) dx = a$. Tính $I = \int_0^1 x.f(x^2+1) dx$ theo a .

- A. $I = 2a$. B. $I = 4a$. **C. $I = \frac{a}{2}$.** D. $I = \frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ và } x = 1 \Rightarrow t = 2. \text{ Khi đó: } I = \int_0^1 x.f(x^2+1) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(t) dt.$$

Do tính chất của tích phân là tích phân không phụ thuộc vào biến số tích phân nên

$$\int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 f(x) dx = a \text{ suy ra } I = \frac{a}{2}.$$

Câu 2: (THPT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Cho số phức $z = a + bi$ (trong đó a, b là các số thực thỏa mãn $3z - (4 + 5i)\bar{z} = -17 + 11i$). Tính ab .

- A. $ab = 6$.** B. $ab = -3$. C. $ab = 3$. D. $ab = -6$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi.$$

$$\text{Khi đó } 3z - (4 + 5i)\bar{z} = -17 + 11i \Leftrightarrow 3(a + bi) - (4 + 5i)(a - bi) = -17 + 11i$$

$$\Leftrightarrow (-a - 5b) - (5a - 7b)i = -17 + 11i \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 5b = -17 \\ -5a + 7b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + 3i.$$

$$\text{Vậy } ab = 6.$$

Câu 3: (THPT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Tổng các nghiệm phức của phương trình $z^3 + z^2 - 2 = 0$ là

- A. 1. **B. -1.** C. $1 - i$. D. $1 + i$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } z^3 + z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ (z + 1)^2 = -1 = i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \pm i \end{cases}.$$

$$\text{Do đó tổng các nghiệm phức của } z^3 + z^2 - 2 = 0 \text{ là } 1 + (-1 + i) + (-1 - i) = -1.$$

Câu 4: (THPT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Trên mặt phẳng phức tập hợp các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z + 2 + i| = |\bar{z} - 3i|$ là đường thẳng có phương trình

- A. $y = x + 1$. B. $y = -x + 1$. C. $y = -x - 1$. **D. $y = x - 1$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Từ } z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi.$$

$$\text{Do đó } |x + yi + 2 + i| = |x - yi - 3i| \Leftrightarrow |(x + 2) + (y + 1)i| = |x - (y + 3)i|$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = x^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow 4x + 2y + 5 = 6y + 9 \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Câu 5: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Tích phân $\int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx$ bằng.

- A. $2 \ln 5$. B. $\frac{1}{2} \ln 5$. **C. $\ln 5$.** D. $4 \ln 5$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx = \ln|2x+1| \Big|_0^2 = \ln 5.$$

Câu 6: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018). Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|\bar{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là:

- A. $I(-2; -1); R = 4$.** B. $I(-2; -1); R = 2$. C. $I(2; -1); R = 4$. D. $I(2; -1); I(2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có:

$$|\bar{z} + 2 - i| = 4 \Leftrightarrow |(x+2) + (-y-1)i| = 4 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|\bar{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn có tâm $I(-2; -1)$ và có bán kính $R = 4$.

Câu 7: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Trong tập số phức $\mathbb{C}$, chọn phát biểu đúng ?

- A. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. B. $z + \bar{z}$ là số thuần ảo.
C. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. D. $z^2 - (\bar{z})^2 = 4ab$ với $z = a + bi$.

Lời giải

Chọn A

Xét $z_1 = x + yi$, $z_2 = m + ni$ ($x, y, m, n \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } \begin{cases} z_1 + z_2 = (x+m) + (y+n)i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = x+m - (y+n)i \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} = (x-yi) + (m-ni) = x+m - (y+n)i \end{cases} \Rightarrow \text{A đúng.}$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(x+m)^2 + (y+n)^2} \text{ và } |z_1| + |z_2| = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{m^2 + n^2} \text{ nên C sai.}$$

$$\text{Lại có } z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a \Rightarrow \text{B sai.}$$

$$z^2 - (\bar{z})^2 = (a+bi)^2 - (a-bi)^2 = (a^2 - b^2 + 2abi) - (a^2 - b^2 - 2abi) = 4abi \Rightarrow \text{D sai.}$$

Câu 8: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} - 3 + i = 0$. Modun của z bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. 10. C. $\sqrt{3}$. D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \bar{z} - 3 + i = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = 3 - i \Leftrightarrow z = 3 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Câu 9: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Kí hiệu z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = (1 + 2i)z_1 - \frac{3}{2}i$?

- A.** $M(-2; 1)$. **B.** $M(3; -2)$. **C.** $M(3; 2)$. **D.** $M(2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 4z^2 - 16z + 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 - \frac{1}{2}i \\ z_2 = 2 + \frac{1}{2}i \end{cases}.$$

Khi đó: $w = (1 + 2i)z_1 - \frac{3}{2}i = (1 + 2i)\left(2 - \frac{1}{2}i\right) - \frac{3}{2}i = 3 + 2i \Rightarrow$ tọa độ điểm biểu diễn số phức w là: $M(3; 2)$.

Câu 1: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Cho hai số phức $z_1 = -1 + 2i$,

$z_2 = -1 - 2i$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A. $\sqrt{10}$. **B.** 10. C. -6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } |z_1|^2 + |z_2|^2 = \left(\sqrt{(-1)^2 + 2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}\right)^2 = 10.$$

Câu 2: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Cho số phức $z = a + bi$,

$(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$ và $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = 7$. B. $P = -1$. C. $P = 1$. **D.** $P = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |a-1+bi| = |a+(b-1)i| \Leftrightarrow 2a-2b=0 \quad (1).$$

$$\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3i| = |z+i| \Leftrightarrow |a+(b-3)i| = |a+(b+1)i| \Leftrightarrow b=1 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}. \text{ Vậy } P = 2.$$

Câu 3: (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn:

$(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

- A. 3. B. 2. C. 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } (3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow (3+2i)z = 4+i - (2-i)^2$$

$$\Leftrightarrow (3+2i)z = 1+5i \Leftrightarrow z = \frac{1+5i}{3+2i} \Leftrightarrow z = 1+i$$

$\Rightarrow$ phần thực của số phức z là $a=1$, phần ảo của số phức z là $b=1$.

Vậy $a-b=0$.

Câu 4: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức $z_1 = 1+i$ và $z_2 = 2-3i$.

Tìm số phức liên hợp của số phức $w = z_1 + z_2$?

- A. $\bar{w} = 3-2i$. B. $\bar{w} = 1-4i$. C. $\bar{w} = -1+4i$. **D.** $\bar{w} = 3+2i$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì: } z_1 = 1+i \text{ và } z_2 = 2-3i \text{ nên } w = z_1 + z_2 \Leftrightarrow w = (1+2) + (1-3)i = 3-2i \Leftrightarrow \bar{w} = 3+2i.$$

Câu 5: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$ trên tập hợp số phức, trong đó z_1 là nghiệm có

phần ảo dương. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = 3z_1 - 2z_3$.

- A.** $M(-1;15)$. **B.** $M(15;-2)$. **C.** $M(-2;15)$. **D.** $M(15;-1)$.

Lời giải

Chọn A

$$z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -1 + 3i \\ z_2 = -1 - 3i \end{cases} \cdot w = 3z_1 - 2z_3 = 3(-1 + 3i) - 2(-1 - 3i) = -1 + 15i$$

Vậy điểm $M(-1;15)$ biểu diễn số phức $w = 3z_1 - 2z_3$.

Câu 6: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Biết $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn $(3 - 2i)z - 2i\bar{z} = 15 - 8i$. Tổng $a + b$ là

- A.** $a + b = 5$. **B.** $a + b = -1$. **C.** $a + b = 9$. **D.** $a + b = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Theo đề bài ta có

$$(3 - 2i)z - 2i\bar{z} = 15 - 8i \Leftrightarrow (3 - 2i)(a + bi) - 2i(a - bi) = 15 - 8i \Leftrightarrow 3a - (4a - 3b)i = 15 - 8i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 15 \\ 4a - 3b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \cdot \text{Vậy } a + b = 9.$$

Câu 7: (THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$ bằng

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i \Leftrightarrow z = \frac{4 + i - (2 - i)^2}{3 + 2i} = \frac{5i + 1}{3 + 2i} = 1 + i.$$

Suy ra $\bar{z} = 1 - i$. Vậy hiệu phần thực và ảo của $\bar{z}$ bằng 2.

Câu 8: (THPT Lê Quý Đôn-Quảng Trị-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tìm số phức $w = 1 + z + z^2$.

- A.** $2 - \sqrt{3}i$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải

Chọn C

$$w = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 0.$$

Câu 9: (THPT Lê Quý Đôn-Quảng Trị-lần 1 năm 2017-2018) Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z_1^2 + z_2^2$ biết z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 - 4z + 5 = 0$.

- A.** 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Do z_1 và z_2 là nghiệm phương trình nên $z_1 + z_2 = 4$ và $z_1 z_2 = 5$.

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 4^2 - 2 \cdot 5 = 6$.

Câu 10: (THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Tính môđun của số phức z thỏa mãn:

$$3z\bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 48 - 2016i.$$

- A.** $|z| = 4$. **B.** $|z| = \sqrt{2016}$. **C.** $|z| = \sqrt{2017}$. **D.** $|z| = 2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } 3z\bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 48 - 2016i \Leftrightarrow 3|z|^2 + 2017[(x + yi) - (x - yi)] = 48 - 2016i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3|z|^2 = 48 \\ 2 \cdot 2017y = -2016 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 16 \\ y = -\frac{1008}{2017} \end{cases} \Rightarrow |z| = 4.$$

Câu 11: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$$a + (b-1)i = \frac{1+3i}{1-2i}. \text{ Giá trị nào dưới đây là môđun của } z ?$$

- A.** 5. **B.** 1. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } w = \frac{1+3i}{1-2i} = -1+i \text{ mà } a + (b-1)i = \frac{1+3i}{1-2i} \Rightarrow a + (b-1)i = -1+i \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy modun của z là $|z| = \sqrt{5}$.

Câu 12: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình

$$2z^2 + 6z + 5 = 0 \text{ trong đó } z_2 \text{ có phần ảo âm. Phần thực và phần ảo của số phức } z_1 + 3z_2 \text{ lần lượt là}$$

- A.** $-6; 1$. **B.** $-1; -6$. **C.** $-6; -1$. **D.** $6; 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2z^2 + 6z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} \\ z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } z_1 + 3z_2 = -6 - i$$

Vậy Phần thực và phần ảo của số phức $z_1 + 3z_2$ lần lượt là $-6; -1$.

Câu 13: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn điều

$$\text{kiện } (1+i)(2+i)z + 1 - i = (5-i)(1+i). \text{ Tính môđun của số phức } w = 1 + 2z + z^2.$$

- A.** 100. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$(1+i)(2+i)z+1-i=(5-i)(1+i) \Leftrightarrow (1+3i)z+1-i=6+4i \Leftrightarrow (1+3i)z=5+5i \Leftrightarrow z=\frac{5+5i}{1+3i}$$

$$\Leftrightarrow z=2-i \text{ Suy ra } w=1+2z+z^2=8-6i, |w|=\sqrt{8^2+6^2}=10$$

Câu 14: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Cho số phức $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $|z+2+5i|=5$ và $z\bar{z}=82$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 10.

B. -8.

C. -35.

D. -7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} \sqrt{(a+2)^2+(b+5)^2}=5 \\ a^2+b^2=82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-5b-43}{2} \quad (1) \\ a^2+b^2=82 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được } 29b^2+430b+1521=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=-9 \\ b=\frac{-169}{29} \end{cases}$$

Vì $b \in \mathbb{Z}$ nên $b=-9 \Rightarrow a=1$. Do đó $P=a+b=-8$.

Câu 15: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) Biết phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm $z=-2+i$. Tính $a-b$?

A. 9.

B. 1.

C. 4.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm $z=-2+i$ nên ta có: $(-2+i)^2+a(-2+i)+b=0$

$$\Leftrightarrow (-2a+b+3)+(a-4)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=3 \\ a-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$$

Vậy $a-b=-1$.

Câu 16: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Cho m là số thực, biết phương trình $z^2+mz+5=0$ có hai nghiệm phức trong đó có một nghiệm có phần ảo là 1. Tính tổng môđun của hai nghiệm.

A. 3.

B. $\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Phương trình $z^2+mz+5=0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thì hai nghiệm phức là hai số liên hợp của nhau nên $|z_1|+|z_2|=2|z_1|$.

Gọi $z_1=a+i$, ($a \in \mathbb{R}$) là một nghiệm của phương trình.

$$\text{Ta có: } (a+i)^2+m(a+i)+5=0 \Leftrightarrow (a^2+ma+4)+(2a+m)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ma+4=0 \\ 2a+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a^2+4=0 \\ m=-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ m=-4 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ m=4 \end{cases}$$

Suy ra $z_1=2+i$ hoặc $z_1=-2+i$. Do đó $|z_1|=2$.

Vậy $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{5}$.

Cách 2: Ta có $\Delta = m^2 - 20$

Phương trình có hai nghiệm phức thì $\Delta < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} < m < 2\sqrt{5}$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $z_1 = -\frac{m}{2} + \frac{\sqrt{20-m^2}}{2}i$ và $z_2 = -\frac{m}{2} - \frac{\sqrt{20-m^2}}{2}i$

Theo đề $\frac{\sqrt{20-m^2}}{2} = 1 \Leftrightarrow m = \pm 4$ (t/m).

Khi đó phương trình trở thành $z^2 \pm 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2+i \\ z_2 = -2-i \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z_1 = 2+i \\ z_2 = 2-i \end{cases}$

Vậy $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{5}$.

Câu 17: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Tính $P = |1 + \sqrt{3}i|^{2018} + |1 - \sqrt{3}i|^{2018}$.

A. $P = 2$.

B. $P = 2^{1010}$.

C. $P = 2^{2019}$.

D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$P = |1 + \sqrt{3}i|^{2018} + |1 - \sqrt{3}i|^{2018} = \left(\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \right)^{2018} + \left(\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \right)^{2018} \\ = 2^{2018} + 2^{2018} = 2^{2019}.$$

Câu 18: (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 8z + 25 = 0$. Giá trị $|z_1 - z_2|$ bằng

A. 8.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $z^2 - 8z + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 4 + 3i \\ z_2 = 4 - 3i \end{cases}$

Vậy $|z_1 - z_2| = |(4 + 3i) - (4 - 3i)| = |6i| = 6$.

Câu 19: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho hai số phức $z = (a - 2b) - (a - b)i$ và $w = 1 - 2i$. Biết $z = w.i$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -7$.

B. $S = -4$.

C. $S = -3$.

D. $S = 7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z = (a - 2b) - (a - b)i = (1 - 2i).i = 2 + i \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 2 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -3 \end{cases}$.

Vậy $S = a + b = -7$.

Câu 20: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó, giá trị $z_1^2 + z_2^2$ là

A. $\frac{9}{4}$.

B. $-\frac{9}{4}$.

C. 9.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Vi-ét, ta có $z_1 + z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $z_1 \cdot z_2 = \frac{3}{2}$.

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}.$$

Câu 21: (THPT Chuyên ĐHSPT – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho i là đơn vị ảo. Gọi S là tập hợp các số nguyên dương n có 2 chữ số thỏa mãn i^n là số nguyên dương. Số phần tử của S là **A.** 22. **B.** 23. **C.** 45. **D.** 46.

Lời giải

Chọn A

Ta có i^n là số nguyên dương khi $n = 4k$, ($k \in \mathbb{Z}$). Vì số nguyên dương n có 2 chữ số nên $\begin{cases} 10 \leq 4k \leq 99 \\ k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,5 \leq k \leq 24,75 \\ k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$ suy ra có $24 - 3 + 1 = 22$ số.

Câu 22: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = a + bi$ khác 0 ($a, b \in \mathbb{R}$). Tìm phần ảo của số phức z^{-1} .

A. $\frac{a}{a^2 + b^2}$. **B.** $\frac{b}{a^2 + b^2}$. **C.** $\frac{-bi}{a^2 + b^2}$. **D.** $\frac{-b}{a^2 + b^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$. Vậy phần ảo của z^{-1} là $\frac{-b}{a^2 + b^2}$.

Câu 23: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 5$ là **A.** Một đường tròn. **B.** Một đường thẳng. **C.** Một đường parabol. **D.** Một đường Elip.

Lời giải

Chọn A

Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là đường tròn tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 5$.

Câu 24: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Gọi A, B là hai điểm biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AB : **A.** 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + 2i \\ z = -1 - 2i \end{cases}$ suy ra $A(-1; 2)$ và $B(-1; -2)$. Vậy $AB = 4$.

Câu 25: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $|z + 1| = \left| \frac{z + \bar{z}}{2} + 3 \right|$, gọi số phức $z = a + bi$ là số phức có môđun nhỏ nhất. Tính $S = 2a + b$.

A. 0.

B. -4.

C. 2.

D. -2

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |z+1| = \left| \frac{z+\bar{z}}{2} + 3 \right| \Leftrightarrow |(a+1)+bi| = |a+3| \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 = (a+3)^2 \Leftrightarrow b^2 = 4a+8.$$

$$\text{Do đó } |z|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 4a + 8 = (a+1)^2 + 4 \geq 4.$$

$$\min |z| = 2 \text{ khi và chỉ khi } z = -1 + 4i. \text{ Suy ra } S = 2a + b = 2$$

Câu 26: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z+3-4i|=5$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng toạ độ biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(3;-4), R=\sqrt{5}$. B. $I(-3;4), R=\sqrt{5}$. **C. $I(3;-4), R=5$.** D. $I(-3;4), R=5$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Khi đó } |z+3-4i| = 5 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Vậy tập điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-3;4)$, bán kính $R=5$.

Câu 27: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $iz + (1-i)\bar{z} = -2i$ bằng

A. 2.

B. -2.

C. 6.

D. -6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Khi đó } iz + (1-i)\bar{z} = -2i \Leftrightarrow i(x+yi) + (1-i)(x-yi) = -2i$$

$$\Leftrightarrow (x-2y) - yi = -2i \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}, \text{ suy ra } x+y=6.$$

Câu 28: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Kí hiệu z_0 là nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$ sao cho z_0 có phần ảo là số thực âm. Điểm M biểu diễn số phức $w = -2z_0$ thuộc góc phần tư nào trên mặt phẳng phức?

A. Góc phần tư (I). **B. Góc phần tư (II).**

C. Góc phần tư (III). D. Góc phần tư (IV).

Lời giải

Chọn B

$$4z^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

$$\text{Do đó } z_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow w = -2z_0 = -1 + \sqrt{2}i.$$

$\Rightarrow w$ có điểm biểu diễn là $M(-1; \sqrt{2})$ nằm ở góc phần tư thứ (II).

Câu 29: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Phương trình bậc hai nào sau đây có nghiệm $1+2i$?

A. $z^2 - 2z + 3 = 0$.

B. $z^2 + 2z + 5 = 0$.

C. $z^2 - 2z + 5 = 0$.

D. $z^2 + 2z + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Vì $1+2i$ là nghiệm của phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$ nên $1-2i$ cũng là nghiệm của phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$.

Ta có $\begin{cases} (1+2i)(1-2i)=5 \\ 1+2i+1-2i=2 \end{cases}$ suy ra $1+2i$ là nghiệm của phương trình bậc hai $z^2-2z+5=0$.

Câu 30: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z+(2-i)\bar{z}=13+2i$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. $(1+i)z+(2-i)\bar{z}=13+2i \Leftrightarrow (1+i)(a+bi)+(2-i)(a-bi)=13+2i$
 $\Leftrightarrow (a-b)+(a+b)i+(2a-b)-(2b+a)i=13+2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=13 \\ -b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow z=3-2i.$$

Vậy có một số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có: $z^4 + z^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2 \\ z^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{cases}.$

Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình, ta có:

$$S = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Câu 5: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho số phức z thỏa mãn:

$$z(1-2i) + \bar{z}.i = 15 + i. \text{ Tìm modun của số phức } z?$$

- A.** $|z| = 5.$ **B.** $|z| = 4.$ **C.** $|z| = 2\sqrt{5}.$ **D.** $|z| = 2\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Theo đề ra ta có: } (x + yi)(1 - 2i) + (x - yi).i = 15 + i$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + yi - 2xi + xi + y = 15 + i$$

$$\Leftrightarrow x + 3y + (y - x)i = 15 + i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 15 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = 5.$$

Câu 6: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Gọi z_1 là nghiệm phức có phần

ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn số phức $\frac{7-4i}{z_1}$ trên mặt phẳng phức?

- A.** $P(3; 2).$ **B.** $N(1; -2).$ **C.** $Q(3; -2).$ **D.** $M(1; 2).$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2i & (\text{TM}) \\ z = 1 + 2i & (L) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \frac{7-4i}{z_1} = \frac{7-4i}{1-2i} = 3 + 2i.$$

Điểm biểu diễn là $P(3; 2).$

Câu 7: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tìm phần ảo của số phức

$$z \text{ biết } \bar{z} = (\sqrt{3} + i)^2 (\sqrt{3} - i).$$

- A.** 4. **B.** $4\sqrt{3}.$ **C.** $-4\sqrt{3}.$ **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \bar{z} = (\sqrt{3} + i)^2 (\sqrt{3} - i) = 4\sqrt{3} + 4i \Rightarrow z = 4\sqrt{3} - 4i.$$

Vậy phần ảo của số phức z là -4.

Câu 8: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = 3 - 4i$.

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Môđun của số phức z bằng 5.
 B. Số phức liên hợp của z là $3 - 4i$.
 C. Phần thực và phần ảo của z lần lượt là 3 và -4 .
 D. Biểu diễn số phức z lên mặt phẳng tọa độ là điểm $M(3; -4)$.

Lời giải

Chọn C

Số phức liên hợp của $z = 3 - 4i$ là $\bar{z} = 3 + 4i$. Mệnh đề B sai.

Câu 9: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức z thỏa mãn $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Tính tích phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. 1. B. -2 . C. -1 . D. 2.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$), ta có $\bar{z} = x - yi$.

Theo giả thiết, ta có $x + yi - (2 + 3i)(x - yi) = 1 - 9i \Leftrightarrow -x - 3y - (3x - 3y)i = 1 - 9i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y = 1 \\ 3x - 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } xy = -2.$$

Câu 10: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = 3 - 5i$.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của z . Giá trị của biểu thức $T = x^4 + y^4$ là

- A. $T = 706$. B. $T = \frac{17}{2}$. C. $T = \frac{43}{2}$. D. $T = 34$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của z khi và chỉ khi $w^2 = z$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^2 = 3 - 5i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 5i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -5 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } T = x^4 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 = 3^2 + 2 \cdot \left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{43}{2}.$$

Câu 11: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tổng phần thực và phần ảo của số phức $z = (1 + i)^2 - (3 + 3i)$ là

- A. 4. B. -4 . C. $-3 - i$. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z = (1 + i)^2 - (3 + 3i) = 1 + 2i + i^2 - 3 - 3i = -3 - i \Rightarrow$ phần thực $a = -3$, phần ảo $b = -1$.

Vậy $a + b = -4$.

Câu 12: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 1| = |z - 2 + 3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

- A. Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 1$.
 B. Đường thẳng có phương trình $2x - 6y + 12 = 0$.
C. Đường thẳng có phương trình $x - 3y - 6 = 0$.

D. Đường thẳng có phương trình $x - 5y - 6 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$; ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z - 1| = |z - 2 + 3i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow x - 3y - 6 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $x - 3y - 6 = 0$.

Câu 13: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z - |z|| = \sqrt{2}$. Biết rằng phần thực của z bằng a . Tính $|z|$ theo a

A. $|z| = \frac{1}{1-a}$. **B.** $|z| = \frac{a - \sqrt{a^2 + 1}}{2}$. **C.** $|z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{2}$. **D.** $|z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Theo đề bài ta có

$$|z - |z|| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| a + bi - \sqrt{a^2 + b^2} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \sqrt{a^2 + b^2} \right)^2 + b^2} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2) - a\sqrt{a^2 + b^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} \text{ (loại)} \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \text{ (t/m)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } |z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Câu 14: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình

$$z^2 - 2z + 4 = 0. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = \frac{z_1^2}{z_2} + \frac{z_2^2}{z_1}$$

A. 4. **B.** -4. **C.** 8. **D.** $-\frac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } z^2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + \sqrt{3}i \\ z_2 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } P = \frac{z_1^2}{z_2} + \frac{z_2^2}{z_1} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{1 - \sqrt{3}i} + \frac{(1 - \sqrt{3}i)^2}{1 + \sqrt{3}i} = -4.$$

Câu 15: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định - năm 2017-2018) Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa $|z + 1 - 2i| = 3$.

A. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $r = 9$. **B.** Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $r = 9$.

C. Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $r = 3$. **D.** Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $r = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1$).

Ta có: $|z + 1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $r = 3$.

Câu 16: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định - năm 2017-2018) Trong mặt phẳng phức, cho điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là **sai**?

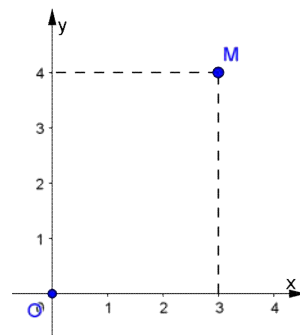
- A.** $z - \bar{z} = 6$. **B.** Số phức z có phần ảo bằng 4.
C. $|z| = 5$. **D.** $\bar{z} = 3 - 4i$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta dễ thấy các mệnh đề B, C, D đúng.

Từ hình vẽ ta có $z = 3 + 4i \Rightarrow z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$. Do đó A sai.



Câu 17: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = z(1 + i)$ là đường tròn

- A.** Tâm $I(3; -1)$, $R = 3\sqrt{2}$. **B.** Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3$.
C. Tâm $I(-3; 1)$, $R = 3\sqrt{2}$. **D.** Tâm $I(3; -1)$, $R = 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z(1 + i) + (-1 + 2i)(1 + i)| = 3|1 + i| \Leftrightarrow |w - 3 + i| = 3\sqrt{2}$.

Giả sử $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow |x - 3 + (y + 1)i| = 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 18 \Rightarrow I(3; -1)$, $R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Câu 18: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1 + i)z + \bar{z}$ là số thuần ảo và $|z - 2i| = 1$

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ ta có: $(1 + i)z + \bar{z} = (1 + i)(a + bi) + a - bi = 2a - b + ai$.

Mà $(1 + i)z + \bar{z}$ là số thuần ảo nên $2a - b = 0 \Leftrightarrow b = 2a$.

Mặt khác $|z - 2i| = 1$ nên $a^2 + (b - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + (2a - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{3}{5} \end{cases}$.

Ứng với mỗi a ta tìm được một b duy nhất, vậy có 2 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x+1+(1-2y)i=2(2-i)+yi-x$. Khi đó giá trị của $x^2-3xy-y$ bằng

- A.** -2 . **B.** 1 . **C.** -3 . **D.** -1 .

Câu 20: Tính tổng $S=1+i^3+i^6+\dots+i^{2016}$.

- A.** $S=1$. **B.** $S=i$. **C.** $S=-i$. **D.** $S=-1$.

Câu 21: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x+1+(1-2y)i=2(2-i)+yi-x$. Khi đó giá trị của $x^2-3xy-y$ bằng

- A.** -2 . **B.** 1 . **C.** -3 . **D.** -1 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 2x+1+(1-2y)i=2(2-i)+yi-x \Leftrightarrow 2x+1+(1-2y)i=4-x+(y-2)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=4-x \\ 1-2y=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow x^2-3xy-y=-2.$$

Câu 22: Tính tổng $S=1+i^3+i^6+\dots+i^{2016}$.

- A.** $S=1$. **B.** $S=i$. **C.** $S=-i$. **D.** $S=-1$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $1+x+x^2+\dots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ với $x=i^3$, $n=\frac{2016}{3}=672$ ta được

$$S=\frac{(i^3)^{673}-1}{i^3-1}=\frac{(-i)^{673}-1}{-i-1}=\frac{-(i^2)^{336}i-1}{-i-1}=\frac{-i-1}{-i-1}=1.$$

Câu 23: Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+13=0$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức $w=(i+1)z_1$.

- A.** $M(-5;-1)$. **B.** $M(5;1)$. **C.** $M(-1;-5)$. **D.** $M(1;5)$.

Câu 24: Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+13=0$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức $w=(i+1)z_1$.

- A.** $M(-5;-1)$. **B.** $M(5;1)$. **C.** $M(-1;-5)$. **D.** $M(1;5)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } z^2+6z+13=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=-3+2i \\ z_2=-3-2i \end{cases}. \text{ Suy ra } w=(i+1)z_1=(1+i)(-3+2i)=-5-i.$$

Vậy tọa độ điểm M biểu diễn số phức $w=(i+1)z_1$ là $M(-5;-1)$.

Câu 25: Tìm phần ảo của số phức $\bar{z}$, biết $z=\frac{(1+i)3i}{1-i}$.

- A.** 3 . **B.** -3 . **C.** 0 . **D.** -1 .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z = \frac{(1+i)3i}{1-i} = \frac{(1+i)^2 3i}{1-i^2} = \frac{2i \cdot 3i}{2} = -3 \Rightarrow \bar{z} = -3$.

Vậy phần ảo của số phức $\bar{z}$ là 0.

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=5$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z . Điểm M thuộc đường tròn nào sau đây?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z-1-2i|=5 \Leftrightarrow |x-1+(y-2)i|=5 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Vậy điểm M thuộc đường tròn $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Câu 27: Cho số phức z thỏa mãn $|2z-3-4i|=10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M-m$ bằng

A. 5.

B. 15.

C. 10.

D. 20.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = x^2(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)$. Hỏi phương trình $f'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn $|2z-3-4i|=10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M-m$ bằng

A. 5.

B. 15.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$.

Ta có: $|2z-3-4i|=10 \Leftrightarrow \left|z-\frac{3}{2}-2i\right|=5 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa đề là đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, bán kính $R=5$.

Khi đó: $\begin{cases} m = IO - R \\ M = IO + R \end{cases} \Rightarrow M - m = 2R = 10$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = x^2(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)$. Hỏi phương trình $f'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\}$.

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$			
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu biểu thức $f(x)$ và do tính chất liên tục của hàm số $f(x)$, suy ra:

- ☐ $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số;
- ☐ $f(x)$ có ít nhất 8 điểm cực trị, khác 0, lần lượt thuộc mỗi khoảng $(-4; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ có ít nhất 9 điểm cực trị.

Do đó, theo điều kiện cần để hàm số có cực trị, ta có phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 9 nghiệm.

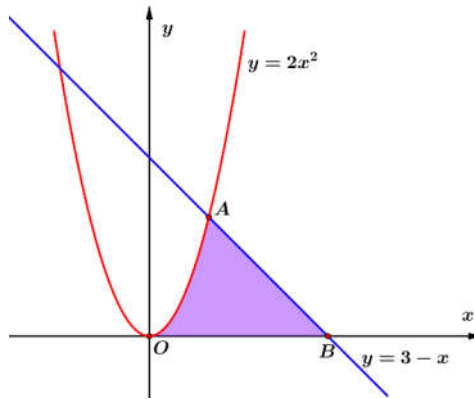
Mặt khác vì bậc của $f(x)$ là 10 nên bậc của $f'(x)$ là 9 $\Rightarrow$ phương trình $f'(x) = 0$ có không quá 9 nghiệm.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có đúng 9 nghiệm.

Câu 31: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 11 = 0$. Giá trị của biểu thức $|3z_1| - |z_2|$ bằng

- A. 22. B. 11. C. $2\sqrt{11}$. D. $\sqrt{11}$.

Câu 32: Gọi tam giác cong (OAB) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2x^2$, $y = 3 - x$, $y = 0$ (tham khảo hình vẽ bên). Diện tích của (OAB) bằng



- A. $\frac{8}{3}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{10}{3}$.

Câu 33: Xét các số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$. Tính

$F = -a + 4b$ khi $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

- A. $F = 7$. B. $F = 6$. C. $F = 5$. D. $F = 4$.

Câu 34: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2 + i)(1 - 2i)$ là một số thực. Tính

$P = |a| + |b|$

- A. $P = 5$ B. $P = 7$ C. $P = 8$ D. $P = 4$

Câu 35: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 11 = 0$. Giá trị của biểu thức $|3z_1| - |z_2|$ bằng

A. 22.

B. 11.

C. $2\sqrt{11}$.

D. $\sqrt{11}$.

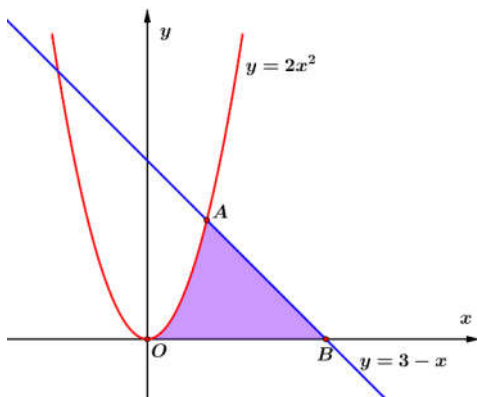
Lời giải

Chọn C

Ta có z_1 và z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $|z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1 z_2 = 11 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{11}$.

Do đó: $|3z_1| - |z_2| = 2|z_1| = 2\sqrt{11}$.

Câu 36: Gọi tam giác cong (OAB) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2x^2$, $y = 3 - x$, $y = 0$ (tham khảo hình vẽ bên). Diện tích của (OAB) bằng



A. $\frac{8}{3}$.

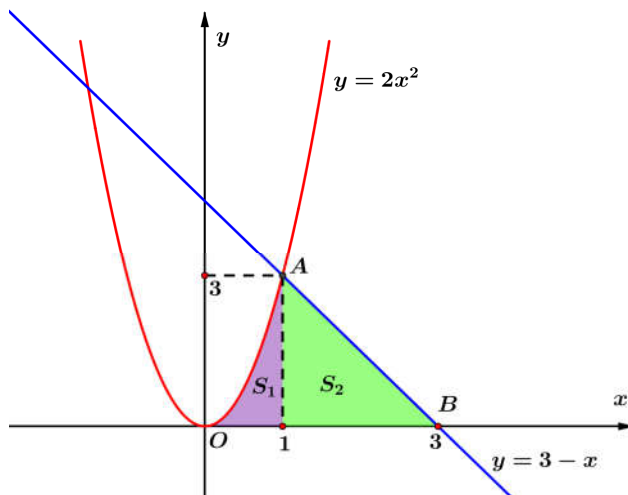
B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3 - x$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2x^2 = 3 - x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm $A(1;3)$ và $(d) \cap Ox = B(3;0)$.

$$\text{Khi đó } S_{(OAB)} = S_1 + S_2 = \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^3 (3-x) dx = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}.$$

Câu 37: Xét các số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$. Tính

$F = -a + 4b$ khi $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $F = 7$.

B. $F = 6$.

C. $F = 5$.

D. $F = 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned} 4(z - \bar{z}) - 15i &= i(z + \bar{z} - 1)^2 \Leftrightarrow 4(a + bi - a - bi) - 15i = i(a + bi + a - bi - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 8b - 15 = (2a - 1)^2 \text{ suy ra } b \geq \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

$$\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right| = \frac{1}{2} \sqrt{(2a - 1)^2 + (2b + 6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8b - 15 + 4b^2 + 24b + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 + 32b + 21}$$

Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + 32x + 21$ với $x \geq \frac{15}{8}$

$f'(x) = 8x + 32 > 0, \forall x \geq \frac{15}{8}$ suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\frac{15}{8}; +\infty\right)$ nên

$$f(x) \geq f\left(\frac{15}{8}\right) = \frac{4353}{16}.$$

Do đó $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4353}{16}}$ khi $b = \frac{15}{8}; a = \frac{1}{2}$.

Khi đó $F = -a + 4b = 7$.

Câu 38: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính

$$P = |a| + |b|$$

A. $P = 5$

B. $P = 7$

C. $P = 8$

D. $P = 4$

Lời giải

Chọn B

$$|z| = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25 \quad (1)$$

$z(2+i)(1-2i) = (a+bi)(4-3i) = (4a+3b) + (4b-3a)i$ là số thực nên $4b-3a=0$.

$$\text{Thay vào (1) ta được } a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 25 \Leftrightarrow |a| = 4 \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow P = 7$$

Câu 39: Phương trình $z^2 + z + 5 = 0$ có hai nghiệm $z_1; z_2$ trên tập hợp số phức. Tính giá trị của biểu thức

$$P = z_1^2 + z_2^2$$

- A. $P = 10$. B. $P = -9$. B. $P = -\frac{37}{2}$. D. $P = 11$.

Câu 40: Phương trình $z^2 + z + 5 = 0$ có hai nghiệm $z_1; z_2$ trên tập hợp số phức. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2$

- A. $P = 10$. B. $P = -9$. B. $P = -\frac{37}{2}$. D. $P = 11$.

Lời giải

Chọn B

$$z^2 + z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases} \Rightarrow P = z_1^2 + z_2^2 = -9.$$

Câu 41: Gọi z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm phức của phương trình $z^3 + 8 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2| + |z_3|$ bằng

- A. $2 + 2\sqrt{3}$. B. 3. C. $2 + \sqrt{3}$. D. 6.

Câu 42: Gọi z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm phức của phương trình $z^3 + 8 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2| + |z_3|$ bằng

- A. $2 + 2\sqrt{3}$. B. 3. C. $2 + \sqrt{3}$. D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2 \\ z_2 = 1 + \sqrt{3}i \\ z_3 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases} \Rightarrow |z_1| + |z_2| + |z_3| = 6.$$

Câu 43: Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $(z - 8)i + z - 6i = 5 + 5i$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. 19. B. 5. C. 14. D. 2.

Câu 44: Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $(z - 8)i + z - 6i = 5 + 5i$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. 19. B. 5. C. 14. D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } (z - 8)i + z - 6i = 5 + 5i \Leftrightarrow (1 + i)z = 5 + 19i \Leftrightarrow z = 12 + 7i.$$

$$\text{Mà } z = a + bi \text{ nên } \begin{cases} a = 12 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow a + b = 19.$$

Câu 45: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Số phức iz_0 bằng

- A. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. B. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. C. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. D. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Câu 46: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Số phức iz_0 bằng

- A. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. B. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. C. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. D. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2z^2 - 6z + 5 = 0 \Leftrightarrow 4z^2 - 12z + 10 = 0 \Leftrightarrow (2z - 3)^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm i}{2}$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow iz_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Câu 47: Cho các số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$. Phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là
A. $z^2 - 6z + 13 = 0$. **B.** $z^2 + 6z + 13 = 0$. **C.** $z^2 + 6z - 13 = 0$. **D.** $z^2 - 6z - 13 = 0$.

Câu 48: Cho các số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$. Phương trình bậc hai có hai nghiệm z_1 và z_2 là
A. $z^2 - 6z + 13 = 0$. **B.** $z^2 + 6z + 13 = 0$. **C.** $z^2 + 6z - 13 = 0$. **D.** $z^2 - 6z - 13 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có: $S = z_1 + z_2 = 6$, $P = z_1 z_2 = |z_1|^2 = 9 + 4 = 13$ nên z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình

$$z^2 - Sz + P = 0 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 13 = 0.$$

Cách 2: Do $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$ là hai nghiệm của phương trình nên

$$(z - z_1)(z - z_2) = 0 \Leftrightarrow (z - 3 - 2i)(z - 3 + 2i) = 0 \Leftrightarrow (z - 3)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 13 = 0.$$

Câu 49: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 2x$, biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

A. $F(x) = \frac{-1}{2} \cos 2x + \frac{\pi}{6}$.

B. $F(x) = \cos^2 x - \frac{1}{4}$.

C. $F(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

D. $F(x) = \frac{-1}{2} \cos 2x$.

Câu 50: Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $z + |z|^2 \cdot i - 1 - \frac{3}{4}i = 0$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Câu 51: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 2x$, biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

A. $F(x) = \frac{-1}{2} \cos 2x + \frac{\pi}{6}$.

B. $F(x) = \cos^2 x - \frac{1}{4}$.

C. $F(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

D. $F(x) = \frac{-1}{2} \cos 2x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x) = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$; $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$.

Vậy $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \frac{1}{4} = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

Câu 52: Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $z + |z|^2 \cdot i - 1 - \frac{3}{4}i = 0$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì $z + |z|^2 \cdot i - 1 - \frac{3}{4}i = 0 \Leftrightarrow x + yi + (x^2 + y^2)i - 1 - \frac{3}{4}i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + x^2 + y^2 - \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow z = 1 - \frac{1}{2}i.$$

Câu 53: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 3.

B. $\frac{3}{18}$.

C. $-\frac{9}{4}$.

D. $-\frac{9}{8}$.

Câu 54: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 3.

B. $\frac{3}{18}$.

C. $-\frac{9}{4}$.

D. $-\frac{9}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$ $S = a + b + c$.

$$\text{Suy ra } z_1^2 + z_2^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{21}i}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{21}i}{4}\right)^2 = -\frac{9}{4}.$$

Câu 55: Cho hai số phức $z_1 = 4 - 8i$ và $z_2 = -2 - i$. Tính $|2z_1 \cdot \bar{z}_2|$

A. $4\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 20.

D. 40.

Câu 56: Cho hai số phức $z_1 = 4 - 8i$ và $z_2 = -2 - i$. Tính $|2z_1 \cdot \bar{z}_2|$

A. $4\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 20.

D. 40.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|2z_1 \cdot \bar{z}_2| = |2(4 - 8i)(-2 + i)| = 40$.

Câu 57: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 - z + 1 = 0$. Tính $|z_1|z_1 + |z_2|z_2$?

A. -2.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

C. 1.

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 58: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 - z + 1 = 0$. Tính $|z_1|z_1 + |z_2|z_2$?

A. -2.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

C. 1.

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}i^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i \\ z_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i \end{cases} \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } |z_1|z_1 + |z_2|z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_1 + z_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 59: Phần ảo của số phức $\frac{1}{1+i}$ là

- A.** $-\frac{1}{2}i$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1 .

Câu 60: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z-10+2i| = |z+2-14i|$ và $|z-1-10i| = 5$?

- A.** Hai. **B.** Không. **C.** Một. **D.** Vô số.

Câu 61: Cho số phức z thỏa mãn $z - |z| = -2 - 4i$. Môđun của z là

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 25.

Câu 62: Phần ảo của số phức $\frac{1}{1+i}$ là

- A.** $-\frac{1}{2}i$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1 .

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ nên có phần ảo là } -\frac{1}{2}.$$

Câu 63: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z-10+2i| = |z+2-14i|$ và $|z-1-10i| = 5$?

- A.** Hai. **B.** Không. **C.** Một. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Từ giả thiết } |z-10+2i| = |z+2-14i| \Leftrightarrow (a-10)^2 + (b+2)^2 = (a+2)^2 + (b-14)^2$$

$$\Leftrightarrow -24a + 32b - 96 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}b - 4$$

$$\text{Ta có: } |z-1-10i| = 5 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-10)^2 = 25 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}b-5\right)^2 + b^2 - 20b + 100 = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9}b^2 - \frac{100}{3}b + 100 = 0 \Leftrightarrow b = 6. \text{ Suy ra } a = 4.$$

Vậy có một số phức thỏa mãn.

Câu 64: Cho số phức z thỏa mãn $z - |z| = -2 - 4i$. Môđun của z là

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 25.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $z - |z| = -2 - 4i \Leftrightarrow x + iy - \sqrt{x^2 + y^2} = -2 - 4i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 + y^2} = -2 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow x + 2 = \sqrt{x^2 + 16} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 4x + 4 = x^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $z = 3 - 4i \Rightarrow |z| = 5$.

Câu 65: Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z = z - 1$. Môđun của $\bar{z}$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

B. $\frac{1}{10}$.

C. 1.

D. $\sqrt{10}$.

Câu 66: Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z = z - 1$. Môđun của $\bar{z}$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

B. $\frac{1}{10}$.

C. 1.

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A

$$(2 + 3i)z = z - 1 \Leftrightarrow (1 + 3i)z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{1 + 3i} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i \Rightarrow \bar{z} = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \Rightarrow |\bar{z}| = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 67: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ bằng:

A. $\frac{3}{2}i$.

B. $\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

C. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{-3}{2}$.

Câu 68: Modun của số phức $z = (1 + 2i)(2 - i)$ là

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = \sqrt{5}$.

C. $|z| = 10$.

D. $|z| = 6$.

Câu 69: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ bằng:

A. $\frac{3}{2}i$.

B. $\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

C. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{-3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0 \text{ có hai nghiệm } z_1, z_2 \text{ suy ra } \begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} - 2 = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} - 2 = \frac{-3}{2}.$$

Câu 70: Modun của số phức $z = (1 + 2i)(2 - i)$ là

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = \sqrt{5}$.

C. $|z| = 10$.

D. $|z| = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $z = (1+2i)(2-i) = 4+3i$ nên $|z| = 5$.

Câu 71: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $z^4 + 3z^2 + 4 = 0$ trên tập số phức.

Tính giá trị của biểu thức $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$

A. $T = 8$.

B. $T = 6$.

C. $T = 4$.

D. $T = 2$.

Câu 72: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $z^4 + 3z^2 + 4 = 0$ trên tập số phức.

Tính giá trị của biểu thức $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$

A. $T = 8$.

B. $T = 6$.

C. $T = 4$.

D. $T = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } z^4 + 3z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (1) \\ z^2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (2) \end{cases}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử z_1, z_2 là nghiệm của (1) và z_3, z_4 là nghiệm của (2).

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = 2.$$

$$\text{Tương tự } |z_3|^2 = |z_4|^2 = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = 2.$$

Vậy $T = 8$.

Câu 73: Cho z_1, z_2 là các số phức khác 0 và $z_1 \neq z_2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề **sai**?

A. $|z_1 + z_2| \in \mathbb{R}$.

B. $(z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \in \mathbb{R}$.

C. $z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \in \mathbb{R}$.

D. $\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right) \in \mathbb{R}$.

Câu 74: Cho số phức $z = 3 - 2i$. Môđun của $w = \frac{z^2}{z + z}$ bằng

A. $\frac{13}{6}$.

B. $\frac{15}{6}$.

C. $\frac{11}{6}$.

D. 2.

Câu 75: Cho số z thỏa mãn các điều kiện $|z + 8 - 3i| = |z - i|$ và $|z + 8 - 7i| = |z + 4 - i|$. Tìm số phức $w = z + 7 - 3i$.

A. $w = 3 - i$.

B. $w = 13 - 6i$.

C. $w = 1 + i$.

D. $w = 4 + 3i$.

Câu 76: Cho z_1, z_2 là các số phức khác 0 và $z_1 \neq z_2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề **sai**?

A. $|z_1 + z_2| \in \mathbb{R}$.

B. $(z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \in \mathbb{R}$.

C. $\overline{z_1 z_1} + \overline{z_2 z_2} \in \mathbb{R}$. **D.** $\overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right)} \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z_1 + z_2| \in \mathbb{R}$; $(z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = |z_1 + z_2|^2 \in \mathbb{R}$; $\overline{z_1 z_1} + \overline{z_2 z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \in \mathbb{R}$.

Xét mệnh đề “ $\overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right)} \in \mathbb{R}$ ”: Cho $z_1 = 1$ và $z_2 = i$ thì $\overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{1-i} \right)} = \bar{i} = -i \notin \mathbb{R}$, nên mệnh đề này sai.

Câu 77: Cho số phức $z = 3 - 2i$. Môđun của $w = \frac{z^2}{z + \bar{z}}$ bằng

A. $\frac{13}{6}$. **B.** $\frac{15}{6}$. **C.** $\frac{11}{6}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w = \frac{(3-2i)^2}{(3-2i) + (3+2i)} = \frac{5-12i}{6}$.

Do đó $|w| = \left| \frac{5-12i}{6} \right| = \frac{13}{6}$.

Câu 78: Cho số z thỏa mãn các điều kiện $|z + 8 - 3i| = |z - i|$ và $|z + 8 - 7i| = |z + 4 - i|$. Tìm số phức $w = z + 7 - 3i$.

A. $w = 3 - i$. **B.** $w = 13 - 6i$. **C.** $w = 1 + i$. **D.** $w = 4 + 3i$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\square |z + 8 - 3i| = |z - i| \Leftrightarrow |(x + yi) + 8 - 3i| = |(x + yi) - i|$$

$$\Leftrightarrow |(x + 8) + (y - 3)i| = |x + (y - 1)i|$$

$$\Leftrightarrow (x + 8)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + (y - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x - y + 18 = 0.$$

$$\square |z + 8 - 7i| = |z + 4 - i|$$

$$\Leftrightarrow |(x + yi) + 8 - 7i| = |(x + yi) + 4 - i|$$

$$\Leftrightarrow |(x + 8) + (y - 7)i| = |(x + 4) + (y - 1)i|$$

$$\Leftrightarrow (x + 8)^2 + (y - 7)^2 = (x + 4)^2 + (y - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + 24 = 0.$$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x - y + 18 = 0 \\ 2x - 3y + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}.$$

Như vậy $z = -3 + 6i \Rightarrow w = z + 7 - 3i = (-3 + 6i) + 7 - 3i = 4 + 3i$.

Câu 79: Cho số phức $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$). Tìm môđun của z .

A. $|\cos \varphi| + |\sin \varphi|$.

B. 1.

C. $|\cos \varphi + i \sin \varphi|$.

D. $|\cos 2\varphi|$.

Câu 80: Cho số phức $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$). Tìm môđun của z .

A. $|\cos \varphi| + |\sin \varphi|$.

B. 1.

C. $|\cos \varphi + i \sin \varphi|$.

D. $|\cos 2\varphi|$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$.

Câu 81: Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $z^2 - 4z + 5 = 0$. Biểu thức $P = (z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018}$ có giá trị bằng

A. 0.

B. 2^{2018} .

C. 2^{1009} .

D. 2.

Câu 82: Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $z^2 - 4z + 5 = 0$. Biểu thức $P = (z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018}$ có giá trị bằng

A. 0.

B. 2^{2018} .

C. 2^{1009} .

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Biệt số $\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức: $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 2 + i$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P &= (1 - i)^{2018} + (1 + i)^{2018} = \left[(1 - i)^2 \right]^{1009} + \left[(1 + i)^2 \right]^{1009} \\ &= (-2i)^{1009} + (2i)^{1009} = -2^{1009}i + 2^{1009}i = 0. \end{aligned}$$

Câu 83: Biết z là một nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = z^3 + \frac{1}{z^3}$.

A. $P = -2$.

B. $P = 0$.

C. $P = 4$.

D. $P = \frac{7}{4}$.

Câu 84: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z}{z - i} \right| = 3$ là đường nào?

A. Một đường thẳng.

B. Một đường parabol.

C. Một đường tròn.

D. Một đường elip.

Câu 85: Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tính số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

A. $w = \frac{8}{3}$.

B. $w = \frac{8}{3} + i$.

C. $w = \frac{10}{3} + i$.

D. $\frac{10}{3}$.

Câu 86: Biết z là một nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = z^3 + \frac{1}{z^3}$.

A. $P = -2$.

B. $P = 0$.

C. $P = 4$.

D. $P = \frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$, do $z \neq 1$ nên $z^3 + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = -1$. Vậy $P = -2$.

Câu 87: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z}{z-i} \right| = 3$ là đường nào?

- A.** Một đường thẳng. **B.** Một đường parabol. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường elip.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{z-i} \right| = 3 &\Leftrightarrow |z| = 3|z-i| \Leftrightarrow |x+yi| = 3|x+yi-i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+(y-1)^2} \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2 = 9[x^2+(y-1)^2] \Leftrightarrow 8x^2+8y^2-18y+9=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{9}{4}y+\frac{9}{8}=0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn.

Câu 88: Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tính số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

- A.** $w = \frac{8}{3}$. **B.** $w = \frac{8}{3} + i$. **C.** $w = \frac{10}{3} + i$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$w = i\left(1 + \frac{1}{3}i\right) + 3\left(1 - \frac{1}{3}i\right) = i - \frac{1}{3} + 3 - i = \frac{8}{3}.$$

Câu 89: Cho biết có hai số phức z thỏa mãn $z^2 = 119 - 120i$, kí hiệu là z_1 và z_2 . Tính $|z_1 - z_2|^2$.

- A.** 169. **B.** 114244. **C.** 338. **D.** 676.

Câu 90: Cho w là số phức thay đổi thỏa mãn $|w| = 2$. Trong mặt phẳng phức, các điểm biểu diễn số phức $z = 3w + 1 - 2i$ chạy trên đường nào?

- A.** Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 6$.
B. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 2$.
C. Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 2$.
D. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 6$.

Câu 91: Cho biết có hai số phức z thỏa mãn $z^2 = 119 - 120i$, kí hiệu là z_1 và z_2 . Tính $|z_1 - z_2|^2$.

- A.** 169. **B.** 114244. **C.** 338. **D.** 676.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử: $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có: } z^2 = 119 - 120i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 119 - 120i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 119 & (1) \\ 2ab = -120 & (2) \end{cases}$$

Ta có $a, b \neq 0$.

Từ (2) $\Rightarrow a = -\frac{60}{b}$, thay vào (1), ta được:

$$\frac{3600}{b^2} - b^2 = 119 \Leftrightarrow b^4 + 119b^2 - 3600 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = -144 \\ b^2 = 25 \end{cases}.$$

* $b^2 = -144$ (vô nghiệm).

$$* b^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \Rightarrow a = -12 \\ b = -5 \Rightarrow a = 12 \end{cases}.$$

Vậy $z_1 = -12 + 5i$, $z_2 = 12 - 5i$.

Suy ra $|z_1 - z_2|^2 = |-24 + 10i|^2 = 676$.

Câu 92: Cho w là số phức thay đổi thỏa mãn $|w| = 2$. Trong mặt phẳng phức, các điểm biểu diễn số phức $z = 3w + 1 - 2i$ chạy trên đường nào?

A. Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 6$.

B. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 2$.

C. Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 2$.

D. Đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |w| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{z + 2i - 1}{3} \right| = 2 \Leftrightarrow |z + 2i - 1| = 6 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36.$$

Vậy tập hợp điểm cần tìm là đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 6$.

Câu 93: Xét các số phức z thỏa điều kiện $|z - 3 + 2i| = 5$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z + 1 - i$ là?

A. Đường tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 5$.

B. Đường tròn tâm $I(-4; 3)$, bán kính $R = 5$.

C. Đường tròn tâm $I(3; -2)$, bán kính $R = 5$.

D. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = 5$.

Câu 94: Xét các số phức z thỏa điều kiện $|z - 3 + 2i| = 5$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z + 1 - i$ là?

A. Đường tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 5$.

B. Đường tròn tâm $I(-4; 3)$, bán kính $R = 5$.

C. Đường tròn tâm $I(3; -2)$, bán kính $R = 5$.

D. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = 5$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |z - 3 + 2i| = 5 \Leftrightarrow |w - 1 + i - 3 + 2i| = 5 \Leftrightarrow |x + yi - 4 + 3i| = 5 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Vậy tập hợp điểm cần tìm là đường tròn tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 5$.

Câu 95: Số phức $z = (1 - i)^{2018}$ có phần thực bằng

A. 1.

B. 2^{2019} .

C. -2^{1009} .

D. 0.

Câu 96: Số phức $z = (1-i)^{2018}$ có phần thực bằng

- A. 1. B. 2^{2019} . C. -2^{1009} . D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } z = (1-i)^{2018} = \left[(1-i)^2 \right]^{1009} = (-2i)^{1009} = -2^{1009} \cdot i \cdot (i^2)^{504} = -2^{1009} \cdot i$$

Suy ra z có phần thực bằng 0.

Câu 97: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 + 4z + 37 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

- A. $M_2 \left(-3; \frac{1}{2} \right)$. B. $M_3 \left(3; \frac{1}{2} \right)$. C. $M_3 \left(3; \frac{-1}{2} \right)$. D. $M_1 \left(-3; \frac{-1}{2} \right)$.

Câu 98: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo?

- A. 2. B. vô số. C. 1. D. 0.

Câu 99: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 + 4z + 37 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

- A. $M_2 \left(-3; \frac{1}{2} \right)$. B. $M_3 \left(3; \frac{1}{2} \right)$. C. $M_3 \left(3; \frac{-1}{2} \right)$. D. $M_1 \left(-3; \frac{-1}{2} \right)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } z_0 = -\frac{1}{2} + 3i \text{ nên } w = iz_0 = -3 - \frac{1}{2}i \Rightarrow M_1 \left(-3; -\frac{1}{2} \right).$$

Câu 100: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo?

- A. 2. B. vô số. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $z \neq 2$.

$$\text{Ta có } |z + 2 + 3i| = 5 \Leftrightarrow (a+2)^2 + (b+3)^2 = 25 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{z}{z-2} = \frac{a+bi}{(a-2)+bi} = \frac{a^2+b^2-2a}{(a-2)^2+b^2} - \frac{2b}{(a-2)^2+b^2}i.$$

$$\frac{z}{z-2} \text{ là số thuần ảo } \Leftrightarrow a^2+b^2-2a=0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} (a+2)^2 + (b+3)^2 = 25 \\ a^2 + b^2 - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a^2-3a+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ a=2 \\ b=0 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } z \neq 2 \text{ nên } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + li.$$

Câu 101: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Tìm iz_0 ?

- A.** $iz_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. **B.** $iz_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. **C.** $iz_0 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. **D.** $iz_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Câu 102: Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

- A.** $S = -5$. **B.** $S = \frac{7}{3}$. **C.** $S = -\frac{7}{3}$. **D.** $S = 5$.

Câu 103: Cho $x, y \in [0; +\infty)$, $x + y = 1$. Biết $m \in [a; b]$ thì phương trình $(5x^2 + 4y)(5y^2 + 4x) + 40xy = m$ có nghiệm thực. Tính $T = 25a + 16b$.

- A.** $T = 829$. **B.** $T = 825$. **C.** $T = 816$. **D.** $T = 820$.

Câu 104: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2 - 6z + 5 = 0$. Tìm iz_0 ?

- A.** $iz_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. **B.** $iz_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. **C.** $iz_0 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. **D.** $iz_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$2z^2 - 6z + 5 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\text{Khi đó } iz_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Câu 105: Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

- A.** $S = -5$. **B.** $S = \frac{7}{3}$. **C.** $S = -\frac{7}{3}$. **D.** $S = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có : } z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - i\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a + 1 + (b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \sqrt{1 + b^2} = b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \geq -3 \\ 1 + b^2 = (b + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = a + 3b = -1 - 4 = -5.$$

Câu 106: Cho $x, y \in [0; +\infty)$, $x + y = 1$. Biết $m \in [a; b]$ thì phương trình $(5x^2 + 4y)(5y^2 + 4x) + 40xy = m$ có nghiệm thực. Tính $T = 25a + 16b$.

- A.** $T = 829$. **B.** $T = 825$. **C.** $T = 816$. **D.** $T = 820$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có : } m = 25(xy)^2 + 20(x^3 + y^3) + 56xy = 25(xy)^2 + 20[(x + y)^3 - 3xy(x + y)] + 56xy$$

$$= 25(xy)^2 - 4xy + 20 = 25t^2 - 4t + 20, \text{ với } t = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Xét hàm số $f(t) = 25t^2 - 4t + 20$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Ta có: $f'(t) = 50t - 4$. Xét $f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{25}$.

Ta có: $f(0) = 20$, $f\left(\frac{2}{25}\right) = \frac{496}{25}$ và $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{329}{16}$.

Do đó để phương trình có nghiệm thực thì $m \in \left[\frac{496}{25}; \frac{329}{16}\right] \Rightarrow a = \frac{496}{25}, b = \frac{329}{16}$ suy ra

$$T = 825.$$

Câu 107: Gọi z_1 và $z_2 = 4 + 2i$ là hai nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$). Tính $T = |z_1| + 3|z_2|$.

- A. $T = 6$. B. $T = 4\sqrt{5}$. C. $T = 2\sqrt{5}$. D. $T = 8\sqrt{5}$.

Câu 108: Gọi z_1 và $z_2 = 4 + 2i$ là hai nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$). Tính $T = |z_1| + 3|z_2|$.

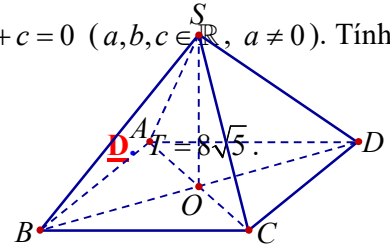
- A. $T = 6$. B. $T = 4\sqrt{5}$. C. $T = 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình bậc hai với hệ số thực có hai nghiệm phức là hai số phức liên hợp.

Do đó $z_1 = 4 - 2i$. Khi đó $|z_1| = |z_2| = 2\sqrt{5} \Rightarrow T = |z_1| + 3|z_2| = 8\sqrt{5}$.



Câu 109: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 7 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

- A. $P = 2\sqrt{3}$. B. $P = 14$. C. $P = 7$. D. $P = \sqrt{14}$.

Câu 110: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 7 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

- A. $P = 2\sqrt{3}$. B. $P = 14$. C. $P = 7$. D. $P = \sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 2z^2 - 3z + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{47}}{4}i \\ x = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{47}}{4}i \end{cases} \Rightarrow P = |z_1| + |z_2| = \sqrt{14}.$$

Câu 111: Gọi z_1 là nghiệm có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 4z + 20 = 0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z_1 .

- A. $M(-2; -4)$. B. $M(-4; -2)$. C. $M(2; -4)$. D. $M(4; -2)$.

Câu 112: Gọi z_1 là nghiệm có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 4z + 20 = 0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z_1 .

- A.** $M(-2; -4)$. **B.** $M(-4; -2)$. **C.** $M(2; -4)$. **D.** $M(4; -2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } z^2 - 4z + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + 4i \\ z = 2 - 4i \end{cases} \Rightarrow z_1 = 2 - 4i.$$

Vậy điểm biểu diễn của số phức z_1 là $M(2; -4)$.

Câu 113: Định tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z| = 2$.

- A.** $m = 1, m = 9$. **B.** $m = -3$.
C. $m = -3, m = 1, m = 9$. **D.** $m = -3, m = 9$.

Câu 114: Định tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z| = 2$.

- A.** $m = 1, m = 9$. **B.** $m = -3$.
C. $m = -3, m = 1, m = 9$. **D.** $m = -3, m = 9$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta = 4 - 4(1 - m) = 4m$.

$$\text{TH1: } \Delta > 0 \Leftrightarrow m > 0. \text{ Phương trình có nghiệm là } \begin{cases} z = 1 - \sqrt{m} \\ z = 1 + \sqrt{m} \end{cases}.$$

$$\text{Nếu } |1 + \sqrt{m}| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Nếu } |1 - \sqrt{m}| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m} = 3 \\ \sqrt{m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 9.$$

TH2: $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Phương trình có nghiệm $z = 1$ không thỏa mãn.

$$\text{TH3: } \Delta < 0 \Leftrightarrow m < 0. \text{ Khi đó nghiệm của phương trình là } \begin{cases} z = 1 + \sqrt{-m}.i \\ z = 1 - \sqrt{-m}.i \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } |z| = 2 \Leftrightarrow 1 - m = 4 \Leftrightarrow m = -3.$$

Câu 115: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A.** 8. **B.** 0. **C.** 4. **D.** $8i$.

Câu 116: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

- A.** 8. **B.** 0. **C.** 4. **D.** $8i$.

Lời giải.

Chọn C

$$\text{Ta có : } z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}.$$

Vậy $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 4$.

Câu 117: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$. Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1z_2$.

- A.** $w = \frac{3}{4} + 2i$. **B.** $w = \frac{3}{2} + 2i$. **C.** $w = 2 + \frac{3}{2}i$. **D.** $w = -\frac{3}{4} + 2i$.

Câu 118: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 3z + 4 = 0$. Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1z_2$.

- A.** $w = \frac{3}{4} + 2i$. **B.** $w = \frac{3}{2} + 2i$. **C.** $w = 2 + \frac{3}{2}i$. **D.** $w = -\frac{3}{4} + 2i$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý Viét ta có $z_1 + z_2 = \frac{3}{2}$, $z_1z_2 = 2$.

$$w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + iz_1z_2 = \frac{z_1 + z_2}{z_1z_2} + iz_1z_2 = \frac{3}{4} + 2i.$$

Câu 119: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $-1-2i$, $4-4i$, $-3i$. Số phức biểu diễn trọng tâm tam giác ABC là

- A.** $-1-3i$. **B.** $1-3i$. **C.** $-3+9i$. **D.** $3-9i$.

Câu 120: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $-1-2i$, $4-4i$, $-3i$. Số phức biểu diễn trọng tâm tam giác ABC là

- A.** $-1-3i$. **B.** $1-3i$. **C.** $-3+9i$. **D.** $3-9i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A(-1;-2)$, $B(4;-4)$, $C(0;-3)$ nên trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là $G(1;-3)$. Do đó, số phức biểu diễn điểm G là $1-3i$.

Câu 121: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Tìm phần ảo của số phức $w = [(i - z_1)(i - z_2)]^{2018}$.

- A.** 2^{1009} . **B.** -2^{1009} . **C.** 2^{1008} . **D.** -2^{1008} .

Câu 122: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Tìm phần ảo của số phức $w = [(i - z_1)(i - z_2)]^{2018}$.

- A.** 2^{1009} . **B.** -2^{1009} . **C.** 2^{1008} . **D.** -2^{1008} .

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Viét ta có: $z_1 + z_2 = 1$; $z_1 \cdot z_2 = 2$.

$$w = [(i - z_1)(i - z_2)]^{2018} = [-1 - i(z_1 + z_2) + z_1z_2]^{2018} = (1 - i)^{2018}.$$

$$(1 - i)^{2018} = [(1 - i)^2]^{1009} = (-2i)^{1009} = -2^{1009} \cdot i^{1008} \cdot i = -2^{1009} \cdot i.$$

Câu 123: Tìm phần thực, phần ảo của số phức z , biết z là một căn bậc hai của $w = 221 + 60i$ và có phần thực lớn hơn phần ảo.

- A.** Phần thực bằng 15, phần ảo bằng -2 . **B.** Phần thực bằng -2 , phần ảo bằng -15 .

C. Phần thực bằng -15 , phần ảo bằng -2 . D. Phần thực bằng 15 , phần ảo bằng 2 .

Câu 124: Tìm phần thực, phần ảo của số phức z , biết z là một căn bậc hai của $w = 221 + 60i$ và có phần thực lớn hơn phần ảo.

A. Phần thực bằng 15 , phần ảo bằng -2 . B. Phần thực bằng -2 , phần ảo bằng -15 .
C. Phần thực bằng -15 , phần ảo bằng -2 . D. Phần thực bằng 15 , phần ảo bằng 2 .

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a^2 - b^2 = 221 \\ 2ab = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 2 \\ a = -15 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Do phần thực của z lớn hơn phần ảo của z nên $z = 15 + 2i$.

Câu 125: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)\bar{z} - 1 - 3i = 0$. Tìm phần ảo của số phức $w = 1 - iz + \bar{z}$.

A. $-i$. B. -1 . C. 2 . D. $-2i$.

Câu 126: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Khi đó $z_1 \cdot z_2 + |z_1|$ bằng.

A. 26 . B. $13 + \sqrt{13}$. C. 13 . D. $13 + \sqrt{5}$.

Câu 127: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$?

A. 0 . B. 1 . C. 2 . D. 4 .

Câu 128: Cho số phức z thỏa mãn $4|z+i| + 3|z-i| = 10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1 .

Câu 129: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)\bar{z} - 1 - 3i = 0$. Tìm phần ảo của số phức $w = 1 - iz + \bar{z}$.

A. $-i$. B. -1 . C. 2 . D. $-2i$.

Lời giải

Chọn B

$$(1+i)\bar{z} - 1 - 3i = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1+3i}{1+i} = 2+i \Rightarrow z = 2-i.$$

$$w = 1 - iz + \bar{z} = 1 - i(2-i) + 2+i = 2-i.$$

Vậy phần ảo của $w = 1 - iz + \bar{z}$ bằng -1 .

Câu 130: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Khi đó $z_1 \cdot z_2 + |z_1|$ bằng.

A. 26 . B. $13 + \sqrt{13}$. C. 13 . D. $13 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2+3i \\ z = 2-3i \end{cases}.$$

$$\text{Vì } |2+3i| = |2-3i| = \sqrt{13} \text{ nên } z_1 \cdot z_2 + |z_1| = 13 + \sqrt{13}.$$

Câu 131: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$?

A. 0 . B. 1 . C. 2 . D. 4 .

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a-b=0$$

$$\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \Leftrightarrow a^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow b=1$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}. \text{ Vậy } z=1+i$$

Vậy có 1 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 132: Cho số phức z thỏa mãn $4|z+i|+3|z-i|=10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ suy ra $|z|^2 = a^2 + b^2$

$$\text{Ta có } z+i = a+(b+1)i \Rightarrow |z+i|^2 = a^2 + (b+1)^2 = |z|^2 + 2b + 1$$

$$z-i = a+(b-1)i \Rightarrow |z-i|^2 = a^2 + (b-1)^2 = |z|^2 - 2b + 1$$

Theo giả thiết và bất đẳng thức Bnhiacopsky ta có

$$10 = 4|z+i| + 3|z-i| \leq \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{|z+i|^2 + |z-i|^2} = 5\sqrt{2|z|^2 + 2} \\ \Rightarrow |z|^2 \geq 1 \text{ suy ra } \min|z| = 1.$$

Câu 133: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$

bằng.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 134: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$

bằng.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2}{z_1z_2} = \frac{1^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}.$$

Câu 135: Cho số phức z thỏa mãn $(1+z)^2$ là số thực. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là?

A. Hai đường thẳng. **B.** Parabol. **C.** Đường thẳng. **D.** Đường tròn.

Câu 136: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$. **B.** $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.
C. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$. **D.** $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Câu 137: Cho số phức z thỏa mãn $(1+z)^2$ là số thực. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là?

- A.** Hai đường thẳng. **B.** Parabol. **C.** Đường thẳng. **D.** Đường tròn.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó, ta có $(1+z)^2 = (1+x+yi)^2 = (x+1)^2 - y^2 + 2(x+1)yi$.

Do $(1+z)^2$ là số thực nên $2(x+1)y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases}$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là hai đường thẳng $x+1=0$ và $y=0$.

Câu 138: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$. **B.** $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.
C. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$. **D.** $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do z_1, z_2, z_3 đều khác 0 nên ta có

$$\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{\overline{z_1}}{z_1 \cdot z_1} + \frac{\overline{z_2}}{z_2 \cdot z_2} + \frac{\overline{z_3}}{z_3 \cdot z_3} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}}{\frac{8}{3}} \quad (1) \text{ vì}$$

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} = z_3 \cdot \overline{z_3} = \frac{8}{3}.$$

Lấy mô đun hai vế của (1) ta có

$$\frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{|z_1 z_2 z_3|} = \frac{|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}|}{\frac{8}{3}}$$

$$\Leftrightarrow |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot |z_1 + z_2 + z_3| = 0.$$

Câu 1: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| \leq |z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:

A. $\sqrt{13}+1$.

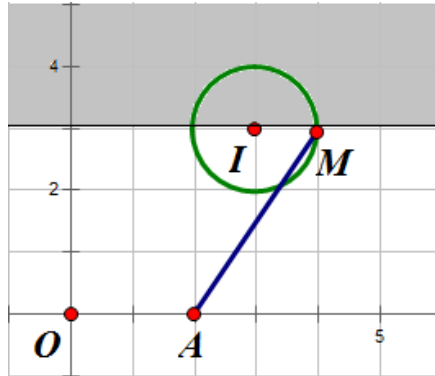
B. $\sqrt{10}+1$.

C. $\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có:

$$|z-2i| \leq |z-4i| \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 \leq x^2 + (y-4)^2$$

$\Leftrightarrow y \leq 3$; $|z-3-3i|=1 \Leftrightarrow$ điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(3;3)$ và bán kính bằng 1. Biểu thức $P=|z-2|=AM$ trong đó $A(2;0)$, theo hình vẽ thì giá trị lớn nhất của $P=|z-2|$ đạt

được khi $M(4;3)$ nên $\max P = \sqrt{(4-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$.

Câu 2: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?

A. 13.

B. 11.

C. 12.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta = 9 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$ thì (1) phải có nghiệm phức. Suy ra $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 9$.

Vậy trong khoảng $(0;20)$ có 10 số m_0 .

Câu 3: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Gọi số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1|=1$ và $(1+i)(\overline{z}-1)$ có phần thực bằng 1 đồng thời z không là số thực. Khi đó $a.b$ bằng :

A. $a.b = -2$.

B. $a.b = 2$.

C. $a.b = 1$.

D. $a.b = -1$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $|z-1|=1$ thì $(a-1)^2 + b^2 = 1$.

Lại có $(1+i)(\overline{z}-1)$ có phần thực bằng 1 nên $a+b=2$.

Giải hệ có được từ hai phương trình trên kết hợp điều kiện z không là số thực ta được $a=1, b=1$.

Suy ra $a.b=1$.

Trình bày lại

Theo giả thiết $|z-1|=1$ thì $(a-1)^2+b^2=1$ (1).

Lại có $(1+i)(\bar{z}-1)=(a+b-1)+(a-b-1)i$ có phần thực bằng 1 nên $\begin{cases} a+b=2 \\ b \neq 0 \end{cases}$ (2).

Giải hệ có được từ hai phương trình trên ta được $a=1, b=1$.

Suy ra $a.b=1$.

Câu 4: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó:

A. $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **C.** $m_0 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. **D.** $m_0 \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Đặt: } w = \frac{1+i}{z} = \frac{1+i}{a+bi} = \frac{1}{a^2+b^2} [a+b+(a-b)i] = \frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{a-b}{a^2+b^2} i.$$

w là số thực nên: $a=b$ (1).

$$\text{Mặt khác: } |a-2+bi|=m \Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=m^2 \quad (2).$$

$$\text{Thay (1) vào (2) được: } (a-2)^2+a^2=m^2 \Leftrightarrow 2a^2-4a+4-m^2=0 \quad (3).$$

Để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm a duy nhất.

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4-2(4-m^2)=0 \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\sqrt{2} \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \quad (\text{Vì } m \text{ là mô-đun}).$$

Trình bày lại

Giả sử $z = a + bi$, vì $z \neq 0$ nên $a^2+b^2 > 0$ (*).

$$\text{Đặt: } w = \frac{1+i}{z} = \frac{1+i}{a+bi} = \frac{1}{a^2+b^2} [a+b+(a-b)i] = \frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{a-b}{a^2+b^2} i.$$

w là số thực nên: $a=b$ (1). Kết hợp (*) suy ra $a=b \neq 0$.

$$\text{Mặt khác: } |a-2+bi|=m \Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=m^2 \quad (2). (\text{Vì } m \text{ là mô-đun nên } m \geq 0).$$

$$\text{Thay (1) vào (2) được: } (a-2)^2+a^2=m^2 \Leftrightarrow g(a)=2a^2-4a+4-m^2=0 \quad (3).$$

Để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm $a \neq 0$ duy nhất.

Có các khả năng sau :

KN1 : PT (3) có nghiệm kép $a \neq 0$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \Delta' = 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 = 0 \\ 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \sqrt{2}.$$

KN2: PT (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $a = 0$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 > 0 \\ 4 - m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \exists m_0 = \sqrt{2} \in \left(1; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 5: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Trong tập hợp các số phức, gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - z + \frac{2017}{4} = 0$, với z_2 có thành phần ảo dương. Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$ là

A. $\sqrt{2016} - 1$. **B.** $\frac{\sqrt{2017} - 1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2016} - 1}{2}$. **D.** $\sqrt{2017} - 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét phương trình } z^2 - z + \frac{2017}{4} = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta = -2016 < 0 \Rightarrow \text{phương trình có hai nghiệm phức } \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2016}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2016}}{2}i \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } z_1 - z_2 = i\sqrt{2016}$$

$$|z - z_2| = |(z - z_1) + (z_1 - z_2)| \geq |z_1 - z_2| - |z - z_1| \Leftrightarrow P \geq \sqrt{2016} - 1.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \sqrt{2016} - 1.$$

Câu 6: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z - m| = 6$ và $\frac{z}{z - 4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S .

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

$$\text{Gọi } z = x + iy \text{ với } x, y \in \mathbb{R} \text{ ta có } \frac{z}{z - 4} = \frac{x + iy}{x - 4 + iy} = \frac{(x + iy)(x - 4 - iy)}{(x - 4)^2 + y^2} = \frac{x(x - 4) + y^2 - 4iy}{(x - 4)^2 + y^2}$$

$$\text{là số thuần ảo khi } x(x - 4) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

$$\text{Mà } |z - m| = 6 \Leftrightarrow (x - m)^2 + y^2 = 36$$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} (x - m)^2 + y^2 = 36 \\ (x - 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - 2m)x = 36 - m^2 \\ y^2 = 4 - (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{36 - m^2}{4 - 2m} \\ y^2 = 4 - \left(\frac{36 - m^2}{4 - 2m} - 2\right)^2 \end{cases}$$

$$Y_{cbt} \Leftrightarrow 4 - \left(\frac{36 - m^2}{4 - 2m} - 2 \right)^2 = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{36 - m^2}{4 - 2m} - 2 \text{ hoặc } -2 = \frac{36 - m^2}{4 - 2m} - 2$$

$$\Leftrightarrow m = 10 \text{ hoặc } m = -2 \text{ hoặc } m = \pm 6$$

Vậy tổng là $10 - 2 + 6 - 6 = 8$.

Cách 2:

$$\text{Để có một số phức thỏa mãn ycbt thì hpt } \begin{cases} (x - m)^2 + y^2 = 36 \\ (x - 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ có đúng một nghiệm}$$

Nghĩa là hai đường tròn $(C_1): (x - m)^2 + y^2 = 36$ và $(C_2): (x - 2)^2 + y^2 = 4$ tiếp xúc nhau.

Xét (C_1) có tâm $I_1(2; 0)$ bán kính $R_1 = 6$, (C_2) có tâm $I_2(m; 0)$ bán kính $R_2 = 2$

$$\text{Cần có: } \begin{cases} I_1 I_2 = |R_1 - R_2| \\ I_1 I_2 = R_1 + R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 2| = 4 \\ |m - 2| = 6 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-6; 6; 10; -2\}.$$

Vậy tổng là $10 - 2 + 6 - 6 = 8$.sss

Câu 7: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của CD, CB, SA . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNK) là một đa giác (H) . Hãy chọn khẳng định **đúng**?

A. (H) là một hình thang.

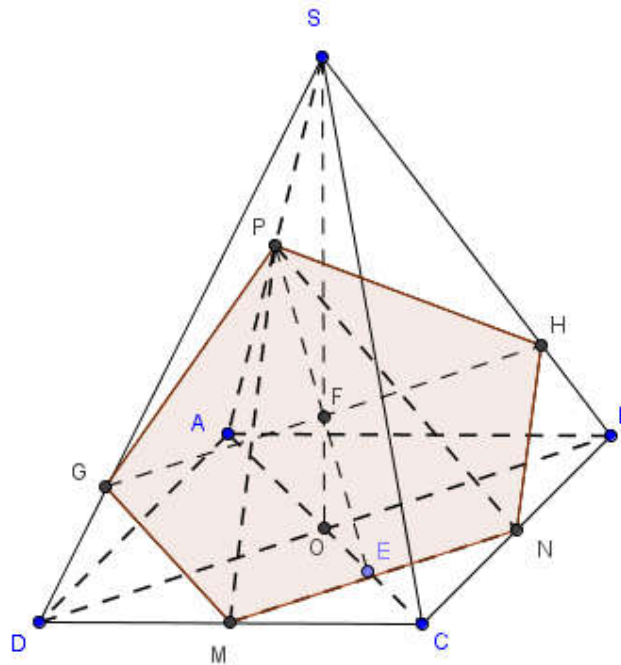
B. (H) là một hình bình hành.

C. (H) là một ngũ giác.

D. (H) là một tam giác.

Lời giải

Chọn C Sửa trên hình điểm P thành điểm K nhé



Gọi $E = MN \cap AC$ và $F = PE \cap SO$. Trong (SBD) qua F kẻ đường thẳng song song với s_{MN} và lần lượt cắt SB, SD tại H, G . Khi đó ta thu được thiết diện là ngũ giác $MNHKG$.

Câu 8: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018) Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i|=5$.

Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=iz+1-i$ là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $r=22$.

B. $r=20$.

C. $r=4$.

D. $r=5$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $w=x+yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $w=iz+1-i \Leftrightarrow x+yi=iz+1-i \Leftrightarrow z=(y+1)+(1-x)i$.

Mà $|z-i|=5 \Leftrightarrow |y+1-xi|=5 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=5^2$.

Câu 9: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Cho số phức thỏa $|z|=3$. Biết rằng tập hợp

số phức $w=\bar{z}+i$ là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I(0;1)$.

B. $I(0;-1)$.

C. $I(-1;0)$.

D. $I(1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $w=x+yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $w=\bar{z}+i \Leftrightarrow x+yi=\bar{z}+i \Leftrightarrow \bar{z}=x+(y-1)i \Leftrightarrow z=x+(1-y)i$.

Mặt khác ta có $|z|=3$ suy ra $x^2+(1-y)^2=9$ hay $x^2+(y-1)^2=9$.

Vậy tập hợp số phức $w=\bar{z}+i$ là đường tròn tâm $I(0;1)$.

Câu 10: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018) Đường nào dưới đây là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|z+i|$?

A. Một đường thẳng.

B. Một đường tròn.

C. Một đường elip.

D. Một đoạn thẳng.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=xi+y$, (với $x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ (xOy).

Ta có $|z-i|=|z+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|x+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow y=0$ (phương trình một đường thẳng).

Câu 11: (THPT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=|z+\bar{z}|=1$?

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z}=x-yi \Rightarrow z+\bar{z}=2x$.

Bài ra ta có
$$\begin{cases} |z|=1 \\ |z+\bar{z}|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=1 \\ |2x|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=\pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó có 4 số phức thỏa mãn là $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 12: (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn

$2|z-1| = |z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

- A. đường thẳng. B. đường tròn. **C. parabol.** D. hypebol.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow z + \bar{z} = 2x$.

Bài ra ta có $2|x-1+yi| = |2x+2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |2x+2|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 4x$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1| = |z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

Câu 13: (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

- A. $\sqrt{3}$. B. 3. **C. $\frac{13}{4}$.** D. 5.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Do $|z| = 1$ nên $a^2 + b^2 = 1$.

Sử dụng công thức: $|u.v| = |u||v|$ ta có: $|z^2 - z| = |z||z-1| = |z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{2-2a}$.

$|z^2 + z + 1| = |(a+bi)^2 + a + bi + 1| = |a^2 - b^2 + a + 1 + (2ab + b)i| = \sqrt{(a^2 - b^2 + a + 1)^2 + (2ab + b)^2}$
 $= \sqrt{a^2(2a+1)^2 + b^2(2a+1)^2} = |2a+1|$ (vì $a^2 + b^2 = 1$).

Vậy $P = |2a+1| + \sqrt{2-2a}$.

• **TH1:** $a < -\frac{1}{2}$.

Suy ra $P = -2a - 1 + \sqrt{2-2a} = (2-2a) + \sqrt{2-2a} - 3 \leq 4 + 2 - 3 = 3$ (vì $0 \leq \sqrt{2-2a} \leq 2$).

• **TH2:** $a \geq -\frac{1}{2}$.

Suy ra $P = 2a + 1 + \sqrt{2-2a} = -(2-2a) + \sqrt{2-2a} + 3 = -\left(\sqrt{2-2a} - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 + \frac{1}{4} \leq \frac{13}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{2-2a} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{7}{8}$.

Cách 2: Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Do $|z| = 1$ nên $a^2 + b^2 = 1$. Nhận xét: $a \in [-1; 1]$

Lập luận như cách 1 được $P = |2a+1| + \sqrt{2-2a} = \begin{cases} f_1(a) = 2a+1+\sqrt{2-2a}, & -\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \\ f_2(a) = -2a-1+\sqrt{2-2a}, & -1 \leq a \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $f'(a) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{\sqrt{2-2a}}, & -\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \\ -2 - \frac{1}{\sqrt{2-2a}}, & -1 \leq a \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$. Xét $f'(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{7}{8}$

Lập bbt xét dấu $f'(a)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\frac{13}{4}$ khi $a = \frac{7}{8}$.

Câu 14: (THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018) Cho số phức z và w thỏa mãn $z+w=3+4i$ và $|z-w|=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z|+|w|$.

A. $\max T = \sqrt{176}$. **B.** $\max T = 14$. **C.** $\max T = 4$. **D.** $\max T = \sqrt{106}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Do $z+w=3+4i$ nên $w = (3-x) + (4-y)i$.

Mặt khác $|z-w|=9$ nên $|z-w| = \sqrt{(2x-3)^2 + (2y-4)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 12x - 16y + 25} = 9$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y = 28 \quad (1). \text{ Suy ra } T = |z| + |w| = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $T^2 \leq 2(2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y + 25) \quad (2)$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2}$.

Từ (1) và (2) ta có $T^2 \leq 2(28+25) \Leftrightarrow -\sqrt{106} \leq T \leq \sqrt{106}$. Vậy $\max T = \sqrt{106}$.

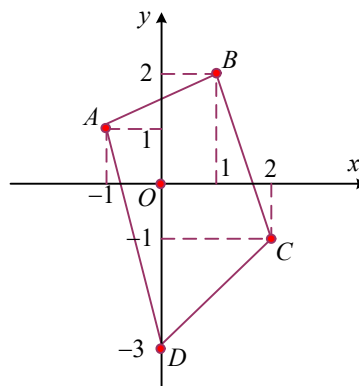
Câu 15: (THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018) Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1 = -1+i, z_2 = 1+2i, z_3 = 2-i, z_4 = -3i$. Gọi S là diện tích tứ giác $ABCD$. Tính S .

A. $S = \frac{17}{2}$. **B.** $S = \frac{19}{2}$. **C.** $S = \frac{23}{2}$. **D.** $S = \frac{21}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z_1 = -1+i \Rightarrow A(-1;1), z_2 = 1+2i \Rightarrow B(1;2), z_3 = 2-i \Rightarrow C(2;-1), z_4 = -3i \Rightarrow D(0;-3)$



$\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$, $\vec{n} = (2; 3)$ là véc tơ pháp tuyến của AC , phương trình AC :

$$2(x+1)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-1=0.$$

Khoảng cách từ B đến AC là:

$$d(B; AC) = \frac{|2+3.2-1|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} d(B; AC).AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Khoảng cách từ } D \text{ đến } AC \text{ là: } d(D; AC) = \frac{|0-9-1|}{\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} d(D; AC).AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{13} = 5.$$

$$\text{Vậy } S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} = \frac{7}{2} + 5 = \frac{17}{2}.$$

Câu 16: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$$z + 2 + i - |z|(1+i) = 0 \text{ và } |z| > 1. \text{ Tính } P = a + b.$$

A. $P = -1$.

B. $P = -5$.

C. $P = 3$.

D. $P = 7$.

Lời giải

Chọn D

$$z + 2 + i - |z|(1+i) = 0 \Leftrightarrow (a+2) + (b+1)i = |z| + i|z|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = |z| \\ b+1 = |z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = \sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ b+1 = \sqrt{a^2+b^2} & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được $a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$. Thay vào (1) ta được

$$a+2 = \sqrt{a^2 + (a+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2 > 1 & (\text{do } |z| > 1) \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3. \text{ Suy ra } b = 4.$$

Do đó $z = 3 + 4i$ có $|z| = 5 > 1$ (thỏa điều kiện $|z| > 1$).

$$\text{Vậy } P = a + b = 3 + 4 = 7.$$

Câu 1: (THTT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w=M+mi$.

- A. $|w|=\sqrt{1258}$. B. $|w|=\sqrt{1258}$. C. $|w|=2\sqrt{314}$. D. $|w|=2\sqrt{309}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=5 \quad (1).$$

$$P=|z+2|^2-|z-i|^2=(a+2)^2+b^2-\left[a^2+(b-1)^2\right]=4a+2b+3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $20a^2+(64-8P)a+P^2-22P+137=0$ (*).

Phương trình (*) có nghiệm khi $\Delta'=-4P^2+184P-1716 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33 \Rightarrow |w|=\sqrt{1258}.$$

Câu 2: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Cho số phức z , biết rằng các điểm biểu diễn hình học của các số phức z ; iz và $z+iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 18. Môđun của số phức z bằng

- A. $2\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{2}$. C. 6. D. 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ nên $iz=ai-b$, $z+iz=a+bi-b+ai=a-b+(a+b)i$

Ta gọi $A(a, b)$, $B(-b, a)$, $C(a-b, a+b)$ nên $\overrightarrow{AB}(-b-a, a-b)$, $\overrightarrow{AC}(-b, a)$

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|-a^2-b^2\right| \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)=18 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=6.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$.

Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó bằng ?

- A. 7. B. 20. C. $2\sqrt{5}$. D. $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $w=3-2i+(2-i)z \Leftrightarrow z=\frac{w-3+2i}{2-i}$. Đặt $w=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Khi đó } z=\frac{x+yi-3+2i}{2-i}.$$

$$\text{Ta có } |z|=2 \Rightarrow \left|\frac{x+yi-3+2i}{2-i}\right|=2 \Leftrightarrow \frac{|x-3+(y+2)i|}{|2-i|}=2 \Leftrightarrow \frac{|x-3+(y+2)i|}{|2-i|}=2$$

$$\Leftrightarrow |x-3+(y+2)i|=2|2-i| \Leftrightarrow |x-3+(y+2)i|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=(2\sqrt{5})^2.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn có bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Câu 4: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn

$4|z+i|+3|z-i|=10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$4|z+i|+3|z-i| = 4\sqrt{a^2+(b+1)^2} + 3\sqrt{a^2+(b-1)^2} \leq (4^2+3^2)(a^2+(b+1)^2 + a^2+(b-1)^2)$$

$$\Leftrightarrow 10^2 \leq 25(2|z|^2 + 2) \Leftrightarrow |z| \geq 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là 1, đạt khi $a = \frac{24}{25}$; $b = \frac{7}{25}$ hay $z = \frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$.

Câu 5: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = 1+i$, $z_2 = 8+i$, $z_3 = 1-3i$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Tam giác MNP cân.

B. Tam giác MNP đều.

C. Tam giác MNP vuông.

D. Tam giác MNP vuông cân.

Lời giải

Chọn C

M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 1+i$ nên tọa độ điểm M là $(1;1)$.

N là điểm biểu diễn số phức $z_2 = 8+i$ nên tọa độ điểm N là $(8;1)$.

P là điểm biểu diễn số phức $z_3 = 1-3i$ nên tọa độ điểm P là $(1;-3)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (7;0)$, $\overrightarrow{MP} = (0;-4)$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \\ |\overrightarrow{MN}| \neq |\overrightarrow{MP}| \end{cases}$ hay tam giác MNP vuông tại M và không phải tam giác cân.

Câu 6: (THPT số 5-488 tháng 2 năm 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có:

$$\begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z-3i| = |z+i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \\ a^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+1 = -2b+1 \\ -6b+9 = 2b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}.$$

Vậy có một số phức thỏa mãn là $z = 1+i$.

Chọn B

Ta có $w^2 + 4 = (x + yi)^2 + 4 = x^2 - y^2 + 2xyi + 4 \Rightarrow |w^2 + 4| = \sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2}$.

Do đó

$$\begin{aligned} |w^2 + 4| &= 2|w| \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2 = 4(x^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 8(x^2 - y^2) + 16 + 4x^2y^2 = 4(x^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4(x^2 + y^2) + 4 + 8(x^2 - y^2) + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 4 + 8(x^2 - y^2) + 12 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2)^2 + 8(x^2 - y^2) + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8(x^2 - y^2) + 12 = -(x^2 + y^2 - 2)^2 \Leftrightarrow P = -(|w|^2 - 2)^2. \end{aligned}$$

Câu 4: (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$$z + 1 + 3i - |z|i = 0. \text{ Tính } S = a + 3b.$$

A. $S = \frac{7}{3}$.

B. $S = -5$.

C. $S = 5$.

D. $S = -\frac{7}{3}$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - i\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a + 1 + (b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \geq -3 \\ (b + 3)^2 = 1 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = -5.$$

Câu 5: (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Biết số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và

biểu thức $T = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z|$.

A. $|z| = \sqrt{33}$.

B. $|z| = 50$.

C. $|z| = \sqrt{10}$.

D. $|z| = 5\sqrt{2}$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Đặt } z = x + yi, \text{ theo giả thiết } |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5. \quad (C)$$

$$\text{Ngoài ra } T = |z + 2|^2 - |z - i|^2 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 - T = 0 \quad (\Delta) \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

$$\text{Rõ ràng } (C) \text{ và } (\Delta) \text{ có điểm chung do đó } \frac{|23 + T|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 13 \leq T \leq 33.$$

$$\text{Vì } T \text{ đạt giá trị lớn nhất nên } T = 33 \text{ suy ra } 4x + 2y - 30 = 0 \Leftrightarrow y = 15 - 2x \text{ thay vào } (C) \text{ ta được } 5x^2 - 50x + 125 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 5. \text{ Vậy } |z| = 5\sqrt{2}.$$

Câu 6: (THPT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho hai điểm A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_0, z_1 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì? (O là gốc tọa độ)? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Cân tại O .

B. Vuông cân tại O .

C. Đều.

D. Vuông tại O .

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết suy ra: $OA = |z_0|$, $OB = |z_1|$ và $AB = |z_1 - z_0|$.

Ta có: $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Leftrightarrow z_0^2 - z_0 z_1 + z_1^2 = 0 \Leftrightarrow (z_0 + z_1)(z_0^2 - z_0 z_1 + z_1^2) = 0$.

$\Leftrightarrow z_0^3 + z_1^3 = 0 \Leftrightarrow z_0^3 = -z_1^3 \Leftrightarrow |z_0| = |z_1| \Leftrightarrow OA = OB$.

Xét $(z_1 - z_0)^2 = z_0^2 + z_1^2 - 2z_0 z_1 = -z_0 z_1 \Rightarrow |z_1 - z_0|^2 = |z_1| \cdot |z_0|$

$\Leftrightarrow AB^2 = OA \cdot OB \Leftrightarrow AB = OB$.

Vậy $AB = OB = OA$ hay tam giác OAB là tam giác đều.

Câu 7: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

của $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$, với z là số phức khác 0 thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính $2M - m$.

- A.** $2M - m = \frac{3}{2}$. **B.** $2M - m = \frac{5}{2}$. **C.** $2M - m = 10$. **D.** $2M - m = 6$.

Lời giải

Chọn B

$P = \left| \frac{z+i}{z} \right| = \frac{|z+i|}{|z|} \leq \frac{|z|+|i|}{|z|} = 1 + \frac{1}{|z|} \leq \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z = 2i$. Vậy $M = \frac{3}{2}$.

$P = \left| \frac{z+i}{z} \right| = \frac{|z+i|}{|z|} \geq \frac{||z|-|i||}{|z|} = \frac{|z|-1}{|z|} = 1 - \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z = -2i$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

Vậy $2M - m = \frac{5}{2}$.

Câu 8: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa

mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $z \cdot \bar{z} = 10$. Tính $P = a - b$.

- A.** $P = 4$. **B.** $P = -4$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = 2$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $|z - 1 + 2i| = 5$ và $z \cdot \bar{z} = 10$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} (a-1)^2 + (b+2)^2 = 25 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 5 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 5 \\ (2b+5)^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$ (loại). Vậy $P = 4$.

Câu 9: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$, số phức

w thỏa mãn $|\bar{w} - 2 - 3i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - w|$.

- A.** $\sqrt{13} - 3$. **B.** $\sqrt{17} - 3$. **C.** $\sqrt{17} + 3$. **D.** $\sqrt{13} + 3$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + iy$ thì M thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1; 1)$, bán kính $R_1 = 1$.

$$\Rightarrow MN_{\min} = I_1 I_2 - R_1 - R_2 = \sqrt{17} - 3$$

D. 8.

A. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$ **B.** $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$ **C.** $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$ **D.** $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S \leq S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_0^a (x^{p-1}) dx = \left(\frac{x^p}{p} \right) \Big|_0^a = \frac{a^p}{p}; \quad S_2 = \int_0^b \left(y^{\frac{1}{p-1}} \right) dy = \left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1} \right) \Big|_0^b = \left(\frac{y^q}{q} \right) \Big|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

$$\text{Vì: } \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Câu 12: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $1 \leq |z-1| \leq 2$ trong mặt phẳng phức. Tính diện tích hình (H) .

A. 2π .

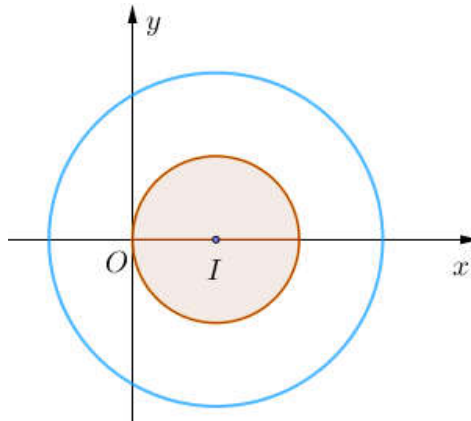
B. 3π .

C. 4π .

D. 5π .

Lời giải

Chọn B



$$\text{Đặt } z = x + yi, \quad |z-1| = |x-1+yi| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

$$\text{Do đó } 1 \leq |z-1| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 4.$$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hình phẳng nằm trong đường tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $R=2$ và nằm ngoài đường tròn $I(1;0)$ bán kính $r=1$.

$$\text{Diện tích hình phẳng } S = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi.$$

Câu 13: (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$?

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Ta có $z^2 = |z|^2 + \bar{z} \Leftrightarrow (a+bi)^2 = a^2 + b^2 + a - bi \Leftrightarrow 2abi - b^2 = b^2 + a - bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = -b \\ -b^2 = b^2 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \\ 2b^2 + a = 0 \end{cases}$$

- $b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = 0$.
- $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$.

Vậy có 3 số phức thỏa ycbt.

Câu 14: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hai số phức z_1, z_2 có điểm biểu diễn lần lượt là M_1, M_2 cùng thuộc đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

- A.** $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P = \sqrt{2}$. **C.** $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $P = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có M_1, M_2 cùng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 1$.

Vì $|z_1 - z_2| = 1$ nên suy ra $M_1M_2 = 1$. Vậy tam giác OM_1M_2 là tam giác đều cạnh bằng 1.

Gọi H là trung điểm của M_1M_2 thì OH là trung tuyến của tam giác đều OM_1M_2 có cạnh

bằng 1. Suy ra $OH = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $P = |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}| = |2\overrightarrow{OH}| = 2OH = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Câu 15: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Cho $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2}$, với a, b là các số

hữu tỉ. Khi đó, giá trị của a là

- A.** $-\frac{26}{27}$. **B.** $\frac{26}{27}$. **C.** $\frac{27}{26}$. **D.** $-\frac{25}{27}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 x(3x - \sqrt{9x^2 - 1}) dx = \left[x^3 - \frac{2}{27}(9x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{26}{27} - \frac{32}{27}\sqrt{2}$.

Câu 16: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính $|z|$.

- A.** 3. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - 2x + 2yi = -7 + x + (y+3)i$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 2x = -7 + x \\ 2y = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } |z| = 5.$

Câu 17: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) Cho hai số phức z, w thỏa mãn

$$\begin{cases} |z - 3 - 2i| \leq 1 \\ |w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i| \end{cases}. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất } P_{\min} \text{ của biểu thức } P = |z - w|.$$

A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$. **B.** $P_{\min} = \sqrt{2} + 1$. **C.** $P_{\min} = \frac{5\sqrt{2} - 2}{2}$. **D.** $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$.

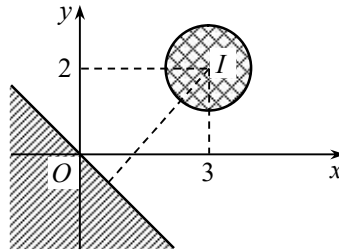
Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = a + bi; w = x + yi$ ($a, b, x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$|z - 3 - 2i| \leq 1 \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 2)^2 \leq 1$. Suy ra tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là hình tròn tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 1$.

$|w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i| \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 \leq (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x + y \leq 0$. Suy ra tập hợp điểm N biểu diễn số phức w là nửa mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $\Delta: x + y = 0$ (tính cả bờ đường thẳng) (hình vẽ)



Ta có $d(I, \Delta) = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Gọi H là hình chiếu của I trên Δ .

Khi đó $|z - w| = MN \geq d(I, \Delta) - R = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 1$. Suy ra $P_{\min} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 1$.

Câu 18: (Chuyên ĐB Sông Hồng – Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn

$$|z_1 + 1 - i| = 2 \text{ và } z_2 = iz_1. \text{ Tìm giá trị lớn nhất } m \text{ của biểu thức } |z_1 - z_2|$$

A. $m = 2\sqrt{2} + 2$. **B.** $m = \sqrt{2} + 1$. **C.** $m = 2\sqrt{2}$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó theo giả thiết của đề bài ta có $z_2 = -y + xi$.

$$\text{Khi đó } |z_1 + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

Vì vậy tồn tại $t \in \mathbb{R}$ để $x = -1 + 2\sin t$ và $y = 1 + 2\cos t$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } |z_1 - z_2|^2 &= (x + y)^2 + (y - x)^2 = 2(x^2 + y^2) \\ &= 2[6 - 4(\sin t - \cos t)] = 12 - 8\sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leq 12 + 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } m = \sqrt{12 + 8\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2.$$

Câu 19: Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $z|z| + 2z + i = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b^2$.

- A. $T = 4\sqrt{3} - 2$. B. $T = 3 + 2\sqrt{2}$. C. $T = 3 - 2\sqrt{2}$. D. $T = 4 + 2\sqrt{3}$.

Câu 20: (THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội – Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $z|z| + 2z + i = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b^2$.

- A. $T = 4\sqrt{3} - 2$. B. $T = 3 + 2\sqrt{2}$. C. $T = 3 - 2\sqrt{2}$. D. $T = 4 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z|z| + 2z + i = 0 \Leftrightarrow (a + bi)|a + bi| + 2(a + bi) + i = 0$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{a^2 + b^2} + 2a + b\sqrt{a^2 + b^2}i + 2bi + i = 0 \Leftrightarrow a\sqrt{a^2 + b^2} + 2a + b\sqrt{a^2 + b^2}i + 2bi + i = 0$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{a^2 + b^2} + 2a + (b\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + 1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{a^2 + b^2} + 2a = 0 \\ b\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b\sqrt{b^2} + 2b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ |b| = -\frac{2b+1}{b} \end{cases}$$

$$|b| = -\frac{2b+1}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = -\frac{2b+1}{b} \\ -\frac{1}{2} \leq b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1 - \sqrt{2}. \text{ Suy ra } T = a + b^2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Câu 21: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$ và $(z + 2i)^2$ là số thuần ảo?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó $|z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 18$ (1).

$$(z + 2i)^2 = [x + (y + 2)i]^2 = x^2 - (y + 2)^2 + 2x(y + 2)i.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } x^2 - (y + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ x = -(y + 2) \end{cases}$$

Với $x = y + 2$ thay vào (1) ta được phương trình $2y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow z_1 = 2$.

$$\text{Với } x = -(y + 2) \text{ thay vào (1) ta được phương trình } 2y^2 - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt{5} \\ y = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_2 = -3 - \sqrt{5} + (1 + \sqrt{5})i \\ z_3 = -3 + \sqrt{5} + (1 - \sqrt{5})i \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2 + i)z|z - (1 - 2i)z| = |1 + 3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

- A. $M = 19$. B. $M = 25$. C. $M = 5$. D. $M = \sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết, ta có $\left| (2|z|-1) + (|z|+2)\mathbf{i} \right| \cdot |z| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[(2|z|-1)^2 + (|z|+2)^2 \right] \cdot |z|^2 = 10$

$$\Leftrightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ (vì } |z| \geq 0 \text{)}.$$

Gọi $z_1 = x_1 + y_1\mathbf{i}$ và $z_2 = x_2 + y_2\mathbf{i}$. Ta có $|z_1| = |z_2| = 1$ nên $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$.

Mặt khác, $|z_1 - z_2| = 1$ nên $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 1$. Suy ra $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$.

$$\text{Khi đó } M = |2z_1 + 3z_2| = \sqrt{(2x_1 + 3x_2)^2 + (2y_1 + 3y_2)^2}$$

$$= \sqrt{4(x_1^2 + y_1^2) + 9(y_1^2 + y_2^2) + 12(x_1x_2 + y_1y_2)}$$

$$\text{Vậy } M = \sqrt{19}.$$

Câu 1: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$, đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

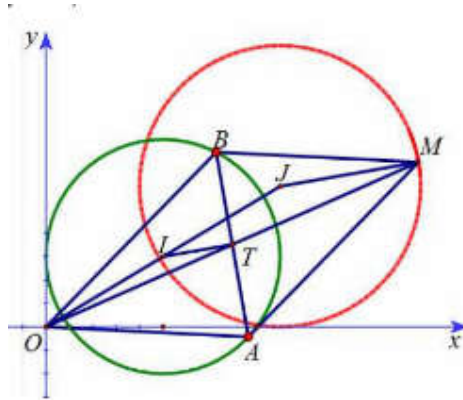
B. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

C. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

D. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn B



Gọi A, B, M là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, w . Khi đó A, B thuộc đường tròn $(C): (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$ và $AB = |z_1 - z_2| = 8$.

(C) có tâm $I(5; 3)$ và bán kính $R = 5$, gọi T là trung điểm của AB khi đó T là trung điểm của OM và $IT = \sqrt{IA^2 - TA^2} = 3$.

Gọi J là điểm đối xứng của O qua I suy ra $J(10; 6)$ và IT là đường trung bình của tam giác OJM , do đó $JM = 2IT = 6$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm J bán kính bằng 6 và có phương trình $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

Câu 2: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Biết số phức z có phần ảo khác 0 và thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức z trên?

A. $P(4; -3)$.

B. $N(3; -4)$.

C. $M(3; 4)$.

D. $Q(4; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$).

Ta có $|z - (2 + i)| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |x + yi - (2 + i)| = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 1)i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 5$.

Lại có $z\bar{z} = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$ nên $25 - 4x - 2y = 5 \Leftrightarrow 2x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - 2x$

$\Rightarrow x^2 + (10 - 2x)^2 = 25 \Leftrightarrow 5x^2 - 40x + 75 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \end{cases}$.

+ Với $x = 5 \Rightarrow y = 0$, không thỏa mãn vì $y \neq 0$.

+ Với $x = 3 \Rightarrow y = 4$, thỏa mãn $y \neq 0 \Rightarrow z = 3 + 4i$.

Do đó điểm $M(3; 4)$ biểu diễn số phức z .

Câu 3: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_0, z_1 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì (O là gốc tọa độ)? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Đều.

B. Cân tại O .

C. Vuông tại O .

D. Vuông cân tại O .

Lời giải

Chọn A

Do $z_1 \neq 0$ nên chia 2 vế của đẳng thức cho z_1^2 , ta được:

$$\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2 + 1 = \frac{z_0}{z_1} \Leftrightarrow \frac{z_0}{z_1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow z_0 = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1.$$

$$\text{Đặt } |z_1| = OA = a \Rightarrow OB = |z_0| = \left|\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| |z_1| = a.$$

$$\text{Lại có } z_0 - z_1 = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1 - z_1 = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1 \Rightarrow AB = |z_0 - z_1| = \left|-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| |z_1| = a.$$

Vậy $\triangle OAB$ đều.

Câu 4: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \left|\frac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 và thỏa mãn

$$|z| \geq 2. \text{ Tính tỷ số } \frac{M}{m}.$$

A. $\frac{M}{m} = 5.$

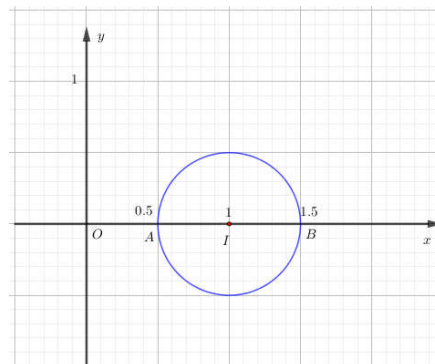
B. $\frac{M}{m} = 3.$

C. $\frac{M}{m} = \frac{3}{4}.$

D. $\frac{M}{m} = \frac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn B



$$\text{Gọi } T = \frac{z+i}{z} \Rightarrow (T-1)z = i.$$

Nếu $T = 1 \Rightarrow$ Không có số phức nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Nếu } T \neq 1 \Rightarrow z = \frac{i}{T-1} \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{i}{T-1}\right| \geq 2 \Rightarrow |T-1| \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức T là hình tròn tâm $I(1;0)$ có bán kính $R = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} M = OB = OI + R = \frac{3}{2} \\ m = OA = |OI - R| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{M}{m} = 3.$$

Câu 5: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+2| + |(1+i)z-2| = 4\sqrt{2}$. Gọi $m = \max|z|$, $n = \min|z|$ và số phức $w = m + ni$. Tính $|w|^{2018}$

A. 4^{1009} .

B. 5^{1009} .

C. 6^{1009} .

D. 2^{1009} .

Lời giải

Chọn C

Ta có $|(1+i)z+2| + |(1+i)z-2| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow |z+1-i| + |z-1+i| = 4$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z , $F_1(-1;1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = -1+i$ và $F_2(1;-1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_2 = 1-i$. Khi đó ta có $MF_1 + MF_2 = 4$. Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip nhận F_1 và F_2 làm hai tiêu điểm.

Ta có $F_1F_2 = 2c \Leftrightarrow 2c = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \sqrt{2}$.

Mặt khác $2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$ suy ra $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$.

Do đó Elip có độ dài trục lớn là $A_1A_2 = 2a = 4$, độ dài trục bé là $B_1B_2 = 2b = 2\sqrt{2}$.

Mặt khác O là trung điểm của AB nên $m = \max|z| = \max OM = OA_1 = a = 2$ và $n = \min|z| = \min OM = OB_1 = b = \sqrt{2}$.

Do đó $w = 2 + \sqrt{2}i$ suy ra $|w| = \sqrt{6} \Rightarrow |w|^{2018} = 6^{1009}$.

Câu 6: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức z thỏa mãn $(z-2+i)(\bar{z}-2-i) = 25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 2 + 3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính c . Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 17.

B. 20.

C. 10.

D. 18.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $w = x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$(z-2+i)(\bar{z}-2-i) = 25 \Leftrightarrow [a-2+(b+1)i][a-2-(b+1)i] = 25$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (b+1)^2 = 25 \quad (1)$$

Theo giả thiết: $w = 2\bar{z} - 2 + 3i \Leftrightarrow x+yi = 2(a-bi) - 2 + 3i \Leftrightarrow x+yi = 2a-2+(3-2b)i$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2a-2 \\ y = 3-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+2}{2} \\ b = \frac{3-y}{2} \end{cases} \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được: $\left(\frac{x+2}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{3-y}{2}+1\right)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 100$.

Suy ra, tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $R=10$.
 Vậy $a+b+c=17$.

Câu 7: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4i|=1$ và $|z_2-3-4i|=\frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

- A.** $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P_{\min} = 5-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P_{\min} = 5+2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

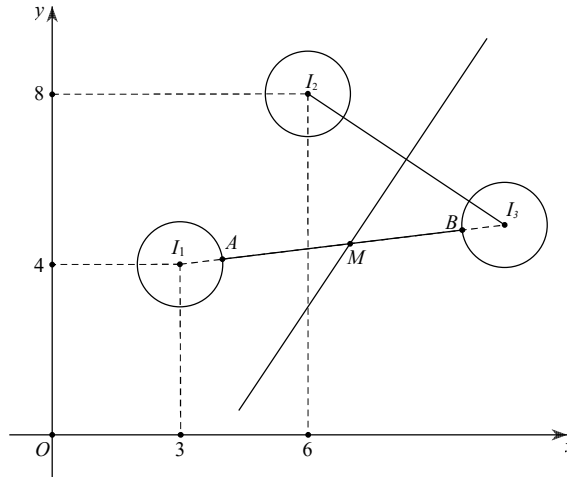
Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức $z_1, 2z_2, z$ trên hệ trục tọa độ Oxy .

Khi đó quỹ tích của điểm M_1 là đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$;

quỹ tích của điểm M_2 là đường (C_2) tròn tâm $I(6;8)$, bán kính $R=1$;

quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d: 3x-2y-12=0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của MM_1+MM_2+2 .



Gọi (C_3) có tâm $I_3\left(\frac{138}{13}; \frac{64}{13}\right)$, $R=1$ là đường tròn đối xứng với (C_2) qua d . Khi đó

$\min(MM_1+MM_2+2) = \min(MM_1+MM_3+2)$ với $M_3 \in (C_3)$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_3 với $(C_1), (C_3)$. Khi đó với mọi điểm $M_1 \in (C_1), M_3 \in (C_3), M \in d$ ta có $MM_1+MM_3+2 \geq AB+2$, dấu "=" xảy ra khi

$M_1 \equiv A, M_3 \equiv B$. Do đó $P_{\min} = AB+2 = I_1I_3-2+2 = I_1I_3 = \frac{\sqrt{9945}}{13}$.

Câu 8: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$.

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = z+2i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng.
 Phương trình đường thẳng đó là:

- A.** $x - 4y + 3 = 0$. **B.** $x + 3y + 4 = 0$. **C.** $-x + 3y + 4 = 0$. **D.** $x - 3y + 4 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $w = z + 2i \Leftrightarrow z = w - 2i = x + (y - 2)i$. Do đó biểu thức $|z - i| = |z - 1 + 2i|$ trở thành $|x + (y - 2)i - i| = |x + (y - 2)i - 1 + 2i| \Leftrightarrow |x + (y - 3)i| = |(x - 1) + yi|$
 $\Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$.

Câu 9: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Số phức $z = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{2018}$ có phần ảo bằng

- A.** $2^{1009} - 1$. **B.** $2^{1009} + 1$. **C.** $1 - 2^{1009}$. **D.** $-(2^{1009} + 1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Có } z = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{2018} = (1 + i) \cdot \frac{(1 + i)^{2018} - 1}{i} = (1 - i) \left[(1 + i)^{2018} - 1 \right]$$

$$\text{Do } (1 + i)^{2018} = \left[(1 + i)^2 \right]^{1009} = (2i)^{1009} = 2^{1009} \cdot (i^2)^{504} \cdot i = 2^{1009} i$$

Suy ra $z = (1 - i) \cdot (2^{1009} i - 1) = (2^{1009} - 1) + (1 + 2^{1009})i$. Vậy phần ảo của số phức z là $2^{1009} + 1$.

Câu 10: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Khai triển của biểu thức $(x^2 + x + 1)^{2018}$ được viết thành $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{4034} + a_{4036}$ bằng:

- A.** -2^{1009} . **B.** 0 . **C.** 2^{1009} . **D.** -1 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } (x^2 + x + 1)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4036}x^{4036}.$$

$$\text{Cho } x = i \text{ ta được } (i^2 + i + 1)^{2018} = a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + a_4 + a_5i - a_6 - \dots + a_{4036}.$$

$$\text{Hay } S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{4034} + a_{4036} = (-1 + i + 1)^{2018} = -1.$$

Câu 11: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2$ và $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48$. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + z_3|$ bằng:

- A.** 1 . **B.** 8 . **C.** 2 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2 \text{ nên } \overline{z_1} \cdot z_1 = |z_1|^2 = 16, \overline{z_2} \cdot z_2 = |z_2|^2 = 9, \overline{z_3} \cdot z_3 = |z_3|^2 = 4.$$

$$\text{Khi đó } |4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48 \Leftrightarrow |\overline{z_3}z_1z_2z_3 + \overline{z_1}z_1z_2z_3 + \overline{z_2}z_1z_2z_3| = 48$$

$$\Leftrightarrow |(\overline{z_3} + \overline{z_1} + \overline{z_2})z_1z_2z_3| = 48 \Leftrightarrow |\overline{z_3} + \overline{z_1} + \overline{z_2}| = 2 \text{ hay } P = |z_1 + z_2 + z_3| = 2.$$

Câu 12: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 12$ và $|z_2 - 3 - 4i| = 5$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 7.

D. 17.

Hướng dẫn giải

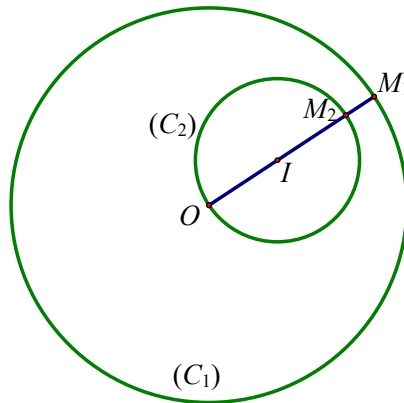
Chọn B

Gọi $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$, trong đó $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$; đồng thời $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 .

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 144 \\ (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 4)^2 = 25 \end{cases}$$

Do đó M_1 thuộc đường tròn (C_1) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R_1 = 12$, M_2 thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R_2 = 5$.

$$\text{Mặt khác, ta có } \begin{cases} O \in (C_2) \\ OI = 5 < 7 = R_1 - R_2 \end{cases} \text{ nên } (C_2) \text{ chứa trong } (C_1).$$



Khi đó $|z_1 - z_2| = M_1M_2$. Suy ra $|z_1 - z_2|_{\min} \Leftrightarrow (M_1M_2)_{\min} \Leftrightarrow M_1M_2 = R_1 - 2R_2 = 2$.

Câu 13: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 – năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $11z^{2018} + 10iz^{2017} + 10iz - 11 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|z| \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

B. $|z| \in (1; 2)$.

C. $|z| \in [0; 1)$.

D. $|z| \in [2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = x + yi$.

$$11z^{2018} + 10iz^{2017} + 10iz - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^{2017} = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \Rightarrow |z|^{2017} = \left| \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \right|$$

$$\Leftrightarrow |z|^{2017} = \frac{\sqrt{100(x^2 + y^2) + 121 + 220y}}{\sqrt{121(x^2 + y^2) + 100 + 220y}}$$

$$\text{TH1: } |z| < 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$$

$$\Rightarrow 100(x^2 + y^2) + 121 + 220y > 121(x^2 + y^2) + 100 + 220y$$

$$\Rightarrow |z| > 1 \text{ (sai)}$$

$$\text{TH2: } |z| > 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1$$

$$\Rightarrow 100(x^2 + y^2) + 121 + 220y < 121(x^2 + y^2) + 100 + 220y$$

$$\Rightarrow |z| < 1 \text{ (sai)}$$

$$\text{TH2: } |z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1. \text{ Thay vào thấy đúng.}$$

$$\text{Vậy } |z| = 1.$$

Câu 14: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M + m$?

A. $M + m = \frac{17}{2}$. **B.** $M + m = 8$. **C.** $M + m = 1$. **D.** $M + m = 4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x; y)$, $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$ biểu diễn cho số phức $z, -2, 2$.

$$\text{Ta có } MF_1 + MF_2 = 5 \Rightarrow M \text{ chạy trên Elip có trục lớn } 2a = 5, \text{ trục nhỏ } 2b = 2\sqrt{\frac{25}{4} - 4} = 3.$$

$$\text{Mà } |z| = OM. \text{ Do đó giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của } |z| \text{ là } M = \frac{5}{2}; m = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } M + m = 4.$$

Câu 15: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định - năm 2017-2018) Cho phương trình $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 9 = 0$ có bốn nghiệm phức phân biệt là z_1, z_2, z_3, z_4 . Tính giá trị của biểu thức $T = (z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4)$.

A. $T = 2i$. **B.** $T = 1$. **C.** $T = -2i$. **D.** $T = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } f(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 9 \Rightarrow f(z) = 0.$$

$$\text{Ta có } z^2 + 4 = z^2 - 4i^2 = (z + 2i)(z - 2i)$$

$$\Rightarrow T = [(z_1 + 2i)(z_2 + 2i)(z_3 + 2i)(z_4 + 2i)] \cdot [(z_1 - 2i)(z_2 - 2i)(z_3 - 2i)(z_4 - 2i)]$$

$$= [f(-2i) \cdot f(2i)]^4 = 1.$$

Câu 16: Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z - i| = |2 + iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

A. $P = \sqrt{3}$. **B.** $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P = \sqrt{2}$. **D.** $P = 2$.

Câu 17: Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z - i| = |2 + iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

A. $P = \sqrt{3}$. **B.** $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P = \sqrt{2}$. **D.** $P = 2$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } |2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2x + (2y - 1)i| = |2 - y + xi| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là đường tròn $(O; 1) \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$.

$$\text{Ta có: } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow P^2 = 3 \Rightarrow P = \sqrt{3}.$$

Câu 18: Tìm môđun của số phức z biết $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$.

A. $|z| = \frac{1}{2}$.

B. $|z| = 2$.

C. $|z| = 4$.

D. $|z| = 1$.

Câu 19: Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 1 - i| \geq 1$ và $|z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{14}{5}$.

Câu 20: Tìm môđun của số phức z biết $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$.

A. $|z| = \frac{1}{2}$.

B. $|z| = 2$.

C. $|z| = 4$.

D. $|z| = 1$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i \Leftrightarrow (1 + 3i)z = |z| + 4 + (|z| - 4)i$$

$$\text{Suy ra } |(1 + 3i)z| = ||z| + 4 + (|z| - 4)i| \Leftrightarrow \sqrt{10}|z| = \sqrt{(|z| + 4)^2 + (|z| - 4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 10|z|^2 = (|z| + 4)^2 + (|z| - 4)^2 \Leftrightarrow 8|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2.$$

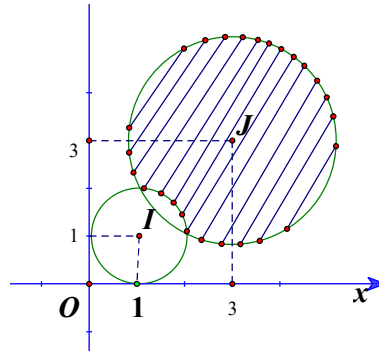
Câu 21: Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 1 - i| \geq 1$ và $|z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{14}{5}$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z .

Từ giả thiết $|z-1-i| \geq 1$ ta có A là các điểm nằm bên ngoài hình tròn (C_1) có tâm $I(1;1)$ bán kính $R_1 = 1$.

Mặt khác $|z-3-3i| \leq \sqrt{5}$ ta có A là các điểm nằm bên trong hình tròn (C_2) có tâm $J(3;3)$ bán kính $R_2 = \sqrt{5}$.

Ta lại có: $P = x + 2y \Leftrightarrow x + 2y - P = 0 (\Delta)$. Do đó để tồn tại x, y thì (Δ) và phần gạch chéo phải có điểm chung tức là $d(J; \Delta) \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|9-P|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |9-P| \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq P \leq 14$. Suy ra $m = 4; M = 14 \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{7}{2}$.

Câu 22: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+3i| = |z-2-3i|$. Biết $|z-1-2i| + |z-7-4i| = 6\sqrt{2}$, $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z , khi đó x thuộc khoảng

A. $(0; 2)$. B. $(1; 3)$. C. $(4; 8)$. **D. $(2; 4)$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z-2+3i| = |z-2-3i| \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow y = 0$.

Ta có: $|z-1-2i| + |z-7-4i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{(x-7)^2 + 16} = 6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 4} = 6\sqrt{2} - \sqrt{(x-7)^2 + 16} \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 28x + 130} = -x + 11$

$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ (-x+11)^2 = 2x^2 - 28x + 130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3$. Thử lại thấy thỏa.

Vậy $x = 3 \in (2; 4)$.

Câu 23: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-i| + |z+i| = 6$. Gọi S là đường cong tạo bởi tất cả các điểm biểu diễn số phức $(z-i)(i+1)$ khi z thay đổi. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong S .

A. 12π . **B. $12\pi\sqrt{2}$.** C. $9\pi\sqrt{2}$. D. BF .

Câu 24: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-i| + |z+i| = 6$. Gọi S là đường cong tạo bởi tất cả các điểm biểu diễn số phức $(z-i)(i+1)$ khi z thay đổi. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong S .

A. 12π . **B. $12\pi\sqrt{2}$.** C. $9\pi\sqrt{2}$. D. BF .

Lời giải

Chọn B

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w = (z-i)(1+i)$. Suy ra: $z = \frac{w}{1+i} + i$.

Viết lại giả thiết: $|z-i| + |z+i| = 6 \Leftrightarrow \left| \frac{w}{1+i} + i - i \right| + \left| \frac{w}{1+i} + i + i \right| = 6 \Leftrightarrow |w| + |w-2+2i| = 6\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 6\sqrt{2}$ với $F_1(0;0)$, $F_2(2;-2)$, $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{2}$.

Tập hợp điểm M là điểm biểu diễn số phức w là elip có độ dài trục lớn $2a = 6\sqrt{2}$, $2c = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4$. Diện tích elip là $S = \pi.ab = 12\pi\sqrt{2}$.

Câu 25: Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+3$ và $2w-15i+9$ với w là một số phức. Tính $S = b^2 - 2c$

A. $S = -32$. **B.** $S = 1608$. **C.** $S = 1144$. **D.** $S = -64$.

Câu 26: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = 2\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn hai số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết $MN = 2\sqrt{2}$. Gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMHN$ và K là trung điểm của ON . Tính $l = KH$

A. $l = 3\sqrt{2}$. **B.** $l = 6\sqrt{2}$. **C.** $l = \sqrt{41}$. **D.** $l = \sqrt{5}$.

Câu 27: Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+3$ và $2w-15i+9$ với w là một số phức. Tính $S = b^2 - 2c$

A. $S = -32$. **B.** $S = 1608$. **C.** $S = 1144$. **D.** $S = -64$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ đề bài suy ra } \begin{cases} (w+3)^2 + b(w+3) + c = 0 \\ (2w-15i+9)^2 + b(2w-15i+9) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2w-15i+9)(w+3) = c \\ 2w-15i+9+w+3 = -b \end{cases}$$

Giả sử $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $w+3 = x+3+yi$, $2w-15i+9 = 2x+9+(2y-15)i$.

$$\text{Theo đề ta có } \begin{cases} (2w-15i+9)(w+3) = c \\ 2w-15i+9+w+3 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+9+(2y-15)i)(x+3+yi) = c \\ (2x+9+(2y-15)i) + (x+3+yi) = -b \end{cases}$$

$$\text{Vì } b, c \in \mathbb{R} \text{ nên } \begin{cases} (x+3)(2y-15) + y(2x+9) = 0 \\ 2y-15+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } w = -6 + 5i, \text{ do đó } \begin{cases} (2w-15i+9)(w+3) = c \\ 2w-15i+9+w+3 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 34 \\ b = -6 \end{cases}$$

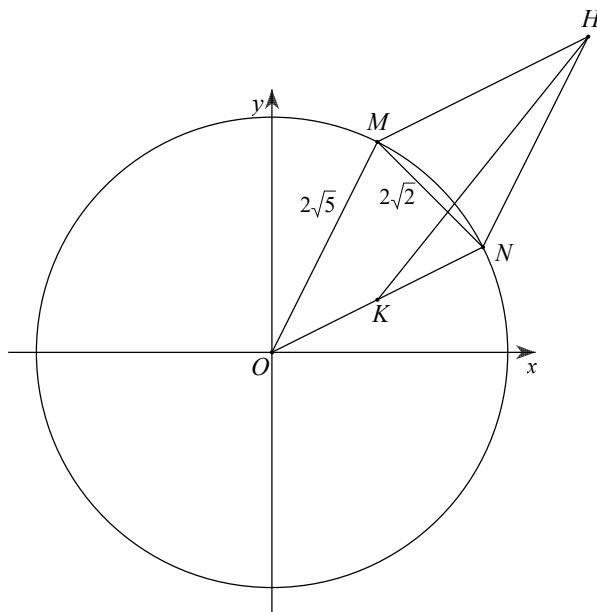
$$S = b^2 - 2c = -32$$

Câu 28: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = 2\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn hai số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết $MN = 2\sqrt{2}$. Gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMHN$ và K là trung điểm của ON . Tính $l = KH$

A. $l = 3\sqrt{2}$. **B.** $l = 6\sqrt{2}$. **C.** $l = \sqrt{41}$. **D.** $l = \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác OMN ta có $\cos \widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \frac{4}{5}$.

Vì $\widehat{MON} + \widehat{ONH} = 180^\circ$ nên $\cos \widehat{ONH} = -\frac{4}{5}$.

Xét tam giác HNK có

$$HK = \sqrt{NH^2 + NK^2 - 2NH \cdot NK \cdot \cos \widehat{KNH}} = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{1}{2}ON\right)^2 - 2OM \cdot \frac{1}{2}ON \cdot \cos \widehat{ONH}} = \sqrt{41}.$$

Câu 29: Giá trị của biểu thức $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100}$ bằng

A. -2^{100} .

B. -2^{50} .

C. 2^{100} .

D. 2^{50} .

Câu 30: Giá trị của biểu thức $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100}$ bằng

A. -2^{100} .

B. -2^{50} .

C. 2^{100} .

D. 2^{50} .

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\begin{aligned} (1+i)^{100} &= C_{100}^0 + iC_{100}^1 + i^2C_{100}^2 + \dots + i^{100}C_{100}^{100} \\ &= (C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \dots + C_{100}^{100}) + (C_{100}^1 - C_{100}^3 + C_{100}^5 - \dots - C_{100}^{99})i. \end{aligned}$$

Mặt khác $(1+i)^{100} = \left[(1+i)^2\right]^{50} = (2i)^{50} = -2^{50}.$

Vậy $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100} = -2^{50}.$

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 2|1-z|$ bằng

A. $\sqrt{5}$.

B. $6\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $4\sqrt{5}$.

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $6\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $|z|=1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Suy ra $-1 \leq x \leq 1$.

Khi đó, $P = |1+z|+2|1-z| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{2x+2} + 2\sqrt{2-2x}$.

Suy ra $P \leq \sqrt{(1^2+2^2)}[(2x+2)+(2-2x)]$ hay $P \leq 2\sqrt{5}$, với mọi $-1 \leq x \leq 1$.

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{5}$ khi $2\sqrt{2x+2} = \sqrt{2-2x} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}, y = \pm\frac{4}{5}$.

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Môđun của số phức z bằng

- A. 10. B. $5\sqrt{2}$. C. 13. D. $\sqrt{10}$.

Câu 34: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Môđun của số phức z bằng

- A. 10. B. $5\sqrt{2}$. C. 13. D. $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z trên Oxy , ta có

$$|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$$

$$\text{Và } P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 4x + 2y + 3.$$

$$\text{Như vậy } P = 4x + 2y + 3 = [4(x-3) + 2(y-4)] + 23 \leq \sqrt{4^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + 23 = 33$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{2} = t \\ 4(x-3) + 2(y-4) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ t = 0,5 \end{cases}.$$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất khi $z = 5 + 5i \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức

$M=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức $z-2-i$ bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. 9. C. 25. D. 5.

Câu 36: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức

$M=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức $z-2-i$ bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. 9. C. 25. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$, $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \quad (1)$.

Ta có: $M = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 4x + 2y + 3$

$$= 4(x-3) + 2(y-4) + 23 \leq \sqrt{20} \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + 23 = 33.$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $\frac{x-3}{y-4} = \frac{4}{2}$ kết hợp với (1) suy ra $\begin{cases} x = y = 5 \Rightarrow z = 5 + 5i \\ x = 1, y = 3 \Rightarrow z = 1 + 3i \end{cases}$

Thử lại ta có $M_{\max} = 33 \Leftrightarrow z = 5 + 5i \Rightarrow |z - 2 - i| = 5$.

Câu 37: Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng (Oxy) biểu diễn các số phức z và $(1+i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.

- A.** $|z| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|z| = 4\sqrt{2}$. **C.** $|z| = 2$. **D.** $|z| = 4$.

Câu 38: Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng (Oxy) biểu diễn các số phức z và $(1+i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.

- A.** $|z| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|z| = 4\sqrt{2}$. **C.** $|z| = 2$. **D.** $|z| = 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $OA = |z|$, $OB = |(1+i)z| = \sqrt{2}|z|$, $AB = |(1+i)z - z| = |iz| = |z|$.

Suy ra $\triangle OAB$ vuông cân tại A ($OA = AB$ và $OA^2 + AB^2 = OB^2$)

Ta có: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot AB = \frac{1}{2}|z|^2 = 8 \Leftrightarrow |z| = 4$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn:

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = x \cdot f'(x) - 1 \text{ với đồng thời } f(1) = 2. \text{ Tính } \int_1^4 f(x) dx.$$

- A.** $-2 \ln 2 - \frac{1}{4}$. **B.** $-2 \ln 2 - \frac{3}{4}$. **C.** $-\ln 2 - \frac{3}{4}$. **D.** $-\ln 2 - \frac{1}{4}$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn:

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = x \cdot f'(x) - 1 \text{ với đồng thời } f(1) = 2. \text{ Tính } \int_1^4 f(x) dx.$$

- A.** $-2 \ln 2 - \frac{1}{4}$. **B.** $-2 \ln 2 - \frac{3}{4}$. **C.** $-\ln 2 - \frac{3}{4}$. **D.** $-\ln 2 - \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $(xf(x) + 1)^2 = f(x) + xf'(x)$.

$$\text{Đặt } u = xf(x) + 1 \Rightarrow u^2 = u' \Rightarrow \frac{u'}{u^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{u'}{u^2} dx = x + C \Rightarrow \frac{-1}{u} = x + C.$$

Vậy $x.f(x) = \frac{-1}{x+C} - 1$, mà $f(1) = -2 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = -2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.

Câu 41: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Số phức z có môđun nhỏ nhất là

- A.** $z = -1 + i$. **B.** $z = -2 + 2i$. **C.** $z = 2 + 2i$. **D.** $z = 3 + 2i$.

Câu 42: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Số phức z có môđun nhỏ nhất là

- A.** $z = -1 + i$. **B.** $z = -2 + 2i$. **C.** $z = 2 + 2i$. **D.** $z = 3 + 2i$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$

$$\Leftrightarrow |(a-2) + (b-4)i| = |a + (b-2)i| \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-4)^2 = a^2 + (b-2)^2$$

$$\Leftrightarrow a + b = 4 \Leftrightarrow b = 4 - a$$

Khi đó:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (4-a)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 16} = \sqrt{2(a-2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy $z = 2 + 2i$.

Câu 43: Trong mặt phẳng phức, xét $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$\frac{z+i}{z-i}$ là số thực. Tập hợp các điểm M là

- A.** Parabol. **B.** Trục thực.
C. Đường tròn trừ hai điểm trên trục ảo. **D.** Trục ảo trừ điểm $(0;1)$.

Câu 44: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z| = 3$ và $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Khi đó $|w|$ bằng:

- A.** 3. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 45: Trong mặt phẳng phức, xét $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$\frac{z+i}{z-i}$ là số thực. Tập hợp các điểm M là

- A.** Parabol. **B.** Trục thực.
C. Đường tròn trừ hai điểm trên trục ảo. **D.** Trục ảo trừ điểm $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)^2}{z^2-i^2} = \frac{z^2+2zi+i^2}{z^2-i^2} = \frac{x^2+y^2-1+2(x+yi)i}{x^2+y^2+1} = \frac{x^2+y^2-2y-1}{x^2+y^2+1} + \frac{2x}{x^2+y^2+1}i \text{ là}$$

$$\text{một số thực} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \neq 1 \end{cases}. \text{ Chọn đáp án D.}$$

Câu 46: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z| = 3$ và $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Khi đó $|w|$ bằng:

- A.** 3. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Leftrightarrow \frac{z+w}{zw} - \frac{1}{z+w} = 0 \Leftrightarrow \frac{(z+w)^2 - zw}{zw(z+w)} = 0 \Rightarrow z^2 + w^2 + zw = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = -\frac{3}{4}w^2 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}i}{2}w\right)^2 \Leftrightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w$$

$$\Rightarrow |z| = \left|-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| |w| \Leftrightarrow |z| = |w|.$$

Vậy $|w| = 3$.

Câu 47: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $(z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018}$ bằng

- A.** $-2^{1010}i$. **B.** $2^{1009}i$. **C.** 0. **D.** 2^{2018} .

Câu 48: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $(z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018}$ bằng

- A.** $-2^{1010}i$. **B.** $2^{1009}i$. **C.** 0. **D.** 2^{2018} .

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i = z_1 \\ z = 2 - i = z_2 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} (z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018} &= (1 + i)^{2018} + (1 - i)^{2018} = (1 + 2i + i^2)^{1009} + (1 - 2i + i^2)^{1009} \\ &= (2i)^{1009} + (-2i)^{1009} = (2i)^{1009} - (2i)^{1009} = 0. \end{aligned}$$

Câu 49: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-2i}{z+3-i}\right| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+3-2i|$ bằng

- A.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 50: Cho số phức $z = (\sqrt{3} + \sqrt{5}i)^{2018}$. Biết phần ảo của z có dạng $a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$. Trong các số a, b, c, d có đúng bao nhiêu số bằng 0?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 51: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-2i}{z+3-i}\right| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+3-2i|$ bằng

- A.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\left| \frac{z-2i}{z+3-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-2i| = |z+3-i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow y = -3x - 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có: } |z+3-2i| &= \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (3x+5)^2} = \sqrt{10x^2 + 36x + 34} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{10}x + \frac{18}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{16}{10}} \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}. \end{aligned}$$

Vậy GTNN của $|z+3-2i|$ bằng $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Câu 52: Cho số phức $z = (\sqrt{3} + \sqrt{5}i)^{2018}$. Biết phần ảo của z có dạng $a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$. Trong các số a, b, c, d có đúng bao nhiêu số bằng 0?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$z = (\sqrt{3} + \sqrt{5}i)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (\sqrt{3})^{2018-k} (\sqrt{5}i)^k i^k.$$

Phần ảo của số phức z là

$$\sum_{m=0}^{1008} C_{2018}^{2m+1} (\sqrt{3})^{2018-(2m+1)} (\sqrt{5})^{2m+1} (-1)^m = \sum_{m=0}^{1008} C_{2018}^{2m+1} (-1)^m \cdot 3^{1009} \cdot 15^m \cdot \sqrt{15}.$$

Suy ra $a = b = c = 0$ và $d \neq 0$.

Câu 53: Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| \leq 2$ và $|z - \bar{z}| \leq 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $T = |z - 2i|$. Tổng $M + m$ bằng

A. $1 + \sqrt{10}$.

B. $\sqrt{2} + \sqrt{10}$.

C. 4.

D. 1.

Câu 54: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1| + |z-3-4i| = 10$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |\bar{z} - 1 + 2i|$ bằng?

A. $P_{\min} = \sqrt{17}$.

B. $P_{\min} = \sqrt{34}$.

C. $P_{\min} = 2\sqrt{10}$.

D. $P_{\min} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

Câu 55: Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| \leq 2$ và $|z - \bar{z}| \leq 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $T = |z - 2i|$. Tổng $M + m$ bằng

A. $1 + \sqrt{10}$.

B. $\sqrt{2} + \sqrt{10}$.

C. 4.

D. 1.

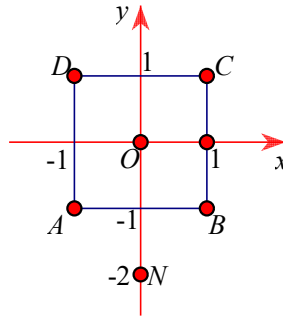
Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |2x| \leq 2 \\ |2yi| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}.$$

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Khi đó tập hợp các điểm M là hình vuông $ABCD$ (hình vẽ).



Điểm $N(0; -2)$ biểu diễn số phức, khi đó $T = |z - 2i| = MN$.

Dựa vào hình vẽ ta có $MN \geq d(M, AB) = 1$ nên $m = \min T = 1$, $MN \leq NC = \sqrt{10}$ nên $M = \max T = \sqrt{10}$, do đó $M + m = 1 + \sqrt{10}$.

Câu 56: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1| + |z-3-4i| = 10$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |\bar{z} - 1 + 2i|$ bằng?

- A.** $P_{\min} = \sqrt{17}$. **B.** $P_{\min} = \sqrt{34}$. **C.** $P_{\min} = 2\sqrt{10}$. **D.** $P_{\min} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$|z+1| + |z-3-4i| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2 + b^2} + \sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2} = 10$$

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z . Xét hai điểm $F_1(-1; 0)$, $F_2(3; 4)$ thì tập hợp điểm M là elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và tâm là điểm $I(1; 2)$.

Elip (E) này có độ dài trục lớn là $2a = 10$ và tiêu cự là $2c = F_1F_2 = 4\sqrt{2}$. Do đó $a = 5$, $c = 2\sqrt{2} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 17$.

$$\text{Lại có: } P = |\bar{z} - 1 + 2i| = \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} = MI.$$

Suy ra $P_{\min} = IM_{\min}$ khi và chỉ khi $IM = b$ hay $P_{\min} = \sqrt{17}$.

Câu 57: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$, với z_1 có phần ảo dương. Biết số phức z thỏa mãn $2|z - z_1| \leq |z - z_2|$, phần thực nhỏ nhất của z là

- A.** 6. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 9.

Câu 58: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$, với z_1 có phần ảo dương. Biết số phức z thỏa mãn $2|z - z_1| \leq |z - z_2|$, phần thực nhỏ nhất của z là

- A.** 6. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

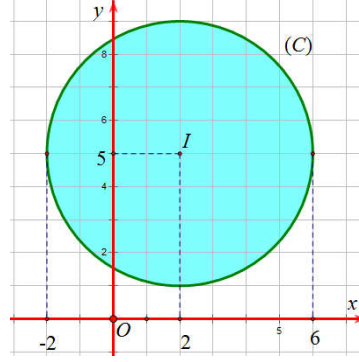
Ta có $z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 + 3i$ hoặc $z_2 = 2 - 3i$.

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Theo giả thiết, } 2|z - z_1| \leq |z - z_2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4[(x-2)^2 + (y-3)^2] \leq (x-2)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 16.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền trong của hình tròn (C) có tâm $I(2;5)$, bán kính $R = 4$, kể cả hình tròn đó.



Do đó, phần thực nhỏ nhất của z là $x_{\min} = -2$.

Câu 59: Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} - ax - b \right) = 0$. Khi đó $a + 2b$ bằng:

- A. -4. B. -5. C. 4. D. -3.

Câu 60: Cho các số phức z , w thỏa mãn $|z - 5 + 3i| = 3$, $|iw + 4 + 2i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |3iz + 2w|$.

- A. $\sqrt{554} + 5$. B. $\sqrt{578} + 13$. C. $\sqrt{578} + 5$.
D. $\sqrt{554} + 13$.

Câu 61: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w = (2 + 3i)\bar{z} + 3 + 4i$ là một đường tròn bán kính R . Tính R .

- A. $R = 5\sqrt{17}$. B. $R = 5\sqrt{10}$. C. $R = 5\sqrt{5}$. D. $R = 5\sqrt{13}$.

Câu 62: Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} - ax - b \right) = 0$. Khi đó $a + 2b$ bằng:

- A. -4. B. -5. C. 4. **D. -3.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{5}{2} + \frac{7}{2(2x + 1)} - ax - b \right)$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} - ax - b \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{5}{2} + \frac{7}{2(2x + 1)} - ax - b \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - a = 0 \\ -\frac{5}{2} - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Khi đó: $a + 2b = -3$.

Câu 63: Cho các số phức z , w thỏa mãn $|z - 5 + 3i| = 3$, $|iw + 4 + 2i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |3iz + 2w|$.

A. $\sqrt{554} + 5$.

B. $\sqrt{578} + 13$.

C. $\sqrt{578} + 5$.

D. $\sqrt{554} + 13$.

Lời giải

Chọn D

$|z - 5 + 3i| = 3 \Rightarrow |3iz - 15i - 9| = 9$ là đường tròn có tâm $I(9; 15)$ và $R = 9$.

$|iw + 4 + 2i| = 2 \Rightarrow |2w - 8i + 4| = 4$ là đường tròn có tâm $J(4; -8)$ và $R' = 4$.

$T = |3iz + 2w|$ đạt giá trị lớn nhất khi $T = IJ + R + R' = \sqrt{554} + 13$.

Câu 64: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi

$w = (2 + 3i)\bar{z} + 3 + 4i$ là một đường tròn bán kính R . Tính R .

A. $R = 5\sqrt{17}$.

B. $R = 5\sqrt{10}$.

C. $R = 5\sqrt{5}$.

D. $R = 5\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$ là đường tròn (C) tâm $I(1; 0)$ và bán kính $R = 5$. Ta có (C) nhận trục hoành là trục đối xứng nên tọa độ điểm biểu diễn $\bar{z}$ cũng nằm trên đường tròn này hay $|\bar{z} - 1| = 5$.

Ta có

$$\begin{aligned} w = (2 + 3i)\bar{z} + 3 + 4i &\Leftrightarrow w = (2 + 3i)(\bar{z} - 1) + (2 + 3i) + 3 + 4i \Leftrightarrow w - (5 + 7i) = (2 + 3i)(\bar{z} - 1) \\ &\Leftrightarrow |w - (5 + 7i)| = |(2 + 3i)| |\bar{z} - 1| \Leftrightarrow |w - (5 + 7i)| = 5\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Câu 65: Với mọi số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| \leq \sqrt{2}$, ta luôn có

A. $|z + 1| \leq \sqrt{2}$.

B. $|2z - 1 + i| \leq 3\sqrt{2}$.

C. $|2z + 1 - i| \leq 2$.

D. $|z + i| \leq \sqrt{2}$.

Câu 66: Xét các số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = 2 + mi$, ($m \in \mathbb{R}$). Giá trị nhỏ nhất của môđun số phức $\frac{z_2}{z_1}$ bằng ?

A. $\frac{2}{5}$.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{1}{5}$.

Câu 67: Với mọi số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| \leq \sqrt{2}$, ta luôn có

A. $|z + 1| \leq \sqrt{2}$.

B. $|2z - 1 + i| \leq 3\sqrt{2}$.

C. $|2z + 1 - i| \leq 2$.

D. $|z + i| \leq \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z| = |z - 1 + i + 1 - i| \leq |z - 1 + i| + |1 - i| \leq 2\sqrt{2}$.

Vì vậy $|2z - 1 + i| = |z - 1 + i + z| \leq |z - 1 + i| + |z| \leq 3\sqrt{2}$.

Câu 68: Xét các số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = 2 + mi$, ($m \in \mathbb{R}$). Giá trị nhỏ nhất của môđun số phức $\frac{z_2}{z_1}$ bằng ?

A. $\frac{2}{5}$.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+mi}{3-4i} = \frac{(2+mi)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{6-4m+(3m+8)i}{25} = \frac{6-4m}{25} + \frac{3m+8}{25}i$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{\left(\frac{6-4m}{25} \right)^2 + \left(\frac{3m+8}{25} \right)^2} \Rightarrow \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{\frac{36-48m+16m^2+9m^2+48m+64}{25^2}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{\frac{25m^2+100}{25^2}} \Rightarrow \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{\frac{m^2+4}{25}} \geq \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$

Hoặc dùng công thức: $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$.

Câu 69: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$. Tính diện tích của hình (H) .

A. 8π .

B. 18π .

C. 16π .

D. 4π .

Câu 70: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$. Tính diện tích của hình (H) .

A. 8π .

B. 18π .

C. 16π .

D. 4π .

Lời giải

Chọn C

Ta có $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2 \Leftrightarrow w - 3 - \sqrt{3}i = (1 + \sqrt{3}i)(z - 1)$.

$$\Leftrightarrow |w - 3 - \sqrt{3}i| = |1 + \sqrt{3}i| |z - 1| \leq 4.$$

Vậy điểm biểu diễn số phức w nằm trên hình tròn có bán kính $r = 4$.

Diện tích hình (H) là $S = \pi r^2 = 16\pi$.

Câu 71: Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A. $P = 2$.

B. $P = \sqrt{3}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 1$.

Câu 72: Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A. $P = 2$.

B. $P = \sqrt{3}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$.

Suy ra $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6} \Leftrightarrow a_1.a_2 + b_1.b_2 = \frac{-1}{4}$.

Suy ra $P = |2z_1 + z_2| = 2$.

Câu 73: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln(2x+1)}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox .

A. $\frac{2}{3} \ln 3 - 1$. B. $\frac{\pi}{2} \ln 3 - \pi$. C. $\left(\pi - \frac{1}{2}\right) \ln 3 - 1$. D. $\frac{3\pi}{2} \ln 3 - \pi$.

Câu 74: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln(2x+1)}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox .

A. $\frac{2}{3} \ln 3 - 1$. B. $\frac{\pi}{2} \ln 3 - \pi$. C. $\left(\pi - \frac{1}{2}\right) \ln 3 - 1$. D. $\frac{3\pi}{2} \ln 3 - \pi$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{\ln(2x+1)}$ với trục Ox : $y = 0$

$$\sqrt{\ln(2x+1)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Thể tích cần tìm: $V = \pi \int_0^1 \ln(2x+1) dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \Rightarrow du = \frac{2}{2x+1} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(x \ln(2x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{2x+1} dx \right) = \pi \left(\ln 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) dx \right) = \pi \left(\ln 3 - \left(x - \frac{1}{2} \ln|2x+1| \right) \Big|_0^1 \right) \\ &= \pi \left(\ln 3 - 1 + \frac{1}{2} \ln 3 \right) = \frac{3\pi}{2} \ln 3 - \pi \end{aligned}$$

Câu 75: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1^2 = z_2 \cdot z_3 \\ |z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = |z_2 - z_3| - |z_3 - z_1|.$$

A. $-\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. B. $-\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2}{2}$. D. $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2}{2}$.

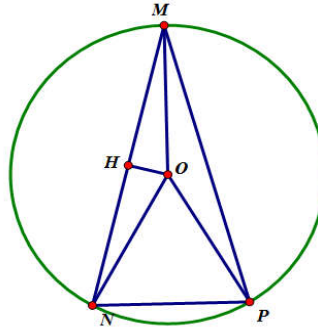
Câu 76: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn
$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1^2 = z_2 \cdot z_3 \\ |z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
. Tính giá trị của biểu thức

$$M = |z_2 - z_3| - |z_3 - z_1|.$$

A. $-\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2}{2}$. **D.** $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn trong hệ trục tọa độ của các số phức z_1, z_2, z_3 .

Suy ra: M, N, P thuộc đường tròn $(O; 1)$.

$$MN = |z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{OMN} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{OMN} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 150^\circ.$$

$$\text{Ta có: } |z_3 - z_1| = |z_1| |z_3 - z_1| = |z_3 z_1 - z_1^2| = |z_3 z_1 - z_3 z_2| = |z_3| |z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow MN = MP = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MOP} = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{NOP} = 60^\circ \Rightarrow \Delta NOP \text{ đều} \Rightarrow NP = 1 \Rightarrow |z_2 - z_3| = 1.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2}{2}.$$

Câu 77: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn

$$|z - (2m - 1) - i| = 10 \text{ và } |z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i|.$$

A. 40. **B.** 41. **C.** 165. **D.** 164.

Câu 78: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn

$$|z - (2m - 1) - i| = 10 \text{ và } |z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i|.$$

A. 40. **B.** 41. **C.** 165. **D.** 164.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$, $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z

$$|z - (2m - 1) - i| = 10$$

$$\Leftrightarrow |z - (2m-1) - i|^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow [x - (2m-1)]^2 + (y-1)^2 = 100$$

Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2m-1; 1)$, $R=10$

$$|z-1+i| = |\bar{z}-2+3i|$$

$$\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i|^2 = |(x-2) + (3-y)i|^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (3-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x + 8y - 11 = 0.$$

Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $\Delta: 2x + 8y - 11 = 0$

Để có đúng hai số phức z thì đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt

$$\text{Tức là } d(I, \Delta) < 10 \Leftrightarrow \frac{|2(2m-1) + 8 - 11|}{\sqrt{2^2 + 8^2}} < 10 \Leftrightarrow \frac{5 - 20\sqrt{7}}{4} < m < \frac{5 + 20\sqrt{7}}{4}.$$

Vậy có 41 giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 79: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - 3i| = 2$ và $|\bar{z}_2 - 1 - 2i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = |z_1 - z_2|.$$

A. $P = 3 + \sqrt{34}$.

B. $P = 3 + \sqrt{10}$.

C. $P = 6$.

D. $P = 3$.

Câu 80: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2 + bz + c = 0$, $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b^2 - 4ac < 0)$. Đặt $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = \frac{c}{2a}$.

B. $P = \frac{c}{a}$.

C. $P = \frac{2c}{a}$.

D. $P = \frac{4c}{a}$.

Câu 81: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - 3i| = 2$ và $|\bar{z}_2 - 1 - 2i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = |z_1 - z_2|.$$

A. $P = 3 + \sqrt{34}$.

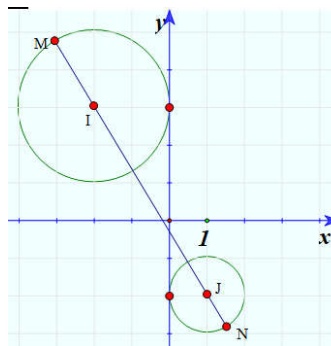
B. $P = 3 + \sqrt{10}$.

C. $P = 6$.

D. $P = 3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(x_1; y_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1 , $N(x_2; y_2)$ là điểm biểu diễn số phức z_2

Số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 + 2 - 3i| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + 2)^2 + (y_1 - 3)^2 = 4$ suy ra $M(x_1; y_1)$ nằm trên đường tròn tâm $I(-2; 3)$ và bán kính $R_1 = 2$.

Số phức z_2 thỏa mãn $|\overline{z_2} - 1 - 2i| = 1 \Leftrightarrow (x_2 - 1)^2 + (y_2 + 2)^2 = 1$ suy ra $N(x_2; y_2)$ nằm trên đường tròn tâm $J(1; -2)$ và bán kính $R_2 = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| = MN$ đạt giá trị lớn nhất bằng $R_1 + IJ + R_2 = 2 + \sqrt{34} + 1 = 3 + \sqrt{34}$.

Câu 82: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2 + bz + c = 0$, ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b^2 - 4ac < 0$). Đặt $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P = \frac{c}{2a}$. B. $P = \frac{c}{a}$. C. $P = \frac{2c}{a}$. **D. $P = \frac{4c}{a}$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ nên $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

Do đó $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ và $z_1 - z_2 = \frac{i\sqrt{4ac - b^2}}{a}$

Suy ra $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{a^2} = \frac{4c}{a}$.

Câu 83: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$.

- A. $P = 2\sqrt{10}$. B. $P = 6\sqrt{5}$. C. $P = 3\sqrt{15}$. **D. $P = 2\sqrt{5}$.**

Câu 84: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$.

- A. $P = 2\sqrt{10}$. B. $P = 6\sqrt{5}$. C. $P = 3\sqrt{15}$. **D. $P = 2\sqrt{5}$.**

Lời giải

Chọn D

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$P = |1 + z| + 3|1 - z| \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)(|1 + z|^2 + |1 - z|^2)} = \sqrt{10(1 + |z|^2)} = \sqrt{10(1 + 1)} = 2\sqrt{5}.$$

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{5}$.

Câu 85: Cho số phức z thỏa mãn $z[(1 + 3i)|z| - 3 + i] = 4\sqrt{10}$, $|z| > 1$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}}$. B. $|z| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{65}}{2}}$. C. $|z| = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}}$. **D. $|z| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{65}}{4}}$.**

Câu 86: Cho số phức z thỏa mãn $z[(1 + 3i)|z| - 3 + i] = 4\sqrt{10}$, $|z| > 1$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}}$. B. $|z| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{65}}{2}}$. **C. $|z| = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}}$.** D. $|z| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{65}}{4}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}
z[(1+3i)|z|-3+i] &= 4\sqrt{10} \Leftrightarrow z[(|z|-3)+(3|z|+1)i] = 4\sqrt{10} \\
\Rightarrow |z|\sqrt{(|z|-3)^2+(3|z|+1)^2} &= 4\sqrt{10} \Leftrightarrow |z|^2[(|z|-3)^2+(3|z|+1)^2] = 160 \\
\Leftrightarrow 10|z|^4+10|z|^2-160 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = \frac{-1+\sqrt{65}}{2} \\ |z|^2 = \frac{-1-\sqrt{65}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{65}}{2}} \text{ (do } |z| > 1 \text{)}.
\end{aligned}$$

Câu 87: Xét các số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z| = |\bar{z} + 4 - 3i|$ và $|z + 1 - i| + |z - 2 + 3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $P = a + 2b$ là:

A. $P = -\frac{252}{50}$ **B.** $P = -\frac{41}{5}$ **C.** $P = -\frac{61}{10}$ **D.** $P = -\frac{18}{5}$.

Câu 88: Xét các số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z| = |\bar{z} + 4 - 3i|$ và $|z + 1 - i| + |z - 2 + 3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $P = a + 2b$ là:

A. $P = -\frac{252}{50}$ **B.** $P = -\frac{41}{5}$ **C.** $P = -\frac{61}{10}$ **D.** $P = -\frac{18}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$.

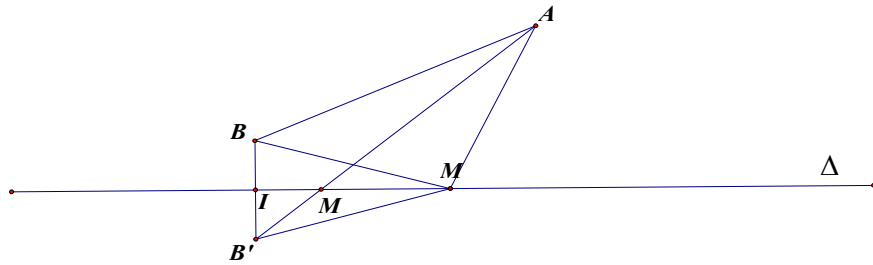
Ta có: $|z| = |\bar{z} + 4 - 3i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = (a+4)^2 + (b+3)^2 \Leftrightarrow 8a + 6b + 25 = 0$

$\Leftrightarrow M \in \Delta: 8x + 6y + 25 = 0$.

$f(a, b) = |z + 1 - i| + |z - 2 + 3i| \Leftrightarrow f(a, b) = \sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+3)^2}$.

Gọi $A(-1; 1)$, $B(2; -3)$. Khi đó $f(a, b) = AM + BM$.

Như vậy ta cần tìm $M \in \Delta: 8x + 6y + 25 = 0$ sao cho $f(a, b) = AM + BM$ nhỏ nhất.



A và B nằm về một phía đối với Δ nên gọi B' là điểm đối xứng của B qua Δ .

Khi đó $AM + BM = AM + B'M \geq AB' \Rightarrow AM + BM$ nhỏ nhất là AB' khi $M = AB' \cap \Delta$.

$BB' \perp \Delta$ và đi qua $B(2; -3)$ nên $BB': 6x - 8y - 36 = 0$.

Gọi $I = BB' \cap \Delta$ ta có tọa độ của I là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 8x + 6y + 25 = 0 \\ 6x - 8y - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{25} \\ y = -\frac{219}{50} \end{cases}$$

hay $I\left(\frac{4}{25}; -\frac{219}{50}\right)$.

$$\begin{cases} x_{B'} = 2x_I - x_B \\ y_{B'} = 2y_I - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = \frac{-42}{25} \\ y_{B'} = \frac{-144}{25} \end{cases} \text{ hay } B'\left(\frac{-42}{25}; \frac{-144}{25}\right).$$

$$\overrightarrow{AB'} = \left(-\frac{17}{25}; \frac{-169}{25} \right) = \frac{-1}{25}(17; 169). \text{ Phương trình } AB': 169x - 17y + 186 = 0.$$

$$\text{Tọa độ của } M \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} 169x - 17y + 186 = 0 \\ 8x + 6y + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-67}{50} \\ y = \frac{-119}{50} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = a + 2b = x + 2y = \frac{-61}{10}.$$

Câu 89: Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa đồng thời các điều kiện $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 4.

Câu 90: Xét số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

B. $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

C. $|z| > 2$.

D. $|z| < \frac{1}{2}$.

Câu 91: Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa đồng thời các điều kiện $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + iy$ (với $x, y \in \mathbb{R}$)

$$\text{Ta có: } |z - i| = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 25 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } z^2 \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Suy ra } x^2 + (x - 1)^2 = 25 \text{ hay } x^2 + (x + 1)^2 = 25 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -3 \vee x = 3 \vee x = -4$$

Vậy có 4 số phức z thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 92: Xét số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

B. $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

C. $|z| > 2$.

D. $|z| < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow |z| + 2 + (2|z| - 1)i = \frac{\sqrt{10}}{z}$$

$$\Rightarrow \left| |z| + 2 + (2|z| - 1)i \right| = \left| \frac{\sqrt{10}}{z} \right| \Leftrightarrow \sqrt{(|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{|z|}$$

$$\Leftrightarrow (|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2 = \frac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 - 10 = 0 \Rightarrow |z| = 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}.$$

Câu 93: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2i|^2 + 2|1 - \bar{z}|^2 + 3|z - 2 + i|^2 = 2018$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{6}\right).$

B. $\left(\frac{-4}{3}; \frac{5}{6}\right).$

C. $(1; 1).$

D. $\left(\frac{4}{3}; \frac{-7}{6}\right).$

Câu 94: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2i|^2 + 2|1 - \bar{z}|^2 + 3|z - 2 + i|^2 = 2018$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{6}\right).$

B. $\left(\frac{-4}{3}; \frac{5}{6}\right).$

C. $(1; 1).$

D. $\left(\frac{4}{3}; \frac{-7}{6}\right).$

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức z . Khi đó

$$|z + 2i|^2 + 2|1 - \bar{z}|^2 + 3|z - 2 + i|^2 = 2018$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 + 2(x - 1)^2 + 2y^2 + 3(x - 2)^2 + 3(y + 1)^2 = 2018$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6y^2 - 16x + 10y - 1997 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3}y - \frac{1997}{6} = 0.$$

$$\text{Tâm của đường tròn là } \left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{6}\right).$$

Câu 95: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| + |z + 1 - i| = \sqrt{13}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z + 2 - i|$.

A. $m = 1.$

B. $m = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$

C. $m = \frac{\sqrt{13}}{13}.$

D. $m = \frac{1}{13}.$

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	D	C	A	A	A	B	A	C	A	B	B	D	A	B	C	C	B	D	C	C	B	B	A	A
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	A	B	A	A	B	A	C	A	B	A	A	B	D	D	B	A	D	A	A	B	D	A	D	A

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 96: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| + |z + 1 - i| = \sqrt{13}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z + 2 - i|$.

A. $m = 1$.

B. $m = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

C. $m = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

D. $m = \frac{1}{13}$.

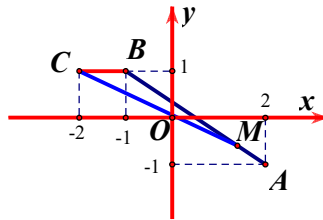
Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$, $A(2; -1)$ và $B(-1; 1)$. Tọa độ điểm biểu diễn số phức z là $M(x; y)$.

Ta có $AB = \sqrt{13}$ và $|z - 2 + i| + |z + 1 - i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow MA + MB = \sqrt{13}$. Suy ra $MA + MB = AB$ nên $M(x; y)$ thuộc đoạn thẳng AB .

Xét $P = |z + 2 - i| = MC$ với $C(-2; 1)$.



Do đó, $P_{\min} = BC = 1$ khi $M \equiv B$.

Câu 97: Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = 1$, tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = 2iz + 1$ trong mặt phẳng Oxy .

A. Đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $R = 2$.

B. Đường tròn tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R = 2$.

C. Đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = 2$.

D. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 2$.

Câu 98: Nếu z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z + 2i|$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z - i| + |z - 4|$ là

A. 4.

B. 2.

C. $\sqrt{3}$.

D. 5.

Câu 99: Biết phương trình $z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0$ có 3 nghiệm phức z_1, z_2, z_3 . Tính $T = |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

A. $T = 3$.

B. $T = 4$.

C. $T = 1$.

D. $T = 2$.

Câu 100: Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = 1$, tìm tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = 2iz + 1$ trong mặt phẳng Oxy .

A. Đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $R = 2$.

B. Đường tròn tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R = 2$.

C. Đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = 2$.

D. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $w = 2iz + 1 \Leftrightarrow z = \frac{w - 1}{2i}$.

Đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Mặt khác: $|z-i|=1 \Leftrightarrow \left| \frac{w-1}{2i} - i \right| = 1 \Leftrightarrow |w-1+2|=2 \Leftrightarrow |w+1|=2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w=2iz+1$ trong mặt phẳng Oxy là: đường tròn tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=2$.

Câu 101: Nếu z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}|=|z+2i|$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z-i|+|z-4|$ là

- A. 4. B. 2. C. $\sqrt{3}$. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi$ biểu diễn điểm $M(x;y)$.

$$|\bar{z}|=|z+2i| \Leftrightarrow y=-1.$$

$$|z-i|+|z-4| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow MA+MB \text{ nhỏ nhất, với } A(0;1), B(4;0).$$

Gọi B' đối xứng với B qua đường thẳng $y=-1$ suy ra $B'(4;-2)$.

$$\text{Do đó, } MA+MB=MA+MB' \geq AB'=5.$$

Câu 102: Biết phương trình $z^4-3z^3+4z^2-3z+1=0$ có 3 nghiệm phức z_1, z_2, z_3 . Tính

$$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|.$$

- A. $T=3$. B. $T=4$. C. $T=1$. D. $T=2$.

Lời giải

Chọn A

$$z^4-3z^3+4z^2-3z+1=0 \Leftrightarrow z^2-3z+4-\frac{3}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2-3\left(z+\frac{1}{z}\right)+4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\left(z+\frac{1}{z}\right)+2=0 \text{ Đặt } t=z+\frac{1}{z}$$

$$pt \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z+\frac{1}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+1=0 \Leftrightarrow z=1$$

$$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+|1|=3.$$

Câu 103: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=\sqrt{5}$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

- A. 0. B. vô số. C. 1. D. 2.

Câu 104: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=\sqrt{5}$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

- A. 0. B. vô số. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |z-3i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=5.$$

$$\frac{z}{z-4} = \frac{x+yi}{x-4+yi} = \frac{(x+yi) \cdot (x-4-yi)}{(x-4)^2 + y^2} = \frac{x^2 - 4x + y^2 - 4yi}{(x-4)^2 + y^2}.$$

$$\frac{z}{z-4} \text{ là số thuần ảo } \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0.$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 5 \\ x^2 - 4x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3y-2}{2} & (1) \\ x^2 - 4x + y^2 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Thay (1) vào (2), ta có:

$$\left(\frac{3y-2}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3y-2}{2} + y^2 = 0 \Leftrightarrow 9y^2 - 12y + 4 - 24y + 16 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{10}{13} \end{cases}.$$

$$* y = 2 \Rightarrow x = 2. \text{ Ta có } z = 2 + 2i.$$

$$* y = \frac{10}{13} \Rightarrow x = \frac{2}{13}. \text{ Ta có } z = \frac{2}{13} + \frac{10}{13}i.$$

Vậy có 2 số phức z thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 105: Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức z và $(1+i)z$. Tính mô đun của số phức z biết tam giác OAB có diện tích bằng 32.

- A.** $|z| = 2$. **B.** $|z| = 8$. **C.** $|z| = 4$. **D.** $|z| = 4\sqrt{2}$.

Câu 106: Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức z và $(1+i)z$. Tính mô đun của số phức z biết tam giác OAB có diện tích bằng 32.

- A.** $|z| = 2$. **B.** $|z| = 8$. **C.** $|z| = 4$. **D.** $|z| = 4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $A(a;b)$ biểu diễn z và $B(a-b;a+b)$ biểu diễn $(1+i)z$.

Tam giác OAB có $OA = |z|$, $OB = |z|\sqrt{2}$, $AB = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Suy ra tam giác OAB vuông cân tại A .

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot AB \Leftrightarrow \frac{1}{2}|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z| = 8.$$

- Câu 1: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018)** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4;3)$ và bán kính $R=3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.
- A.** $M + m = 63$. **B.** $M + m = 48$. **C.** $M + m = 50$. **D.** $M + m = 41$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có phương trình đường tròn $(C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9$.

Mặt khác $F = 4a + 3b - 1 = 4(a-4) + 3(b-3) + 24 \Leftrightarrow F - 24 = 4(a-4) + 3(b-3)$.

Ta có $[4(a-4) + 3(b-3)]^2 \leq (4^2 + 3^2)[(a-4)^2 + (b-3)^2] = 25 \cdot 9 = 225$.

$\Rightarrow -15 \leq 4(a-4) + 3(b-3) \leq 15 \Leftrightarrow -15 \leq F - 24 \leq 15 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$.

Khi đó $M = 39$, $m = 9$.

Vậy $M + m = 48$.

Cách 2. Ta có $F = 4a + 3b - 1 \Rightarrow a = \frac{F+1-3b}{4}$

$(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{F+1-3b}{4} - 4\right)^2 + b^2 - 6b + 9 = 9$

$\Leftrightarrow 25b^2 - 2(3F+3)b + F^2 + 225 = 0$

$\Delta' = (3F+3)^2 - 25F^2 - 5625$

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -16F^2 + 18F - 5625 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$.

- Câu 2: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018)** Xác định tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z| = 2$.
- A.** $m = -3$. **B.** $m = -3$, $m = 9$.
C. $m = 1$, $m = 9$. **D.** $m = -3$, $m = 1$, $m = 9$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\Delta' = m$, $P = 1 - m$.

Trường hợp 1: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm thực: $z = 1 + \sqrt{m}$ hoặc $z = 1 - \sqrt{m}$.

+ Với $z = 1 + \sqrt{m}$. Suy ra: $1 + \sqrt{m} = 2 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận).

+ Với $z = 1 - \sqrt{m}$. Suy ra: $|1 - \sqrt{m}| = 2 \Leftrightarrow m = 9$ (nhận).

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vì đây là phương trình hệ số thực có $\Delta' < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau. Do đó:

$|z| = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow P = 4 \Leftrightarrow 1 - m = 4 \Leftrightarrow m = -3$ (nhận).

Vậy $m \in \{-3; 1; 9\}$.

- Câu 3: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018)** Cho z là số phức thỏa mãn $|z + m| = |z - 1 + m|$ và số phức $z' = 1 + i$. Xác định tham số thực m để $|z - z'|$ nhỏ nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = \frac{1}{3}$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z + m| = |z - 1 + m| \Leftrightarrow (x + m)^2 + y^2 = (x - 1 + m)^2 + y^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - m$.

$$|z - z'| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - m - 1\right)^2 + (y - 1)^2} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{1}{2} - m - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thì $\min |z - z'| = 0$.

Câu 4: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018) Xét số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = 2$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 1 - i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

A. $1 + \sqrt{10}$.

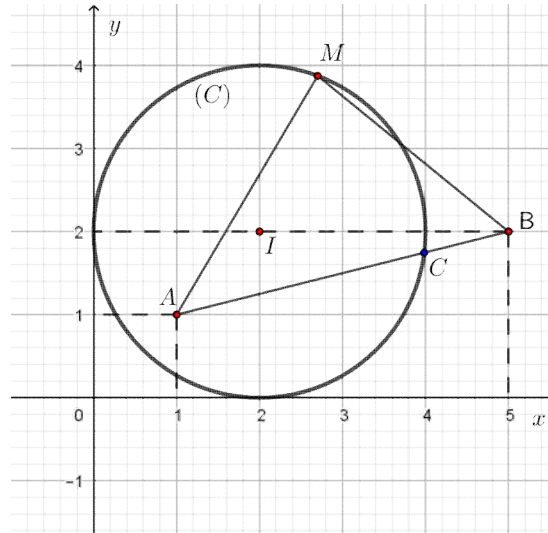
B. 4.

C. $\sqrt{17}$

D. 5.

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z . Do $|z - 2 - 2i| = 2$ nên tập hợp điểm M là đường tròn $(C): (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Các điểm $A(1; 1)$, $B(5; 2)$ là điểm biểu diễn các số phức $1 + i$ và $5 + 2i$. Khi đó, $P = MA + MB$.

Nhận thấy, điểm A nằm trong đường tròn (C) còn điểm B nằm ngoài đường tròn (C) , mà $MA + MB \geq AB = \sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của đoạn AB với (C) .

Ta có, phương trình đường thẳng $AB: x - 4y + 3 = 0$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và đường tròn (C) là nghiệm của hệ với $1 < y < 5$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y-5)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x=4y-3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (4y-5)^2 + (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow 17y^2 - 44y + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{22+\sqrt{59}}{17} (N) \\ y = \frac{22-\sqrt{59}}{17} (L) \end{cases}$$

$$\text{Vậy min } P = \sqrt{17} \text{ khi } z = \frac{37+4\sqrt{59}}{17} + \frac{22+\sqrt{59}}{17}i$$

Câu 5: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$|z-4-3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a+b$ khi $|z+1-3i| + |z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $|z-4-3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 8a + 6b - 20$

Đặt $A = |z+1-3i| + |z-1+i|$ ta có:

$$A = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$$

$$A^2 \leq (1^2 + 1^2) \left((a+1)^2 + (b-3)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 \right) = 2(2(a^2 + b^2) - 4b + 12)$$

$$= 2(16a + 8b - 28) = 8(4a + 2b - 7) \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$4a + 2b - 7 = 4(a-4) + 2(b-3) + 15 \leq \sqrt{(4^2 + 2^2) \left((a-4)^2 + (b-3)^2 \right)} + 15 = 25 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $A^2 \leq 200$

$$\text{Đề } A_{\max} = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b - 7 = 25 \\ \frac{a-4}{4} = \frac{b-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $P = a + b = 10$.

Câu 1: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

- A.** $m = \sqrt{2} - 1$. **B.** $m = 2\sqrt{2}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z_1 = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2 = -b + ai$

$$\Rightarrow z_1 - z_2 = (a + b) + (b - a)i.$$

$$\text{Nên } |z_1 - z_2| = \sqrt{(a + b)^2 + (b - a)^2} = \sqrt{2} \cdot |z_1|$$

$$\text{Ta lại có } 2 = |z_1 + 1 - i| \leq |z_1| + |1 - i| = |z_1| + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |z_1| \geq 2 - \sqrt{2}. \text{ Suy ra } |z_1 - z_2| = \sqrt{2} \cdot |z_1| \geq 2\sqrt{2} - 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} < 0$.

$$\text{Vậy } m = \min |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2} - 2.$$

Câu 2: (THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018) Cho các số phức z_1, z_2 với $z_1 \neq 0$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 \cdot z + z_2$ là đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường nào sau đây?

A. Đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $|z_1|$.

B. Đường tròn tâm là điểm biểu diễn số phức $-\frac{z_2}{z_1}$, bán kính bằng $\frac{1}{|z_1|}$.

C. Đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $\frac{1}{|z_1|}$.

D. Đường tròn tâm là điểm biểu diễn số phức $\frac{z_2}{z_1}$, bán kính bằng $\frac{1}{|z_1|}$.

Lời giải

Chọn B

$$|w| = |z_1 \cdot z + z_2| \Leftrightarrow 1 = |z_1| \left| z + \frac{z_2}{z_1} \right| \Leftrightarrow \left| z + \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{1}{|z_1|}$$

Nên tập hợp điểm là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn số phức $-\frac{z_2}{z_1}$, bán kính bằng $\frac{1}{|z_1|}$.

Câu 1: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w=M+mi$.

- A.** $|w|=\sqrt{2315}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=3\sqrt{137}$. **D.** $|w|=2\sqrt{309}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi$. Ta có $P=(x+2)^2+y^2-\left[x^2+(y-1)^2\right]=4x+2y+3$.

Mặt khác $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Đặt $x=3+\sqrt{5}\sin t$, $y=4+\sqrt{5}\cos t$

Suy ra $P=4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t+23$.

Ta có $-10\leq 4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t\leq 10$.

Do đó $13\leq P\leq 33\Rightarrow M=33$, $m=13\Rightarrow |w|=\sqrt{33^2+13^2}=\sqrt{1258}$.

Câu 2: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z+2w|=3$, $|2z+3w|=6$ và $|z+4w|=7$. Tính giá trị của biểu thức $P=z\bar{w}+\bar{z}.w$.

- A.** $P=-14i$. **B.** $P=-28i$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=-28$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z+2w|=3 \Leftrightarrow |z+2w|^2=9 \Leftrightarrow (z+2w).\overline{(z+2w)}=9 \Leftrightarrow (z+2w).(\bar{z}+2\bar{w})=9$

$\Leftrightarrow z.\bar{z}+2(z.\bar{w}+\bar{z}.w)+4w.\bar{w}=9 \Leftrightarrow |z|^2+2P+4|w|^2=9 \quad (1)$.

Tương tự:

$|2z+3w|=6 \Leftrightarrow |2z+3w|^2=36 \Leftrightarrow (2z+3w).(2\bar{z}+3\bar{w})=36 \Leftrightarrow 4|z|^2+6P+9|w|^2=36 \quad (2)$.

$|z+4w|=7 \Leftrightarrow (z+4w).(\bar{z}+4\bar{w})=49 \Leftrightarrow |z|^2+4P+16|w|^2=49 \quad (3)$.

Giải hệ phương trình gồm (1), (2), (3) ta có:
$$\begin{cases} |z|^2=33 \\ P=-28 \Rightarrow P=-28. \\ |w|^2=8 \end{cases}$$

Câu 3: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $|z-2+3i|$?

- A.** $M=\frac{10}{3}$. **B.** $M=1+\sqrt{13}$. **C.** $M=4\sqrt{5}$. **D.** $M=9$.

Chọn C

Lời giải

Gọi $A(0;1)$, $B(-1;3)$, $C(1;-1)$. Ta thấy A là trung điểm của BC

$$\Rightarrow MA^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2 + 10.$$

Ta lại có: $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$

$$\Leftrightarrow 5MA = MB + 3MC \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{MB^2 + MC^2}$$

$$\Rightarrow 25MA^2 \leq 10(2MA^2 + 10) \Rightarrow MC \leq 2\sqrt{5}$$

Mà $|z-2+3i| = |(z-i) + (-2+4i)| \leq |z-i| + |2-4i| \leq |z-i| + 2\sqrt{5} \leq 4\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} |z-i| = 2\sqrt{5} \\ \frac{a}{-2} = \frac{b-1}{4} \end{cases}$, với $z = a+bi$; $a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-3i \text{ (loại)} \\ z = -2+5i \end{cases}$.

Câu 4: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn

$z_1 + z_2 = 8+6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$, tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $4\sqrt{6}$.

B. $2\sqrt{26}$.

C. $5+3\sqrt{5}$.

D. $34+3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có: $|z_1 + z_2| = |8+6i| = 10$.

Suy ra: $2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 100 + 4 = 104$.

Ta có: $P = |z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = \sqrt{26} \\ z_1 + z_2 = 8+6i \text{ (hệ này có nghiệm)} \\ |z_1 - z_2| = 2 \end{cases}$

Vậy $\max P = 2\sqrt{26}$.

Cách 2: Gọi $z_1 = a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), $z_2 = c+di$, ($c, d \in \mathbb{R}$).

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} a+c=8 & (1) \\ b+d=6 & (2) \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 4 & (3) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)^2 + (b+d)^2 = 100 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 52$$

Ta có $P = |z_1| + |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ ta có:

$$P^2 \leq 2(a^2 + b^2) + 2(c^2 + d^2) = 104 \Leftrightarrow P \leq 2\sqrt{26}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $2\sqrt{26}$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} a+c=8 \\ b+d=6 \\ (a-c)^2+(b-d)^2=4 \\ a^2+b^2=c^2+d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b=3-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ c=4-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ d=3+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Câu 5: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=2$. Tìm giá

trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+2-i|^2+|z-2-3i|^2$.

A. 18.

B. $38+8\sqrt{10}$.

C. $18+2\sqrt{10}$.

D. $16+2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z . Gọi $I(1; -1)$, $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $1-i$; $-2+i$; $2+3i$. Khi đó, ta có:

$MI=2$ nghĩa là M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$, $R=2$ và $P=MA^2+MB^2$.

Ta có: $P=2ME^2+EA^2+EB^2=2ME^2+\frac{AB^2}{2}$, với $E(0; 2)$ là trung điểm của AB . Do đó P

có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi ME có giá trị lớn nhất.

Ta có: $IE=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}>R$ nên $(ME)_{\max}=IE+R=2+\sqrt{10}$.

Vậy $P_{\max}=2\left(2+\sqrt{10}\right)^2+\frac{AB^2}{2}=2\left(2+\sqrt{10}\right)^2+10=38+8\sqrt{10}$.

Cách 2: Giả sử $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z .

Suy ra $M \in (C_1)$ có tâm $I_1(1; -1)$ và bán kính $R_1=2$.

$|z-1+i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$ (1).

Ta có: $P \geq 0$ và $P=|z+2-i|^2+|z-2-3i|^2=(x+2)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2$.

Suy ra $P=(x-1)^2+(y+1)^2+x^2+y^2+2x-10y+16=(x+1)^2+(y-5)^2-6$.

Ta có $(x+1)^2+(y-5)^2=P+6 \geq 6$ (2) nên (2) là phương trình của đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1; 5)$, bán kính $R_2=\sqrt{P+6}>R_1$; $I_1I_2=2\sqrt{10}$.

Để tồn tại x, y thì (C_1) và (C_2) có điểm chung $\Leftrightarrow \sqrt{P+6}-2 \leq I_1I_2 \leq \sqrt{P+6}+2$.

Suy ra: $\sqrt{P+6} \leq 2+I_1I_2 \Leftrightarrow P \leq (2+2\sqrt{10})^2-6=38+8\sqrt{10}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong.

Vậy $\max P=38+8\sqrt{10}$.

Câu 6: (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Giả sử z_1, z_2 là hai trong số

các số phức z thỏa mãn $|iz+\sqrt{2}-i|=1$ và $|z_1-z_2|=2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 4.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |z - (1 + i\sqrt{2})| = 1$. Gọi $z_0 = 1 + i\sqrt{2}$ có điểm biểu diễn là $I(1; \sqrt{2})$.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 .

Vì $|z_1 - z_2| = 2$ nên I là trung điểm của AB .

Ta có $|z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{2(OA^2 + OB^2)} = \sqrt{4OI^2 + AB^2} = \sqrt{16} = 4$.

$OA = OB = 2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng 4.

Câu 7: -----**HẾT**-----**(THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Cho số

phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i|$.

A. 8.

B. 20.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, gọi M là điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z . Ta

có: $\left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-1| = |z+3i| \Leftrightarrow \sqrt{2}|(x-1) + yi| = |x + (y+3)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 20$.

Như vậy, tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;3)$ và bán kính

$R = 2\sqrt{5}$.

Gọi $A(0;-1), B(4;7)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = -i, z_2 = 4 + 7i$. Dễ thấy

A, B thuộc đường tròn (C) . Vì $AB = 4\sqrt{5} = 2R$ nên AB là đường kính của đường tròn

$(C) \Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 80$.

Từ đó:

$P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i| = |z+i| + 2|z-4-7i| = MA + 2MB \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)(MA^2 + MB^2)} = 20$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} MB = 2MA \\ MA^2 + MB^2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = 4 \\ MB = 8 \end{cases}$.

Vậy $\max P = 20$.

Câu 8: **(Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn

$|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2 . Biết $\widehat{MON} = 30^\circ$. Tính

$S = |z_1^2 + 4z_2^2|$.

A. $5\sqrt{2}$.

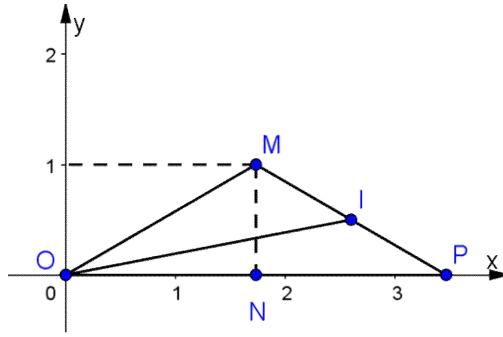
B. $3\sqrt{3}$.

C. $4\sqrt{7}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $S = |z_1^2 + 4z_2^2| = |z_1^2 - (2iz_2)^2| = |z_1 - 2iz_2| \cdot |z_1 + 2iz_2|$

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $2iz_2$.

Khi đó ta có $|z_1 - 2iz_2| \cdot |z_1 + 2iz_2| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{OI}| = 2PM \cdot OI$.

Do $\widehat{MON} = 30^\circ$ nên áp dụng định lí cosin ta tính được $MN = 1$. Khi đó $\triangle OMP$ có MN đồng thời là đường cao và đường trung tuyến, suy ra $\triangle OMP$ cân tại $M \Rightarrow PM = OM = 2$.

Áp dụng định lí đường trung tuyến cho $\triangle OMN$ ta có: $OI^2 = \frac{OM^2 + OP^2}{2} - \frac{MP^2}{4} = 7$.

Vậy $S = 2PM \cdot OI = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$.

Câu 9: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$.

- A. $\sqrt{313} + 16$. B. $\sqrt{313}$. C. $\sqrt{313} + 8$. D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Câu 10: (THPT Chuyên Ngũ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$.

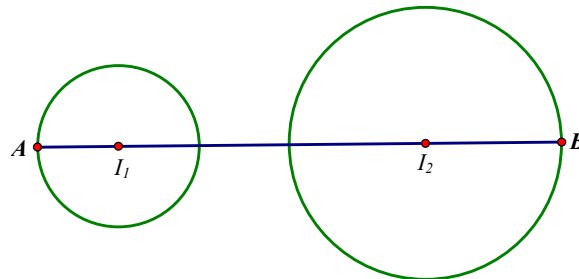
- A. $\sqrt{313} + 16$. B. $\sqrt{313}$. C. $\sqrt{313} + 8$. D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4$ (1); $|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(-3z_2) - 6 - 3i| = 12$ (2).

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$. Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6; -10)$ và bán kính $R_1 = 4$; điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6; 3)$ và bán kính $R_2 = 12$.



Ta có $T = |2iz_1 + 3z_2| = AB \leq I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$.

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16$.

Câu 11: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Cho

hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($m \leq 2018$) để với mọi bộ ba số phân biệt $a, b, c \in [1; 3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

A. 2011.**B.** 2012.**C.** 2010.**D.** 2018.**Lời giải****Chọn C**

Ta có $f(a), f(b), f(c)$ là ba cạnh của một tam giác nên $f(a) + f(b) > f(c)$

$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + m + b^3 - 3b^2 + m > c^3 - 3c^2 + m \text{ với mọi } a, b, c \in [1; 3]$$

$$\Rightarrow (a^3 - 3a^2) + (b^3 - 3b^2) - (c^3 - 3c^2) > -m \text{ với mọi } a, b, c \in [1; 3]$$

$$\text{Do đó } \min \left[(a^3 - 3a^2) + (b^3 - 3b^2) - (c^3 - 3c^2) \right] > -m \text{ với mọi } a, b, c \in [1; 3]$$

$$\text{Ta cần tìm } \min \left[(a^3 - 3a^2) + (b^3 - 3b^2) \right] \text{ và } \max (c^3 - 3c^2) \text{ với mọi } a, b, c \in [1; 3]$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = x^3 - 3x^2 \text{ với } x \in [1; 3]$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Do } x \in [1; 3] \text{ nên } x = 2.$$

$$\text{Ta có } f(1) = -2, f(2) = -4, f(3) = 0.$$

$$\max_{[1;3]} f(x) = f(3) = 0, \min_{[1;3]} f(x) = f(2) = -4.$$

$$\text{Suy ra } \min \left[(a^3 - 3a^2) + (b^3 - 3b^2) - (c^3 - 3c^2) \right] = -4.2 = -8.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } a = b = 2, c = 3 \text{ hoặc } a = c = 2, b = 3 \text{ hoặc } b = c = 2, a = 3.$$

$$\text{Do đó } -8 > -m \Rightarrow m > 8. \text{ Mà } m \leq 2018 \text{ và } m \text{ nguyên nên } m = \{9; \dots; 2018\}.$$

Vậy có 2010 giá trị m thỏa mãn.

Câu 12: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Tính $a + b$ khi $|z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4 - \sqrt{3}$.**B.** $2 + \sqrt{3}$.**C.** 3.**D.** $4 + \sqrt{3}$.**Lời giải****Chọn D***Cách 1:*

$$\text{Đặt } z - 3 - 2i = w \text{ với } w = x + yi \text{ (} x, y \in \mathbb{R} \text{)}. \text{ Theo bài ra ta có } |w| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

$$\text{Ta có } P = |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i| = |w + 4| + 2|w + 1 - 3i| = \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$$

$$= \sqrt{20 + 8x} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = 2\sqrt{5 + 2x} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$$

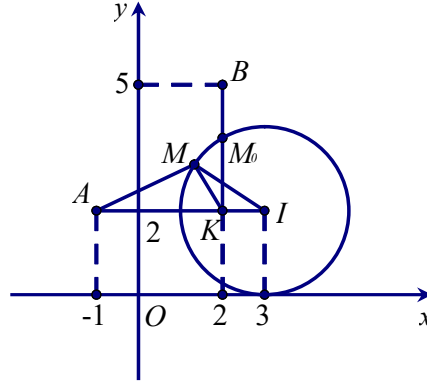
$$= 2\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\right) = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\right)$$

$$\geq 2(|y| + |y-3|) \geq 2|y+3-y| = 6.$$

$$P = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y(3-y) \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy GTNN của P là bằng 6 đạt được khi $z = 2 + (2 + \sqrt{3})i$.

Cách 2:



$$|z - 3 - 2i| = 2 \Rightarrow MI = 2 \Rightarrow M \in (I; 2) \text{ với } I = (3; 2).$$

$$P = |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i| = MA + 2MB \text{ với } A = (1; 2), B = (2; 5).$$

$$\text{Ta có } IM = 2; IA = 4. \text{ Chọn } K(2; 2) \text{ thì } IK = 1. \text{ Do đó ta có } IA \cdot IK = IM^2 \Rightarrow \frac{IA}{IM} = \frac{IM}{IK}$$

$$\Rightarrow \triangle IAM \text{ và } \triangle IMK \text{ đồng dạng với nhau} \Rightarrow \frac{AM}{MK} = \frac{IM}{IK} = 2 \Rightarrow AM = 2MK.$$

$$\text{Từ đó } P = MA + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2BK.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, K, B thẳng hàng và M thuộc đoạn thẳng BK .

$$\text{Từ đó tìm được } M = (2; 2 + \sqrt{3}).$$

Cách 3:

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$. Đặt $I = (3; 2)$, $A(-1; 2)$ và $B(2; 5)$.

Ta xét bài toán: Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm I , bán kính $R = 2$ sao cho biểu thức $P = MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước tiên, ta tìm điểm $K(x; y)$ sao cho $MA = 2MK \forall M \in (C)$.

$$\text{Ta có } MA = 2MK \Leftrightarrow MA^2 = 4MK^2 \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})^2 = 4(\overline{MI} + \overline{IK})^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} = 4(MI^2 + IK^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IK}) \Leftrightarrow 2\overline{MI}(\overline{IA} - 4\overline{IK}) = 3R^2 + 4IK^2 - IA^2 (*).$$

$$(*) \text{ luôn đúng } \forall M \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{IA} - 4\overline{IK} = \vec{0} \\ 3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0 \end{cases}.$$

$$\overline{IA} - 4\overline{IK} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-3) = -4 \\ 4(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Thử trực tiếp ta thấy $K(2; 2)$ thỏa mãn $3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0$.

Vì $BI^2 = 1^2 + 3^2 = 10 > R^2 = 4$ nên B nằm ngoài (C) .

Vì $KI^2 = 1 < R^2 = 4$ nên K nằm trong (C) .

Ta có $MA + 2MB = 2MK + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2KB$.

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK .

Do đó $MA + 2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng BK .

Phương trình đường thẳng $BK : x = 2$.

Phương trình đường tròn $(C) : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Thử lại thấy $M(2; 2 + \sqrt{3})$ thuộc đoạn BK .

Vậy $a = 2, b = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a + b = 4 + \sqrt{3}$.

Câu 13: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2|z+1| + 2|z-1| + |z-\bar{z}-4i|$ bằng:

A. $4 + 2\sqrt{3}$.

B. $2 + \sqrt{3}$.

C. $4 + \frac{14}{\sqrt{15}}$.

D. $2 + \frac{7}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có $|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$.

Suy ra $-2 \leq x, y \leq 2$.

Khi đó, $P = 2|z+1| + 2|z-1| + |z-\bar{z}-4i| = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + |y-2|\right)$

$\Leftrightarrow P = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + |y-2|\right) \geq 2\left(2\sqrt{1+y^2} + 2-y\right)$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y$ trên đoạn $[-2; 2]$, ta có:

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ta có $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{3}; f(-2) = 4 + 2\sqrt{5}; f(2) = 2\sqrt{5}$.

Suy ra $\min_{[-2; 2]} f(y) = 2 + \sqrt{3}$ khi $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó $P \geq 2(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$. Vậy $P_{\min} = 4 + 2\sqrt{3}$ khi $z = \frac{1}{\sqrt{3}}i$.

Câu 14: -----HẾT----- (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Nếu z là số phức thỏa $|\bar{z}| = |z + 2i|$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z-i| + |z-4|$ là

A. 2.

B. $\sqrt{3}$.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ theo giả thiết $|\bar{z}| = |z + 2i| \Leftrightarrow y = -1. (d)$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng (d) .

Gọi $A(0;1)$, $B(4;0)$ suy ra $|z-i|+|z-4|=P$ là tổng khoảng cách từ điểm $M(x;-1)$ đến hai điểm A, B .

Thấy ngay $A(0;1)$ và $B(4;0)$ nằm cùng phía với (d) . Lấy điểm đối xứng với $A(0;1)$ qua đường thẳng (d) ta được điểm $A'(0;-3)$.

Do đó khoảng cách ngắn nhất là $A'B = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Câu 15: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó môđun của số phức $w = z_1 + z_2$ là

A. $|w| = 2\sqrt{2}$.

B. $|w| = 2$.

C. $|w| = \sqrt{2}$.

D. $|w| = 1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Đặt } z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \text{ thì } |z^2 + 1| = 2|z| &\Leftrightarrow |(a + bi)^2 + 1| = 2|a + bi| \\ &\Leftrightarrow |a^2 - b^2 + 1 + 2abi| = 2|a + bi| \Leftrightarrow (a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2 = 4(a^2 + b^2) \\ &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + 1 - 2a^2 - 6b^2 + 2a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 1)^2 - 4b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 1 - 2b)(a^2 + b^2 - 1 + 2b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 1 - 2b = 0 \\ a^2 + b^2 - 1 + 2b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{TH1: } a^2 + b^2 - 1 - 2b = 0 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = 2.$$

Khi đó tập hợp điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I_1(0;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$, giao điểm của OI (trục tung) với đường tròn là $M_1(0;\sqrt{2}+1)$ và $M_2(0;1-\sqrt{2})$

$$\Rightarrow w = (\sqrt{2}+1)i + (1-\sqrt{2})i \Rightarrow w = 2i \Rightarrow |w| = 2$$

$$\text{TH2: } a^2 + b^2 - 1 + 2b = 0 \Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 = 2.$$

Khi đó tập hợp điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I_2(0;-1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$, giao điểm của OI (trục tung) với đường tròn là $M_3(0;\sqrt{2}-1)$ và $M_4(0;-\sqrt{2}-1)$

$$\Rightarrow w = (\sqrt{2}-1)i + (-1-\sqrt{2})i \Rightarrow w = -2i \Rightarrow |w| = 2.$$

Với đáp án của trường ĐH Vinh đưa ra là A thì ta chọn số phức M_1 và M_3 có $w = 2\sqrt{2}i \Rightarrow |w| = 2\sqrt{2}$ nên đề bài chưa chuẩn, có thể chọn phương án **B**.

Đáp án ĐH Vinh đưa ra theo mình là chính xác, bởi lẽ trong các số phức z thỏa mãn ta tìm các số phức gọi z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất và lớn nhất nên phải tổng hợp cả hai TH1 và TH2.

Thầy đừng vội tính w mà sau cùng hãy tìm z_1 và z_2 rồi tính w

Một vài góp ý thầy xem nhé

Câu 16: (SGD Nam Định – năm 2017 – 2018) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{z}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$. Tính diện tích S của (H) .

A. $S = 32(6 - \pi)$.

B. $S = 16(4 - \pi)$.

C. 256.

D. 64π .

Lời giải

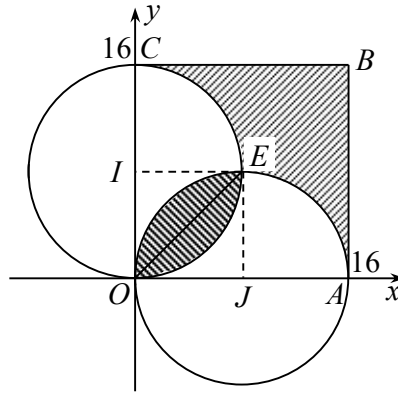
Chọn A

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $\frac{z}{16} = \frac{x}{16} + \frac{y}{16}i$; $\frac{16}{z} = \frac{16}{x - yi} = \frac{16x}{x^2 + y^2} + \frac{16y}{x^2 + y^2}i$.

Vì $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{z}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0; 1]$ nên

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x}{16} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{y}{16} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{16x}{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{16y}{x^2 + y^2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 16 \\ 0 \leq y \leq 16 \\ 0 \leq 16x \leq x^2 + y^2 \\ 0 \leq 16y \leq x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 16 \\ 0 \leq y \leq 16 \\ (x - 8)^2 + y^2 \geq 64 \\ x^2 + (y - 8)^2 \geq 64 \end{cases}$$



Suy ra (H) là phần mặt phẳng giới hạn bởi hình vuông cạnh 16 và hai hình tròn (C_1) có tâm $I(8; 0)$, bán kính $R_1 = 8$ và (C_2) có tâm $J(0; 8)$, bán kính $R_2 = 8$.

Gọi S' là diện tích của đường tròn (C_2) .

Diện tích phần giao nhau của hai đường tròn là: $S_1 = 2 \left(\frac{1}{4} S' - S_{OEJ} \right) = 2 \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \right)$.

Vậy diện tích S của hình (H) là:

$$S = 16^2 - \pi \cdot 8^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \right) = 256 - 64\pi + 32\pi - 64 = 192 - 32\pi = 32(6 - \pi).$$

Câu 17: (SGD Nam Định – năm 2017 – 2018). Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6$, $|z_2| = 2$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2 . Biết $\widehat{MON} = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.

A. $T = 18$.

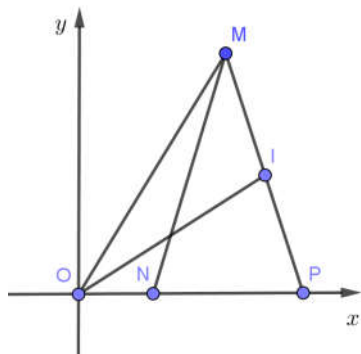
B. $T = 24\sqrt{3}$.

C. $T = 36\sqrt{2}$.

D. $T = 36\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $T = |z_1^2 + 9z_2^2| = |z_1^2 - (3iz_2)^2| = |z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2|$

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $3iz_2$.

Khi đó ta có $|z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2| = |\overline{OM} - \overline{OP}| \cdot |\overline{OM} + \overline{OP}| = |\overline{PM}| \cdot |2\overline{OI}| = 2PM.OI$.

Do $\widehat{MON} = 60^\circ$ và $OM = OP = 6$ nên $\triangle MOP$ đều suy ra $PM = 6$ và $OI = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Vậy $T = 2PM.OI = 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$.

-----**HẾT**-----

Câu 1: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-1+2i|=5$ và $|z_1-z_2|=8$. Tìm môđun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

A. $|w|=6$.

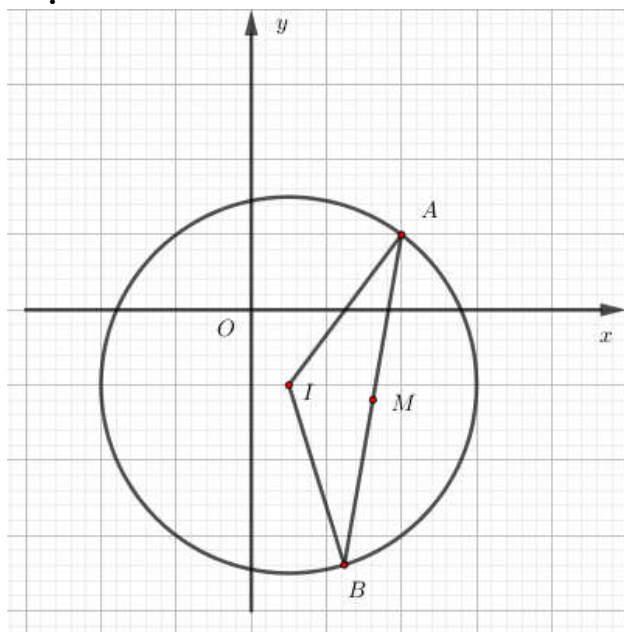
B. $|w|=16$.

C. $|w|=10$.

D. $|w|=13$.

Lời giải

Chọn A



Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1 , B là điểm biểu diễn của số phức z_2 .

Theo giả thiết z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-1+2i|=5$ nên A và B thuộc đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính $r=5$.

Mặt khác $|z_1-z_2|=8 \Leftrightarrow AB=8$.

Gọi M là trung điểm của AB suy ra M là điểm biểu diễn của số phức $\frac{z_1+z_2}{2}$ và $IM=3$.

Do đó ta có

$$3 = IM = \left| \frac{z_1+z_2}{2} - 1 + 2i \right| \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2} |z_1+z_2-2+4i| \Leftrightarrow |z_1+z_2-2+4i| = 6 \Leftrightarrow |w| = 6.$$

Câu 2: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+3i|+|z+2-i|=8$. Giá trị nhỏ nhất m của $|2z+1+2i|$ là

A. $m=4$.

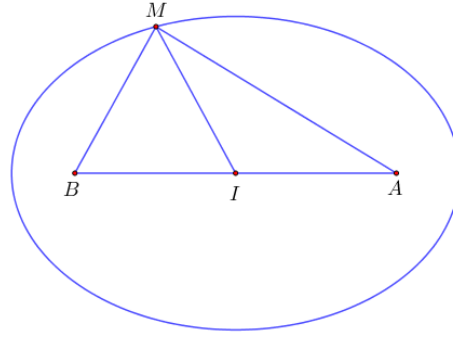
B. $m=9$.

C. $m=8$.

D. $m=\sqrt{39}$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $A(1; -3)$, $B(-2; 1)$, $AB = 5$.

$|z - 1 + 3i| + |z + 2 - i| = 8 \Leftrightarrow AM + BM = 8$, tập hợp điểm M là Elip có phương trình

$$\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{39} = 1. \text{ Đặt } P = |2z + 1 + 2i| \Leftrightarrow P = 2 \left| z + \frac{1}{2} + i \right|, \text{ gọi } I \text{ là trung điểm } AB \text{ thì } I\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$$

$$\Rightarrow P = 2 \left| z + \frac{1}{2} + i \right| = 2IM = IM.$$

Ta tìm điểm M trên (E) sao cho IM có độ dài nhỏ nhất.

$$IM \text{ nhỏ nhất khi } IM \text{ bằng độ dài nửa trục bé, } IM = \frac{\sqrt{39}}{2} \Rightarrow P_{\min} = \sqrt{39}.$$

Câu 3: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 5 - 2i|$ bằng:

- A.** $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$). Suy ra $\bar{z} = x - yi$ và $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Theo giả thiết, ta có $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2| \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$

$\Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 = 2$. Từ đó suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là các đường tròn có tâm $I(\pm 1; \pm 1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Khi đó, $P = |z - 5 - 2i| = MA$, với $A(5; 2)$ và $M(x; y)$ là tọa độ điểm biểu diễn số phức z .

Mặt khác, vì $A(5; 2)$ thuộc góc phần tư thứ nhất nên MA lớn nhất $\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_3) có tâm $I(-1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

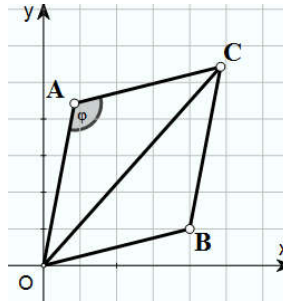
Câu 4: Vậy $P_{\max} = MA_{\max} = IA + R = 3\sqrt{5} + \sqrt{2}$. Trong mặt phẳng phức, xét hình bình hành tạo bởi các điểm $0, z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$. Biết z có phần thực dương và diện tích hình bình hành bằng $\frac{35}{37}$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của $\left| z + \frac{1}{z} \right|^2$.

- A.** $\frac{53}{20}$. **B.** $\frac{60}{37}$. **C.** $\frac{22}{9}$. **D.** $\frac{50}{37}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O, A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn số phức $0, z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$.

Khi đó diện tích hình bình hành $OACB$ là $S = OA \cdot OB \cdot \sin \varphi = |z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| \cdot \sin \varphi = \frac{35}{37} \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{35}{37}$.

Suy ra $\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \pm \frac{12}{37}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác OAC ta có

$$\left| z + \frac{1}{z} \right|^2 = OC^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \varphi = |z|^2 + \left| \frac{1}{z} \right|^2 - 2|z| \left| \frac{1}{z} \right| \cdot \cos \varphi = |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} - 2 \cos \varphi$$

$$\Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 \geq 2 - 2 \cdot \frac{12}{37} = \frac{50}{37}. \text{ Vậy } \left| z + \frac{1}{z} \right| \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{50}{37}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow |z| = 1$ và $\cos \varphi = \frac{12}{37}$.

Chẳng hạn như $z = \sin \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{12}{37} \right) + i \cos \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{12}{37} \right)$.

Câu 5: Vậy $\left| z + \frac{1}{z} \right|$ nhỏ nhất bằng $\frac{50}{37}$. Biết $2^n (C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$, với

C_n^k là các số tổ hợp chập k của n và $i^2 = -1$. Đặt $T_{k+1} = i^k C_n^k$, giá trị của T_8 bằng

A. $-330i$. **B.** $-8i$. **C.** $-36i$. **D.** $-120i$.

Câu 6: Biết $2^n (C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$, với C_n^k là các số tổ hợp chập k của

n và $i^2 = -1$. Đặt $T_{k+1} = i^k C_n^k$, giá trị của T_8 bằng

A. $-330i$. **B.** $-8i$. **C.** $-36i$. **D.** $-120i$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$$2^n (C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$$

$$\Leftrightarrow 2^n (C_n^0 + iC_n^1 + i^2 C_n^2 + i^3 C_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$$

$$\Leftrightarrow 2^n (1+i)^n = 2^{15}i \quad (*)$$

Ta có $(1+i)^2 = 2i$ nên nếu $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, thì $(1+i)^n = (1+i)^{2k+1} = 2^k i^k (1+i)$ nên không thỏa mãn (*).

Xét $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, thì $(1+i)^n = (1+i)^{2k} = 2^k i^k$, nên:

$$(*) \Leftrightarrow 2^{2k} \cdot 2^k \cdot i^k = 2^{15}i \Leftrightarrow 2^{3k} i^k = 2^{15}i \Rightarrow k = 5 \Rightarrow n = 10.$$

Từ đó ta có $T_8 = i^7 C_8^7 = -8i$.

Câu 7: Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-1-2i| + |z-5-2i|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 8: Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-1-2i| + |z-5-2i|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

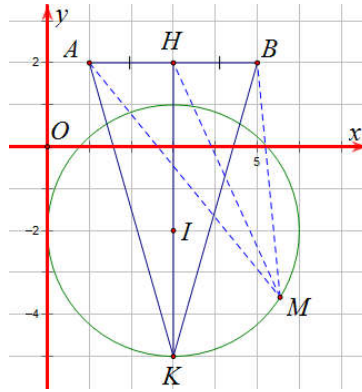
Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z .

Theo giả thiết, $5w = (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5(w+i) = (2+i)(z-4) + 5i \Leftrightarrow (2-i)(w+i) = z-3+2i$
 $\Leftrightarrow |z-3+2i| = 3$. Suy ra $M(x; y)$ thuộc đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Ta có $P = |z-1-2i| + |z-5-2i| = MA + MB$, với $A(1; 2)$ và $B(5; 2)$.



Gọi H là trung điểm của AB , ta có $H(3; 2)$ và khi đó:

$$P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)} \text{ hay } P \leq \sqrt{4MH^2 + AB^2}.$$

Mặt khác, $MH \leq KH$ với mọi $M \in (C)$ nên

$$P \leq \sqrt{4KH^2 + AB^2} = \sqrt{4(IH + R)^2 + AB^2} = 2\sqrt{53}.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 2\sqrt{53} \text{ khi } \begin{cases} M \equiv K \\ MA = MB \end{cases} \text{ hay } z = 3 - 5i \text{ và } w = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i.$$

Câu 9: Cho số phức $z = 1 + i$. Biết rằng tồn tại các số phức $z_1 = a + 5i$, $z_2 = b$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}, b > 1$) thỏa mãn $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính $b - a$.

A. $b - a = 5\sqrt{3}$. **B.** $b - a = 2\sqrt{3}$. **C.** $b - a = 4\sqrt{3}$. **D.** $b - a = 3\sqrt{3}$.

Câu 10: Cho số phức $z = 1 + i$. Biết rằng tồn tại các số phức $z_1 = a + 5i$, $z_2 = b$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}, b > 1$) thỏa mãn $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính $b - a$.

A. $b - a = 5\sqrt{3}$. **B.** $b - a = 2\sqrt{3}$. **C.** $b - a = 4\sqrt{3}$. **D.** $b - a = 3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{3}|z-z_1|=\sqrt{3}|z-z_2|=|z_1-z_2| \Rightarrow \begin{cases} (1-a)^2+4^2=(b-1)^2+1 \\ (b-a)^2+25=3[(1-a)^2+16] \end{cases} (*)$

Cách 1: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2-(1-a)^2=15 \\ (b-1)^2+2(b-1)(1-a)+(1-a)^2=3(1-a)^2+\frac{23}{15}[(b-1)^2-(1-a)^2] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2-(1-a)^2=15 \\ 8(b-1)^2-2(b-1)(1-a)+7(1-a)^2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2-(1-a)^2=15 \\ \begin{cases} b-1=\frac{1}{4}(1-a) \\ b-1=\frac{7}{2}(1-a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ b=\frac{7\sqrt{3}}{3}+1 \end{cases} \Rightarrow b-a=3\sqrt{3}.$

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u=a-1 \\ v=b-1 \end{cases}$ ta có hpt: $\begin{cases} v^2-u^2=15 \\ v^2+2uv+u^2=23 \end{cases}$ (Hệ đẳng cấp quen thuộc).

Câu 11: Gọi n là số các số phức z đồng thời thỏa mãn $|iz+1+2i|=3$ và biểu thức $T=2|z+5+2i|+3|z-3i|$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi M là giá trị lớn nhất của T . Giá trị tích của $M.n$ là

- A. $10\sqrt{21}$. B. $6\sqrt{13}$. C. $5\sqrt{21}$. D. $2\sqrt{13}$.

Câu 12: Gọi n là số các số phức z đồng thời thỏa mãn $|iz+1+2i|=3$ và biểu thức $T=2|z+5+2i|+3|z-3i|$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi M là giá trị lớn nhất của T . Giá trị tích của $M.n$ là

- A. $10\sqrt{21}$. B. $6\sqrt{13}$. C. $5\sqrt{21}$. D. $2\sqrt{13}$.

Lời giải

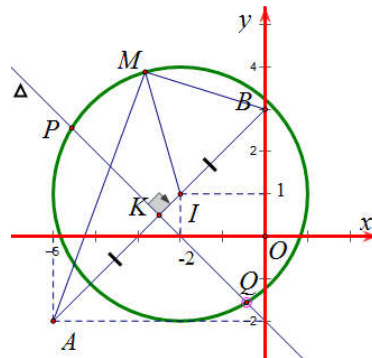
Chọn A

Gọi $z=x+yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z .

Theo giả thiết, $|iz+1+2i|=3 \Leftrightarrow |z+2-i|=3 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=9$.

Ta có $T=2|z+5+2i|+3|z-3i|=2MA+3MB$, với $A(-5;-2)$ và $B(0;3)$.

Nhận xét rằng A, B, I thẳng hàng và $2IA=3IB$.



Cách 1: Gọi Δ là đường trung trực của AB , ta có $\Delta: x+y+5=0$.

$T = 2MA + 3MB \leq PA + PB$. Dấu “=” xảy ra khi $M \equiv P$ hoặc $M \equiv Q$.

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow P\left(\frac{-8-\sqrt{2}}{2}; \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right) \text{ và } Q\left(\frac{-8+\sqrt{2}}{2}; -\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right).$$

Khi đó $M = \max T = 5\sqrt{21}$.

Vậy $M.n = 10\sqrt{21}$.

Cách 2: Ta có A, B, I thẳng hàng và $2IA = 3IB$ nên $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 = 105.$$

$$\text{Do đó } T^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}MA + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}MB)^2 \leq 5(2MA^2 + 3MB^2) = 525 \text{ hay } T \leq 5\sqrt{21}.$$

Khi đó $M = \max T = 5\sqrt{21}$. Dấu “=” xảy ra khi $M \equiv P$ hoặc $M \equiv Q$.

Vậy $M.n = 10\sqrt{21}$.

Cách 3: Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z .

$$\text{Theo giả thiết, } |iz + 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 - i| = 3 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = -2 + 3\sin t \\ y = 1 + 3\cos t \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$\begin{aligned} P &= 2MA + 3MB = 2\sqrt{(3+3\sin t)^2 + (3+3\cos t)^2} + 3\sqrt{(-2+3\sin t)^2 + (-2+3\cos t)^2} \\ &= 2\sqrt{27+18(\sin t + \cos t)} + 3\sqrt{17-12(\sin t + \cos t)} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{54+36(\sin t + \cos t)} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{51-36(\sin t + \cos t)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta thấy: } P \leq \sqrt{(2+3)} \sqrt{(54+36(\sin t + \cos t) + 51-36(\sin t + \cos t))} = \sqrt{521}.$$

P đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{521}$ khi:

$$\frac{\sqrt{54+36(\sin t + \cos t)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{51-36(\sin t + \cos t)}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin t + \cos t = \frac{-1}{3} \Rightarrow x + y + 2 = 0.$$

$$\text{Toạ độ điểm } M \text{ thỏa mãn hệ phương trình: } \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \text{Có hai điểm } M \text{ thỏa}$$

mãn. Vậy $M.n = 10\sqrt{21}$.

Câu 13: Cho số phức z_0 có $|z_0| = 2018$. Diện tích của đa giác có các đỉnh là các điểm biểu diễn của z_0 và các nghiệm của phương trình $\frac{1}{z+z_0} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z_0}$ được viết dạng $n\sqrt{3}$, $n \in \mathbb{N}$. Chữ số hàng đơn vị của n là

A. 9.

B. 8.

C. 3.

D. 4.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn

$$f'(x) = \tan x \cdot f(x), \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], f(0) = 1. \text{ Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1+\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\ln \frac{1+\pi}{4}$.

D. 0.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	C	B	D	D	A	B	B	B	C	A	A	C	D	D	A	A	B	C	B	A	D	D	B

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	C	D	D	C	D	C	D	C	C	A	D	B	B	A	C	C	B	B	A	C	D	D	A	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 15: Cho số phức z_0 có $|z_0| = 2018$. Diện tích của đa giác có các đỉnh là các điểm biểu diễn của z_0 và

các nghiệm của phương trình $\frac{1}{z+z_0} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z_0}$ được viết dạng $n\sqrt{3}$, $n \in \mathbb{N}$. Chữ số hàng đơn vị

của n là

A. 9.

B. 8.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} z \neq 0 \\ z_0 \neq 0 \end{cases}$

Ta có: $\frac{1}{z+z_0} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z_0} \Leftrightarrow z \cdot z_0 = (z+z_0)z_0 + (z+z_0)z \Leftrightarrow z^2 + z \cdot z_0 + z_0^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 + \frac{z}{z_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0 = z_{1,2}$$

Ta có: $|z_1| = |z_2| = \left|-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| |z_0| = |z_0| = 2018$ và $z_0 + z_1 + z_2 = 0$.

Do đó z_0, z_1, z_2 được biểu diễn bởi ba điểm M_0, M_1, M_2 tạo thành một tam giác đều nằm trên đường tròn tâm O bán kính $R = 2018$.

Tam giác đều này có chiều cao: $h = \frac{3}{2}R$ và độ dài cạnh: $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot h = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2}R = \sqrt{3} \cdot R$

Diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2} a.h = \frac{3R^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3.2018^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3054243 \cdot \sqrt{3}$.

Vậy $n = 3054243$ có chữ số hàng đơn vị là 3.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn

$f'(x) = \tan x \cdot f(x), \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], f(0) = 1$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1+\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\ln \frac{1+\pi}{4}$.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Từ $f'(x) = \tan x \cdot f(x), \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$,

ta có:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \tan x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \tan x dx, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = -\ln(\cos x) + C, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Mà $f(0) = 1$ nên suy ra $\ln f(0) = -\ln(\cos 0) + C \Rightarrow C = 0$.

$$\text{Nên vậy } \ln f(x) = -\ln(\cos x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\cos x}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\text{Từ đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

-----**HẾT**-----

Câu 17: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z-1-2i| + |z-3-4i| + |z-5-6i| \text{ được viết dưới dạng } \frac{(a+b\sqrt{17})}{\sqrt{2}} \text{ với } a, b \text{ là các số hữu}$$

tỉ. Giá trị của $a+b$ là

A. 3.

B. 7.

C. 2.

D. 4.

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z-1-2i| + |z-3-4i| + |z-5-6i| \text{ được viết dưới dạng } \frac{(a+b\sqrt{17})}{\sqrt{2}} \text{ với } a, b \text{ là các số hữu}$$

tỉ. Giá trị của $a+b$ là

A. 3.

B. 7.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}
|z+2| &= |z+2i| \\
\Leftrightarrow |(x+yi)+2| &= |(x+yi)+2i| \\
\Leftrightarrow |(x+2)+yi| &= |x+(y+2)i| \\
\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 &= x^2 + (y+2)^2 \\
\Leftrightarrow x &= y.
\end{aligned}$$

Như vậy $z = x + xi$ với $x \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
P &= |(x-1) + (x-2)i| + |(x-3) + (x-4)i| + |(x-5) + (x-6)i| \\
&= \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (x-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (x-6)^2} \\
&= \sqrt{2x^2 - 6x + 5} + \sqrt{2x^2 - 14x + 25} + \sqrt{2x^2 - 22x + 61} \\
&= \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{11}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) + \sqrt{2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\
&\geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(x - \frac{3}{2} + \frac{11}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\
&\geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{17} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{11}{2} - x \\ x - \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

Vậy: $\min P = \frac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$. Suy ra $a=1, b=2$ nên $a+b=3$.

Câu 19: Cho hai số phức u, v thỏa mãn $3|u-6i|+3|u-1-3i|=5\sqrt{10}$, $|v-1+2i|=\left|\overline{v}+i\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $|u-v|$ là:

A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

C. $\sqrt{10}$.

D. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$.

-----HẾT-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	D	D	A	B	C	B	C	D	B	C	D	C	D	A	C	A	A	D	D	B	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	A	C	A	D	A	D	C	D	B	A	B	D	A	C	A	B	D	C	A	A	C	A	D	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 20: Cho hai số phức u, v thỏa mãn $3|u-6i|+3|u-1-3i|=5\sqrt{10}, |v-1+2i|=|\bar{v}+i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|u-v|$ là:

- A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

▪ Ta có: $3|u-6i|+3|u-1-3i|=5\sqrt{10} \Leftrightarrow |u-6i|+|u-1-3i|=\frac{5\sqrt{10}}{3} \Rightarrow MF_1+MF_2=\frac{5\sqrt{10}}{3}$.

$\Rightarrow u$ có điểm biểu diễn M thuộc elip với hai tiêu điểm $F_1(0;6), F_2(1;3)$, tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ và độ

dài trục lớn là $2a=\frac{5\sqrt{10}}{3} \Rightarrow a=\frac{5\sqrt{10}}{6}$.

$\overline{F_1F_2}=(1;-3) \Rightarrow F_1F_2: 3x+y-6=0$.

▪ Ta có: $|v-1+2i|=|\bar{v}+i|=|v-i| \Rightarrow NA=NB$

$\Rightarrow v$ có điểm biểu diễn N thuộc đường thẳng d là trung trực của đoạn AB với $A(1;-2), B(0;1)$.

$\overline{AB}=(-1;3), K\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow d: x-3y-2=0$.

$$d(I,d)=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{27}{2}-2\right|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Để thấy } F_1F_2 \perp d \Rightarrow \min|u-v|=\min MN=|d(I,d)-a|=\frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

Câu 21: Cho $z=x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}+2-3i| \leq |z+i-2| \leq 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+8x+6y$. Tính $M+m$.

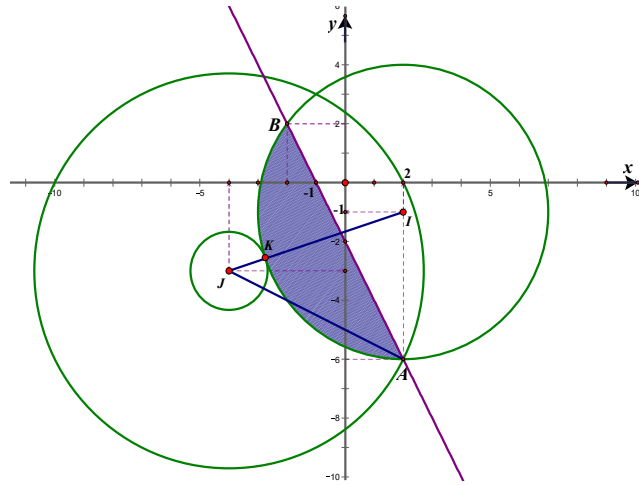
- A. $\frac{156}{5}-20\sqrt{10}$. B. $60-20\sqrt{10}$. C. $\frac{156}{5}+20\sqrt{10}$. D. $60+2\sqrt{10}$.

Câu 22: Cho $z=x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}+2-3i| \leq |z+i-2| \leq 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+8x+6y$. Tính $M+m$.

- A. $\frac{156}{5}-20\sqrt{10}$. B. $60-20\sqrt{10}$. C. $\frac{156}{5}+20\sqrt{10}$. D. $60+2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B



- Theo bài ra: $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (-y-3)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền mặt phẳng (T) thỏa mãn

$$\begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases} \quad (\text{là miền tô đậm trên hình vẽ, kể cả biên})$$

- Gọi $A(2; -6)$, $B(-2; 2)$ là các giao điểm của đường thẳng $2x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C') : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

- Ta có: $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = P + 25$.

Gọi (C) là đường tròn tâm $J(-4; -3)$, bán kính $R = \sqrt{P+25}$.

- Đường tròn (C) cắt miền (T) khi và chỉ khi

$$JK \leq R \leq JA \Leftrightarrow IJ - IK \leq R \leq IA \Leftrightarrow 2\sqrt{10} - 5 \leq \sqrt{25+P} \leq 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 40 - 20\sqrt{10} \leq P \leq 20$$

(trong đó JK là bán kính đường tròn tâm J và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C'))

$$\Rightarrow M = 20 \text{ và } m = 40 - 20\sqrt{10}.$$

$$\text{Vậy } M + m = 60 - 20\sqrt{10}.$$

Câu 23: Gọi z_1, z_2 là hai trong tất cả các số phức thỏa mãn điều kiện $|(i-1)z - 3i + 3| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 2$.

Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1| + |z_2|$. Giá trị của $S = m^3 + n^3$ bằng

A. 72.

B. 90.

C. 54.

D. 126.

Câu 24: Gọi z_1, z_2 là hai trong tất cả các số phức thỏa mãn điều kiện $|(i-1)z - 3i + 3| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 2$.

Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1| + |z_2|$. Giá trị của $S = m^3 + n^3$ bằng

A. 72.

B. 90.

C. 54.

D. 126.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } |(i-1)z - 3i + 3| = 2 \Leftrightarrow |(i-1)(z-3)| = 2 \Leftrightarrow |z-3| = \sqrt{2}.$$

Gọi M là điểm biểu diễn của z ta có M nằm trên đường tròn (C) tâm $I(3; 0)$, $R = \sqrt{2}$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho z_1, z_2 ta có $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow AB = 2$.

Gọi H là trung điểm AB ta có tam giác IAB vuông tại I (theo định lý Pitago đảo)

$$\Rightarrow IH = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$\Rightarrow H$ chạy trên đường tròn tâm I bán kính $R = 1$.

$$P = |z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)}(OA^2 + OB^2)$$

Mặt khác theo công thức độ dài đường trung tuyến ta có

$$OA^2 + OB^2 = 2OH^2 + \frac{AB^2}{2} = 2OH^2 + \frac{2^2}{2} = 2OH^2 + 2$$

$$\Rightarrow \max P = OI + R = 3 + 1 = 4; \min P = |OI - R| = 3 - 1 = 2 \Rightarrow m = 4, n = 2 \Rightarrow S = 64 + 8 = 72.$$

Câu 25: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| > 0$. Tính $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4$.

- A.** 1. **B.** $1 - i$. **C.** -1 . **D.** $1 + i$.

Câu 26: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| > 0$. Tính $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4$.

- A.** 1. **B.** $1 - i$. **C.** -1 . **D.** $1 + i$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z_1 = a + bi, z_2 = a' + b'i$, với $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1| \\ |z_1| = |z_2| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = z_1 \overline{z_1} \\ z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} \\ z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} = z_1 \overline{z_1} \\ z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 &= \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right)^2 - 2 = \left(\frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} + \frac{z_2 \overline{z_1}}{z_1 \overline{z_1}}\right)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}}{z_1 \overline{z_1}}\right)^2 - 2 = \left(\frac{z_1 \overline{z_1}}{z_1 \overline{z_1}}\right)^2 - 2 = -1. \end{aligned}$$

Từ đó:

$$A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4 = \left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right]^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1.$$

Câu 27: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z + 4| + |z - 4| = 10$ và $|z - 6|$ lớn nhất. Tính $S = a + b$.

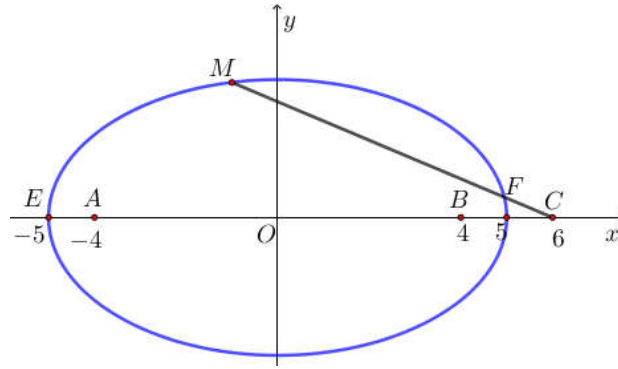
- A.** $S = -3$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = -5$. **D.** $S = 11$.

Câu 28: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z + 4| + |z - 4| = 10$ và $|z - 6|$ lớn nhất. Tính $S = a + b$.

- A.** $S = -3$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = -5$. **D.** $S = 11$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $A(-4; 0)$, $B(4; 0)$, $C(6; 0)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1 = -4$, $z_2 = 4$, $z_3 = 6$.

Khi đó ta có $|z + 4| + |z - 4| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10$ suy ra tập hợp điểm M là (E) nhận A , B là các tiêu điểm, độ dài trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$, tiêu cự $2c = 8 \Rightarrow c = 4$, $b = 3$

$$\Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất của $|z - 6| = MC$, khi đó $MC_{\max} = EF + FC = 11$, khi đó $M \equiv E$ với $E(-5; 0)$, $F(5; 0) \Rightarrow z = -5$. Vậy $S = a + b = -5$.

Câu 29: Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có môđun bằng 2 và phần ảo dương. Tính giá trị biểu thức $S = [5(a + b) + 2]^{2018}$ khi biểu thức $P = |2 + z| + 3|2 - z|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A.** $S = 1$. **B.** $S = 2^{2018}$. **C.** $S = 2^{1009}$. **D.** $S = 0$.

Câu 30: Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có môđun bằng 2 và phần ảo dương. Tính giá trị biểu thức $S = [5(a + b) + 2]^{2018}$ khi biểu thức $P = |2 + z| + 3|2 - z|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A.** $S = 1$. **B.** $S = 2^{2018}$. **C.** $S = 2^{1009}$. **D.** $S = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$z = a + bi; |z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4.$$

$$P = |2 + z| + 3|2 - z| = \sqrt{(a + 2)^2 + b^2} + 3\sqrt{(2 - a)^2 + b^2} = \sqrt{4a + 8} + 3\sqrt{8 - 4a}.$$

$$\sqrt{4a + 8} + 3\sqrt{8 - 4a} \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)(8 + 4a + 8 - 4a)} = 4\sqrt{10}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{\sqrt{4a + 8}}{1} = \frac{\sqrt{8 - 4a}}{3} \Leftrightarrow 9(4a + 8) = 8 - 4a \Leftrightarrow a = -\frac{8}{5}.$$

$$\text{Với } a = -\frac{8}{5} \Rightarrow b = \frac{6}{5} \text{ (do } b > 0).$$

$$\text{Vậy } \min P = 4\sqrt{10} \Leftrightarrow z = -\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i. \text{ Khi đó } S = \left[5\left(-\frac{8}{5} + \frac{6}{5}\right) + 2\right]^{2018} = 0.$$

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $|(z + 2)i + 1| + |(\bar{z} - 2)i - 1| = 10$. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính tổng $S = M + m$.

- A.** $S = 9$. **B.** $S = 8$. **C.** $S = 2\sqrt{21}$. **D.** $S = 2\sqrt{21} - 1$.

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $|(z+2)i+1|+|(\bar{z}-2)i-1|=10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính tổng $S = M + m$.

A. $S = 9$.

B. $S = 8$.

C. $S = 2\sqrt{21}$.

D. $S = 2\sqrt{21} - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Giả sử $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Chia hai vế cho $|i|$ ta được: $|z + 2 - i| + |\bar{z} - 2 + i| = 10$.

Đặt $M(a; b), N(a; -b), A(-2; 1), B(2; -1), C(2; 1) \Rightarrow NB = MC$.

Ta có: $MA + MC = 10 \Rightarrow M \in (E): \frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{21} = 1$.

Elip này có phương trình chính tắc với hệ trục tọa độ $IXY, I(0; 1)$ là trung điểm AC .

Áp dụng công thức đổi trục $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{21} = 1$.

Đặt $\begin{cases} a = 5 \sin t \\ b - 1 = \sqrt{21} \cos t \end{cases}, t \in [0; 2\pi) \Rightarrow |z|^2 = OM^2 = a^2 + b^2 = 25 \sin^2 t + (1 + \sqrt{21} \cos t)^2$
 $= 26 + (-4 \cos^2 t + 2\sqrt{21} \cos t)$.

$|z|_{\max} = 1 + \sqrt{21} \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 + \sqrt{21} \end{cases}$.

$|z|_{\min} = -1 + \sqrt{21} \Leftrightarrow \cos t = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 - \sqrt{21} \end{cases}$.

$\Rightarrow M + m = 2\sqrt{21}$.

Câu 33: Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z+5|=5$ và $|z'+1-3i|=|z'-3-6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-z'|$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\sqrt{10}$.

D. $3\sqrt{10}$.

Câu 34: Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z+5|=5$ và $|z'+1-3i|=|z'-3-6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-z'|$.

A. $\frac{5}{2}$.

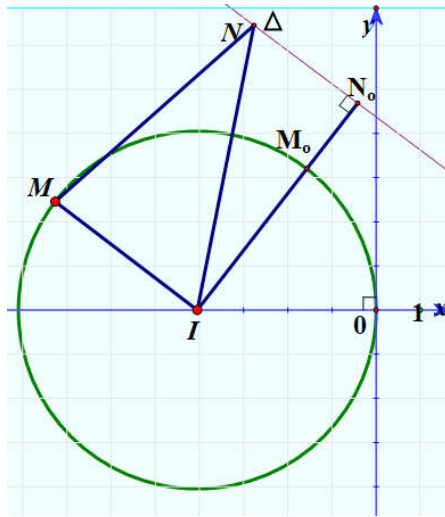
B. $\frac{5}{4}$.

C. $\sqrt{10}$.

D. $3\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$, $N(x'; y')$ là điểm biểu diễn của số phức $z' = x' + y'i$.

$$\text{Ta có } |z + 5| = 5 \Leftrightarrow |x + 5 + yi| = 5 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + y^2 = 5^2.$$

Vậy M thuộc đường tròn $(C): (x + 5)^2 + y^2 = 5^2$

$$|z' + 1 - 3i| = |z' - 3 - 6i| \Leftrightarrow |(x' + 1) + (y' - 3)i| = |(x' - 3) + (y' - 6)i|$$

$$\Leftrightarrow (x' + 1)^2 + (y' - 3)^2 = (x' - 3)^2 + (y' - 6)^2 \Leftrightarrow 8x' + 6y' = 35$$

Vậy N thuộc đường thẳng $\Delta: 8x + 6y = 35$

Dễ thấy đường thẳng Δ không cắt (C) và $|z - z'| = MN$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, cho bộ ba điểm (I, M, N) ta có.

$$MN \geq |IN - IM| = |IN - R| \geq |IN_0 - R| = |d(I, \Delta) - R| = \left| \frac{|8 \cdot (-5) + 6 \cdot 0 - 35|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} - 5 \right| = \frac{5}{2}$$

Dấu bằng đạt tại $M \equiv M_0; N \equiv N_0$.

Câu 35: Cho a là số thực, phương trình $z^2 + (a - 2)z + 2a - 3 = 0$ có 2 nghiệm z_1, z_2 . Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng 120° , tính tổng các giá trị của a .

- A. -6. B. 6. C. -4. D. 4.

Câu 36: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 3z + 3 = 0$. Tính

$$T = (z_1^2 + 2z_1 + 2)(z_2^2 + 2z_2 + 2)(z_3^2 + 2z_3 + 2)(z_4^2 + 2z_4 + 2).$$

- A. $T = 102$. B. $T = 101$. C. $T = 99$. D. $T = 100$.

Câu 37: Cho a là số thực, phương trình $z^2 + (a - 2)z + 2a - 3 = 0$ có 2 nghiệm z_1, z_2 . Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng 120° , tính tổng các giá trị của a .

- A. -6. B. 6. C. -4. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo $\Rightarrow z_1, z_2$ là hai nghiệm phức, không phải số thực của phương trình

$$z^2 + (a-2)z + 2a-3 = 0. \text{ Do đó, ta phải có: } \Delta = a^2 - 12a + 16 < 0 \Leftrightarrow a \in (6-2\sqrt{5}; 6+2\sqrt{5}).$$

$$\text{Khi đó, ta có: } \begin{cases} z_1 = \frac{2-a}{2} - \frac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \\ z_2 = \frac{2-a}{2} + \frac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \end{cases}.$$

$$\Rightarrow OM = ON = |z_1| = |z_2| = \sqrt{2a-3} \text{ và } MN = |z_1 - z_2| = \sqrt{-a^2+12a-16}.$$

$$\text{Tam giác } OMN \text{ cân nên } \widehat{MON} = 120^\circ \Rightarrow \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - 8a + 10}{2(2a-3)} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 - 6a + 7 = 0 \quad a = 3 \pm \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a là 6.

Câu 38: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 3z + 3 = 0$. Tính

$$T = (z_1^2 + 2z_1 + 2)(z_2^2 + 2z_2 + 2)(z_3^2 + 2z_3 + 2)(z_4^2 + 2z_4 + 2).$$

A. $T = 102$.

B. $T = 101$.

C. $T = 99$.

D. $T = 100$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } f(z) = z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 3z + 3 \Rightarrow f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4).$$

$$\text{Do } z_1^2 + 2z_1 + 2 = (z_1 + 1 - i)(z_1 + 1 + i) \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} T &= (z_1^2 + 2z_1 + 2)(z_2^2 + 2z_2 + 2)(z_3^2 + 2z_3 + 2)(z_4^2 + 2z_4 + 2) = f(-1+i)f(-1-i) \\ &= (10-i)(10+i) = 101. \end{aligned}$$

Câu 39: Tìm số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=5$ và biểu thức $T = |z-7-9i| + 2|z-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z = 5 - 2i$.

B. $z = 1 + 6i$.

C. $z = 1 + 6i$ và $z = 5 - 2i$.

D. $z = 4 + 5i$.

-----HẾT-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	D	A	C	B	B	C	B	B	C	B	B	B	C	D	A	D	A	C	D	D	D	B	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	A	D	D	A	D	C	A	A	A	B	A	A	A	D	B	C	C	A	A	C	A	D	C	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 40: Tìm số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=5$ và biểu thức $T=|z-7-9i|+2|z-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z=5-2i$.

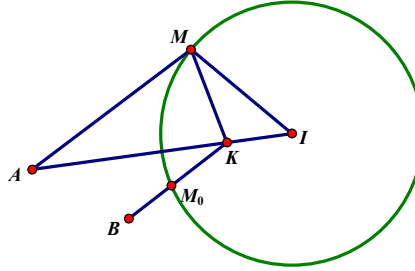
B. $z=1+6i$.

C. $z=1+6i$ và $z=5-2i$.

D. $z=4+5i$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết $|z-1-i|=5$ suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(1;1)$, bán kính $R=5$.

Xét các điểm $A(7;9)$ và $B(0;8)$. Ta thấy $IA=10=2.IM$.

Gọi K là điểm trên tia IA sao cho $IK=\frac{1}{4}IA \Rightarrow K=\left(\frac{5}{2};3\right)$

Do $\frac{IM}{IA}=\frac{IK}{IM}=\frac{1}{2}$, góc $\widehat{MIK}$ chung $\Rightarrow \triangle IKM \sim \triangle IMA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{MK}{MA}=\frac{IK}{IM}=\frac{1}{2} \Rightarrow MA=2.MK$.

Lại có: $T=|z-7-9i|+2|z-8i|=MA+2.MB=2(MK+MB) \geq 2.BK=5\sqrt{5}$

$\Rightarrow T_{\min}=5\sqrt{5} \Leftrightarrow M=BK \cap (C)$, M nằm giữa B và $K \Rightarrow 0 < x_M < \frac{5}{2}$.

Ta có: phương trình đường thẳng BK là: $2x+y-8=0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 2x+y-8=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6 \\ x=5 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow M=(1;6).$$

Vậy $z=1+6i$ là số phức cần tìm.

Câu 41: Cho số thực z_1 và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2-2i|=1$ và $\frac{z_2-z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$. Tính $T=a+b$.

A. $T=4$.

B. $T=4\sqrt{2}$.

C. $T=3\sqrt{2}+1$.

D. $T=\sqrt{2}+3$.

Câu 42: Cho số thực z_1 và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2-2i|=1$ và $\frac{z_2-z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$. Tính $T=a+b$.

A. $T = 4$.

B. $T = 4\sqrt{2}$.

C. $T = 3\sqrt{2} + 1$.

D. $T = \sqrt{2} + 3$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z_1 = m$; $z_2 = x + yi$; $m, x, y \in \mathbb{R}$. Theo đầu bài ta có $\frac{z_2 - z_1}{1+i} = \frac{(x-m+yi)(1-i)}{2}$ là một số thực nên ta có $-x + m + y = 0 \Leftrightarrow m = x - y$.

Do $|z_2 - 2i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 1 \Rightarrow (y-2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 3$ nên ta có:

$$\sqrt{2} \leq |z_1 - z_2| = \sqrt{(x-m)^2 + y^2} = \sqrt{(x-y-x)^2 + y^2} = y\sqrt{2} \leq 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = \min |z_1 - z_2| = \sqrt{2}; b = \max |z_1 - z_2| = 3\sqrt{2} \Rightarrow T = a + b = 4\sqrt{2}.$$

Câu 43: Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1 = w + 3i$; $z_2 = w + 9i$; $z_3 = 2w - 4$, trong đó w là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P = |a + b + c|$.

A. $P = 36$.

B. $P = 208$.

C. $P = 136$.

D. $P = 84$.

Câu 44: Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1 = w + 3i$; $z_2 = w + 9i$; $z_3 = 2w - 4$, trong đó w là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P = |a + b + c|$.

A. $P = 36$.

B. $P = 208$.

C. $P = 136$.

D. $P = 84$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $z_1 + z_2 + z_3 = -a \Rightarrow 4w + 4 + 12i = -a \Leftrightarrow (4x + 4 + a) + (12 + 4y)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4 + a = 0 \\ 12 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4 = -a \\ y = -3 \end{cases}.$$

Từ đó $w = x - 3i \Rightarrow z_1 = x$; $z_2 = x + 6i$; $z_3 = 2x - 4 - 6i$.

Vì phương trình bậc ba $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có một nghiệm thực nên hai nghiệm phức còn lại phải là hai số phức liên hợp, suy ra $x = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 4$.

Như vậy $z_1 = 4$; $z_2 = 4 + 6i$; $z_3 = 4 - 6i$.

Do đó

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -a \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = -b \\ z_1 z_2 z_3 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = -a \\ 84 = -b \\ 208 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 84 \\ c = -208 \end{cases}.$$

Vậy $P = |a + b + c| = |-12 + 84 + (-208)| = 136$.