

ĐỀ:

(Đề thi có 01 trang / 20 điểm)

Bài 1: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

$$VT = \frac{1}{x(y+z)} + \frac{1}{y(z+x)} + \frac{1}{z(x+y)}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức C-S, ta có: } \frac{1}{x(y+z)} + \frac{1}{y(z+x)} + \frac{1}{z(x+y)} \geq \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}{2(xy+yz+zx)}.$$

Theo giả thiết x, y, z là các số thực dương thỏa $xyz = 1$, khi đó:

$$VT \geq \frac{xy+yz+zx}{2} \Leftrightarrow VT \geq \frac{3\sqrt[3]{(xyz)^2}}{2} \Leftrightarrow VT \geq \frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 2: Giải phương trình

$$\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}.$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 5x^2+14x+9 \geq 0 \\ x^2-x-20 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{5x^2+14x+9} = 5\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x-20} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2 = 5\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x+4} \\ v = \sqrt{x^2-4x-5} \end{cases} \text{ với điều kiện: } u \geq 3, v \geq 0.$$

Khi đó phương trình trên trở thành:

$$3u^2 + 2v^2 = 5uv \Leftrightarrow 3u(u-v) - 2v(u-v) = 0 \Leftrightarrow (u-v)(3u-2v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 3u = 2v \end{cases}.$$

$$\text{TH1: } u = v \text{ suy ra: } \sqrt{x+4} = \sqrt{x^2-4x-5} \Leftrightarrow x^2-5x-9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{61}}{2} \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện nhận $x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$.

TH2: $3u = 2v$ suy ra: $3\sqrt{x+4} = 2\sqrt{x^2-4x-5} \Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -\frac{7}{4} \end{cases}$.

Đổi chiều điều kiện nhận $x = 8$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{61}}{2}; 8 \right\}$.

Bài 3: Cho $a \geq 2, b \geq 3, c \geq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$N = \frac{ab\sqrt{c-4} + bc\sqrt{a-2} + ca\sqrt{b-3}}{abc}.$$

Lời giải

Ta có: $N = \frac{\sqrt{c-4}}{c} + \frac{\sqrt{a-2}}{a} + \frac{\sqrt{b-3}}{b} = \frac{2\sqrt{c-4}}{2c} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{a-2}}{\sqrt{2}a} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{b-3}}{\sqrt{3}b}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$N \leq \frac{1}{2c} \frac{4+c-4}{2} + \frac{1}{a\sqrt{2}} \frac{2+c-2}{2} + \frac{1}{b\sqrt{3}} \frac{3+b-3}{2} \Leftrightarrow N \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2 = \sqrt{c-4} \\ \sqrt{2} = \sqrt{a-2} \\ \sqrt{3} = \sqrt{b-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 8 \\ a = 4 \\ b = 6 \end{cases}$.

Bài 4: Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số, trong đó 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số khác có mặt tối đa một lần.

Lời giải

TH1: Xếp số 0 ở mọi vị trí.

Lấy 3 vị trí, xếp số 3 vào ba vị trí có: C_7^3 cách.

Lấy 2 vị trí tiếp theo, xếp số 2 vào hai vị trí có: C_4^2 cách.

Xếp 2 vị trí còn lại có thứ tự, có: A_8^2 cách.

Vậy theo quy tắc nhân có $C_7^3 C_4^2 A_8^2 = 11760$ số.

TH2: Xếp số 0 vị trí đầu.

Lấy 3 vị trí, xếp số 3 vào ba vị trí có: C_6^3 cách.

Lấy 2 vị trí tiếp theo, xếp số 2 vào hai vị trí có: C_3^2 cách.

Xếp 1 vị trí còn lại có thứ tự, có: A_7^1 cách.

Vậy theo quy tắc nhân có $C_6^3 C_3^2 A_7^1 = 420$ số.

Từ trường hợp 1 và trường hợp 2, ta có $11760 - 420 = 11340$ số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 5: Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=1$ và $\frac{\sin A}{m_a} + \frac{\sin B}{m_b} + \frac{\sin C}{m_c} = \sqrt{3}$ (với m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài của các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC). Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải

Xét bài toán: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3}a.m_a$.

Áp dụng công thức trung tuyến, ta có: $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \Leftrightarrow 2m_a = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Suy ra: $2\sqrt{3}a.m_a = a\sqrt{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$2\sqrt{3}a.m_a = a\sqrt{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \leq \frac{3a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}a.m_a \leq a^2 + b^2 + c^2 \text{ (đpcm)}.$$

Theo giả thiết, ta có $R=1$ suy ra $\sin A = \frac{a}{2}, \sin B = \frac{b}{2}, \sin C = \frac{c}{2}$;

$$\text{Khi đó: } \frac{\sin A}{m_a} + \frac{\sin B}{m_b} + \frac{\sin C}{m_c} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{a}{2m_a\sqrt{3}} + \frac{b}{2m_b\sqrt{3}} + \frac{c}{2m_c\sqrt{3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2am_a\sqrt{3}} + \frac{b^2}{2bm_b\sqrt{3}} + \frac{c^2}{2cm_c\sqrt{3}} = 1 (*).$$

$$\text{Áp dụng bài toán chứng minh trên, ta có: } \begin{cases} 2\sqrt{3}a.m_a \leq a^2 + b^2 + c^2 \\ 2\sqrt{3}b.m_b \leq a^2 + b^2 + c^2 \\ 2\sqrt{3}c.m_c \leq a^2 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta hoàn toàn chứng minh được: } \Leftrightarrow \frac{a^2}{2am_a\sqrt{3}} + \frac{b^2}{2bm_b\sqrt{3}} + \frac{c^2}{2cm_c\sqrt{3}} \geq 1$$

$$\text{Thật vậy: } \frac{a^2}{2am_a\sqrt{3}} + \frac{b^2}{2bm_b\sqrt{3}} + \frac{c^2}{2cm_c\sqrt{3}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\frac{a^2}{2am_a\sqrt{3}} + \frac{b^2}{2bm_b\sqrt{3}} + \frac{c^2}{2cm_c\sqrt{3}} \geq 1 (**).$$

Căn cứ vào giả thiết (*) suy ra bất đẳng thức (**) xảy ra dấu bằng, tức là:

$$\begin{cases} 2a^2 = b^2 + c^2 \\ 2b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow a = b = c. \text{ Vậy suy ra tam giác } ABC \text{ đều (đpcm).} \\ 2c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Bài 6: Tìm số có ba chữ số biết rằng số đó bằng tổng giai thừa các chữ số của nó.

Lời giải

Giả sử số cần tìm là $\overline{abc} (a \neq 0)$.

Theo giả thiết, ta có: $100a + 10b + c = a! + b! + c!$.

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} 7! = 5040 > 1000 \\ \overline{abc} < 1000 \end{cases}, \text{ nên } a, b, c < 7.$$

Xét $\max\{a, b, c\} = 6$, suy ra $\max\{a!, b!, c!\} = 720$. Tuy nhiên $\overline{abc} \leq 666$, do đó $a, b, c \leq 5$.

Nếu $a, b, c \leq 4$, suy ra $a! + b! + c! \leq 3.4! = 72 < 100$. Vậy trong ba số a, b, c có ít nhất một số 5.

TH1: Có một số bằng 5, suy ra hai số còn lại nhỏ hơn 5.

Suy ra $a! + b! + c! \leq 5! + 4! + 4! = 168$. Khi đó $a = 1$ suy ra $b = 5$ hoặc $c = 5$.

Xét số cần lập là $\overline{1b5}$ hoặc $\overline{15c}$.

KN1: $\overline{abc} = \overline{1b5}$, trong đó $b \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Suy ra $100 + 10b + 5 = 1! + b! + 5! \Leftrightarrow b! + 16 = 10b$.

Kiểm tra $b \in \{1; 2; 3; 4\}$, ta thấy $b = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

KN2: $\overline{abc} = \overline{15c}$, trong đó $c \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Suy ra $100 + 50 + c = 1! + 5! + c! \Leftrightarrow c! = 29 + c$.

Kiểm tra $c \in \{1; 2; 3; 4\}$, ta thấy không tồn tại c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: Có hai số bằng 5.

Suy ra $5! + 5! + 0! \leq 100a + 10b + c \leq 5! + 5! + 4! \Leftrightarrow 241 \leq \overline{abc} \leq 264$, suy ra $a = 2$.

Thử lại $255 \neq 2! + 5! + 5!$, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH3: Cả ba số bằng 5.

Nhận thấy $555 \neq 3.5!$ nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy số có ba chữ số thỏa mãn điều kiện bài toán là: 145.

----- **HẾT** -----
