

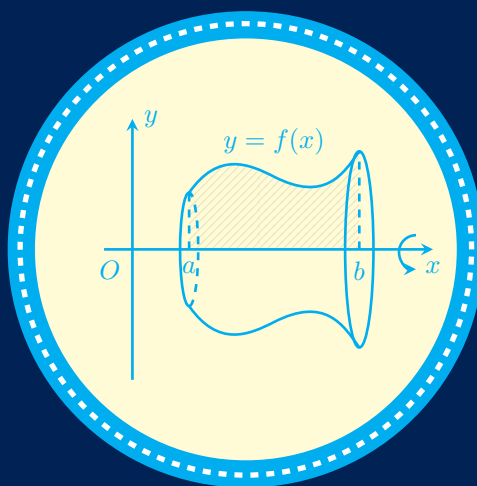
$$f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

NHỮNG CẶP

phương trình hàm

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$



$$f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$$

MỤC LỤC

A	Đề bài	1
B	Lời giải	4

NHỮNG CẶP PHƯƠNG TRÌNH HÀM

A. ĐỀ BÀI

Bài 1.

- ① Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- ② Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, đơn điệu trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- ③ Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in (0; +\infty).$$

- ④ Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn trên đoạn $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- ⑤ Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y, x+y \in [0; 1].$$

Bài 2.

- ① Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- ② Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in [0; 1].$$

- ③ Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in [a; b].$$

- ④ Tìm tất cả hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y > 0.$$

- ⑤ Tìm tất cả các hàm số $f : (A; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in (A; +\infty)$$

Bài 3.

- ① Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- ② Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x), \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Bài 4.

- ① Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Brazil National Olympiad 2006)

- ② Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy, \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

(Trường Đông Toán Học Miền Nam 2019-2020)

Bài 5.

- ① Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Đề nghị thi Olympic 30/04/2011)

- ② Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y, \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

- ③ Tìm các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{N}^*.$$

(Romania National Olympiad 2008, Grade 9)

Bài 6.

- ① Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

- ② Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 7.

- ① Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + f(y)) = [f(x)]^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(IMO 1992)

- ② Cho số nguyên $n \geq 2$. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^n + f(y)) = [f(x)]^n + y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- ③ Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$f(m^2 + f(n)) = f(m)^2 + n, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

- ④ Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = f^2(x) + y, \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Bài 8.

- ① Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Balkan MO 2000, Argentina TST 2005)

- ② Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y, \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Bài 9.

- ① Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Belarus 1997)

- ② Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Bài 10.

- ① Tìm các đơn ánh $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

(Romania National Olympiad 2013)

- ② Tìm tất cả các hàm số $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \forall x, y \in [a, b].$$

- ③ Tìm tất cả các hàm số f xác định trên $[0; 1]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$|x - y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [0; 1].$$

(Romania District Olympiad 2011; Azerbaijan IMO TST 2015)

Bài 11.

- ① Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = n + 1987, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(IMO 1987)

- ② Tìm tất cả các hàm số tăng nghiêm ngặt $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = n + 1994, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(Bài toán T8/202, Toán học và tuổi trẻ tháng 04/1994)

- ③ Tìm tất cả các số nguyên dương b sao cho tồn tại hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = n + b, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài 12.

- ① Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(mn) + f(m + n) = f(m)f(n) + 1, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

(Indonesia Mathematics Olympiad 2008)

- ② Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(m + n) + f(mn) = f(m)f(n) + 1, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

- ③ Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(m + n) + f(m)f(n) = f(mn + 1), \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

B. LỜI GIẢI

1.

- ① Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Trong (1) lấy $y = x$ ta được

$$f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2) lấy $x = 0$ ta được $f(0) = 0$. Từ (1) và (2) và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Trong (1) lấy $y = -x$ và sử dụng $f(0) = 0$ ta được

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Bởi vậy khi $n = -1, -2, \dots$, sử dụng (3) và (4) ta có

$$f(nx) = f(-n(-x)) = -nf(-x) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (3) và (5) suy ra

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Với mọi $n = 1, 2, \dots$, sử dụng (3) ta có

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}x\right) = nf\left(\frac{1}{n}x\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$ và $n > 0$, sử dụng (7) và (6) ta có

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m \cdot \frac{1}{n}f(x) = \frac{m}{n}f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bởi vậy

$$f(rx) = rf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}. \quad (8)$$

Trong (8) lấy $x = 1$ ta được

$$f(r) = rf(1), \forall r \in \mathbb{Q}. \quad (9)$$

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại dãy số hữu tỉ $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$. Vì f liên tục nên

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n f(1) = f(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = f(1)x.$$

Vậy

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số tùy ý)}. \quad (10)$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Ta kết luận: tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng như ở (10).

Nhận xét 1.

- ☑ Hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và thỏa mãn (1) được gọi là hàm cộng tính.
- ☑ Trong bài toán ??, nếu ta thay giả thiết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ bởi hàm số f liên tục tại điểm x_0 thì kết quả trên vẫn đúng. Thật vậy, nếu hàm số f liên tục tại điểm x_0 thì $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = f(x_0)$. Bởi vậy

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow x} f(u) &= \lim_{u-x+x_0 \rightarrow x_0} f((u-x+x_0) + (x-x_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow x_0} f(t + (x-x_0)) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t) + f(x-x_0) \\ &= f(x_0) + f(x-x_0) = f(x_0 + x - x_0) = f(x), \end{aligned}$$

hay f liên tục tại $x \in \mathbb{R}$. Như vậy, nếu hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình hàm Cauchy thì f liên tục trên $\mathbb{R}$.

- ② Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, đơn điệu trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- ☑ Trường hợp 1: f là hàm tăng. Tương tự như bài toán ?? ở trang ?? ta chứng minh được

$$f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{Q}. \quad (2)$$

Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \dots; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x.$$

Vì f là hàm tăng nên kết hợp với (2) ta có

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n) \Rightarrow ku_n \leq f(x) \leq kv_n (\forall n = 1, 2, \dots).$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$kx \leq f(x) \leq kx \Rightarrow f(x) = kx.$$

Vậy $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì). Thử lại thấy thỏa mãn.

- ☑ Trường hợp 2: f là hàm giảm. Tương tự như bài toán ?? ở trang ?? ta chứng minh được

$$f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{Q}. \quad (2)$$

Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \dots; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x.$$

Vì f là hàm giảm nên kết hợp với (2) ta có:

$$f(u_n) \geq f(x) \geq f(v_n) \Rightarrow ku_n \geq f(x) \geq kv_n (\forall n = 1, 2, \dots).$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$kx \geq f(x) \geq kx \Rightarrow f(x) = kx.$$

Vậy $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì). Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận: hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì).

- ③ Giả sử tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (1)$$

Từ (1) cho $x = y$ ta được:

$$f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x), \forall x \in (0; +\infty).$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in (0; +\infty), n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Đặt $c = f(1) > 0$. Với mọi $n = 1, 2, \dots$, ta có:

$$c = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{do (2)}}{=} nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Giả sử $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, khi đó $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $r = \frac{m}{n}$. Ta có:

$$f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{do (2)}}{=} m f\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{do (3)}}{=} \frac{cm}{n} = cr. \quad (4)$$

Từ giả thiết suy ra: $f(x+y) > f(x)$, $\forall x, y \in (0; +\infty)$, do đó f là hàm tăng trên $(0; +\infty)$. Với mọi số thực $x > 0$, khi đó tồn tại hai dãy số hữu tỉ dương (α_n) , (β_n) sao cho:

$$\alpha_n \leq x \leq \beta_n, \forall n = 1, 2, \dots \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n.$$

Do (4) và do f tăng nghiêm ngặt trên $(0; +\infty)$ nên:

$$\begin{aligned} f(\alpha_n) &\leq f(x) \leq f(\beta_n), \forall n = 1, 2, \dots \\ \Rightarrow c\alpha_n &\leq f(x) \leq c\beta_n, \forall n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (5) cho $n \rightarrow +\infty$ và sử dụng nguyên lý kẹp ta được:

$$cx \leq f(x) \leq cx, \forall x > 0.$$

Vậy $f(x) = cx$, $\forall x > 0$. Thử lại thấy thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

④ Giả sử tồn tại hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn trên đoạn $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Do f bị chặn trên đoạn $[a; b]$ nên $\exists M \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) < M, \forall x \in [a; b].$$

Ta sẽ chứng minh hàm số f cũng bị chặn trên đoạn $[0; b-a]$.

Thật vậy, với mọi $x \in [0; b-a]$ thì $x+a \in [a; b]$. Ta có

$$f(x+a) = f(x) + f(a) \Rightarrow f(x) = f(x+a) - f(a) \Rightarrow -2M < f(x) < 2M.$$

Vậy $|f(x)| < 2M$, $\forall x \in [0; b-a]$, hay f cũng bị chặn trên đoạn $[0; b-a]$.

Đặt $b-a = d > 0$, khi đó f bị chặn trên $[0; d]$. Đặt $c = \frac{f(d)}{d}$, $g(x) = f(x) - cx$. Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ thì

$$g(x+y) = f(x+y) - c(x+y) = f(x) - cx + f(y) - cy = g(x) + g(y).$$

Hơn nữa $g(d) = f(d) - cd = 0$. Vậy $g(x+d) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hay g là hàm tuần hoàn, hơn nữa g cũng bị chặn trên $[0; d]$, kết hợp với tính tuần hoàn của g trên $\mathbb{R}$, suy ra g bị chặn trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\exists x_0 \in \mathbb{R} : g(x_0) \neq 0$. Khi đó với số tự nhiên n thì $g(nx_0) = ng(x_0)$, suy ra

$$|g(nx_0)| = n |g(x_0)|, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Do $g(x_0) \neq 0$ nên từ (2) ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} |g(nx_0)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |g(x_0)| n = +\infty$, do đó $|g(nx_0)|$ lớn tùy ý (chỉ cần chọn n đủ lớn), trái với điều kiện bị chặn của hàm g . Vậy $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

⑤ Giả sử tồn tại hàm số liên tục $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y, x + y \in [0; 1]. \quad (1)$$

Từ (1) cho $x = y = 0$, ta được $f(0) = 0$. Đặt $f(1) = c$. Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, khi đó $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, sử dụng (1) nhiều lần, ta được:

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{\text{tổng có } n \text{ số hạng}}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c}{n}, \forall n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Với $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$ và $m \leq n$ ta có: $0 \leq \frac{1}{n}, \frac{m}{n} \leq 1$. Do đó:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{\text{tổng có } m \text{ số hạng}}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{\text{do (2)}}{=} m \cdot \frac{c}{n} = c \cdot \frac{m}{n}. \quad (3)$$

Như vậy, với mọi số hữu tỉ $r \in [0; 1]$, sử dụng (3), ta được: $f(r) = cr$. (4)

Giả sử $x \in [0; 1]$, khi đó tồn tại dãy số hữu tỉ $(r_n) \subset [0; 1]$ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$. Vì f là hàm số liên tục trên $[0; 1]$ nên:

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) \stackrel{\text{do (4)}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} cr_n = c \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = cx.$$

Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x) = cx, \forall x \in [0; 1]$ (c là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

2.

① Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Trong (1) lấy $y = 0$ ta được

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + a}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } a = f(0)). \quad (2)$$

Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} \frac{f(x+y) + a}{2} &= \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(x+y) + a &= f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Xét hàm số $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ như sau $g(x) = f(x) - a, \forall x \in \mathbb{R}$. Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên g liên tục trên $\mathbb{R}$. Thay vào (3) ta được

$$g(x+y) + 2a = g(x) + a + g(y) + a, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (4) và sử dụng kết quả bài toán ?? ở trang ??, ta được:

$$g(x) \equiv bx \Rightarrow f(x) \equiv bx + a.$$

Thử lại thấy hàm số

$$f(x) = bx + a, \forall x \in \mathbb{R} \quad (a, b \text{ là các hằng số})$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài, vậy đó là đáp số cần tìm.

- ② Giả sử tồn tại hàm số liên tục $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in [0; 1]. \quad (1)$$

Trong (1) lấy $y = 0$ ta được:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + a}{2}, \forall x \in [0; 1] \quad (\text{với } a = f(0)). \quad (2)$$

Từ (2) và (1) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+y) + a}{2} &= \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow f(x+y) + a &= f(x) + f(y), \forall x, y \in [0; 1]. \end{aligned} \quad (3)$$

Xét hàm số $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ như sau: $g(x) = f(x) - a, \forall x \in \mathbb{R}$. Vì f liên tục trên $[0; 1]$ nên g liên tục trên $[0; 1]$. Thay vào (3) ta được:

$$\begin{aligned} g(x+y) + 2a &= g(x) + a + g(y) + a, \forall x, y \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow g(x+y) &= g(x) + g(y), \forall x, y \in [0; 1]. \end{aligned} \quad (4)$$

Do $\{(x; y) | x, y, x+y \in [0; 1]\} \subset \{(x; y) | x, y \in [0; 1]\}$ nên từ (4), sử dụng kết quả bài toán ?? ở trang ??, ta được:

$$g(x) \equiv bx \Rightarrow f(x) \equiv bx + a.$$

Thử lại thấy hàm số

$$f(x) = bx + a, \forall x \in [0; 1] \quad (a, b \text{ là các hằng số})$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài, vậy đó là đáp số cần tìm.

- ③ Giả sử tồn tại hàm số liên tục $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in [a; b]. \quad (1)$$

Xét hàm số $\varphi : [0; 1] \rightarrow [a; b]$ như sau:

$$\varphi(t) = (1-t)a + tb, \forall t \in [0; 1].$$

Khi đó: $g = f \circ \varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$. Với mọi x, y thuộc đoạn $[0; 1]$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{g(x) + g(y)}{2} &= \frac{(1-x)a + xb + (1-y)a + yb}{2} \\ &= \left(1 - \frac{x+y}{2}\right)a + \frac{x+y}{2}b = g\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (2), sử dụng bài toán ?? ở trang ??, ta được:

$$g(x) = mx + n, \forall x \in [0; 1] \quad (m, n \text{ là hằng số}).$$

Theo bài toán ?? (ở trang ??), ta có φ là song ánh và:

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{t-a}{b-a}, \forall t \in [a; b].$$

Vậy $g = f \circ \varphi \Rightarrow g \circ \varphi^{-1}$. Với mọi $x \in [a; b]$, ta có:

$$f(x) = g(\varphi^{-1}(x)) = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = m\frac{x-a}{b-a} + n = Ax + B,$$

với $A = \frac{m}{b-a}$, $B = n - \frac{ma}{b-a}$ là những hằng số.

Thử lại thấy hàm số $f(x) = Ax + B, \forall x \in [a; b]$ (với A, B là những hằng số) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

④ Giả sử tồn tại hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y > 0. \quad (1)$$

Với mọi $x > 0, y > 0, z > 0$, theo (1) ta có

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y+z}{2}\right) &= \frac{f(x) + f(y+z)}{2} = \frac{f(x) + \frac{f(2y) + f(2z)}{2}}{2} \\ &= \frac{2f(x) + f(2y) + f(2z)}{4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (2), ta đảo vị trí của x và y thì về trái không đổi, trong khi đó về phải thay đổi, nên ta thu được $2f(x) + f(2y) = 2f(y) + f(2x)$, hay

$$f(2x) - 2f(x) = f(2y) - 2f(y), \quad \forall x, y > 0.$$

Suy ra, tồn tại hằng số c sao cho $f(2x) - 2f(x) = c$ với mọi $x > 0$. Từ đó, phương trình hàm (1) đã cho có thể được viết lại thành

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + c, \quad \forall x, y > 0$$

hay

$$[f(x+y) + c] = [f(x) + c] + [f(y) + c], \quad \forall x, y > 0.$$

Đặt $g(x) = f(x) + c$ thì ta có g cộng tính. Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$g(nx) = ng(x), \quad \forall x > 0$$

với mọi n nguyên dương. Do $g(nx) = f(nx) + c > c$ nên

$$g(x) > \frac{c}{n}, \forall x > 0, n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Từ (3) cho $n \rightarrow +\infty$, ta được $g(x) \geq 0$ với mọi $x > 0$. Đến đây, tương tự như bài toán ?? (ở trang ??), ta thu được kết quả $g(x) = kx$ với mọi $x > 0$ (k là hằng số không âm). Suy ra

$$f(x) = kx - c, \forall x > 0. \quad (4)$$

Do $f(x) > 0$ với mọi x nên từ (4) suy ra $c \leq 0$ và k, c không cùng bằng 0. Sau khi thử lại, ta hết luận: hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = kx - c, \forall x > 0,$$

với k là hằng số không âm, c là hằng số không dương, k và c không cùng bằng 0.

- ⑤ Giả sử tồn tại hàm số $f : (A; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in (A; +\infty).$$

Đặt $g(x) = f(x + A)$. Khi đó $g : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ và

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2} + A\right) = f\left(\frac{(x+A) + (y+A)}{2}\right) \\ &= \frac{f(x+A) + f(y+A)}{2} \\ &= \frac{g(x) + g(y)}{2}, \forall x, y \in (0; +\infty). \end{aligned}$$

Vậy áp dụng bài toán ?? ta được

$$f(x + A) = ax + c, \forall x \in (0; +\infty) \text{ (với } a \geq 0, c \geq 0, a + c > 0)$$

Từ đây thay x bởi $x - A$ ta được

$$f(x) = ax + c - aA, \forall x \in (A; +\infty).$$

Đặt $b = c - aA$, khi đó $aA + b \geq 0, a + b + aA > 0$.

3.

- ① Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Trong (1) thay $x = 1$ ta được: $f(f(y) + 1) = y + f(1), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$

Trong (2) thay y bởi $-1 - f(1)$ ta được $f(f(-1 - f(1)) + 1) = -1$. Đặt

$$1 + f(-1 - f(1)) = a, f(0) = b.$$

Ta có $f(xf(a) + x) = f(0) = b$. Hay

$$b = f(xf(a) + x) = ax + f(x) \Rightarrow f(x) = -ax + b.$$

Thay biểu thức của $f(x)$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} & -a(xf(y) + x) + b = xy - ax + b, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & -a[x(-ay + b) + x] + b = xy - ax + b, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & a^2xy - abx - ax + b = xy - ax + b, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bằng cách đồng nhất các hệ số ta được

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + a = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ a = -1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Do $f(xf(y) + x) = f(x(f(y) + 1))$ nên để có $f(0)$ ta cần chọn y để $f(y) = -1$. Trong (1) đã có $xy + f(x)$, vậy sẽ chọn x sao cho $xy + f(x) = -1$, chẳng hạn chọn $x = 1$ ta được $y = -1 - f(1)$. Từ đó $f(f(-1 - f(1)) + 1) = -1$, số y cần tìm ở trên là $f(-1 - f(1)) + 1$ và ta có lời giải đã trình bày. Nếu chọn x là số khác, ví dụ chọn $x = 2$, vẫn với ý tưởng trên ta có lời giải khác:

☑ Thay $x = 2, y = \frac{-1 - f(2)}{2}$ ta có $f\left(2f\left(\frac{-1 - f(2)}{2}\right) + 2\right) = -1$.

☑ Đặt $2f\left(\frac{-1 - f(2)}{2}\right) + 2 = a$. Thay $y = a$ vào giả thiết ta có:

$$f(0) = f(xf(a) + x) = ax + f(x) \Leftrightarrow f(x) = f(0) - ax = b - ax.$$

② Giả sử tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x), \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (1)$$

Từ (1) cho $y = 1$ ta được

$$f(f(y) + 1) = y + f(1), \forall y \in (0; +\infty). \quad (2)$$

Từ (2) suy ra, với mỗi $t > f(1)$, sẽ tồn tại $x > 0$ để $f(x) = t$ (một tính chất không đủ tốt bằng toàn ánh, nhưng đủ giúp chúng ta hoàn thành lời giải bài toán này). (*)

Từ (2) thay y bởi $f(y) + 1$ ta được

$$f(f(f(y) + 1) + 1) = f(y) + 1 + f(1), \forall y \in (0; +\infty). \quad (3)$$

Do (2) nên (3) trở thành

$$f(y + f(1) + 1) = f(y) + 1 + f(1), \forall y \in (0; +\infty).$$

Đặt $c = 1 + f(1)$ ta được

$$\begin{aligned} & f(x + c) = f(x) + c, \forall x \in (0; +\infty) \\ \Rightarrow & f(x + nc) = f(x) + nc, \forall x \in (0; +\infty), n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (1) thay y bởi $y + c$ và sử dụng (4) ta được

$$f(x(f(y) + c) + x) = x(y + c) + f(x), \forall x, y \in (0; +\infty); n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f((xf(y) + x) + cx) = xy + f(x) + cx, \forall x, y \in (0; +\infty); n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Từ (5) và (1) suy ra

$$f((xf(y) + x) + cx) = f(xf(y) + x) + cx, \forall x, y \in (0; +\infty); n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Giả sử $x > 0$ và $z > 0$. Do nhận xét (*) nên ta chọn số tự nhiên n đủ lớn để tồn tại $y > 0$ sao cho

$$xf(y) + x = z + nc$$

(chỉ cần chọn số tự nhiên n đủ lớn để $\frac{z + nc}{x + 1} > f(1)$ là đủ). Với $y > 0$ vừa được chọn ở trên thì sử dụng (6) ta được

$$\begin{aligned} f((z + nc) + cx) &= f(z + nc) + cx, \forall x, z \in (0; +\infty); n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow f(z + cx) + nc &= f(z) + nc + cx, \forall x, z \in (0; +\infty); n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow f(z + cx) &= f(z) + cx, \forall x, z \in (0; +\infty). \end{aligned}$$

Từ đây thay x bởi $\frac{x}{c}$ ta được

$$f(z + x) = f(z) + x, \forall x, z \in (0; +\infty). \quad (7)$$

Từ (7) đổi vai trò của x và z ta được

$$f(x + z) = f(x) + z, \forall x, z \in (0; +\infty). \quad (8)$$

Từ (7) và (8) ta thu được

$$\begin{aligned} f(z) + x &= f(x) + z, \forall x, z \in (0; +\infty) \\ \Rightarrow f(x) - x &= f(z) - z, \forall x, z \in (0; +\infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Từ (9) cho $z = 1$ và đặt $k = f(1) - 1$ ta được

$$\begin{aligned} f(x) - x &= k, \forall x \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow f(x) &= x + k, \forall x \in (0; +\infty) \end{aligned}$$

Thay trở lại vào (1) ta được $k = 0$. Như vậy

$$f(x) = x, \forall x \in (0; +\infty).$$

4.

① Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u , thay y bởi v vào (1).

$$P(1, x - 2f(1)) \Rightarrow f(f(x - 2f(1)) + f(1)) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra f là toàn ánh. Nếu $f(a) = f(b) = c$ thì

$$\begin{cases} P(1, a) \Rightarrow f(c + f(1)) = 2f(1) + a \\ P(1, b) \Rightarrow f(c + f(1)) = 2f(1) + b \end{cases} \Rightarrow a = b.$$

Vậy f là đơn ánh, suy ra f là song ánh. Tồn tại u để $f(u) = 0$. Đặt $f(0) = a$.

$$P(u, 0) \Rightarrow f(au) = 0 = f(u) \Rightarrow au = u.$$

Nếu $u = 0$ thì $a = f(0) = f(u) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Do đó

$$P(x, 0) \Rightarrow f(f(x)) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Dẫn đến $f(y) = 2y, \forall y \in T$, với T là tập giá trị của hàm f , mà f là song ánh nên ta có $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy không thỏa mãn. Vậy $u \neq 0$, suy ra $a = 1$.

$$P(u, u) \Rightarrow f(0) = u^2 \Rightarrow 1 = u^2 \Rightarrow u \in \{-1, 1\}.$$

Nếu $u = 1$ thì $P(0, -1) \Rightarrow 0 = 2$, vô lí. Vì thế $u = -1$, dẫn tới $f(-1) = 0$ và $f(0) = 1$. Ta có $P(0, -1) \Rightarrow f(1) = 2$.

$$P(-1, x) \Rightarrow f(-f(x)) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$P(x, -f(1)) \Rightarrow f(f(x) - x) = 2[f(x) - x], \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, do f là song ánh nên tồn tại z sao cho $f(z) = f(x) - x$.

Từ (2) suy ra $f(f(z)) = 2f(z)$. Từ đó

$$P(z, -1) \Rightarrow f(f(z)) = 2f(z) - z \Rightarrow z = 0 \Rightarrow f(z) = 1 \Rightarrow f(x) = x + 1.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

② Giả sử tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy, \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (1)$$

Đặt $f(1) = a$. Từ (1) cho $x = 1$ ta được

$$f(f(y) + a) = 2a + y, \forall y \in (0; +\infty). \quad (2)$$

Với mỗi $t > 2a$, theo (2) suy ra tồn tại $x > 0$ sao cho $f(x) = t$. Từ (1) thay x bởi 1 và thay y bởi $f(x) + a$ rồi sử dụng (2) ta được

$$f(3a + x) = 3a + f(x), \forall x \in (0; +\infty) \quad (3)$$

$$\Rightarrow f(3na + x) = 3na + f(x), \forall x \in (0; +\infty), n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Với $x > 0, y > 0$ ta chọn số nguyên dương n đủ lớn sao cho

$$n > \frac{2ax + f(x) - y}{3a}.$$

Khi đó $\frac{y + 3na - f(x)}{x} > 2a$. Vậy theo trên, tồn tại $v > 0$ sao cho

$$f(v) = \frac{y + 3na - f(x)}{x}.$$

Như vậy $f(x) + xf(v) = y + 3na$.

Từ (1) cho $y = v$ và sử dụng (5) ta được

$$f(y + 3na) = 2f(x) + xv. \quad (5)$$

Từ (1) cho $y = v + 3a$ và sử dụng (3) ta được

$$\begin{aligned}f(x(3a + f(v)) + f(x)) &= 2f(x) + x(v + 3a) \\ \Rightarrow f(xf(v) + f(x) + 3ax) &= 2f(x) + xv + 3ax.\end{aligned}$$

Từ đây lại sử dụng (5) ta được

$$f(y + 3na + 3ax) = 2f(x) + xv + 3ax.$$

Như vậy

$$f(y + 3na + 3ax) = f(y + 3na) + 3ax, \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (6)$$

Từ (6) và (4) ta có

$$\begin{aligned}f(y + 3ax) + 3na &= f(y) + 3na + 3ax, \forall x, y \in (0; +\infty) \\ \Rightarrow f(y + 3ax) &= f(y) + 3ax, \forall x, y \in (0; +\infty) \\ \Rightarrow f(y + x) &= f(y) + x, \forall x, y \in (0; +\infty).\end{aligned} \quad (7)$$

Từ (7) đổi vai trò của x và y ta được

$$f(x + y) = f(x) + y, \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (8)$$

Từ (7) và (8) ta thu được

$$\begin{aligned}f(y) + x &= f(x) + y, \forall x, y \in (0; +\infty) \\ \Rightarrow f(x) - x &= f(y) - y, \forall x, y \in (0; +\infty).\end{aligned} \quad (9)$$

Từ (9) cho $y = 1$ và đặt $k = f(1) - 1$ ta được

$$\begin{aligned}f(x) - x &= k, \forall x \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow f(x) &= x + k, \forall x \in (0; +\infty)\end{aligned}$$

Thay trở lại vào (1) ta được $k = 1$. Như vậy

$$f(x) = x + k, \forall x \in (0; +\infty).$$

Lưu ý. Sau khi thu được (4), ta có thể cải tiến một chút cho ngắn gọn và dễ hiểu hơn như sau: Trong phương trình (1), thay y bởi $y + 3a$ ta được

$$\begin{aligned}f(x(f(y) + 3a) + f(x)) &= 2f(x) + x(y + 3a), \forall x, y > 0 \\ \Rightarrow f(xf(y) + f(x) + 3ax) &= 2f(x) + xy + 3ax, \forall x, y > 0\end{aligned} \quad (10)$$

Từ (10) và (1) suy ra

$$f(xf(y) + f(x) + 3ax) = f(xf(y) + f(x)) + 3ax, \forall x, y > 0. \quad (11)$$

Giả sử $x > 0$ và $z > 0$, lúc này chọn $n \in \mathbb{N}$ đủ lớn để tồn tại $y > 0$ sao cho

$$xf(y) + f(x) = z + 3na$$

(chỉ cần chọn số tự nhiên n đủ lớn sao cho $\frac{z + 3na - f(x)}{x} > 2a$ là được). Thay y vừa có vào phương trình (11), ta thu được

$$f(z + 3na + 3ax) = f(z + 3na) + 3ax, \forall x, z > 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(z + 3ax) + 3na &= f(z) + 3na + 3ax, \forall x, z > 0 \\ \Rightarrow f(z + 3ax) &= f(z) + 3ax, \forall x, z > 0 \\ \Rightarrow f(z + x) &= f(z) + x, \forall x, z > 0.\end{aligned}$$

Phương trình cuối cùng này chính là phương trình (7).

5.

① Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Đặt $f(0) = a$. Trong (1) cho $y = 0$ ta được

$$f(x^2 + a) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Trong (2) cho $x = 0$ ta được $f(a) = 0$. Trong (1) cho $x = 0$ ta được

$$f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2$. Vậy f là một đơn ánh trên $\mathbb{R}$. Trong (2) cho $x = a$ ta được

$$f(a^2 + a) = af(a) = af(f(0)) = a.0 = 0 = f(a).$$

Do đó từ $f(a) = f(a^2 + a)$ và f là đơn ánh suy ra $a = a^2 + a \Leftrightarrow a = 0$. Vậy $f(0) = 0$. Trong (1) cho $y = 0$ ta được $f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$f(x^2) = xf(x) = f(x).f(f(x)) = f(f(x)^2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f là đơn ánh nên

$$x^2 = [f(x)]^2 \Leftrightarrow [f(x) - x][f(x) + x] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ f(x) = -x. \end{cases} \quad (3)$$

Ta dễ dàng kiểm tra được $f(x) = x$ và $f(x) = -x$ thỏa mãn (1). Ta sẽ chứng minh rằng ngoài ra không còn nghiệm nào khác. Giả sử $f(x)$ là một nghiệm khác với hai nghiệm trên, nghĩa là tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) \neq a$ và tồn tại $b \neq 0$ sao cho $f(b) \neq -b$. Từ (3) suy ra $f(a) = -a$ và $f(b) = b$. Bởi vậy từ

$$f(a^2 + f(b)) = af(a) + b \Rightarrow f(a^2 + b) = b - a^2.$$

Ta có $f(a^2 + b) = a^2 + b$ hoặc $f(a^2 + b) = -a^2 - b$. Nếu $f(a^2 + b) = a^2 + b$ thì

$$a^2 + b = b - a^2 \Leftrightarrow a = 0 \text{ (trái với } a \neq 0 \text{)}.$$

Nếu $f(a^2 + b) = -a^2 - b$ thì $-a^2 - b = b - a^2 \Leftrightarrow b = 0$ (trái với $b \neq 0$). Vậy chỉ có khả năng

$$\begin{cases} a^2 + b = 0 \\ b - a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a^2 = 0 \\ b = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0, \end{cases}$$

điều này cũng mâu thuẫn với $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Đến đây ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cách khác (ngắn gọn hơn). Từ (3) suy ra $f(1) = 1$ hoặc $f(1) = -1$. Nếu $f(1) = 1$ thì thay $x = 1$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} f(1 + f(y)) &= 1 + y \Rightarrow f^2(1 + f(y)) = (1 + y)^2 \\ \Rightarrow (1 + f(y))^2 &= (1 + y)^2 \Rightarrow 2f(y) + y^2 = 2y + y^2 \Rightarrow f(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) \equiv x$. Thử lại thấy thỏa mãn (1). Còn nếu $f(1) = -1$ thì thay $x = 1$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} f(1 + f(y)) &= -1 + y \Rightarrow f^2(1 + f(y)) = (y - 1)^2 \\ \Rightarrow (1 + f(y))^2 &= (y - 1)^2 \Rightarrow 2f(y) + y^2 = y^2 - 2y \Rightarrow f(y) = -y, \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn (1). Đến đây ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý 1. Từ (3) chưa thể kết luận về biểu thức của hàm số. Bạn đọc lưu ý rằng (3) chỉ khẳng định rằng với $x \in \mathbb{R}$ thì giá trị của hàm số tại điểm x là x hoặc $-x$, chẳng hạn hàm $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn (3).

- ② Giả sử tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (1)$$

Từ (1) cho $x = 1$ ta được

$$f(1 + f(y)) = f(1) + y, \quad \forall y \in (0; +\infty)$$

Từ đây suy ra f là đơn ánh và với mỗi $t > f(1)$, tồn tại $x > 0$ sao cho $f(x) = t$. Giả sử $a > 0, u > 0$. Từ (1) cho $y = a$ ta được

$$f(x^2 + b) = xf(x) + a, \quad \forall x \in (0; +\infty) \text{ (với } b = f(a)).$$

Từ (1) cho $y = u$ ta được

$$\begin{aligned} f(u^2 + f(y)) &= uf(u) + y, \quad \forall y \in (0; +\infty) \\ \Rightarrow f(f(y) + c) &= y + d, \quad \forall y \in (0; +\infty) \text{ (với } c = u^2, d = uf(u)). \end{aligned}$$

Như vậy (1) trở thành

$$f(x^2 + f(y)) = f(x^2 + b) - a + [f(f(y) + c) - d], \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Từ đây, thay x bởi $\sqrt{x}$ ta được

$$\begin{aligned} f(x + f(y)) &= f(x + b) - a + [f(f(y) + c) - d], \quad \forall x, y \in (0; +\infty) \\ \Rightarrow f(x + z) &= f(x + b) - a + [f(z + c) - d], \quad \forall x > 0, z > f(1). \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (2), đặt $a + d = D, M = f(1)$ ta được

$$f(x + y) = f(x + b) + f(y + c) - D, \quad \forall x > 0, y > M. \quad (3)$$

Từ (3) ta suy ra

$$\begin{aligned} f((x+b) + (y+c) - b - c) &= f(x+b) + f(y+c) - D, \forall x, y \in (M; +\infty) \\ \Rightarrow f(x+y-b-c) &= f(x) + f(y) - D, \forall x, y > M+b+c. \end{aligned} \quad (4)$$

Giả sử $x > M+b+c$ và $y > M+b+c$, khi đó

$$f(x+y-b-c) = f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} - b - c\right) \stackrel{(4)}{=} f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) - D,$$

kết hợp với (4) ta được

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y).$$

$$\text{Như vậy } f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y > M+b+c. \quad (5)$$

Từ (5) sử dụng sử dụng bài toán 2 ở trang 1 ta có

$$f(x) = kx + \ell, \forall x \in (M+c+d; +\infty) \quad (6)$$

với k, ℓ là những hằng số, $k \geq 0$. Bây giờ ta sẽ tìm k và ℓ . Do f là đơn ánh nên f không thể là hàm hằng, dẫn tới $k > 0$. Giả sử x và y đủ lớn, khi đó từ (6) và (1) ta có

$$k(x^2 + ky + \ell) + \ell = x(kx + \ell) + y, \quad (7)$$

Do (7) đúng với mọi x và y đủ lớn nên ta được phép xem nó như hai đa thức hai biến bằng nhau, từ đó đồng nhất hệ số của y ta được $k = 1$, đồng nhất hệ số của x ta được $\ell = 0$. Vậy $f(x) = x$ với x đủ lớn. Với x đủ lớn và $y > 0$, ta cố định x và sử dụng (1) ta được

$$x^2 + f(y) = x^2 + y \Rightarrow f(y) = y.$$

Vậy $f(x) = x, \forall x > 0$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

③ Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Từ (1) lấy $x = 1, y = 1$, ta được $f(1 + f(1)) = f(1) + 1$. Đặt $c = 1 + f(1)$, khi đó $f(c) = c$. Từ (1) lấy $x = 1$, ta được

$$f(1 + f(y)) = f(1) + y, \forall y \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Từ (2) thay y bởi $f(y) + 1$ ta được

$$\begin{aligned} f(1 + f(1) + y) &= f(1) + f(y) + 1, \forall y \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow f(y + c) &= f(y) + c, \forall y \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Giả sử $f(y + kc) = f(y) + kc, \forall y \in \mathbb{N}^* (k \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(y + (k+1)c) &= f(y + c + kc) = f(y + c) + kc = f(y) + c + kc \\ &= f(y) + (k+1)c, \forall y \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra

$$f(x + kc) = f(x) + kc, \forall x \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Từ (3) lấy $x = c$, ta được

$$\begin{aligned} f((k+1)c) &= f(c) + kc, \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow f((k+1)c) &= (k+1)c, \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Suy ra $f(kc) = kc, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Từ (1) cho $y = c$, ta được

$$\begin{aligned} f(x^2 + c) &= xf(x) + c, \forall x \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow f(x^2) + c &= xf(x) + c, \forall x \in \mathbb{N}^* \text{ (do sử dụng (3)).} \end{aligned}$$

Như vậy $f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{N}^*$. Từ đây thay x bởi $c+1$, ta được

$$f(c^2 + 2c + 1) = (c+1)f(c+1) \Rightarrow f(c^2 + 1) + 2c = (c+1)[f(1) + c]. \quad (4)$$

Theo (3) thì $f(c^2 + 1) = f(1 + c.c) = f(1) + c^2$. Thay vào (4), ta được

$$\begin{aligned} f(1) + c^2 + 2c &= (c+1)[f(1) + c] \\ \Rightarrow f(1) + c^2 + 2c &= cf(1) + c^2 + f(1) + c \Rightarrow c = cf(1). \end{aligned}$$

Mà $c \in \mathbb{N}^*$ nên suy ra $f(1) = 1$ và $c = 2$. Do đó theo (3) thì

$$f(x + 2) = f(x) + 2, \forall x \in \mathbb{N}^*. \quad (5)$$

Từ $f(1) = 1, f(2) = 2$ và (5), bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*. \quad (6)$$

Thử lại thấy rằng hàm số xác định bởi (6) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

6.

① Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (1). Để thấy $f(x) \equiv 0$ là nghiệm hàm của bài toán. Tiếp theo giả sử $f(x) \not\equiv 0$, ta sẽ chứng minh $f(x) \equiv x$. Ta có

$$P(x, 0) \Rightarrow xf(0) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra $f(0) = 0$. Nếu $f(1) \neq 1$ thì $P\left(1, \frac{1}{1-f(1)}\right) \Rightarrow f(1) = 0$, mâu thuẫn. Do đó $f(1) = 1$.

$$P(1, y) \Rightarrow f(1 + y) = 1 + f(y), \forall y \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Do $f(0) = 0, f(1) = 1$ nên từ (2), bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được:

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

② Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Để thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tiếp theo xét $f(x) \not\equiv 0$. Từ (1) cho $y = 0$ và $x = 1$ được $f(0) = 0$. Nếu $f(x) = 0$ thì $xf(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, suy ra $x = 0$. Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Từ (1) cho $x = 1$ được

$$f(1 + yf(1)) = f(1) + f(y), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Nếu $f(1) \neq 1$ thì thay $y = \frac{1}{1 - f(1)}$ vào (2) được

$$f\left(1 + \frac{f(1)}{1 - f(1)}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{1 - f(1)}\right) \Leftrightarrow f(1) = 0 \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Vậy $f(1) = 1$, do đó (2) trở thành

$$f(y + 1) = f(y) + 1, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3) ta chứng minh được

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Với $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(n + (x - 1)n) = f(n + (x - 1)f(n)) \stackrel{\text{do (1)}}{=} f(n) + nf(x - 1) \\ &= n + nf(x - 1) \stackrel{\text{do (3)}}{=} n + n[f(x) - 1] = nf(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Nếu $a = -b$ thì

$$f(a) = f(-1b) \stackrel{\text{do (5)}}{=} -1f(b) = -f(b) \Rightarrow f(a) + f(b) = 0 = f(0) = f(a + b).$$

Nếu $a \neq -b$ thì $a + b \neq 0$ và $f\left(\frac{a + b}{2}\right) \neq 0$. Vì thế

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2.f\left(\frac{a + b}{2}\right)}f\left(\frac{a + b}{2}\right)\right) = f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{a - b}{2}f\left(\frac{a - b}{2.f\left(\frac{a + b}{2}\right)}\right) \\ f(b) &= f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2.f\left(\frac{a + b}{2}\right)}f\left(\frac{a + b}{2}\right)\right) = f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{a - b}{2}f\left(\frac{b - a}{2.f\left(\frac{a + b}{2}\right)}\right) \end{aligned}$$

Cộng lại ta được $f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a + b}{2}\right) \stackrel{\text{do (5)}}{=} f(a + b)$. Tóm lại:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Do (6) nên (1) trở thành $f(x) + f(yf(x)) = f(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, hay

$$f(yf(x)) = xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Từ (7) lấy $y = 1$ được $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra f là song ánh. Do đó, với mọi $z \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = z$. Sử dụng (7) cho ta

$$f(yz) = f(yf(x)) = xf(y) = f(f(x))f(y) = f(z)f(y), \forall y, z \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Từ (6) và (8), sử dụng bài toán ?? ở trang ?? ta được $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại đúng. Vậy có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

7.

① Bài toán này chỉ là một trường hợp riêng của bài toán ngay phía sau.

② Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^n + f(y)) = [f(x)]^n + y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Cách 1. Đặt $f(0) = a$. Trong (1) cho $x = 0$ được: $f(f(y)) = y + a^n, \forall y \in \mathbb{R}$.
Sử dụng (1) và (2), ta được:

$$f(f(x^n + f(f(y)))) = x^n + f(f(y)) + a^n \stackrel{\text{do (2)}}{=} x^n + y + 2a^n, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f(f(x^n + f(f(y)))) &= f([f(x)]^n + f(y)) \\ &= [f(f(x))]^n + y \stackrel{\text{do (2)}}{=} (x + a^n)^n + y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra: $x^n + 2a^n = (x + a^n)^n, \forall x \in \mathbb{R}$. So sánh hệ số của x^{n-1} ở hai vế, ta được: $C_n^1 a^n = 0 \Leftrightarrow a^n = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Do đó (2) trở thành:

$$f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (5) suy ra f là song ánh, do đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Từ (1) cho $y = 0$ ta được: $f(x^n) = [f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}$. (6)

Với mọi $x \geq 0$ và $y \in \mathbb{R}$, ta có:

$$f(x + y) = f\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n + f(f(y))\right) = [f(\sqrt[n]{x})]^n + f(y) \stackrel{\text{do (6)}}{=} f(x) + f(y).$$

Như vậy: $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x \in \mathbb{R}, y \geq 0$. (7)

Trong (7) lấy $y = -x$ ta được:

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Với mọi $y \in \mathbb{R}, x < 0$, sử dụng (7) và (8), ta được:

$$f(x + y) - f(x) = f(x + y) + f(-x) = f((x + y) + (-x)) = f(y).$$

Từ đây kết hợp với (7), ta được: $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (9)

Trường hợp n chẵn. Từ (6) thay $x = 1$, ta được:

$$f(1) = [f(1)]^n \Rightarrow [f(1)]^{n-1} = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \text{ (do } n - 1 \text{ lẻ)}.$$

Do n chẵn nên từ (6) suy ra với $x > 0$ thì $f(x) > 0$. Giả sử $x < y$, khi đó $f(y - x) > 0$ ta có:

$$f(y) = f(y - x + x) \stackrel{\text{do (7)}}{=} f(y - x) + f(x) > f(x).$$

Vậy hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Sử dụng bài toán ?? (ở trang ??) suy ra $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $f(1) = 1$ nên $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy đúng.

Trường hợp n lẻ. Từ (6) thay $x = 1$, ta được:

$$f(1) = [f(1)]^n \Rightarrow [f(1)]^{n-1} = 1 \Rightarrow f(1) = \pm 1 \text{ (do } n - 1 \text{ chẵn)}.$$

Ta chứng minh f đơn điệu. Trước hết, từ (9) và bằng quy nạp, ta có:

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Đặt $f(1) = k \in \{1, -1\}$. Ta tính $f((x+1)^n)$ bằng hai cách.

$$\begin{aligned} f((x+1)^n) &= [f(x+1)]^n = [f(x) + k]^n = \sum_{i=0}^n C_n^i [f(x)]^{n-i} k^i \\ f((x+1)^n) &= f\left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i}\right) = f(x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x + 1) \\ &= f(x^n) + C_n^1 f(x^{n-1}) + \dots + C_n^{n-2} f(x^2) + C_n^{n-1} f(x) + k. \end{aligned}$$

So sánh hai kết quả trên, ta được:

$$\begin{aligned} &f(x^n) + C_n^1 f(x^{n-1}) + C_n^2 f(x^{n-2}) + \dots + C_n^{n-2} f(x^2) + C_n^{n-1} f(x) + k \\ &= [f(x)]^n + C_n^1 [f(x)]^{n-1} k + \dots + C_n^{n-1} f(x) k^{n-1} + k^n. \end{aligned}$$

Do (6) nên ta có:

$$\begin{aligned} &C_n^1 f(x^{n-1}) + C_n^2 f(x^{n-2}) + \dots + C_n^{n-2} f(x^2) + C_n^{n-1} f(x) + k \\ &= C_n^1 [f(x)]^{n-1} k + \dots + C_n^{n-1} f(x) k^{n-1} + k^n. \end{aligned}$$

Do f là hàm cộng tính nên ta có thể viết lại như sau:

$$\begin{aligned} &f(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} x^2) + C_n^{n-1} f(x) + k \\ &= C_n^1 [f(x)]^{n-1} k + \dots + C_n^{n-1} f(x) k^{n-1} + k^n. \end{aligned} \quad (10)$$

Xét hàm số:

$$g(x) = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} x^2 = (x+1)^n - x^n - nx - 1.$$

Ta có:

$$g'(x) = n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1} - n, g''(x) = n(n-1)(x+1)^{n-2} - n(n-1)x^{n-2}.$$

Vì $n-2$ lẻ nên $(x+1)^{n-2} > x^{n-2}$. Do đó: $n(n-1)(x+1)^{n-2} > n(n-1)x^{n-2}$. Vậy

$$g''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $g'(x)$ tăng thực sự, vì vậy phương trình $g'(x) = 0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất. Mà $g'(0) = 0$ nên $g'(x)$ chỉ triệt tiêu tại một điểm duy nhất $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$g(x)$		$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$	

Vậy $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Với mọi $t > 0$ luôn có x_0 sao cho $t = g(x_0)$.

Có hai trường hợp:

Trường hợp 1: $k = 1$. Viết lại đẳng thức (10):

$$\begin{aligned} &f(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} x^2) \\ &= C_n^1 [f(x)]^{n-1} + C_n^2 [f(x)]^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} [f(x)]^2. \end{aligned}$$

Hay viết gọn hơn: $f(g(x)) = g(f(x))$. Lấy $t > 0$ tùy ý, theo các tính chất của hàm g ta thấy tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $t = g(x_0)$ và do $f(x_0) \neq 0$ nên $g(f(x_0)) > 0$. Vậy: $f(t) = f(g(x_0)) = g(f(x_0)) > 0$. Hay với $x > 0$ thì $f(x) > 0$. Với $x < y$ thì

$$y - x > 0 \Rightarrow f(y - x) > 0.$$

Khi đó ta có:

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y - x) + f(x) > f(x).$$

Suy ra f là hàm đơn điệu tăng. Như vậy, f cộng tính và đơn điệu trên $\mathbb{R}$ nên:

$$f(x) = kx = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: $k = -1$. Viết lại đẳng thức (10):

$$\begin{aligned} & f(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} x^2) \\ &= -C_n^1 [f(x)]^{n-1} + C_n^2 [f(x)]^{n-2} - \dots - C_n^{n-2} [f(x)]^2. \\ &= -\left(C_n^1 [-f(x)]^{n-1} + C_n^2 [-f(x)]^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} [-f(x)]^2\right). \end{aligned}$$

Hay $f(g(x)) = -g(-f(x))$. Từ sự biến thiên của $g(x)$ ta có: với mỗi $t > 0$ luôn có $x_0 \neq 0$ (đúng hai giá trị x_0) sao cho $t = g(x_0)$. Với $x_0 \neq 0$ thì $f(x_0) \neq 0$ và $g(x) > 0, \forall x \neq 0$. Do đó: $g(-f(x_0)) > 0 \Rightarrow -g(-f(x_0)) < 0$. Vậy:

$$f(t) = f(g(x_0)) = -g(-f(x_0)) < 0.$$

Hay với $x > 0$ thì $f(x) < 0$. Bây giờ ta chứng minh $f(x)$ là hàm số giảm. Thật vậy, giả sử $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow f(y - x) < 0$, ta có:

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y - x) + f(x) < f(x).$$

Vậy f cộng tính và giảm trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = kx = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta được nghiệm $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Kết luận:

- Nếu n chẵn thì có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Nếu n lẻ thì có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cách 2. Đặt $f(0) = a$. Từ giả thiết, ta dễ thấy

$$f(f(y)) = y + a^n, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng kết quả này, ta có

$$f(f^n(x) + y) = f(f(f^{n-1}(x) + f(y))) = x^n + f(y) + a^n, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trong đẳng thức trên, ta thay y bởi $f(y)$ thì thu được

$$x^n + y + 2a^n = f(f^n(x) + f(y)) = y + f^n(f(x)) = y + (x + a^n)^n,$$

hay

$$x^n + 2a^n = (x + a^n)^n.$$

Bằng cách so sánh hệ số của x^{n-1} ở hai vế, ta dễ dàng suy ra $a = 0$. Lúc này, ta có $f(f(y)) = y$ nên bằng cách thay y bởi $f(y)$ vào giả thiết, ta được

$$f(x^n + y) = f^n(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = 0$ vào đẳng thức trên, ta cũng có

$$f(x^n) = f^n(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (i)$$

Do đó, đẳng thức ở trên có thể được viết lại dưới dạng

$$f(x^n + y) = f(x^n) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

☑ Nếu n lẻ thì x^n có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ nên ta suy ra f cộng tính. Kết hợp với (i), ta đưa bài toán về trường hợp của bài toán ?? (ở trang ??).

☑ Nếu n chẵn thì do x^n có thể nhận mọi giá trị không âm nên ta suy ra

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

với mọi $x \geq 0$ và $y \in \mathbb{R}$. Bằng cách thay $y = -x$, ta dễ thấy f là hàm lẻ. Từ đó, với mọi $x < 0$, $y \in \mathbb{R}$, ta có

$$-f(x + y) = f((-x) + (-y)) = f(-x) + f(-y) = -f(x) - f(y),$$

hay

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Vậy f là hàm cộng tính. Kết hợp với (i), ta đưa được bài toán về trường hợp của bài toán ?? (ở trang ??).

Lưu ý.

☑ Trường hợp $n = 2$ của bài toán này chính là đề thi IMO năm 1992. Trường hợp này và trường hợp n chẵn nói riêng là các trường hợp dễ của bài toán.

☑ Với n lẻ thì không như vậy, ta sẽ gặp nhiều khó khăn để tính $f(0)$, một mấu chốt quan trọng để chứng minh f cộng tính. Cách tính $f(0)$ thường gặp là sử dụng tính song ánh của f để tính một giá trị nào đó theo nhiều cách. Cách đó tương đối phức tạp và không dễ để thực hiện.

③ Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$f(m^2 + f(n)) = f(m)^2 + n, \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Trong (1), thay $m = 1$ ta được:

$$f(1 + f(n)) = f(1)^2 + n = a^2 + n \text{ (với } a = f(1)).$$

Suy ra: $f(1 + a^2 + n) = f(1 + f(1 + f(n))) = a^2 + 1 + f(n)$.

Hay: $f(n + b) = f(n) + b$, (với $b = a^2 + 1 \geq 2$).

Bằng quy nạp, ta chứng minh được: $f(n + kb) = f(n) + kb, \forall n, k \in \mathbb{N}^*$.
 Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} f(m)^2 + n + (2m + b)b &= f(m^2 + f(n)) + (2m + b)b \\ &\stackrel{\text{do}}{(2)} f(m^2 + f(n) + (2m + b)b) \\ &= f((m + b)^2 + f(n)) \\ &= f(m + b)^2 + n = [f(m) + b]^2 + n \\ &= f(m)^2 + 2f(m)b + b^2 + n. \end{aligned}$$

Suy ra: $(2m + b)b = 2bf(m) + b^2, \forall m \in \mathbb{N}^*$. Do đó: $f(m) = m, \forall m \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lưu ý. Vì sao lại phải cộng thêm $(2m + b)b$. Dễ dàng nhầm ra một nghiệm hàm là: $f(n) = n$. Ta để ý rằng: $f(m^2 + f(n)) = f(m)^2 + n$. Nếu thay m bởi $m + b$ ta được:

$$f((m + b)^2 + f(n)) = f(m + b)^2 + n.$$

Mà $f(m + b) = f(m) + b$. Nên suy ra:

$$f((m + b)^2 + f(n)) = f(m)^2 + 2f(m)b + b^2 + n.$$

Do ta đã đoán được nghiệm hàm là $f(m) = m$ nên:

$$f((m + b)^2 + f(n)) = f(m)^2 + 2mb + b^2 + n = f(m^2) + n + (2m + b)b.$$

④ Giả sử tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = f^2(x) + y, \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (1)$$

Đặt $a = f(1)$. Từ (1) cho $x = 1$ ta được

$$f(1 + f(y)) = y + a^2, \forall y > 0. \quad (2)$$

Từ (1) cho $y = 1$ ta được

$$f(x^2 + a) = f^2(x) + 1, \forall x > 0. \quad (3)$$

Từ (2) suy ra f là đơn ánh. Cũng từ (2) suy ra hàm f nhận mọi giá trị trên khoảng $(a^2; +\infty)$; nghĩa là với mỗi $t > a^2$, tồn tại $x > 0$ sao cho $f(x) = t$. Kết hợp các kết quả (1), (2), (3) ta được

$$f(x^2 + f(y)) = f(x^2 + a) + f(1 + f(y)) - a^2 - 1, \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (4)$$

Do $x^2 + a$ có thể nhận mọi giá trị trên $(a; +\infty)$ và $f(y) + 1$ có thể nhận mọi giá trị trên $(a^2 + 1; +\infty)$ (chú ý là $a^2 + 1 > a$) nên từ (4) suy ra với mọi $x > a^2 + 1, y > a^2 + 1$ ta có

$$f((x^2 + a) + (f(y) + 1) - a - 1) = f(x^2 + a) + f(1 + f(y)) - a^2 - 1.$$

$$\text{Hay } f(x+y-a-1) = f(x) + f(y) - a^2 - 1, \forall x, y \in (a^2+1; +\infty). \quad (5)$$

Giả sử $x > 0$ và $y > 0$, khi đó

$$f(x+y-a-1) = f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} - a - 1\right) \stackrel{(5)}{=} f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) - a^2 - 1,$$

từ đây kết hợp với (5) ta được

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in (a^2+1; +\infty). \quad (6)$$

Từ (6), sử dụng chú ý 2 ở trang 1 ta có

$$f(x) = cx + d, \forall x \in (a^2+1; +\infty)$$

với c, d là những hằng số thỏa mãn $c \geq 0, c(a^2+1) + d \geq 0, c(a^2+1) + c + d > 0$. Do f là đơn ánh nên f không thể là hàm hằng, dẫn tới $c > 0$. Bây giờ ta sẽ tìm c và d . Trong (1), xét $x > a^2+1$ và $y > a^2+1$ thì

$$x^2 + f(y) > x^2 > a^2 + 1,$$

do đó lúc này (1) trở thành

$$c(x^2 + cy + d) + d = (cx + d)^2 + d, \forall x, y \in (a^2+1; +\infty).$$

Đồng nhất hệ số của y^2 ở hai vế ta được $c = 1$. Tiếp theo đồng nhất hệ số của x ở hai vế ta được $d = 0$. Do đó

$$f(x) = x, \forall x > a^2 + 1.$$

Tiếp theo, ta cố định $y > 0$ và cho $x > a^2+1$ vào (1) ta được

$$x^2 + f(y) = x^2 + y \Leftrightarrow f(y) = y.$$

Như vậy $f(y) = y, \forall y > 0$. Thử lại thấy hàm số $f(x) = x, \forall x > 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

8.

① Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$\text{Lời giải 1. Từ (1) thay } x = 0 \text{ được: } f(f(y)) = f^2(0) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (2) cho $y = -f^2(0)$ và đặt $a = f(-f^2(0))$ ta được $f(a) = 0$.

$$\text{Từ (1) cho } x = a \text{ được } f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (1) thay x bởi $f(x)$ và sử dụng (3) ta được

$$f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4) suy ra: } f^2(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (5) suy ra $f(1) = 1$ hoặc $f(1) = -1$.

☑ Xét $f(1) = 1$. Từ (1) cho $x = 1$ được

$$\begin{aligned}f(1 + f(y)) &= 1 + y, \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f^2(1 + f(y)) &= (1 + y)^2, \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow [1 + f(y)]^2 &= 1 + 2y + y^2, \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow 1 + 2f(y) + y^2 &= 1 + 2y + y^2, \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(y) &= y, \forall y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

☑ Xét $f(1) = -1$. Từ (1) cho $x = 1$ được

$$\begin{aligned}f(1 - f(y)) &= 1 + y, \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f^2(-1 + f(y)) &= (1 + y)^2, \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow [-1 + f(y)]^2 &= 1 + 2y + y^2, \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow 1 - 2f(y) + y^2 &= 1 + 2y + y^2, \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(y) &= -y, \forall y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Vậy có hai hàm số cần tìm là $f(x) \equiv x, f(x) = -x$.

Lời giải 2. Ta thay $x = 0$ vào phương trình (1) đã cho được

$$f(f(y)) = f(0)^2 + y, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = 0$ vào phương trình (1) đã cho ta được:

$$f(xf(x) + f(0)) = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1i)$$

Như vậy nhìn vào các đẳng thức trên ta sẽ đi tính giá trị của $f(0)$. Từ

$$f(f(y)) = f(0)^2 + y, \forall y \in \mathbb{R},$$

suy ra f là toàn ánh, do đó tồn tại a sao cho $f(a) = 0$. Từ phương trình (1) ban đầu ta cho $x = a$ được

$$f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2i)$$

Từ (2i), kết hợp với $f(f(y)) = f(0)^2 + y, \forall y \in \mathbb{R}$, suy ra $f(0) = 0$. Để sử dụng (2i), trong phương trình (1) ta thay x bởi $f(x)$ ta được:

$$\begin{aligned}f(f(x)f(f(x)) + f(y)) &= f(f(x))^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(xf(x) + f(y)) &= x^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R}.\end{aligned} \quad (3i)$$

Từ (2i) ta suy ra f là đơn ánh. Trong đẳng thức (3i) ta thay x bởi $-x$ ta được:

$$\begin{aligned}f(-xf(-x) + f(y)) &= (-x)^2 + y = x^2 + y = f(xf(x) + f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow xf(x) + f(y) &= -xf(-x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow xf(x) &= -xf(-x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x) &= -f(-x), \forall x \neq 0.\end{aligned}$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ ta được $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (4i)

Từ (3i) và phương trình (1) ta được:

$$\begin{aligned} f(xf(x) + f(y)) &= x^2 + y = f(x)^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x)^2 &= x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5i)$$

Từ (1) và (5i), ta có:

$$f(xf(x)) = f(x)^2 = x^2 = f(f(x^2)) \Rightarrow f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6i)$$

Từ (2i), (6i) và phương trình (1) ta được:

$$\begin{aligned} f(xf(x) + f(y)) &= f(x)^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(f(x^2) + f(y)) &= x^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(f(x^2) + f(y)) &= f(f(x^2 + y)), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(x^2) + f(y) &= f(x^2 + y), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x) + f(y) &= f(x + y), \forall x \geq 0, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7i)$$

Từ (4i) và (7i) ta sẽ chỉ ra hàm số f cộng tính. Thật vậy, với $x < 0, y \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= -f(-x - y) = -[f(-x) + f(-y)] = -[-f(x) - f(y)] \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Kết hợp với (7i) ta được: $f(x) + f(y) = f(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (8i)

Dựa vào (6i) và (8i) ta sẽ tính được $f(x)$ theo cách xét giá trị của $f((x + 1)^2)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} f((x + 1)^2) &= (x + 1)f(x + 1) = (x + 1)[f(x) + f(1)] \\ f((x + 1)^2) &= f(x^2 + 2x + 1) = f(x^2) + 2f(x) + f(1) \\ &= xf(x) + 2f(x) + f(1). \end{aligned}$$

So sánh hai đẳng thức này ta được $f(x) = f(1)x = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay lại phương trình ban đầu ta được $a = \pm 1$. Vậy bài toán có hai nghiệm là

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lưu ý. Sau khi chứng minh được (5i), ta có thể xử lí cách khác như sau: Để thấy hai hàm số

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ chứng minh ngoài hai hàm số này ra không còn hàm số nào khác. Giả sử tồn tại hàm số f khác hai hàm số trên và cũng thỏa yêu cầu đề bài. Do (5) và $f(0) = 0$ nên tồn tại $a \neq 0, b \neq 0$ sao cho $f(a) = -a$ và $f(b) = b$. Từ (1) cho $x = a$ và $y = b$, ta được $f(af(a) + f(b)) = f(a)^2 + b$, do đó

$$f(-a^2 + b) = a^2 + b \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b = -a^2 + b \\ a^2 + b = a^2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Do đó ngoài hai hàm số

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$$

không còn hàm số nào khác thỏa mãn yêu cầu đề bài.

② Giả sử tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y, \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (*)$$

Đặt $f(1) = a > 0$. Trong (*) lần lượt cho $x = 1, y = 1$, ta thu được:

$$f(f(y) + a) = a^2 + y, \forall y \in (0; +\infty). \quad (1)$$

$$f(xf(x) + a) = f^2(x) + 1, \forall x \in (0; +\infty). \quad (2)$$

Sử dụng (1), ta được:

$$f(y) + a + a^2 = f(f(f(y) + a) + a) = f(y + a + a^2), \forall y > 0. \quad (3)$$

Giả sử $f(y + n(a + a^2)) = f(y) + n(a + a^2), \forall y > 0 (n \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó:

$$\begin{aligned} f(y + (n+1)(a + a^2)) &= f(y + n(a + a^2) + (a + a^2)) \\ &\stackrel{(3)}{=} f(y + n(a + a^2)) + (a + a^2) \\ &= f(y) + n(a + a^2) + (a + a^2) \\ &= f(y) + (n+1)(a + a^2), \forall y > 0. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra:

$$f(y + n(a + a^2)) = f(y) + n(a + a^2), \forall y > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (4)$$

Mặt khác, sử dụng (1) và (2), ta suy ra:

$$xf(x) + a + a^2 = f(f(xf(x) + a) + a) = f(f^2(x) + 1 + a), \forall x > 0. \quad (5)$$

Do đó:

$$\begin{aligned} f(f(f^2(x) + 1 + a) + f(y)) &\stackrel{\text{do (5)}}{=} f(xf(x) + a + a^2 + f(y)) \\ &\stackrel{\text{do (3)}}{=} f(xf(x) + f(y + a + a^2)) \\ &\stackrel{\text{do (*)}}{=} f^2(x) + y + a + a^2, \forall y > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (1) suy ra hàm số $f(x)$ nhận mọi giá trị lớn hơn a^2 , do đó hàm $f^2(x) + 1 + a$ nhận mọi giá trị lớn hơn $a^4 + a + 1$. Trong (6) thay $f^2(x) + 1 + a$ bởi x , ta nhận được:

$$f(f(x) + f(y)) = x + y + a^2 - 1, \forall y > 0, x > a^4 + a + 1. \quad (7)$$

Với $x > 0, y > 0$, chọn $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $x + n(a + a^2) > a^4 + a + 1$. Khi đó, sử dụng (4) ta được:

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(y)) &= f(f(x) + f(y) + n(a + a^2)) - n(a + a^2) \\ &\stackrel{(4)}{=} f(f(x + n(a + a^2)) + f(y)) - n(a + a^2) \\ &\stackrel{(7)}{=} x + n(a + a^2) + y + a^2 - 1 - n(a + a^2) \end{aligned}$$

$$= x + y + a^2 - 1.$$

Như vậy ta đã chứng minh được kết quả mạnh hơn (7), đó là:

$$f(f(x) + f(y)) = x + y + a^2 - 1, \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (8)$$

Trong (8) thay x bởi $f(x) + a$, thay y bởi $f(y) + a$ và sử dụng (1), ta được:

$$f(x + y + 2a^2) = f(x) + f(y) + a^2 + 2a - 1, \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (9)$$

Sử dụng (9), ta có:

$$\begin{aligned} f(x + 2a^2) + f(y - 2a^2) &\stackrel{\text{do (9)}}{=} f(x + y + 2a^2) + 1 - a^2 - 2a \\ &\stackrel{\text{do (9)}}{=} f(x) + f(y), \forall x > 0, y > 2a^2. \end{aligned}$$

Do đó $f(x + 2a^2) - f(x) = f(y) - f(y - 2a^2)$, $\forall x > 0, y > 2a^2$. Từ đây lấy $y = 4a^2$, suy ra $f(x + 2a^2) - f(x) = b$, $\forall x > 0$, với b là hằng số. (10)

Từ (9) và (10), ta thu được:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + a^2 + 2a - 1 - b, \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (11)$$

Đặt $g(x) = f(x) + c$, $\forall x > 0$, trong đó $c = a^2 + 2a - 1 - b$.

Thay vào (11), ta được: $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in (0; +\infty)$. (12)

Từ (12), bằng quy nạp ta suy ra

$$g(nx) = ng(x), \forall x > 0, n = 1, 2, \dots$$

Do đó $g(x) = \frac{g(nx)}{n} = \frac{f(nx) + c}{n} > \frac{c}{n}$, $\forall x > 0, n = 1, 2, \dots$

Vậy $g(x) > \frac{c}{n}$, $\forall x > 0, n = 1, 2, \dots$. Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được

$$g(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty). \quad (13)$$

Từ (13), (12), sử dụng bài toán ?? (ở trang ??), ta được $g(x) = ax$, $\forall x > 0$ (a là hằng số dương). Do đó $f(x) = ax - c$, $\forall x > 0$. Do $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} ax = 0$ nên

$c \leq 0$. Thay vào (*), ta được:

$$\begin{aligned} f(x(ax - c) + ay - c) &= (ax - c)^2 + y, \forall x, y > 0 \\ \Leftrightarrow a(x(ax - c) + ay - c) - c &= a^2x^2 - 2acx + c^2 + y, \forall x, y > 0 \\ \Leftrightarrow a(ax^2 - cx + ay - c) - c &= a^2x^2 - 2acx + c^2 + y, \forall x, y > 0 \\ \Leftrightarrow a^2x^2 - acx + a^2y - ac - c &= a^2x^2 - 2acx + c^2 + y, \forall x, y > 0 \\ \Leftrightarrow acx + (a^2 - 1)y - (c + ac + c^2) &= 0, \forall x, y > 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ac = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \\ c + ac + c^2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = x$, $\forall x > 0$.

Lưu ý. Từ (8), ta có thể hoàn thành lời giải bằng con đường khác như sau: Giả sử có hai số dương y_1 và y_2 sao cho $f(y_1) = f(y_2)$, khi đó

$$a^2 + y_1 = f(f(y_1) + a) = f(f(y_2) + a) = a^2 + y_2 \Rightarrow y_1 = y_2,$$

suy ra f là đơn ánh. Giả sử $x > 0$ và $y > 0$, khi đó

$$\begin{aligned} f\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) &\stackrel{(8)}{=} \frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + a^2 - 1 = x + y + a^2 - 1 \\ &\stackrel{(8)}{=} f(f(x) + f(y)), \end{aligned}$$

mà f là đơn ánh nên

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Vậy áp dụng bài toán ?? ở trang ?? (phương trình hàm Jensen), ta được

$$f(x) = ax + b, \forall x > 0 \quad (a \geq 0, b \geq 0, a + b > 0). \quad (14)$$

Thay (14) và (1) ta được $f(x) = x, \forall x > 0$.

9.

① Giả sử tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Nếu f là hàm hằng thì từ (1) ta được $f(x) \equiv 0, f(x) \equiv 2$. Tiếp theo giả sử f không phải là hàm hằng. Thay $y = 0$ vào (1) được

$$f(x)f(0) = 2f(0), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Do đang xét f không phải là hàm hằng nên tồn tại $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) \neq 2$. Trong (2) lấy $x = x_0$ ta được $f(0) = 0$. Ta sẽ tính $f(x+2)$ bằng hai cách. Trong (1) cho $y = 1$ ta được

$$\begin{aligned} f(x+1) + f(x)f(1) &= f(x) + f(1) + f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(x+1) &= [2 - f(1)]f(x) + f(1), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3) cho $x = 1$ ta được $f(2) = [2 - f(1)]f(1) + f(1) = [3 - f(1)]f(1)$. Trong (3) thay x bởi $x+1$ và sử dụng (3) ta được

$$\begin{aligned} f(x+2) &= [2 - f(1)][(2 - f(1))f(x) + f(1)] + f(1) \\ &= [2 - f(1)]^2 f(x) + f(2), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Trong (1) cho $y = 2$ được

$$\begin{aligned} f(x+2) + f(x)f(2) &= f(x) + f(2) + f(2x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(x+2) &= [1 - f(2)]f(x) + f(2x) + f(2), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$\begin{aligned} [2 - f(1)]^2 f(x) + f(2) &= [1 - f(2)]f(x) + f(2x) + f(2), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(2x) &= [3 - f(1)]f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

Vậy $f(2x) = af(x), \forall x \in \mathbb{R}$, với $a = [3 - f(1)]$ là hằng số khác 0 (vì nếu $a = 0$ thì f là hàm hằng). Từ đây ta được

$$f(4x) = a^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Trong (1) thay x bởi $2x$, thay y bởi $2y$ và sử dụng các kết quả trên ta được

$$af(x+y) + a^2f(x)f(y) = af(x) + af(y) + a^2f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Nhân hai vế của (1) với a^2 dẫn đến

$$a^2f(x+y) + a^2f(x)f(y) = a^2f(x) + a^2f(y) + a^2f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra

$$\begin{aligned} f(x+y) + af(x) + af(y) &= af(x+y) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (a-1)f(x+y) &= (a-1)[f(x) + f(y)], \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nếu $a = 1$ thì $f(1) = 2$, thay vào (3) được $f(x+1) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$, hay $f(x) \equiv 2$, không rơi vào trường hợp ta đang xét, vậy $a \neq 1$. Do đó từ (10) suy ra

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Kết hợp (11) với (1) ta được

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Từ (11) và (12), sử dụng bài toán ?? ở trang ?? ta được $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại đúng. Vậy có ba hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv x, f(x) \equiv 0, f(x) \equiv 2.$$

② Giả sử tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in (0; +\infty). \quad (1)$$

Trong (1) lấy $x = y = 2$ ta được

$$f(4) + [f(2)]^2 = f(4) + 2f(2) \Rightarrow f(2) = 2 \text{ (do } f(x) > 0, \forall x > 0).$$

Trong (1) cho $x = y = 1$ ta được

$$f(2) + [f(1)]^2 = f(1) + 2f(1) \Rightarrow [f(1)]^2 - 3f(1) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(1) = 2. \end{cases}$$

☑ Trường hợp $f(1) = 2$. Trong (1) lấy $y = 1$ ta được

$$f(x+1) + 2f(x) = f(x) + f(x) + 2 \Rightarrow f(x+1) = 2.$$

Vậy $f(x+1) = 2, \forall x > 0$. Hay $f(x) = 2, \forall x > 1$. Còn với $0 < x < 1$ ta chọn $y = \frac{1}{x} > 1$, thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{x}\right) + f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) &= f(1) + f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \\ \Rightarrow 2 + 2f(x) &= 2 + f(x) + 2 \Rightarrow f(x) = 2. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 2, \forall x > 0$. Thử lại đúng.

☑ Trường hợp $f(1) = 1$. Thay $y = 1$ vào (1) ta được

$$f(x+1) + f(x) = f(x) + f(x) + 1 \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in (0; +\infty). \quad (2)$$

Từ (2) bằng phép quy nạp đơn giản ta được $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$f(x+n) = f(x) + n, \forall x \in (0; +\infty), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Từ (1) lấy $x = n$ và $y = \frac{1}{n}$ ta được

$$f\left(n + \frac{1}{n}\right) + f(n)f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) + f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây sử dụng (2) và (3) ta được

$$n + f\left(\frac{1}{n}\right) + nf\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + n + f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với mọi số hữu tỉ dương $\frac{m}{n}$, với $m, n \in \mathbb{N}^*$ Thay $x = m, y = \frac{1}{n}$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned} f\left(m + \frac{1}{n}\right) + f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) &= f\left(\frac{m}{n}\right) + f(m) + f\left(\frac{1}{n}\right) \\ \Rightarrow m + f\left(\frac{1}{n}\right) + mf\left(\frac{1}{n}\right) &= f\left(\frac{m}{n}\right) + m + f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}, x > 0$. Tiếp theo ta chứng minh f đồng biến trên $(0; +\infty)$. Với mọi $x > 1$ ta chọn

$$y = \frac{x}{x-1} > 0 \Rightarrow yx - y = x \Rightarrow x + y = xy \Rightarrow f(x+y) = f(xy).$$

Khi đó (1) trở thành

$$\begin{aligned} f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right) &= f(x) + f\left(\frac{x}{x-1}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right)[f(x) - 1] = f(x) \\ \Rightarrow f(x) - 1 > 0 &\Rightarrow f(x) > 1 \text{ và } f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{f(x)}{f(x)-1}, \forall x > 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (4) suy ra với mọi $x > 0$, ta có

$$1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{x+1}{(x+1)-1}\right) = \frac{f(x+1)}{f(x+1)-1} = \frac{f(x)+1}{f(x)}.$$

Vậy

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}, \forall x > 0.$$

Do đó: nếu $x > 1$ thì $f(x) > 1$ và nếu $0 < x < 1$ thì $0 < f(x) < 1$.

• Xét $0 < x < y < 1$. Ta có

$$\begin{aligned} f(y-x+x) + f(y-x)f(x) &= f((y-x)x) + f(y-x) + f(x). \\ \Leftrightarrow f(y) &= f((y-x)x) + f(y-x) + f(x) - f(y-x)f(x) \\ \Leftrightarrow f(y) &= f(x) + f((y-x)x) + f(y-x)[1 - f(x)]. \end{aligned}$$

Để ý rằng $0 < x < 1$, do đó $f(x) < 1$. Vậy $f(y) > f(x)$. Do đó hàm f đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

- Xét $1 < x < y$. Khi đó

$$0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) < f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \frac{1}{f(y)} < \frac{1}{f(x)} \Rightarrow f(y) > f(x).$$

Vậy hàm f đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Do đó f đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Cuối cùng, với mỗi $x > 0$ ta chọn hai dãy hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho:

$$0 < u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \dots; \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x.$$

Khi đó do f đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n) \Rightarrow u_n \leq f(x) \leq v_n, \forall n = 1, 2, \dots$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $f(x) = x$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Tóm lại: Có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 2, \forall x \in (0; +\infty) \text{ và } f(x) = x, \forall x \in (0; +\infty).$$

10.

- ① Giả sử tồn tại đơn ánh $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Trong (1) thay x bởi $y + 1$, ta được

$$|f(y + 1) - f(y)| \leq 1, \forall y \in \mathbb{Z}.$$

Mà $|f(y + 1) - f(y)| \in \mathbb{N}^*$ nên

$$|f(y + 1) - f(y)| = 1, \forall y \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Đặt $f(0) = a$. Từ (2) ta có

$$|f(1) - f(0)| = 1 \Leftrightarrow |f(1) - a| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = a + 1 \\ f(1) = a - 1. \end{cases}$$

- Trường hợp 1 : $f(1) = a + 1$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f(n) = a + n, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Ta có $f(0) = a + 0, f(1) = a + 1$. Giả sử với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$f(k) = a + k, f(k + 1) = a + (k + 1).$$

Khi đó sử dụng (2) ta được

$$\begin{aligned} & |f(k + 2) - f(k + 1)| = 1 \Leftrightarrow |f(k + 2) - a - (k + 1)| = 1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} f(k + 2) - a - k - 1 = 1 \\ f(k + 2) - a - k - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(k + 2) = a + (k + 2) \\ f(k + 2) = a + k. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Do f là đơn ánh và $f(k) = a + k$ nên từ (4) suy ra $f(k + 2) = a + (k + 2)$. Theo nguyên lý quy nạp suy ra

$$f(n) = a + n, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Sử dụng (2) ta được

$$|f(-1) - f(0)| = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) - a = 1 \\ f(-1) - a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = a + 1 \\ f(-1) = a - 1. \end{cases}$$

Mà $f(1) = a + 1$ và f là đơn ánh nên $f(-1) = a - 1$. Giả sử với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$f(k) = a + k, f(k - 1) = a + (k - 1).$$

Khi đó sử dụng (2) ta được $|f(k - 1) - f(k - 2)| = 1$, hay

$$\begin{cases} a + k - 1 - f(k - 2) = 1 \\ a + k - 1 - f(k - 2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(k - 2) = a + (k - 2) \\ f(k - 2) = a + k. \end{cases}$$

Do f là đơn ánh và $f(k) = a + k$ nên $f(k - 2) = a + (k - 2)$. Theo nguyên lý quy nạp suy ra

$$f(n) = a + n, \forall n = 0, -1, -2, -3, \dots \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra (3) đúng.

• Trường hợp 2 : $f(1) = a - 1$. Tương tự trường hợp 1, chứng minh được

$$f(n) = a - n, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Thử lại thấy hai hàm số xác định bởi (3) và (7) thỏa mãn các yêu cầu đề bài và đó cũng là tất cả các hàm số cần tìm.

② Giả sử tồn tại hàm số $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \forall x, y \in [a, b]. \quad (1)$$

Thay $x = b$ và $y = a$ vào bất phương trình trên, ta có

$$|f(b) - f(a)| \geq b - a. \quad (2)$$

Do $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ nên $f(a)$ và $f(b)$ nằm trong đoạn $[a; b]$, từ đó suy ra trên trục số (trục Oy) thì khoảng cách giữa hai điểm $f(a)$ và $f(b)$ (khoảng cách giữa hai điểm $f(a)$ và $f(b)$ là $|f(b) - f(a)|$) luôn nhỏ hơn hoặc bằng độ dài của đoạn $[a; b]$ (độ dài của đoạn $[a; b]$ là $b - a$). Như vậy, từ (2) thấy rằng

$$|f(b) - f(a)| = b - a.$$

Tức là chỉ có 2 khả năng sau có thể xảy ra:

☑ Khả năng 1: $f(b) = b$ và $f(a) = a$. Trong (1), cho $y = a$ ta được

$$\begin{aligned} |f(x) - a| &\geq |x - a|, \forall x \in [a; b] \\ \Rightarrow f(x) - a &\geq x - a, \forall x \in [a; b] \\ \Rightarrow f(x) &\geq x, \forall x \in [a; b]. \end{aligned} \quad (3)$$

Trong (1), cho $y = b$ ta được

$$\begin{aligned} |f(x) - b| &\geq |x - b|, \forall x \in [a; b] \\ \Rightarrow b - f(x) &\geq b - x, \forall x \in [a; b] \\ \Rightarrow f(x) &\leq x, \forall x \in [a; b]. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $f(x) = x, \forall x \in [a, b]$.

- ☑ Khả năng 2: $f(b) = a$ và $f(a) = b$. Đặt $g(x) = a + b - f(x), \forall x \in [a, b]$. Khi đó $g(a) = a, g(b) = b$. Rõ ràng $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ và

$$|g(x) - g(y)| \geq |x - y|, \forall x, y \in [a, b]$$

nên theo trường hợp trên, ta có ngay $g(x) = x, \forall x \in [a, b]$.
 Từ đó $f(x) = a + b - x, \forall x \in [a, b]$.

Vậy bài toán có 2 nghiệm hàm, đó là $f(x) = x, \forall x \in [a, b]$ và $f(x) = a + b - x, \forall x \in [a, b]$.

- ③ Giả sử tồn tại hàm số f xác định trên $[0; 1]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$|x - y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [0; 1]. \quad (1)$$

Lời giải 1. Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u , thay y bởi v vào (1). Từ (1) cho $y \rightarrow x$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được

$$\lim_{y \rightarrow x} |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x} [f(x) - f(y)] = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x).$$

Như vậy f là hàm số liên tục trên $[0; 1]$. Giả sử a, b là hai số thuộc đoạn $[0; 1]$ sao cho $f(a) = f(b)$. Khi đó $P(a, b) \Rightarrow (a - b)^2 \leq 0 \Rightarrow a = b$, suy ra f là đơn ánh. Kết hợp với f liên tục suy ra f đơn điệu thực sự. Nhận xét rằng nếu $f(x)$ thỏa (1) thì $f(x) + c$ và $-f(x) + c$ cũng thỏa (1), do đó có thể giả sử $f(0) = 0$ và f là hàm đơn điệu tăng.

$$P(1, 0) \Rightarrow 1 \leq |f(1)| \leq 1 \Rightarrow |f(1)| = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \quad (\text{do } f \text{ tăng và } 0 < 1).$$

Do hàm số f đồng biến nên với $0 \leq x \leq 1$, ta có $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$. Suy ra

$$f(x) \in [0; 1], \forall x \in [0; 1].$$

Ta có

$$P(x, 0) \Rightarrow |f(x)| \leq |x| \Rightarrow f(x) \leq x, \forall x \in [0; 1]. \quad (2)$$

$$P(x, 1) \Rightarrow 1 - f(x) \leq 1 - x \Rightarrow f(x) \geq x, \forall x \in [0; 1]. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(x) = x, \forall x \in [0; 1]$. Như vậy

$$f(x) = x + c, \forall x \in [0; 1] ; f(x) = -x + b, \forall x \in [0; 1] \quad (b, c \text{ là hằng số}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý.

- ☑ Nhận xét "nếu $f(x)$ thỏa mãn (1) thì $f(x) + c$ và $-f(x) + c$ cũng thỏa (1), do đó có thể giả sử $f(0) = 0$ và f là hàm đơn điệu tăng" đã làm cho bài toán trở nên ngắn gọn và dễ dàng hơn rất nhiều. Đây là một kỹ thuật mà bạn đọc phải hết sức lưu ý để tận dụng vào những tình huống có thể. Kỹ thuật này còn xuất hiện ở bài toán ?? ở trang ??, bài toán ?? ở trang ??.
- ☑ Từ kết quả lời giải 1 thấy rằng ta không thể tính được $f(0)$, do đó có thể vận dụng một kỹ thuật đã được trình bày ở bài toán ?? ở trang ??, bài toán ?? ở trang ??, bài toán ?? ở trang ?? để đưa ra lời giải 2 như sau:

Lời giải 2. Xét hàm số $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ như sau:

$$g(x) = f(x) - f(0), \forall x \in [0; 1].$$

Khi đó $g(0) = 0$. Thay vào (1), ta được:

$$|x - y|^2 \leq |g(x) - g(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [0; 1]. \quad (4)$$

Từ (4) cho $y = 0$, ta được:

$$x^2 \leq |g(x)| \leq x, \forall x \in [0; 1].$$

Nói riêng, ta có $|g(1)| = 1$ và $-x \leq g(x) \leq x, \forall x \in [0; 1]. \quad (5)$

Thay $y = 1$ vào (4), ta được:

$$(1 - x)^2 \leq |g(1) - g(x)| \leq 1 - x, \forall x \in [0; 1]. \quad (6)$$

☑ Trường hợp 1: $g(1) = 1$. Khi đó (6) trở thành:

$$\begin{aligned} (1 - x)^2 &\leq 1 - g(x) \leq 1 - x, \forall x \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &\leq -g(x) \leq -x, \forall x \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow x &\leq g(x) \leq 2x - x^2, \forall x \in [0; 1]. \end{aligned} \quad (7)$$

Từ (7) và (5) suy ra:

$$\begin{aligned} x &\leq g(x) \leq x, \forall x \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow g(x) &= x, \forall x \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Như vậy $f(x) = x + a, \forall x \in [0; 1]$ (a là hằng số tùy ý). Thử lại thấy thỏa mãn.

☑ Trường hợp 2: $g(1) = -1$. Khi đó (6) trở thành:

$$\begin{aligned} (1 - x)^2 &\leq 1 + g(x) \leq 1 - x, \forall x \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &\leq g(x) \leq -x, \forall x \in [0; 1]. \end{aligned} \quad (8)$$

Từ (8) và (5) suy ra:

$$\begin{aligned} -x &\leq g(x) \leq -x, \forall x \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow g(x) &= -x, \forall x \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Như vậy $f(x) = -x + a, \forall x \in [0; 1]$ (a là hằng số tùy ý). Thử lại thấy thỏa mãn.

Như vậy

$$f(x) = x + c, \forall x \in [0; 1] ; f(x) = -x + b, \forall x \in [0; 1] \quad (b, c \text{ là hằng số}).$$

11.

① Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = n + 1987, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Theo giả thiết ta có

$$f(f(n)) = n + 1987, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(n + 1987) = f(f(f(n))) = f(n) + 1987, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy $f(n + 1987) = f(n) + 1987, \forall n \in \mathbb{N}$. Từ đây, bằng qui nạp, chứng minh được

$$f(n + 1987k) = f(n) + 1987k, \forall n, k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Như vậy, f hoàn toàn xác định nếu biết $f(k)$ với $k \in S = \{0, 1, \dots, 1986\}$. Với $a \in S$, đặt

$$f(a) = 1987k + b \text{ (với } b \in S \text{ và } k \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Khi đó, từ đẳng thức ở giả thiết, ta suy ra

$$a + 1987 = f(f(a)) = f(b + 1987k) = f(b) + 1987k.$$

Suy ra $a = f(b) + 1987(k - 1)$. Nhưng do $a \in S$ nên $k \in \{0, 1\}$. Do đó từ (2) ta có

$$f(a) \leq 1987 + 1986, \forall a \in S. \quad (3)$$

Do (3) nên ta xét hai tập hợp sau:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in S : 0 \leq f(n) \leq 1986\}, \\ B &= \{n \in S : 1987 \leq f(n) \leq 1986 + 1987\}. \end{aligned}$$

Khi đó $A \cap B = \emptyset, S = A \cup B$. Như thế $|S| = |A| + |B|$, ở đây $|X|$ chỉ số phần tử của tập hợp X . Do $|S| = 1987$ là số lẻ nên $|A|$ và $|B|$ có tính chẵn, lẻ khác nhau. Xét thu hẹp của f trên A , tức là xét $f(n)$ với $n \in A$. Nếu $n \in A$ thì

$$0 \leq f(n) \leq 1986 \Rightarrow f(n) \in S, \quad (4)$$

mặt khác, do $0 \leq n \leq 1986$ nên

$$1987 \leq n + 1987 = f(f(n)) \stackrel{\text{do (3)}}{\leq} 1986 + 1987 \stackrel{\text{do (4)}}{\Rightarrow} f(n) \in B.$$

Vậy $f|_A : A \rightarrow B$. Để chứng minh f là đơn ánh nên dĩ nhiên $f|_A$ là đơn ánh. Ta sẽ chứng minh $f|_A$ là toàn ánh. Lấy $x \in B$ tùy ý, khi đó

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1986 \\ 1987 \leq f(x) \leq 1986 + 1987 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq f(x) - 1987 \leq 1986,$$

suy ra $f(x) - 1987 \in S$. Lấy số nguyên $m \geq 1987$, sử dụng (1) ta được

$$f(m) = f(m - 1987) + 1987. \quad (5)$$

Lại để ý rằng $f(x) \geq 1987$ nên theo (5) thì

$$f(f(x)) = f(f(x) - 1987) + 1987. \quad (6)$$

Nhưng $f(f(x)) = x + 1987$ nên (6) trở thành $x = f(f(x) - 1987)$. (7)

Đặt $y = f(x) - 1987$. Do $x \in B$ nên kết hợp với (7) ta được

$$0 \leq x = f(f(x) - 1987) \leq 1986.$$

Như thế $y \in A$. Như vậy, với mọi $x \in B$, tồn tại $y \in A$ sao cho $f(y) = x$, tức là $f|_A$ là toàn ánh. Từ các kết quả trên ta được $f|_A$ là một song ánh từ A lên B , điều này mâu thuẫn với việc $|A|$ và $|B|$ có tính chẵn, lẻ khác nhau. Vậy ta có điều phải chứng minh.

- ② Giả sử tồn tại hàm số tăng nghiêm ngặt $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = n + 1994, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Do $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là hàm số tăng nghiêm ngặt nên

$$f(n+1) > f(n) \Rightarrow f(n+1) \geq f(n) + 1, \forall n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Sử dụng (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} n + 1995 &= f(f(n+1)) \geq f(f(n) + 1) \geq f(f(n)) + 1 \\ &= n + 1995, \forall n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Do đó $f(n+1) = f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + 1 \\ f(3) &= f(2) + 1 \\ &\dots \\ f(n) &= f(n-1) + 1. \end{aligned}$$

Cộng theo về ta được

$$f(n) = f(1) + (n-1) \Rightarrow f(n) = n + f(1) - 1, \forall n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Từ (3) lấy $n = f(1)$, ta được

$$f(f(1)) = 2f(1) - 1 \Leftrightarrow 1995 = 2f(1) - 1 \Leftrightarrow f(1) = 998. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta thu được $f(n) = n + 997, \forall n = 1, 2, \dots$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(n) = n + 997, \forall n = 1, 2, \dots$$

- ③ Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = n + b, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Giả sử n_1 và n_2 là các số tự nhiên sao cho $f(n_1) = f(n_2)$, khi đó

$$b + n_1 = f(f(n_1)) = f(f(n_2)) = n_2 + b \Rightarrow n_1 = n_2,$$

suy ra f là đơn ánh. Với m là số tự nhiên, đặt $f(m) = n$, khi đó

$$f(f(m)) = f(n) \Rightarrow m + b = f(n) \Rightarrow f(m + b) = f(f(n)) = n + b.$$

Nghĩa là $f(m + b) = f(m) + b, \forall m \in \mathbb{N}$. Với mỗi số tự nhiên m cố định, bằng quy nạp theo số tự nhiên k , ta chứng minh rằng

$$f(m + kb) = f(m) + kb. \quad (2)$$

Dễ thấy (2) đúng khi $k = 0$ và đúng khi $k = 1$. Giả sử (2) đúng tới k ($k \in \mathbb{N}^*$), khi đó

$$f(m + (k+1)b) = f(m + kb + b) = f(m + kb) + b$$

$$= f(m) + kb + b = f(m) + (k+1)b,$$

nghĩa là (2) cũng đúng với $k+1$. Vậy (2) đúng với mọi số tự nhiên k . Với mỗi số $m \in \mathbb{N}$ luôn viết được duy nhất dưới dạng

$$m = r + kb \quad (0 \leq r \leq b-1, k \in \mathbb{N}).$$

Ta có $f(m) = f(r + kb) \stackrel{(2)}{=} f(r) + kb$. Điều này chứng tỏ tất cả các giá trị của hàm số đều được tính theo các giá trị $f(r)$ (có đúng b giá trị như vậy ứng với $r = 0, 1, 2, \dots, b-1$).

- ☑ Xét tập hợp $\overline{G} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$. Tập $\overline{G}$ có đúng b phần tử. Ta quan tâm đến giá trị của hàm số tại mỗi $r \in \overline{G}$. Với $r \in \overline{G}$, khi đó lấy $f(r)$ chia cho b , ta được $f(r) = s + kb$ với $k \in \mathbb{N}, s \in \overline{G}$ và s duy nhất. Ta có

$$\begin{aligned} f(r) = s + kb &\Rightarrow f(f(r)) = f(s + kb) \stackrel{(2)}{=} f(s) + kb \\ &\Rightarrow r + b = f(s) + kb. \end{aligned} \quad (3)$$

Ta có nhận xét rằng với $k \geq 2$ thì

$$r \stackrel{(3)}{=} f(s) + (k-1)b \geq f(s) + b \text{ (vô lí)}.$$

Vậy có hai khả năng:

- Khả năng 1: $k = 0$, khi đó $f(r) = s, f(s) = r + b$.
- Khả năng 2: $k = 1$, khi đó $f(r) = s + b, f(s) = r$

Rõ ràng trong cả hai trường hợp thì $f(r) \neq f(s)$, suy ra $r \neq s$ (do f là đơn ánh). Từ đây cho phép ta khẳng định là tập $\overline{G}$ được chia thành các cặp (r, s) với

$$\begin{cases} f(r) = s \\ f(s) = r + b \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f(r) = s + b \\ f(s) = r. \end{cases}$$

Điều này chỉ có thể xảy ra khi số phần tử của $\overline{G}$ là chẵn, hay nói cách khác b phải là số chẵn.

- ☑ Phần còn lại của lời giải là tìm cách xây dựng tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán trong trường hợp b chẵn ($b = 2h, h \in \mathbb{N}^*$). Theo cách chứng minh trên, chỉ cần xác định các giá trị của hàm số tại $0, 1, 2, \dots, b-1$. Ta chia tập $\overline{G}$ thành h cặp số tùy ý

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_h, b_h)$$

và xác định các giá trị của hàm f trên $\overline{G}$ như sau:

$$f(a_i) = b_i, f(b_i) = a_i + b \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Còn với $n \in \mathbb{N}$ bất kì, giả sử $n = a + bk$ ($a, b \in \overline{G}$), ta định nghĩa

$$f(n) = f(a) + bk \text{ (giống như (2))} \quad (2')$$

Ta chứng minh rằng hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán. Giả sử $n \in \mathbb{N}$, khi đó tồn tại duy nhất r, k sao cho

$$n = r + kb \quad (r \in \overline{G}, k \in \mathbb{N}).$$

- Nếu $r = a_i$ thì $f(n) = f(a_i + kb) \stackrel{(2')}{=} f(a_i) + kb = b_i + kb$ và vì vậy

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= f(b_i + kb) \stackrel{(2')}{=} f(b_i) + kb = a_i + b + kb \\ &= (a_i + kb) + b \\ &= n + b. \end{aligned}$$

- Nếu $r = b_i$ thì $f(n) = f(b_i + kb) \stackrel{(2')}{=} f(b_i) + kb = a_i + b + kb$ và

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= f(a_i + (k+1)b) \stackrel{(2')}{=} f(a_i) + (k+1)b = b_i + (k+1)b \\ &= (b_i + kb) + b \\ &= n + b. \end{aligned}$$

Như vậy tất cả các hàm số f được xây dựng như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận: Điều kiện cần và đủ để tồn tại hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$f(f(n)) = n + b, \forall n \in \mathbb{N}.$$

là b là số nguyên dương chẵn.

Lưu ý. Từ lời giải trên ta dễ thấy rằng, khi $b = 2h$ là số nguyên dương chẵn thì số hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đúng bằng số cặp

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_h, b_h),$$

tức là bằng $\frac{b!}{\left(\frac{b}{2}\right)!}$.

12.

- ① Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(mn) + f(m+n) = f(m)f(n) + 1, \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay m bởi u và thay n bởi v vào (1). Thực hiện $P(1, n)$, ta được

$$\begin{aligned} f(n) + f(n+1) &= f(1)f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow f(n+1) &= [f(1) - 1]f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \quad (*)$$

Nếu $f(1) = 1$ thì từ (*) suy ra $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. Tiếp theo giả sử $f(1) \geq 2$. Đặt $x = f(1), y = f(2), z = f(3), t = f(4)$.

$$P(1, 1) \Rightarrow x + y = x^2 + 1 \quad (2)$$

$$P(1, 2) \Rightarrow y + z = xy + 1 \quad (3)$$

$$P(1, 3) \Rightarrow z + t = xz + 1 \quad (4)$$

$$P(2, 2) \Rightarrow 2t = y^2 + 1. \quad (5)$$

Thay (4) vào (5) ta được $2z + y^2 + 1 = 2xz + 2 \Leftrightarrow z = \frac{y^2 - 1}{2(x - 1)}$. Từ đây kết hợp với (2) và (3) ta được

$$x^2 - x + 1 + \frac{(x^2 - x + 1)^2 - 1}{2(x - 1)} = x(x^2 - x + 1) + 1$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{(x^2 - x + 1)^2 - 1}{2(x - 1)} = x^3 - x^2 + x \\
 &\Rightarrow 2x^3 - 4x^2 + 2x + (x^2 - x + 1)^2 - 1 = 2(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x) \\
 &\Rightarrow 6x^3 - 8x^2 + 4x + (x^2 - x + 1)^2 - 1 = 2x^4 \\
 &\Rightarrow 6x^3 - 8x^2 + 4x + x^4 + x^2 - 2x^3 - 2x + 2x^2 = 2x^4 \\
 &\Rightarrow x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = 0 \\
 &\Rightarrow x(x - 1)^2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (do } x = f(1) \geq 2\text{)}.
 \end{aligned}$$

Thay $f(1) = 2$ vào (*) ta được:

$$\begin{aligned}
 f(n + 1) &= f(n) + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \\
 \Rightarrow f(n) &= f(1) + (n - 1) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.
 \end{aligned}$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận : Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ và } f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

② Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(m + n) + f(mn) = f(m)f(n) + 1, \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Trong (1) cho $m = n = 0$ ta được $2f(0) = f^2(0) + 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$. Trong (1) cho $m = 1, n = -1$ ta được $1 + f(-1) = f(1)f(-1) + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 1. \end{cases}$

• Trường hợp $f(1) = 1$. Trong (1) cho $n = 1$ ta được

$$f(m + 1) + f(m) = f(m) + 1, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Hay $f(m + 1) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}$, nghĩa là $f(m) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}$. Thử lại đúng.

• Trường hợp $f(-1) = 0$. Trong (1) cho $n = -1$ ta được

$$f(m - 1) + f(-m) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Trong (1) cho $n = 1$ và đặt $a = f(1)$ ta được

$$f(m + 1) + f(m) = af(m) + 1, \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

◦ Trường hợp $a \neq 2$. Có thể giả sử $a \neq 1$ vì nếu $a = 1$, dẫn tới $f(1) = 1$, trường hợp này đã xét ở trên. Khi đó

$$\begin{aligned}
 (3) &\Leftrightarrow f(m + 1) - \frac{1}{2 - a} = (a - 1) \left[f(m) - \frac{1}{2 - a} \right], \forall m \in \mathbb{Z}. \\
 &\Leftrightarrow f(n) - \frac{1}{2 - a} = (a - 1) \left[f(n - 1) - \frac{1}{2 - a} \right], \forall n \in \mathbb{Z} \\
 &\Rightarrow f(n) - \frac{1}{2 - a} = (a - 1)^{n+1} \left[f(-1) - \frac{1}{2 - a} \right], \forall n \in \mathbb{Z} \\
 &\Rightarrow f(n) = \frac{1 - (a - 1)^{n+1}}{2 - a}, \forall n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Đặt $b = a - 1 \Rightarrow b \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, $f(n) = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Thay vào (2) được

$$\begin{aligned} \frac{1 - b^m}{1 - b} + \frac{1 - b^{-m+1}}{1 - b} &= 1, \forall m \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 1 - b^m + 1 - b^{-m+1} &= 1 - b, \forall m \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow b^m + b^{-m+1} &= 1 + b, \forall m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (5) cho $m = 2$ ta được $b^2 + \frac{1}{b} = 1 + b \Leftrightarrow (b - 1)^2(b + 1) = 0 \Leftrightarrow b = -1$ (do $b \neq 1$).

Từ đó $f(n) = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ hay $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{ khi } n \text{ lẻ} \\ 1 & \text{ khi } n \text{ chẵn.} \end{cases}$

Thử lại thấy thỏa mãn.

○ Trường hợp $a = 2$ hay $f(1) = 2$. Trong (1) cho $n = 1$ ta được

$$f(m + 1) = f(m) + 1, \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Từ $f(1) = 2$ và (6), sử dụng quy nạp ta được $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(n) \equiv 1, f(n) \equiv \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}, f(n) \equiv n + 1.$$

③ Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(m + n) + f(m)f(n) = f(mn + 1), \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Để thấy, nếu f là hàm hằng thì $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Giả sử f không phải là hàm hằng. Từ (1) cho $n = 0$ ta được

$$f(m)(1 + f(0)) = f(1), \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Từ đây suy ra nếu $1 + f(0) \neq 0$ thì f là hàm hằng, ta gặp mâu thuẫn.

Vậy $f(0) = -1$, và lúc này $f(1) = 0$.

Thay $n = -1$ và (1) ta được

$$f(m - 1) + f(m)f(-1) = f(-m + 1), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Từ (3) cho $m = 2$ ta được $f(-1)(f(2) - 1) = 0$. Chỉ có hai trường hợp sau có thể xảy ra: $f(-1) = 0, f(-1) \neq 0$.

(a) Trường hợp 1: $f(-1) = 0$. Lúc này từ (3) ta có

$$\begin{aligned} f(m - 1) &= f(-m + 1), \forall m \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow f(-n) &= f(n), \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

hay f là hàm chẵn trên $\mathbb{Z}$. Từ (1) cho $n = 2$ ta được

$$f(m + 2) + f(m)f(2) = f(2m + 1), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Từ (1) cho $n = -2$ và sử dụng tính chẵn của hàm f ta được

$$f(m - 2) + f(m)f(2) = f(2m - 1), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Từ (5) thay m bởi $m + 1$ ta được

$$f(m-1) + f(m+1)f(2) = f(2m+1), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Kết hợp (4) và (6) ta được

$$f(m+2) + f(m)f(2) = f(m-1) + f(m+1)f(2), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Từ (7) ta thu được phương trình sai phân tuyến tính cấp 3, với phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - f(2)\lambda^2 + f(2)\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1) [\lambda^2 + (1 - f(2))\lambda + 1] = 0.$$

Ta có $\Delta = (1 - f(2))^2 - 4 = (f(2) + 1)(f(2) - 3)$.

☑ Trường hợp $\Delta > 0$ hay $f(2) \notin \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. Khi đó phương trình

$$\lambda^2 + (1 - f(2))\lambda + 1 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt α, β . Theo Viet, ta có

$$\alpha + \beta = f(2) - 1, \alpha\beta = 1.$$

Ta có

$$f(m) = A + B\alpha^m + C\beta^m \quad (A, B, C \text{ là hằng số}). \quad (8)$$

Từ (8), sử dụng $f(-1) = 0$ và (2) (tức là $f(0) = -1, f(1) = 0$) ta được

$$\begin{cases} A + B + C = -1 \\ A + \alpha B + \beta C = 0 \\ A + \frac{B}{\alpha} + \frac{C}{\beta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = -1 \\ (\alpha - 1)B + (\beta - 1)C = 1 \\ \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)B + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)C = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = -1 & (1i) \\ (\alpha - 1)B + (\beta - 1)C = 1 & (2i) \\ \beta(\alpha - 1)B + \alpha(\beta - 1)C = -\alpha\beta. & (3i) \end{cases}$$

Từ (2i), ta có $(\alpha - 1)B = 1 - (\beta - 1)C$, thay vào (3i) ta được

$$\begin{aligned} & \beta[1 - (\beta - 1)C] + \alpha(\beta - 1)C = -\alpha\beta \\ \Leftrightarrow & \beta - \beta(\beta - 1)C + \alpha(\beta - 1)C = -\alpha\beta \\ \Leftrightarrow & [(\beta - \alpha)(\beta - 1)]C = \beta + 1 \\ \Leftrightarrow & C = \frac{\beta + 1}{(\beta - \alpha)(\beta - 1)}. \end{aligned}$$

Từ đây kết hợp với (2i) ta được

$$(\alpha - 1)B = 1 - (\beta - 1)C = 1 - \frac{\beta + 1}{\beta - \alpha} = \frac{-\alpha - 1}{\beta - \alpha}.$$

Do đó $B = -\frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1)(\beta - \alpha)}$. Để ý rằng

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{\frac{1}{\beta} + 1}{\frac{1}{\beta} - 1} = -\frac{\beta + 1}{\beta - 1},$$

từ đó $B = C = \frac{\beta + 1}{(\beta - 1)(\beta - \alpha)}$. Thay vào (1i) ta được

$$A = -1 - \frac{2\beta + 2}{(\beta - 1)(\beta - \alpha)}.$$

Tóm lại:

$$B = C = \frac{\beta + 1}{(\beta - 1)(\beta - \alpha)}, \quad A = -1 - \frac{2\beta + 2}{(\beta - 1)(\beta - \alpha)}. \quad (9)$$

Từ (4) và (5) ta thu được

$$f(m+2) - f(m-2) = f(2m+1) - f(2m-1), \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Từ (8), (9), (10), ta thu được

$$\begin{aligned} \alpha^{m+2} + \beta^{m+2} - (\alpha^{m-2} + \beta^{m-2}) &= \alpha^{2m+1} + \beta^{2m+1} - (\alpha^{2m-1} + \beta^{2m-1}) \\ \Rightarrow \alpha^m \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \beta^m \left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2} \right) &= \alpha^{2m} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) + \beta^{2m} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Mà $\alpha\beta = 1$ nên

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = - \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right), \quad \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} = - \left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2} \right).$$

Do đó

$$\begin{aligned} (\alpha^m - \beta^m) \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} \right) &= (\alpha^{2m} - \beta^{2m}) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \\ \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} &= (\alpha^m + \beta^m) \\ \Rightarrow \alpha^m + \beta^m &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Từ đây lấy $m = 2$, ta được

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \alpha + \beta \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha + \beta \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \beta) - 2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu $\alpha + \beta = 2$ thì $f(2) = 3$, mâu thuẫn với $f(2) \notin \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Nếu $\alpha + \beta = -1$ thì $f(2) = 0$, cũng mâu thuẫn với $f(2) \notin \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy trường hợp $f(2) \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ không thể xảy ra.

☑ Trường hợp $f(2) = 0$. Lúc này (7) trở thành

$$\begin{aligned} f(m+2) &= f(m-1), \quad \forall m \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow f(m) &= f(m+3), \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Như vậy ta đã có các kết quả:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, f(0) = -1, f(1) = 0, f(2) = 0; \\ f(-n) &= f(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \\ f(m) &= f(m+3), \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Từ đây, bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được

$$f(3m) = -1, \quad f(3m+1) = 0, \quad f(3m+2) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

☑ Trường hợp $f(2) = -1$. Sử dụng (4) và (5) ta có

$$f(m+2) - f(m) = f(2m+1), \forall m \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

$$f(m-2) - f(m) = f(2m-1), \forall m \in \mathbb{Z} \quad (12)$$

Trong (12) thay m bởi $m+2$ ta được

$$f(m) - f(m+2) = f(2m+3), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

Từ (13) và (11) ta có

$$f(2m+1) = -f(2m+3), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Để ý rằng $f(-1) = 0$ nên từ (14) suy ra $f(2m+1) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Do đó (11) trở thành $f(m) = f(m+2), \forall m \in \mathbb{Z}$.

Để ý rằng $f(0) = -1$ nên $f(2m) = -1, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Vậy trường hợp này, ta thu được kết quả

$$f(2m+1) = 0, f(2m) = -1, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

☑ Trường hợp: $f(2) = 3$. Chú ý rằng ta đang có $f(0) = -1, f(1) = 0$. Từ (7) ta có

$$f(m+2) + 3f(m) = f(m-1) + 3f(m+1), \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow f(m+2) = 3f(m+1) - 3f(m) + f(m-1), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Từ (15) cho $m = 1$ ta được

$$f(3) = 3f(2) - 3f(1) + f(0) = 9 - 1 = 3^2 - 1.$$

Vậy ta có (15) và $f(0) = -1, f(1) = 0, f(2) = 3, f(3) = 3^2 - 1$ nên quy nạp ta được

$$f(n) = n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kết hợp với tính chẵn của hàm f ta được

$$f(n) = n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

☑ Trường hợp $f(2) = 1$. Sử dụng (4) và (5) ta có

$$f(m+2) + f(m) = f(2m+1), \forall m \in \mathbb{Z} \quad (16)$$

$$f(m-2) + f(m) = f(2m-1), \forall m \in \mathbb{Z} \quad (17)$$

Trong (17) thay m bởi $m+2$ ta được

$$f(m) + f(m+2) = f(2m+3), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Từ (18) và (16) ta có

$$f(2m+1) = f(2m+3), \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Để ý rằng $f(-1) = 0$ nên từ (19) suy ra $f(2m+1) = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Do đó (16) trở thành $f(m) = -f(m+2), \forall m \in \mathbb{Z}$.

Để ý rằng $f(0) = -1$ nên $f(2m) = (-1)^{m+1}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Vậy trường hợp này, ta thu được kết quả

$$f(2m+1) = 0, f(2m) = (-1)^{m+1}, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

☑ Trường hợp: $f(2) = 2$. Khi đó

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $f(n) = a + b \cos \frac{n\pi}{3} + c \sin \frac{n\pi}{3}$, với a, b, c là hằng số. Chú ý rằng ta đang có $f(0) = -1, f(1) = 0, f(2) = 2$ nên

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B + \sqrt{3}C = 0 \\ 2A - B + \sqrt{3}C = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 0. \end{cases}$$

Vậy $f(n) = 1 - 2 \cos \frac{n\pi}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Kết hợp với tính chẵn của hàm số f ta được

$$f(n) = 1 - 2 \cos \frac{n\pi}{3}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Trường hợp 2: $f(-1) \neq 0$. Khi đó $f(2) = 1$. Từ (1) cho $m = n = -1$ ta được

$$f(-2) + f(-1)^2 = f(2) = 1. \quad (20)$$

Từ (1) cho $m = 2, n = -2$ ta được

$$-1 + f(-2) = f(-3). \quad (21)$$

Trong (1) m bởi $m + 1$, thay n bởi $m - 1$ ta được

$$f(2m) + f(m - 1)f(m + 1) = f(m^2).$$

Trong (1) n bởi m ta được

$$f(2m) + f(m)^2 = f(m^2 + 1).$$

Do đó

$$f(m^2 + 1) - f(m^2) = f(m)^2 - f(m - 1)f(m + 1). \quad (22)$$

Trong (22) thay m bởi $-m$ ta được

$$f(m^2 + 1) - f(m^2) = f(-m)^2 - f(-m - 1)f(-m + 1).$$

Từ đây kết hợp với (22) ta được

$$f(-m)^2 - f(-m - 1)f(-m + 1) = f(m)^2 - f(m - 1)f(m + 1). \quad (23)$$

Thay $m = 2$ vào (23) rồi kết hợp với (21) và (2) ta được

$$\begin{aligned} f(-2)^2 + [1 - f(-2)]f(-1) &= 1 - f(1)f(3) \\ \Leftrightarrow f(-2)^2 - f(-1)f(-2) + f(-1) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow [f(-2) - 1][f(-2) - f(-1) + 1] &= 0. \end{aligned}$$

Chỉ có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

☑ Trường hợp $f(-2) = 1$. Thay vào (20) ta được $f(-1) = 0$, mâu thuẫn với trường hợp ta đang xét.

☑ Trường hợp $f(-2) \neq 1$. Khi đó $f(-2) = f(-1) - 1$.

Thay vào (20) ta được $f(-1) = 1$ hoặc $f(-1) = -2$.

- Nếu $f(-1) = -2$ thì $f(-2) = -3$. Thay $n = -2$ vào (1) ta được

$$f(m-2) - 3f(m) = f(-2m+1). \quad (24)$$

Thay $n = -1$ vào (1) ta được

$$f(m-1) - 2f(m) = f(-m+1). \quad (25)$$

Thay m bởi $2m$ vào (25) ta được

$$f(2m-1) - 2f(2m) = f(-2m+1) \quad (26)$$

$$\Rightarrow f(2m-1) - 2f(2m) = f(m-2) - 3f(m). \quad (27)$$

Theo (1) ta có

$$f(m+1) + f(2)f(m-1) = f(2m-1).$$

Do đó kết hợp với (27) ta được

$$2f(2m) = f(m+1) + 3f(m) + f(m-1) - f(m-2). \quad (28)$$

Quy nạp ta được

$$f(m) = m - 1, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

- Nếu $f(-1) \neq -2$ thì $f(-1) = 1$. Khi đó $f(-2) = 0$. Lại quy nạp ta được

$$f(3m) = -1, f(3m+1) = 0, f(3m+2) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Sau khi thử lại, ta được các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(m) = 0, \forall m \in \mathbb{Z};$$

$$f(m) = m - 1, \forall m \in \mathbb{Z};$$

$$f(m) = m^2 - 1, \forall m \in \mathbb{Z};$$

$$f(3m) = -1, f(3m+1) = 0, f(3m+2) = 1, \forall m \in \mathbb{Z};$$

$$f(2m+1) = 0, f(2m) = -1, \forall m \in \mathbb{Z};$$

$$f(2m+1) = 0, f(2m) = (-1)^{m+1}, \forall m \in \mathbb{Z};$$

$$f(m) = 1 - 2 \cos \frac{m\pi}{3}, \forall m \in \mathbb{Z};$$

$$f(3m) = -1, f(3m+1) = 0, f(3m+2) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}.$$