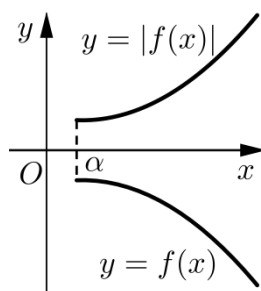
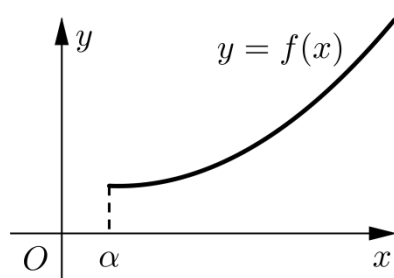


TÍNH ĐƠN ĐIỀU HÀM GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $[\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi

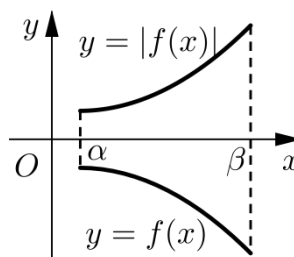
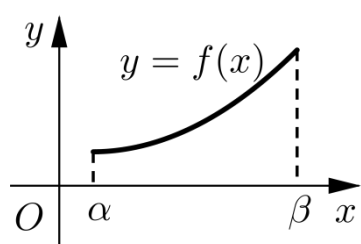


$$\checkmark \begin{cases} y'(\alpha) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

✓

$$\begin{cases} y'(\alpha) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

- Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(\alpha; \beta)$ khi và chỉ khi



$$\checkmark \begin{cases} y'(\alpha) \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

✓

$$\begin{cases} y'(\alpha) \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

- Các dạng đồng biến $y = |f(x)|$ trên $(-\infty; a], [\alpha; \beta]$ ta thực hiện tương tự.

- Hàm số hời nghịch biến làm ngược lại

1. Dạng 1: Tìm điều kiện tham số m để hàm $y = |f(x)|$ với $f(x)$ là hàm số dạng đa thức đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. 2.

B. 0.

C. 4.

D. 1.

Lời giải:

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8$.

TH1: $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (-\infty; 1)$ thì hàm số $y = |f(x)|$ không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

TH2: $f(x) = 0$ không có nghiệm $x_0 \in (-\infty; 1)$.

Ta có: $f'(x) = 5x^4 - 10x + 5(m-1)$.

Khi đó $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \leq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty; 1) \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 5x^4 - 10x + 5(m-1) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1) \\ f(1) = 5m - 17 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^4 + 2x + 1, \forall x \in (-\infty; 1) \\ m \leq \frac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(-\infty; 1)} (-x^4 + 2x + 1) = \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \\ m \leq \frac{17}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \leq m \leq \frac{17}{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 3.$$

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |2x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 2.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - mx + 1$.

TH1: $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in 1; +\infty$ thì hàm số $y = |f(x)|$ không thể đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

TH2: $f(x) = 0$ không có nghiệm $x_0 \in 1; +\infty$.

Ta có: $f'(x) = 6x^2 - m$.

Khi đó $y = |2x^3 - mx + 1| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in 1; +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in 1; +\infty \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - mx + 1 > 0 \\ 6x^2 - m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in 1; +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m + 1 \geq 0 \\ 6 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 \Rightarrow m \in 1; 2; 3.$$

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

- Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$					

$\swarrow$ $m-5$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

Nhận thấy: hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 10 \end{cases} \Rightarrow m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m - 4|$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ là

A. $[2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2]$. C. $(-\infty; 4]$.

D. $[4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m - 4$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng BT của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Vì đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị ở phía dưới lên trên qua trục Ox .

Vậy hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(3; +\infty) \Leftrightarrow f(3) \geq 0$

$$\Leftrightarrow m - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 4$$

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?

A. $m \geq 1$.

B. $m \in \emptyset$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } f(x) = x^4 + 2x^3 + mx + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + m.$$

$$y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2| = |f(x)|.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \\ f(-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 6x^2 + m \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \\ 1 - m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4x^3 - 6x^2, \forall x \in (-1; +\infty) \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(-1; +\infty)} (-4x^3 - 6x^2) \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1.$$

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số

$$y = |-x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)| \text{ đồng biến trên khoảng } (0; 1)?$$

A. 21.

B. 10.

C. 8.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)$ trên khoảng $(0; 2)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) = -3[x^2 - 2(m+1)x + m(m+2)].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} \quad (m < m+2).$$

$$\text{Nhận xét: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	m	$m+2$	$m+3$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$	$\searrow$ 0	$-\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$	$\searrow$ 0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (0;1) \subset (m; m+2) \\ (0;1) \subset (m+3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 < 1 \leq m+2 \\ m+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ m \leq -3 \end{cases}.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-10;10]$ nên có 10 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4;4)$ để hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1 \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

A. 5.

B. 4. C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x + m$.

Ta có: $\Delta' = 1 - m$

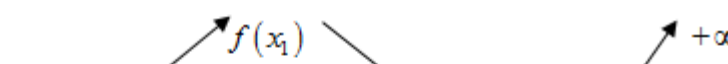
+ Trường hợp 1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$. Suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ \frac{1}{3} + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-4;4)$ ta được $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$. Ta có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 1$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ f'(1) > 0 \\ \frac{5}{2} - 1 < 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ f'(1) > 0 \\ 1 - 1 < 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \emptyset$$

Vậy tất cả có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc $[-5;5]$ của m để hàm số

$$g(x) = \left| \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3} \right|$$

đồng biến trên $(1;5)$ là:

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$

$$f'(x) = x^2 + 2(m-1)x + 2m-3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3-2m \end{cases}$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1;5)$ khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau:

$$+, TH1: \begin{cases} f(x) \text{ đồng biến trên } (1;5) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2m \leq 1 \\ 3m-4-\frac{1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ 3m \geq \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{13}{9}$$

Kết hợp điều kiện m nguyên và thuộc $[-5;5]$ ta được $m \in \{2;3;4;5\}$

$$+, TH2: \begin{cases} f(x) \text{ nghịch biến trên } (1;5) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq 3-2m \\ 3m-4-\frac{1}{3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ 3m \leq \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$$

Kết hợp điều kiện m nguyên và thuộc $[-5;5]$ ta được $m \in \{-1;-2;-3;-4;-5\}$

Vậy tổng tất cả các số nguyên của m để hàm số đồng biến trên $[-5;5]$ là: -1.

Tác giả: Đào Thị Hương Facebook: Hương Đào

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số thực m để hàm số

$$y = |x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x| \text{ đồng biến trên khoảng } (0;4)?$$

A. 4033.

B. 4032.

C. 2018.

D.

2016.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x$ trên khoảng $(0;4)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6(m+2)x + 3m(m+4) = 3[x^2 - 2(m+2)x + m(m+4)]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+4 \end{cases} \quad (m < m+4)$$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0;0)$.

Trường hợp 1: Nếu $m > 0$

x	$-\infty$	0	m	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$		0			
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow (0;4) \subset (0;m) \Leftrightarrow m \geq 4$

Kết hợp với $m > 0$, ta có $m \geq 4$.

Trường hợp 2: Nếu $m \leq 0 < m+4 \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$

x	$-\infty$	m	0	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$			0		
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow (0;4) \subset (0;m+4) \Leftrightarrow m+4 \geq 4$
 $\Leftrightarrow m \geq 0$

Kết hợp với $-4 < m \leq 0$, ta có $m = 0$.

Trường hợp 3: Nếu $m+4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$

x	$-\infty$	m	$m+4$	0	$+\infty$
$f(x)$				0	
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ với mọi $m \leq -4$. Vậy $\begin{cases} m \geq 4 \\ m = 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-2019; 2019]$ nên có 4033 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 10.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m < 5$ để hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m \right|$ đồng biến trên $(0, +\infty)$?
- A. 2 **B. 4** C. 6 D. 8

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m$ ta có $y' = x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó điều kiện hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m \right|$ đồng biến trên $(0, +\infty)$ là $y_{(0)} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$.

Lại có m nguyên dương và $m < 5$ vậy có 4 giá trị của m

- Câu 11.** Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |x^5 - mx + 4|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- A. 4 . **B. 5.** C. 6 . D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \begin{cases} x^5 - mx + 4 & \text{khi } (x^5 - mx + 4 \geq 0) \\ -x^5 + mx - 4 & \text{khi } (x^5 - mx + 4 < 0) \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 5x^4 - m & \text{khi } (x^5 - mx + 4 \geq 0) \\ -5x^4 + m & \text{khi } (x^5 - mx + 4 < 0) \end{cases}$

TH1: $y' = \begin{cases} 5x^4 - m \geq 0 \\ x^5 - mx + 4 \geq 0 \end{cases}, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5x^4 \\ m \leq x^4 + \frac{4}{x} \end{cases}, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \leq 1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5.$

$$\text{TH2: } y' = \begin{cases} -5x^4 + m \geq 0 \\ x^5 - mx + 4 < 0 \end{cases}, \forall x \geq 1. \text{ Hệ vô nghiệm vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - mx + 4) = +\infty.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \leq 5 \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Câu 12. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 12.

B. 8.

C. 11.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x) = 2x^3 - 2mx + 3$ có $f'(x) = 6x^2 - 2m$

TH1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và $f(1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 2m \geq 0 \\ 5 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2 \forall x \in (1; +\infty) \\ m \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$$

Suy ra có 12 giá trị m thỏa yêu cầu

TH2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và $f(1) \leq 0$

Trường hợp này không xảy ra do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Vậy có tất cả 12 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 13. Cho hàm số $y = |x^5 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số nguyên dương m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 15

B. 14

C. 12

D. 13

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{x^5 - mx + 1}{|x^5 - mx + 1|} \cdot (5x^4 - m)$$

Để hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì $g(x) = (x^5 - mx + 1)(5x^4 - m) \geq 0$ (*), $\forall x \geq 1$.

Với $m = 0$ ta có $g(0) = (x^5 + 1) \cdot 5x^4 > 0, \forall x \geq 1$.

Với $m > 0$. Do $m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (*) luôn có 1 nghiệm là $\sqrt[4]{\frac{m}{5}}$. Ta chú ý $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Do vậy, điều kiện cần để $g(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ là $\sqrt[4]{\frac{m}{5}} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 5$.

Với $m=1, m=2; m=3; m=4; m=5$, thay vào (*) kiểm tra BXD thấy đúng
 $\Rightarrow$ nhận $m=1; m=2; m=3; m=4; m=5$

Vậy $S = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Tổng các phần tử của S là 15.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2mx + m + 2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9; 9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

A. 3 **B. 2** **C. 16** **D. 9**

Lời giải

Xét hàm $g(x) = x^2 - 2mx + m + 2$. Ta có $g'(x) = 2x - 2m$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(0) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \text{ hoặc } \begin{cases} g(0) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2).$$

Trường hợp 1.

$$\begin{cases} g(0) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \geq 0 \\ -2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Trường hợp 2.

$$\begin{cases} g(0) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \leq 0 \\ -2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Do m là nguyên thuộc $[-9; 9]$ nên $m \in \{-2, -1, 0\}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9; 9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

A. 3. **B. 2.** **C. 16.** **D. 9.**

Lời giải

Xét hàm $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3}$. Ta có

$$g'(x) = -x^2 + (2m+3)x - (m^2+3m) = -(x-m)(x-m-3).$$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \text{ hoặc } \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2).$$

Trường hợp 1.

$$\begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - 2m + 4 \leq 0 \\ -(x-m)(x-m-3) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \\ m \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Trường hợp 2.

$$\begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - 2m + 4 \geq 0 \\ -(x-m)(x-m-3) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-2; 1] \\ m \in (-\infty, -2] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Do m là nguyên thuộc $[-9; 9]$ nên $m \in \{1, -2\}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. 4.

B. 30.

C. 8.

D. 15.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Thảo Facebook: Nguyễn Thanh Thảo

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m & (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \geq 0) \\ -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - m & (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0) \end{cases}$$

$$\text{Nên } y' = \begin{cases} 12x^3 - 12x^2 - 24x & (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \geq 0) \\ -12x^3 + 12x^2 + 24x & (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\text{TH1: } \begin{cases} 12x^3 - 12x^2 - 24x \leq 0 \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \geq 0 \end{cases}, \forall x > 1$$

$$m \geq -3x^4 + 4x^3 + 12x^2, \forall x < -1 \Leftrightarrow m \geq 5$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} -12x^3 + 12x^2 + 24x \leq 0 \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Rightarrow \text{Hệ này vô nghiệm.}$$

Vậy $m \in \{5; 6; \dots; 19\}$. Có 15 số nguyên thỏa mãn.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + 9|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. 3.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} x^4 - mx^2 + 9 & (x^4 - mx^2 + 9 \geq 0) \\ -x^4 + mx^2 - 9 & (x^4 - mx^2 + 9 < 0) \end{cases}$$

$$\text{Nên } y' = \begin{cases} 4x^3 - 2mx & (x^4 - mx^2 + 9 \geq 0) \\ -4x^3 + 2mx & (x^4 - mx^2 + 9 < 0) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\text{TH1: } \begin{cases} 4x^3 - 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 \geq 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2x^2 \\ m \leq x^2 + \frac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2x^2 \\ m \leq x^2 + \frac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} -4x^3 + 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 < 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Rightarrow \text{Hệ này vô nghiệm vì khi } x \rightarrow +\infty \text{ thì } x^4 - mx^2 + 9 \rightarrow +\infty.$$

Câu 18. Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1 \right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$. Chọn mệnh đề sai?

- A. S có 4 phần tử.
- B. Tổng các giá trị của m thuộc S bằng 6.
- C. Tích các giá trị của m thuộc S bằng 0.
- D. Giá trị m lớn nhất thuộc S bằng 4.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = x^2 - (m+3)x + 2m+3.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (m+3)x + (2m+3) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ 16 - 4(m+3) + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}, \forall x \in (4; +\infty) \\ m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[4; +\infty)} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} \\ m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{7}{2} \\ m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{2}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \leq 0 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - (m+3)x + (2m+3)) = +\infty$.

Vậy $m \leq \frac{7}{2}$, m nguyên dương nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Chọn D.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = |x^3 - (2m-5)x + 2018|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019; 2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

A. 3032.

B. 4039.

C. 0.

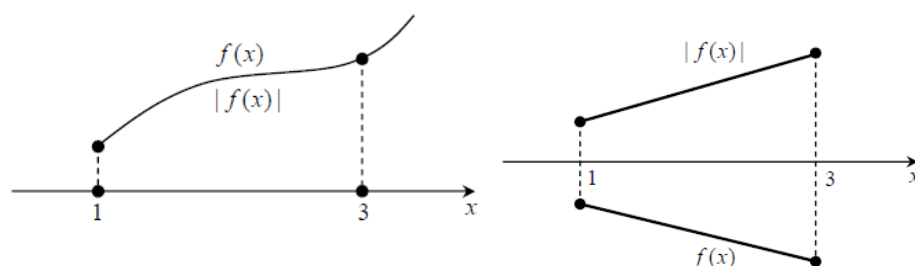
D. 2021.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - (2m-5)x + 2018$, có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - (2m-5)$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ thì đồ thị của hàm số trong khoảng $(1; 3)$ phải có hình dạng như sau:



Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(1; 3)$ và không âm trên $(1; 3)$ tức là:

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \forall x \in (1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \leq 3x^2 + 5 \forall x \in (1; 3) \\ 2024 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m \leq 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 4.$$

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;3)$ và không dương trên $(1;3)$ tức là :

$$\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 3x^2 + 5 \quad \forall x \in (1;3) \\ 2024 - 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \geq 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1012.$$

Kết hợp với điều kiện ta được kết quả $m \in [-2019; 4] \cup [1012; 2019]$. Vậy có 3032 giá trị của m .

Câu 20. Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty]$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 3

B. 1

C. 9

D. 10

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{x^3 - mx + 1}{|x^3 - mx + 1|} \cdot (3x^2 - m)$$

Để hàm số đồng biến trên $[1; +\infty]$ thì $g(x) = (x^3 - mx + 1)(3x^2 - m) \geq 0$ (*), $\forall x \geq 1$.

Với $m = 0$ ta có $g(0) = (x^3 + 1) \cdot 3x^2 > 0, \forall x \geq 1$.

Với $m > 0$. Do $m \in \mathbb{N} \Rightarrow (*)$ luôn có 1 nghiệm là $\sqrt{\frac{m}{3}}$. Ta chú ý $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Do vậy, điều kiện cần để $g(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ là $\sqrt{\frac{m}{3}} \leq 1 \Rightarrow m \leq 3$.

Với $m = 1, m = 2$ thay vào (*) kiểm tra BXD thấy đúng $\Rightarrow$ nhận $m = 1; m = 2$.

Với $m = 3$ thì $g(x) = (x^3 - 3x + 1)(3x^2 - 3)$ có một nghiệm $x_0 > 1 \Rightarrow$ do vậy trên miền $[1; x_0]$ thì $g(x) < 0 \Rightarrow$ trái yêu cầu bài toán.

Vậy $S = \{0; 1; 2\}$. Tổng các phần tử của S là 3.

Bài 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0; +\infty)$ biết rằng $-2021 \leq m \leq 2021$?

A. 2020.

B. 2021.

C. 2022.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $y = f(x) = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} (m < m+2, \forall m).$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$						$+\infty$

Gọi (C_1) là phần đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nằm trên $0x$.

Gọi (C_2) là phần đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nằm dưới $0x$.

Gọi (C'_2) là phần đồ thị đối xứng với (C_2) qua $0x$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ gồm $(C_1) \cup (C'_2)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+2 \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2$.

Kết hợp với điều kiện $-2021 \leq m \leq 2021$, ta suy ra có 2020 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 21. Gọi $S = [a; +\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$y = |x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. Khi đó a bằng

A. -3.

B. 19.

C. 3.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.

TH1: $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \geq 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m \geq 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \geq \max_{x \in (-2; +\infty)} (-3x^2 + 6x) \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 19.$$

TH2: $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases}.$

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m \leq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m - 19 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m \leq 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \leq \min_{(-2; +\infty)} (-3x^2 + 6x) \\ m \leq 19 \end{cases}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + 6x) = -\infty \Rightarrow$ hàm số $y = -3x^2 + 6x$ không có giá trị nhỏ nhất. Vì vậy TH2

không có giá trị m thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m cần tìm là $S = [19; +\infty)$.

2. Dạng 2: Tìm điều kiện tham số m để hàm $y = |f(x)|$ với $f(x)$ là hàm số dạng phân thức hữu tỉ đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước.

Câu 22. Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10; 10]$ để hàm số

$$y = \left| \frac{mx + 3}{x + m + 2} \right| \text{ đồng biến trên } (1; +\infty).$$

A. $S = 55$.

B. $S = 54$.

C. $S = 3$.

D. $S = 5$.

Lời giải

Tác giả: Chungthanh Vu Facebook Chungthanh Vu

Chọn B.

Xét hàm số $y = \frac{mx + 3}{x + m + 2}$ với $x \neq -m - 2$, có $y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + m + 2)^2}$.

Hàm số $y = \left| \frac{mx + 3}{x + m + 2} \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau :

$$+ \text{ TH 1: } \begin{cases} y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + m + 2)^2} > 0 \\ y(1) \geq 0 \\ -m - 2 \notin (1; +\infty) \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ \frac{m + 3}{m + 3} \geq 0 \\ -m - 2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

$$+ \text{ TH 2: } \begin{cases} y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + m + 2)^2} < 0 \\ y(1) \leq 0 \\ -m - 2 \notin (1; +\infty) \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 < 0 \\ \frac{m+3}{m+3} \leq 0 \\ -m - 2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy $m \in (1; +\infty)$, lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases}$ suy ra $m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, vậy $S = 54$.

Câu 23. Tìm m để hàm số $y = \left| \frac{x - 2m + 1}{x + m} \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

A. $\frac{1}{3} < m \leq 1$.

B. $m \in [-1; 1] \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

C. $-1 \leq m < \frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3} < m \leq 1$.

Lời giải

Tác giả: Ai Pha Facebook AI Pha

Chọn B

Đặt $f(x) = \frac{x - 2m + 1}{x + m}$. ĐK: $x \neq -m$

khi đó $f'(x) = \frac{3m - 1}{(x + m)^2}$

Để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|} \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \quad \text{(I)} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \quad \text{(II)}$

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 > 0 \\ -m \leq 1 \\ \frac{2 - 2m}{1 + m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m \leq 1; \quad \text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 < 0 \\ -m \leq 1 \\ \frac{2 - 2m}{1 + m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

Vậy $\frac{1}{3} < m \leq 1$.

Câu 24. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| \frac{x^2 - 2x + 2m + 2}{x - 1} \right|$ đồng biến trên $[3; +\infty)$?

A. 4.

B. 5.

C. vô số.

D. 6.

Lời giải

Tác giả: Kiên Cao Văn Facebook Kiên Cao Văn

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2m + 2}{x - 1}$.

Có $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2m}{(x - 1)^2}$

Khi đó $y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên $[3; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty) \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 2m + 2}{x - 1} > 0 \\ \frac{x^2 - 2x - 2m}{(x - 1)^2} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2m + 2 > 0 \\ x^2 - 2x - 2m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > -x^2 + 2x \\ 2m \leq x^2 - 2x \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > \max_{[3; +\infty)}(-x^2 + 2x) \\ 2m \leq \min_{[3; +\infty)}(x^2 - 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > -3 \\ 2m \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{5}{2} \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases}. \forall m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25. Tìm tất cả các giá thực của tham số m để hàm số $y = \left| x - \frac{2}{x} + m \right|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

A. $m \leq -1$.

B. $-1 < m \leq 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Tác giả: Long Giang Vo Facebook Long Giang Vo

Chọn C

$$+ \text{Ta có: } y = \left| x - \frac{2}{x} + m \right| = \sqrt{\left(x - \frac{2}{x} + m \right)^2} \Rightarrow y' = \frac{\left(x - \frac{2}{x} + m \right) \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)}{\sqrt{\left(x - \frac{2}{x} + m \right)^2}}$$

+ Hàm số đồng biến trên $[1; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{2}{x} + m\right) \geq 0 \\ \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{x} + m\right) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{x} + m\right) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -x + \frac{2}{x}, \forall x \in [1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{[1; +\infty)} \left(-x + \frac{2}{x}\right) (*)$$

+ Xét hàm số $g(x) = -x + \frac{2}{x}, \forall x \in [1; +\infty) \Rightarrow g'(x) = -1 - \frac{2}{x^2} < 0, \forall x \in [1; +\infty)$

$$\Rightarrow \max_{[1; +\infty)} g(x) = \max_{[1; +\infty)} \left(-x + \frac{2}{x}\right) = g(1) = 1$$

Vậy $(*) \Leftrightarrow m \geq 1$.

Câu 26. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = \left|x + 1 + \frac{m^2 - 2m - 1}{x + 1}\right|$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ là $[a; b]$. Tính ab .

A. -10.

B. -9.

C. 2.

D. -7.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hiền Facebook Nguyễn Hiền

Chọn A

Xét hàm

$$\text{số } f(x) = x + 1 + \frac{m^2 - 2m - 1}{x + 1}. \text{ Ta có } f'(x) = 1 - \frac{m^2 - 2m - 1}{(x + 1)^2}$$

$$\text{Khi đó } y = \left|x + 1 + \frac{m^2 - 2m - 1}{x + 1}\right| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \text{ nên } y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \text{ (vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + \frac{m^2 - 2m - 1}{x + 1} > 0 \\ 1 - \frac{m^2 - 2m - 1}{(x + 1)^2} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 1 > -(x + 1)^2 \\ m^2 - 2m - 1 \leq (x + 1)^2 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 1 \geq \max_{(2; +\infty)} [-(x+1)^2] = -9 \\ m^2 - 2m - 1 \leq \min_{(2; +\infty)} (x+1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 8 \geq 0 \\ m^2 - 2m - 10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{11} \leq m \leq 1 + \sqrt{11}$$

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \left| \frac{x+m}{x+1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

A. $m < -1$.

B. $m > 1$.

C. $-1 \leq m \leq 1$.

D. $-1 \leq m < 1$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền, Facebook: Nguyễn Thị Huyền

Chọn D.

ĐKXĐ: $x \neq -1$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x+m}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Khi đó ta có } y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ nếu $y' \geq 0 \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \forall x \in (1; +\infty)$

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) > 0 \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ \frac{1+m}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 1$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) < 0 \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ \frac{1+m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \emptyset$$

Vậy $m \in [-1; 1)$ là giá trị cần tìm.

Câu 28. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \left| \frac{x^3 - 2mx + 2}{x-1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

A. 3

B. 4

C. 2

D. 5

Lời giải

Tác giả: Phạm Đức Thành Facebook: pham duc

thanh

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 2mx + 2}{x - 1}$. Ta có: $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2m - 2}{(x - 1)^2}$.

Khi đó $y = \left| \frac{x^3 - 2mx + 2}{x - 1} \right| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \quad (\text{do } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) \geq 0 \\ \frac{2x^3 - 3x^2 + 2m - 2}{(x - 1)^2} \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 4m \geq 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 2m - 2 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ 2m \geq -2x^3 + 3x^2 + 2, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ 2m \geq \max_{x \in [2; +\infty)} (-2x^3 + 3x^2 + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ 2m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{5}{2}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên dương của m là 3.

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \left| \frac{x - m}{x + m + 3} \right|$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Tác giả: Thanh Vân. Facebook: Thanh Van

Chọn A

Đặt $f(x) = \frac{x - m}{x + m + 3}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m - 3\}$. Ta có $f'(x) = \frac{2m + 3}{(x + m + 3)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{|f(x)|} \leq 0, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty).$$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 > 0 \\ -m-3 \leq 2 \\ \frac{2-m}{5+m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \geq -1 \\ -5 < m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 < 0 \\ -m-3 \leq 2 \\ \frac{2-m}{5+m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ m \geq -1 \\ m \geq 2 \vee m < -5 \end{cases} \quad (\text{không có } m \text{ thỏa mãn}).$$

Vậy $-1 \leq m \leq 2$, mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 4 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = \left| x + 5 + \frac{1-m}{x-2} \right|$ đồng biến trên $[5; +\infty)$?

A. 11.

B. 10.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Tác giả: Trần Nhung. Facebook: Trần Nhung

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Xét hàm số $f(x) = x + 5 + \frac{1-m}{x-2}$. Đạo hàm: $f'(x) = 1 + \frac{m-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + m + 3}{(x-2)^2}$.

Khi đó $y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên $[5; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in [5; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in [5; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [5; +\infty) \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 + \frac{1-m}{x-2} > 0 \\ 1 + \frac{m-1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [5; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m < x^2 + 3x - 9 \\ m \geq -x^2 + 4x - 3 \end{cases}, \forall x \in [5; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \min_{[5; +\infty)} (x^2 + 3x - 9) \\ m \geq \max_{[5; +\infty)} (-x^2 + 4x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5^2 + 3 \cdot 5 - 9 \\ m \geq -5^2 + 4 \cdot 5 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow -8 \leq m < 31.$$

Mà m nguyên âm nên ta có: $m \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = \left| x + 5 + \frac{1-m}{x-2} \right|$ đồng biến trên $[5; +\infty)$.

Câu 31. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| \frac{x^2 + x + 2m - 3}{x - 1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Nga Nvc. Facebook: Nguyễn Nga Nvc

Chọn A

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^2 + x + 2m - 3}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2 - 2m}{(x - 1)^2}$$

$$\text{Khi đó } y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}} \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty), \text{ do } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(3) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9 + 2m}{2} \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2 - 2m \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{9}{2} \\ x^2 - 2x + 2 \geq 2m, \forall x \in (3; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{9}{2} \\ x^2 - 2x + 2 \geq 2m, \forall x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{9}{2} \\ m \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$$

Ta có $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left| \frac{x - m + 1}{x + m} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. $m \leq \frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 2$.

B. $\frac{1}{2} < m < 2$.

C. $\frac{1}{2} < m \leq 2$.

D. $\frac{1}{2} \leq m \leq 2$.

Lời giải

Tác giả: Nhật Thiện. Facebook: Nhật Thiện

Chọn C

Đặt $f(x) = \frac{x-m+1}{x+m}, (x \neq -m) \Rightarrow f'(x) = \frac{2m-1}{(x+m)^2}$

Để hàm số y đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $y' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|} \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ -m \leq 1 \\ \frac{2-m}{m+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq -1 \\ m < -1 \vee 2 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 > 0 \\ -m \leq 1 \\ \frac{2-m}{1+m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \geq -1 \\ -1 < m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \leq 2$$

Vậy để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $\frac{1}{2} < m \leq 2$.

3. Dạng 3: Tìm điều kiện tham số m để hàm $y = |f(x)|$ với $f(x)$ là hàm số chứa căn đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước.

Câu 33. Cho hàm số $y = \left| \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \frac{m}{2}x - 1 \right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

A. 4

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \frac{m}{2}x - 1$

Ta có $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2+x}} + \frac{m}{2}$

Do hàm số liên tục tại $x=0; x=1$ nên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ \frac{m}{2} \geq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \leq \min_{x \in [0;1]} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \right\} \\ m \geq -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} \leq m \leq 0$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ \frac{m}{2} \leq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \geq \max_{x \in [0;1]} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \right\} \\ \frac{m}{2} \leq -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (vô nghiệm).} \\ m \leq -2\sqrt{3} \end{cases}$$

Do m nguyên nên m nhận các giá trị sau $-3; -2; -1; 0$

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để hàm số $y = \left| \sqrt{x^2 - 3} - 2x - 3m \right|$ nghịch biến trên $(2; 3)$?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} - 2x - 3m$

Ta có: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} - 2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x - 2\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{x^2 - 3}}$.

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Rightarrow x - 2\sqrt{x^2 - 3} = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Ta thấy $f'(x) < 0, \forall x \in (2; 3)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(2; 3)$.

Để $y = \sqrt{x^2 - 3} - 2x - 3m$ nghịch biến trên $(2; 3)$ thì

$$f(3) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} - 6 - 3m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{\sqrt{6} - 6}{3}$$

Do $m \in (-5; 5)$ nên $m = \{-2; -3; -4\}$.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để hàm số $y = \left| x + m\sqrt{x^2 - 2x + 3} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 11.

B. 10.

C. 12.

D. 9.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Thúy. Facebook: Vũ Thị

Thúy

Chọn A

+ TXĐ $D = \mathbb{R}$

+ Xét hàm số $f(x) = x + m\sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

$$+ f'(x) = 1 + m \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

$$+ \text{Hàm số đồng biến trên khoảng } (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$$

*) TH1:

$$+ f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 1 + m \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} + m(x-1) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty).$$

$$+ \text{Đặt } t = x - 1, t > 0 \Rightarrow \sqrt{t^2 + 2} + mt \geq 0 \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-\sqrt{t^2 + 2}}{t}, \forall t > 0$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{-\sqrt{t^2 + 2}}{t}, \quad f'(t) = \frac{2}{t^2 \sqrt{t^2 + 2}} > 0 \quad \forall t > 0. \text{BBT:}$$

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	$-\infty$	-1

Từ

BBT

ta

có

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 1 + m \cdot \sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \geq \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

*) TH2:

$$+ f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 1 + m \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \leq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} + m(x-1) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty).$$

$$+ \text{Đặt } t = x - 1, t > 0 \Rightarrow \sqrt{t^2 + 2} + mt \leq 0 \quad (*), \forall t > 0$$

$$+ \text{Mà } \lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{t^2 + 2} + mt) = 2 > 0 \text{ nên với mỗi giá trị của } m \text{ luôn có giá}$$

trị của t dương đủ nhỏ để VT của (*) lớn hơn 0. Suy ra không có giá trị nào của m để TH2 thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \left| \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + m \right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. Số phần tử của tập S là

A. 2018.

B. 2017.

C. 2019.

D. 4039.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Toàn; Facebook: Nguyễn Văn Toàn

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + m$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$$\text{Ta có, } g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - 1 = \frac{x+1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} < 0, \forall x > -1$$

$$(\text{Do } x+1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = (x+1) - \sqrt{(x+1)^2 + 1} < 0, \forall x > -1)$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Suy ra, hàm số $f(x) = |g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq 0, \forall x > -1 \quad (1)$$

Do hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1; +\infty)$.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow \max_{[-1; +\infty)} g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(-1) = m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$$

Vậy $S = \{-2019; -2018; \dots; -2\}$, nên suy ra đáp án là **A**.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = |3\sqrt{x^2+1} + x + m|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Việt Thảo. Facebook: Việt Thảo

Chọn A

$$\text{- Xét hàm số } f(x) = 3\sqrt{x^2+1} + x + m \Rightarrow f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} + 1.$$

$$\text{Trên } (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0.$$

BBT:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$3\sqrt{2} + 1 + m$	$+\infty$

Nhận thấy: hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow 3\sqrt{2} + 1 + m \geq 0$
 $\Leftrightarrow m \geq -3\sqrt{2} - 1.$

$$\text{Lại do } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}.$$

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |4\sqrt{x^2+2x+3} + 5x - m^2 + 5|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 9

B. 6

C. 11 **D.** 8

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 5x - m^2 + 5$ xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = \frac{4(x+1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} + 5$$

Với $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow f(1) \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 10 + 4\sqrt{6} \geq 0$
 $\Leftrightarrow m^2 \leq 10 + 4\sqrt{6} \Leftrightarrow -2 - \sqrt{6} \leq m \leq 2 + \sqrt{6}$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ suy ra chọn đáp án A

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = |\sqrt{x^2 + 3} + 2x + m^2 - 5m|$. Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

A. $(-\infty; 0]$.

B. $(1; 4)$.

C. $(-\infty; 2)$.

D. $[3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

+Đặt $g(x) = \sqrt{x^2 + 3} + 2x + m^2 - 5m$.

Ta có $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + 2 > 0 \forall x \in (1; +\infty)$.

+Để thấy $g(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ và $g'(x) > 0 \forall x \in (1; +\infty)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

$$\Rightarrow g(1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \geq 0 (*)$$

Nên $y = f(x) = |g(x)|$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow f(1) \geq 0$ kết hợp với (*) ta có :

$$m^2 - 5m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 4 \end{cases} \cdot \begin{cases} m \in (-\infty; 1] \\ m \in [4; +\infty) \end{cases}. \text{ Mà } m \in (-\infty; 0] \subset (-\infty; 1].$$

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |\sqrt{-x^2 + 6x} + m|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$?

A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 10.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Huyền. Facebook:

Thu Huyền

Chọn D

TXĐ: $D = [0; 6]$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x} + m \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x}} = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

BBT:

x	0	3	6
f'(x)	+	0	-
f(x)	m	m+3	m

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 10 \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị là.

A. 2016.

B. 1952.

C. -2016.

D. -496.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m}{2}-32$	$+\infty$	

Do $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$ nên

? Nếu $\frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 > 3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	-1	3	x_0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$-\frac{m}{2}$	$-\frac{m}{2} + 32$	0	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

? Nếu $\frac{m}{2} - 32 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 64$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 < -1$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	x_0	-1	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	$\frac{m}{2}$	$\frac{m}{2} - 32$	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

? Nếu $\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{m}{2} - 32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 64$ thì $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} = 0$ có ba nghiệm $x_1; x_2; x_3$ với $x_1 < -1 < x_2 < 3 < x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	3	x_3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$\frac{m}{2}$	0	$32 - \frac{m}{2}$	0	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m \in \{1; 2; 3; \dots; 63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 63 = \frac{63(1+63)}{2} = 2016.$$

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$

- A. 4042 B. 4039 C. 4040 **D. 4041**

Lời giải

Chọn D.

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$. Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m$

Vì hàm số liên tục tại $x=1$; $x=2$ nên để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ ta xét hai trường hợp sau:

$$\begin{aligned} \text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2] \\ f(1) \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \geq 0, \forall x \in [1; 2] \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in [1; 2] \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[1; 2]} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \sqrt{2} - 1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in [1; 2] \\ f(1) \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \leq 0, \forall x \in [1; 2] \\ m \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in [1; 2] \\ m \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[1; 2]} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ m \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} m \geq \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2020; 2020] \end{cases}$ nên có 4041 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4. Dạng 4: Tìm điều kiện tham số m để hàm $y = |f(x)|$ với $f(x)$ là hàm số lượng giác đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước.

- Câu 43.** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = f(x) = |x^3 - 3x^2 + 3(m^2 + 5)x + (12 - 3m^2)\cos x|$ đồng biến trên $(0; \pi)$
- A. 3. **B. 5.** C. 4. D. Vô số

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } h(x) = x^3 - 3x^2 + 3(m^2 + 5)x + (12 - 3m^2)\cos x.$$

$$\text{Ta có } h'(x) = 3x^2 - 6x + 3(m^2 + 5) - (12 - 3m^2)\sin x.$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = 3(x-1)^2 + 12(1 - \sin x) + 3m^2(1 + \sin x) \geq 0 \quad \forall x \in (0; \pi).$$

Vậy hàm số $h(x)$ luôn đồng biến trên $(0; \pi)$.

$$\text{Để } y = f(x) \text{ đồng biến trên } (0; \pi). \text{ Thì } h(0) \geq 0 \Leftrightarrow (12 - 3m^2) \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-2; 2].$$

Kết luận: có 5 giá trị m nguyên thỏa mãn.

- Câu 44.** Các giá trị của tham số m để hàm số $y = |\sin x - \cos x + m|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ là
- A. $m > \sqrt{2}$. **B. $m \geq \sqrt{2}$.** C. $m > 1$. D. $m \geq 1$.

Lời giải

Tác giả: Thanh Nhã. Facebook: Nhã Thanh

Chọn B

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \sin x - \cos x + m = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + m \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Khi đó } y = |\sin x - \cos x + m| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}. \text{ Nên } y' = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}.$$

$$\text{Hàm số } y = |\sin x - \cos x + m| \text{ đồng biến trên khoảng } \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y' \geq 0; \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot f'(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \quad (1).$$

$$\text{Với } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot (-1) + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}.$$

Câu 45. Cho hàm số $y = |\sin^3 x - m \sin x + 1|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến. Đặt $t = \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Khi đó hàm số $y = |\sin^3 x - m \sin x + 1|$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$y = g(t) = |t^3 - mt + 1| \text{ đồng biến trên } (0; 1)$$

Xét hàm số $y = f(t) = t^3 - mt + 1$ trên khoảng $(0; 1)$ có $f'(t) = 3t^2 - m$.

+) Khi $m = 0$: $f'(t) = 3t^2 > 0, \forall t \Rightarrow y = f(t) = t^3 + 1$ đồng biến trên $(0; 1)$ và đth $y = f(t) = t^3 + 1$ cắt trục hoành tại điểm duy nhất $t = -1$

$$\Rightarrow y = g(t) = |t^3 - mt + 1| \text{ đồng biến trên } (0; 1) \Rightarrow m = 0 \text{ thỏa mãn}$$

+) Khi $m > 0$: $f'(t) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = -\sqrt{\frac{m}{3}}, t_2 = \sqrt{\frac{m}{3}}$.

Hàm số $y = f(t) = t^3 - mt + 1$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và $\left(\sqrt{\frac{m}{3}}; +\infty\right)$

$$\text{TH1: } -\sqrt{\frac{m}{3}} < 0 < \sqrt{\frac{m}{3}} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 3$$

Hàm số $y = f(t) = t^3 - mt + 1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và đồng biến trên

$$\text{khoảng } \left(\sqrt{\frac{m}{3}}; 1\right)$$

$$\Rightarrow \text{Không có giá trị của } m \text{ để } y = g(t) = |t^3 - mt + 1| \text{ đồng biến trên } (0; 1)$$

$$\text{TH2: } -\sqrt{\frac{m}{3}} < 0 < 1 \leq \sqrt{\frac{m}{3}} \Leftrightarrow m \geq 3$$

Để $y = g(t) = |t^3 - mt + 1|$ đồng biến trên $(0; 1)$ thì $t^3 - mt + 1 \leq 0, \forall t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow mt \leq t^3 + 1, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq t^2 + \frac{1}{t}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \text{Không có giá trị của } m \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy chỉ có giá trị $m=0$ thỏa mãn

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y = |\cos^3 x - 3m^2 \cos x|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. 1.

B. 11.

C. 5.

D. 6

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cos x$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$. Vì $t = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y = |t^3 - 3m^2 t|$ đồng biến trên $(0;1)$. Xét $f(t) = t^3 - 3m^2 t^2; t \in (0;1); f'(t) = 3t^2 - 3m^2$.

TH1: Nếu $m=0 \Rightarrow f'(t) > 0; \forall t \in (0;1) \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;1)$.

Mà $f(0)=0 \Rightarrow y = |f(t)|$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó $m=0$ thỏa mãn bài toán (1).

$$\text{TH2: } m \neq 0 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m \\ t = -m \end{cases}; f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -m\sqrt{3} \\ t = 0 \\ t = m\sqrt{3} \end{cases}$$

*) Với $m > 0$, ta có BBT sau:

t	0	m	$m\sqrt{3}$
$f'(t)$	—	0	+
$ f(t) $	0	$2m^3$	0

Từ BBT suy ra hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0;m)$.

YCBT tương đương $(0;1) \subset (0;m) \Leftrightarrow m \geq 1$ (2).

*) Với $m < 0$, ta có BBT sau:

t	0	$-m$	$-m\sqrt{3}$
$f'(t)$	-	0	+
$ f(t) $	0	$-2m^3$	0

Từ BBT suy ra hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0; -m)$.

YCBT tương đương $(0; 1) \subset (0; -m) \Leftrightarrow m \leq -1$ (3).

Từ (1); (2); (3) vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

5. Dạng 5: Tìm điều kiện tham số m để hàm $y = |f(x)|$ với $f(x)$ là hàm số mũ đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước.

DẠNG 5: Tính đơn điệu của hàm mũ chứa dấu trị tuyệt đối

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $y = |9^x + 3^x - m + 1|$ đồng biến trên đoạn $[0; 1]$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Tác giả: Phạm Tuấn. Facebook: Bánh Bao Phạm

◎ Đặt $3^x = t \Rightarrow t \in [1; 3]$ vì $x \in [0; 1]$.

$$\Rightarrow y = |t^2 + t - m + 1| = \sqrt{(t^2 + t - m + 1)^2} \Rightarrow y' = \frac{2 \cdot (t^2 + t - m + 1)' \cdot (t^2 + t - m + 1)}{2 \cdot |t^2 + t - m + 1|}$$

◎ Để hàm số đồng biến trên đoạn $t \in [1; 3]$ thì $y' = \frac{(2t+1) \cdot (t^2 + t - m + 1)}{|t^2 + t - m + 1|} \geq 0 \quad \forall t \in [1; 3]$

◎ Với mọi giá trị của $t \in [1; 3]$ thì $2t+1 > 0$ nên

◎ Để $y' \geq 0 \quad \forall t \in [1; 3]$ thì $t^2 + t - m + 1 \geq 0 \quad \forall t \in [1; 3] \Rightarrow m - 1 \leq t^2 + t = g(t) \quad \forall t \in [1; 3]$

$$\Rightarrow m - 1 \leq \min_{[1; 3]} g(t) = 2 \Rightarrow m \leq 3.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên $\{1; 2; 3\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn C

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y = |4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 2018.

B. 2019.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Tác giả: Nguyễn Văn Nga. Facebook: Nga Nguyen

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2$ (1) trên khoảng $(0;1)$. Đặt $t = 2^x$, $t \in (1;2)$.

Hàm số (1) trở thành $h(t) = t^2 - 2mt + m + 2$ trên khoảng $(1;2)$. Suy ra $h'(t) = 2t - 2m$.

$$\text{Ta có } y = |f(x)| \text{ đồng biến trên khoảng } (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ đồng biến trên } (0;1) \\ f(0) \geq 0 \\ f(x) \text{ nghịch biến trên } (0;1) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} (*)$$

Vì hàm số $t = 2^x$ đồng biến trên $(0;1)$.

$$\text{Do đó, } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) \text{ đồng biến trên } (1;2) \\ 3 - m \geq 0 \\ h(t) \text{ nghịch biến trên } (1;2) \\ 3 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 2m \geq 0 \forall t \in (1;2) \\ 3 - m \geq 0 \\ 2t - 2m \leq 0 \forall t \in (1;2) \\ 3 - m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq 3 \\ m \geq 2 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 3 \end{cases}. \text{ Vậy có 2018 số nguyên dương nhỏ hơn 2020 thỏa ycbt.}$$

Câu 49. Cho hàm số $y = \left| e^{\frac{2x+2}{x-1}} + 3e^{\frac{x+1}{x-1}} - 2m + 5 \right|$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$?

A. 234.

B. Vô số.

C. 40.

D. Không tồn tại m .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Cường Facebook Cuong Nguyen

Chọn C

+) Đặt $t = e^{\frac{x+1}{x-1}}$, ta có $t' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \forall x \in (2;3) \Rightarrow t \in (e^2; e^3)$, đồng thời x và t sẽ ngược chiều biến thiên.

+) Khi đó hàm số trở thành $y = |t^2 + 3t - 2m + 5| = \sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2}$ (2)

$$\text{Ta có: } y' = \frac{2(t^2 + 3t - 2m + 5) \cdot (2t + 3)}{2\sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2}} = \frac{(t^2 + 3t - 2m + 5) \cdot (2t + 3)}{\sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2}}.$$

Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(2; 3) \Leftrightarrow$ hàm số (2) đồng biến trên khoảng $(e^2; e^3)$

$$\Leftrightarrow \frac{2(t^2 + 3t - 2m + 5) \cdot (2t + 3)}{2\sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2}} \geq 0 \quad \forall t \in (e^2; e^3) \Leftrightarrow t^2 + 3t - 2m + 5 > 0 \quad \forall t \in (e^2; e^3)$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{t^2 + 3t + 5}{2} = g(t) \quad \forall t \in (e^2; e^3).$$

$$\text{+) Có } g'(t) = \frac{2t + 3}{2} > 0 \quad \forall t \in (e^2; e^3) \Rightarrow \frac{e^4 + 3e^2 + 5}{2} < g(t) < \frac{e^6 + 3e^4 + 5}{2} \Rightarrow m \leq \frac{e^4 + 3e^2 + 5}{2}.$$

Với điều kiện m là số nguyên dương ta tìm được 40 giá trị của m . **Chọn C**

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương $m \in (-2019; 2020)$, để hàm số $y = |e^{-x^2} - e^{x^2} - m|$ nghịch biến trên $(1; e)$?

A. 401.

B. 0.

C. 2019.

D. 2016.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hoa Facebook Hoa Nguyen

Chọn A

$$\text{Đặt } f(x) = e^{-x^2} + e^{x^2} - m \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} + 2xe^{x^2}$$

$$\text{Ta có } y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1; e). (*)$$

$$\text{Vì } x \in (1; e) \text{ nên } -2xe^{-x^2} + 2xe^{x^2} = \frac{2x(e^{2x^2} - 1)}{e^{x^2}} > 0, \forall x \in (1; e)$$

$$\text{Khi đó, } (*) \Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in (1; e)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2} + e^{x^2} - m \leq 0, \forall x \in (1; e)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2} + e^{x^2} \leq m, \forall x \in (1; e)$$

Ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{-x^2} + e^{x^2}, x \in (1; e)$ là $e^{e^2} + e^{-e^2}$ nên $m \geq e^{e^2} + e^{-e^2} \approx 1618,18$.

Vậy có 401 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 51. Giá trị lớn nhất của m để hàm số $y = |e^x + e^{2x} - m|$ đồng biến trên $(1; 2)$ là

A. e .

B. $e + e^2$.

C. e^2 .

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } f(x) = e^x + e^{2x} - m \Rightarrow y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{f'(x) f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (1; 2) \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in (1; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) f'(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in (1; 2)$$

$$\text{Vì } f'(x) = e^x + 2e^{2x} > 0 \forall x \in (1; 2)$$

$$\text{Nên } y' \geq 0 \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow f(x) > 0 \forall x \in (1; 2) \\ \Leftrightarrow m < e^x + e^{2x} \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq e + e^2$$

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |8^{\tan x} + 3 \cdot 2^{\tan x} - m + 2|$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \leq \frac{29}{8}$.

B. $m > \frac{29}{8}$.

C. $m < \frac{29}{8}$.

D. $m \geq \frac{29}{8}$.

Lời giải

Tác giả: Lê Minh Hùng. Facebook: Lê Minh Hùng

Chọn C

Đặt $2^{\tan x} = t$ vì $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\tan x \geq -1$ nên $t \geq \frac{1}{2}$. Khi đó ta có hàm số:
 $y = |t^3 + 3t - m + 2|$ (1).

Để hàm số ban đầu đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số (1) phải đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - m + 2$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t$.

Khi đó $y = |f(t)| = \sqrt{f^2(t)}$ nên $y' = \frac{f'(t) \cdot f(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$.

Hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$$\Leftrightarrow f(t) \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow t^3 + 3t - m + 2 \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow m \leq t^3 + 3t + 2, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), (*)$$

Xét hàm số: $g(t) = t^3 + 3t + 2, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$g'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t$. Vậy hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $g(t) \geq g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Từ (*) suy ra: $m \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{8}$.

6. Dạng 6: Tìm điều kiện tham số m để hàm $y = |f(x)|$ với $f(x)$ là hàm số logarit đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước.

Câu 53. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-100; 100)$ của tham số m để hàm số $y = |\ln 3x - 4x^2 + m|$ đồng biến trên đoạn $[1; e^2]$?

A. 101.

B. 102.

C. 103.

D. 100.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Hải Thu

Chọn B

$y = |\ln 3x - 4x^2 + m|$. Điều kiện $x > 0$.

Xét hàm số $g(x) = \ln 3x - 4x^2 + m$ trên $[1; e^2]$.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} - 8x = \frac{1 - 8x^2}{x} < 0, \forall x \in [1; e^2] \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên } [1; e^2].$$

x	1	e^2
$g'(x)$		0
$g(x)$	$\ln 3 - 4 + m$	$\ln 3 - 4e^4 + 2 + m$

$$\Rightarrow \text{hàm số } y = |g(x)| = |\ln 3x - 4x^2 + m| \text{ đồng biến trên đoạn } [1; e^2]$$

$$\Leftrightarrow \ln 3 - 4 + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 4 - \ln 3.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-100; 100)$ nên $m \in \{-99; -98; \dots; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 102 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 54. Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $y = |\ln(mx) - x + 2|$ nghịch biến trên $(1; 4)$?

A. 2018.

B. 2019.

C. 1.

D. vô số.

Lời giải

Chọn A

Tác giả: Nguyễn Văn Hà; Facebook: Hà Nguyễn Văn

Xét $f(x) = \ln(mx) - x + 2$.Để thấy $\forall x \in (1; 4): mx > 0 \Leftrightarrow m > 0$.Khi đó: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0, \forall x \in (1; 4)$.Do đó $f(x)$ luôn nghịch biến trên $(1; 4)$.Yêu cầu bài toán tương đương với $f(4) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(4m) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{e^2}{4} \approx 1,6$.Vậy $m \in [2; 2019]$ có 2018 số nguyên thỏa mãn.

Câu 55. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2020; 2020)$ để hàm số $y = \left| \ln(x^2 + 2x - m) - 2mx^2 - 1 \right|$ luôn đồng biến trên $(0; 10)$.

A. 4038.

B. 2020.

C. 2017.

D. 2017.

Lời giải

Tác giả: Cao Tung

Chọn C

Ta xét hàm số $f(x) = \ln(x^2 + 2x - m) - 2mx^2 - 1$ trên $(0; 10)$.Điều kiện hàm số có nghĩa là $x^2 + 2x - m > 0, \forall x \in (0; 10) \Leftrightarrow x^2 + 2x > m, \forall x \in (0; 10)$ (1)Ta lại có $x^2 + 2x = x(x + 2) > 0$ với mọi $x \in (0; 10)$ nên điều kiện (1) cho ta $m \leq 0$ (2)Đạo hàm $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-m} - 4mx$ do $m \leq 0$ và $x \in (0; 10)$ nên $\frac{2x+2}{x^2+2x-m} > 0; -4mx \geq 0$ suy ra $f'(x) > 0$ hàm số đồng biến trên $(0; 10)$.Từ đó để hàm số $y = \left| \ln(x^2 + 2x - m) - 2mx^2 - 1 \right| = |f(x)|$ đồng biến trên $(0; 10)$ điều kiện đủ là $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0; 10)$ (3).+) TH1: Xét $m = 0$ khi đó $f(x) = \ln(x^2 + 2x) - 1$ có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ không thỏa mãn (3).

+) TH2: Xét $m < 0$, do hàm số $f(x)$ đồng biến nên ta chỉ cần $f(0) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(-m) - 1 \geq 0$
 $\Leftrightarrow -m \geq e \Leftrightarrow m \leq -e$.

Từ đó ta được: $\begin{cases} -2020 < m \leq -e \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-2019; -2018; -2017; \dots; -3\}$ có 2017 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 56. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m trong đoạn $[-3; 3]$ để hàm số $y = \left| \ln(x^3 + mx + 2) \right|$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; 3)$?

A. 7. B. 4. **C. 6.** D. 5.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Thị Hồng Minh – Facebook: Minh Hoang.

Chọn C

Điều kiện xác định: $x^3 + mx + 2 > 0$.

Xét hàm số $f(x) = \ln(x^3 + mx + 2)$. Ta có: $f'(x) = \frac{3x^2 + m}{x^3 + mx + 2}$.

Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3) & (1) \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3) & (2) \end{cases}$.

⊙ Trường hợp 1:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^3 + mx + 2) \geq 0 \\ \frac{3x^2 + m}{x^3 + mx + 2} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + mx + 2 \geq 1 \\ 3x^2 + m \geq 0 \\ x^3 + mx + 2 > 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^2 - \frac{1}{x}, \forall x \in [1; 3) \\ m \geq -3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[1; 3)} \left(-x^2 - \frac{1}{x} \right) = -2 \\ m \geq \max_{[1; 3)} (-3x^2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -2.$$

⊙ Trường hợp 2:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^3 + mx + 2) \leq 0 \\ \frac{3x^2 + m}{x^3 + mx + 2} \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + mx + 2 \leq 1 \\ 3x^2 + m \leq 0 \\ x^3 + mx + 2 > 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^2 - \frac{1}{x} \\ m \leq -3x^2 \\ m > -x^2 - \frac{2}{x} \end{cases}, \forall x \in [1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{28}{3} \\ m < -27 \\ m > \max_{[1; 3)} \left(-x^2 - \frac{2}{x} \right) = -3 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset.$$

Từ hai trường hợp suy ra $m \geq -2$. Vì chỉ lấy $m \in [-3; 3]$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 57. Cho hàm số $y = \left| \ln(x^2 - mx - m) - 1 \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$?

A. 10.

B. 6.

C. 9.

D. 5.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang

Chọn D

Đặt $f(x) = \ln(x^2 - mx - m) - 1$.

$$\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \quad (2) \end{cases}.$$

$$+ \text{ Xét } x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow x^2 > m(x+1), \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{x^2}{x+1}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right).$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x^2}{x+1}. \text{ Khi đó, } m < \frac{x^2}{x+1}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow g(x) > m, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right).$$

$$\text{Ta có: } g(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ x = -2 \notin \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}.$$

$$\text{BBT của hàm số } y = g(x) \text{ trên khoảng } \left(-\frac{1}{2}; 1\right).$$

x	$-\frac{1}{2}$	0	1
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Từ BBT của hàm số $y = g(x)$ suy ra $g(x) > m \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow m < g(0) = 0$.

$$+ f'(x) = \frac{2x - m}{x^2 - mx - m}.$$

$$+ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 2x \geq m, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -1 \\ \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}m\right) - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{m}{2}\right) \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \geq e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \leq \frac{1-4e}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{1-4e}{2}.$$

$$+ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 2x \leq m \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 2 \\ \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{m}{2}\right) - 1 \leq 0 \end{cases} \text{ suy ra không tồn tại } m.$$

Vậy $m \leq \frac{1-4e}{2}$. Mà m nguyên, $-10 < m < 10$ nên có 5 giá trị m thỏa mãn bài toán

Câu 58. Tổng các giá trị m nguyên thuộc $[-5; 5]$ sao cho hàm số $y = |\ln(x^3 - 3x + m) + 1|$ nghịch biến trên $[0; 1]$ bằng

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 13.

Tác giả: Phan Thị Yến_Facebook Phan Yên.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } f(x) = \ln(x^3 - 3x + m) + 1, \text{ ta có } f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x + m}.$$

Điều kiện xác định của $f(x)$ là $x^3 - 3x + m > 0$.

Điều kiện cần để hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $[0; 1]$ là

$$x^3 - 3x + m > 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m > -x^3 + 3x, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m > 2 \quad (1).$$

Với mọi $x \in [0;1]$, ta có $3x^2 - 3 \leq 0$. Do đó từ điều kiện (1) ta suy ra

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x + m} \leq 0, \forall x \in [0;1].$$

Điều kiện đủ để hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $[0;1]$ là

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow \ln(x^3 - 3x + m) + 1 \geq 0, \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow m - \frac{1}{e} \geq -x^3 + 3x, \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{1}{e} + 2 \approx 2,37.$$

Do m nguyên thuộc $[-5;5] \Rightarrow m \in \{3;4;5\}$.

Vậy tổng các giá trị của m bằng 12.

Câu 59. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để hàm số $y = |\log_3(x^3 + x^2 - mx + 1)|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

A. 13.

B. 12.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Hùng. Facebook: Hùng

Nguyễn

Chọn A

Đặt $f(x) = \log_3(x^3 + x^2 - mx + 1)$ nên $f'(x) = \frac{3x^2 + 2x - m}{(x^3 + x^2 - mx + 1) \ln 3}$.

Hàm số đồng biến trên $y = |f(x)|$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^3 + x^2 - mx + 1) \geq 0 \\ x^3 + x^2 - mx + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x - m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - mx + 1 \geq 1 \\ 3x^2 + 2x \geq m \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x^2 + x \\ m \leq 3x^2 + 2x \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[1;+\infty)}(x^2+x) \\ m \leq \min_{[1;+\infty)}(3x^2+2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^3+x^2-mx+1) \leq 0 \\ x^3+x^2-mx+1 > 0 \\ 3x^2+2x-m \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1;+\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x^2-mx+1 \leq 1 \\ x^3+x^2-mx+1 > 0, \forall x \in [1;+\infty) \\ 3x^2+2x \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x \leq m \\ x^2+x+\frac{1}{x} > m, \forall x \in [1;+\infty) \\ 3x^2+2x \leq m \end{cases}.$$

Ta có: $m \geq x^2+x, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{[1;+\infty)}(x^2+x), \quad (*)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+x) = +\infty$ nên không tồn tại m thỏa mãn (*). Do đó trường hợp 2 không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra $m \leq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mặt khác $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10;10] \end{cases}$ nên có 13 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 60. Tổng các giá trị nguyên của m trên $[-10;10]$ để hàm số $y = g(x) = |\ln(x^2+x+m)+x|$ đồng biến trên $(-1;3)$ là

A. 50.

B. 100.

C. 52.

D. 105.

Lời giải

Tác giả: Trương Quang Phú

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \ln(x^2+x+m)+x$ trên khoảng $(-1;3)$.

Điều kiện xác định là: $x^2+x+m > 0$ với mọi $x \in (-1;3)$.

Khi đó $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+m} + 1 = \frac{x^2+3x+m+1}{x^2+x+m}.$

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên } (-1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \geq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x \geq 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \leq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x < 0 \end{cases} & (2) \end{cases} \quad \text{với mọi } x \in (-1;3).$$

$$\text{Xét hệ bất phương trình (1): } \begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \geq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x \geq 0 \end{cases} \quad \text{đúng với mọi } x \in (-1;3).$$

$$\textcircled{\bullet} \quad \text{Ta có: } x^2 + x + m > 0, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m > -x^2 - x, \forall x \in (-1;3).$$

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y = -x^2 - x$ trên khoảng $(-1;3)$ ta suy ra

$$\text{Ví dụ 1. } m > \max_{(-1;3)}(-x^2 - x) \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{\bullet} \quad \text{Lại có } x^2 + 3x + m + 1 \geq 0, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq -x^2 - 3x - 1, \forall x \in (-1;3).$$

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y = -x^2 - 3x - 1$ trên khoảng $(-1;3)$ ta suy ra:

$$m \geq \max_{[-1;3]}(-x^2 - 3x - 1) \Leftrightarrow m \geq 1$$

$$\textcircled{\bullet} \quad \text{Ngoài ra } \ln(x^2 + x + m) + x \geq 0, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq -x^2 - x + e^{-x}, \forall x \in (-1;3).$$

$$\text{Đặt } k(x) = -x^2 - x + e^{-x}, k'(x) = -e^{-x} - 2x - 1 \leq 0, \forall x \in (-1;3).$$

$$\text{Do đó } m \geq -x^2 - x + e^{-x}, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq e.$$

Vậy (1) tương đương $m \geq e$.

Với hệ bất phương trình (2) ta cũng làm tương tự như trên thì được

$$\begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \leq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x < 0 \end{cases} \quad \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m \leq -19 \\ \ln(x^2 + x + m) + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy hàm số $y = g(x) = \left| \ln(x^2 + x + m) + x \right|$ đồng biến trên $(-1; 3)$ khi và chỉ khi $m \geq e$, mà m là số nguyên thuộc $[-10; 10]$ nên $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Do đó tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn là 52.