

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Phương Pháp

TỌA ĐỘ HÓA
HÌNH KHÔNG GIAN

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA HÌNH CỔ ĐIỂN

Tap chí và tư liệu toán học

Đôi khi trong giải toán hình học không gian cổ điển ta sẽ gặp khá nhiều bài toán tính toán phức tạp, tuy nhiên trong phòng thi ta lại không có nhiều thời gian, vì thế trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu một phương pháp giải quyết nhanh các bài toán tính toán phức tạp và khó trong hình không gian cổ điển, liên quan tới cực trị, góc, khoảng cách.

I. Ý TƯỞNG.

PHƯƠNG PHÁP

Trên mạng có một vài tài liệu nói về phương pháp này và chia thành rất nhiều dạng, điều đó làm chúng ta khi áp dụng có phần khó nhớ và máy móc, tuy nhiên chúng ta chỉ cần nắm được dấu hiệu và phương pháp sau

- **Bước 1.** Chọn hệ trục tọa độ. Trong bước này ta sẽ xác định 3 đường vuông góc có trong bài toán và gọi đó là 3 đường cơ sở. Thông thường thì ta sẽ quy ước trục Ox hướng vào mình, trục Oz nằm ngang, còn lại là trục Oy
- **Bước 2.** Xác định tọa độ các điểm liên trên hình liên quan tới bài toán. Với những bạn chưa quen thì chúng ta xác định tọa độ hình chiếu của điểm cần tìm lên các trục, từ đó sẽ suy ra được tọa độ điểm cần tính.
- **Bước 3.** Áp dụng công thức.

Sau đây chúng ta sẽ nhắc lại một số công thức cần nhớ trong phần này.

Diện tích và thể tích

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right|$$

$$\text{Thể tích tứ diện } ABCD: V = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} \right|$$

$$\text{Thể tích hình hộp } ABCD.A'B'C'D': V = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right] \cdot \overrightarrow{AA'} \right|$$

$$\text{Thể tích hình lăng trụ } ABC.A'B'C': V = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right] \cdot \overrightarrow{AA'} \right|$$

Góc giữa 2 mặt phẳng: Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}$ và mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n'}$ thì $\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n'}) \right|$

Góc giữa 2 đường thẳng: Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}$ và d' có VTCP $\vec{v}$ thì $\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \right|$

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}$ và (P) có VTPT $\vec{n}$ thì $\sin(d, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right|$

Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng:

- (Oxy) là $|z_0|$; (Oyz) là $|x_0|$; (Ozx) là $|y_0|$
- $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ là $d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng:

Cho $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và đường thẳng d qua A và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ thì $d(M_0, d) = \frac{|\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: Đường thẳng d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$; d_2 qua

M_2 và có VTCP thì $d(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}$

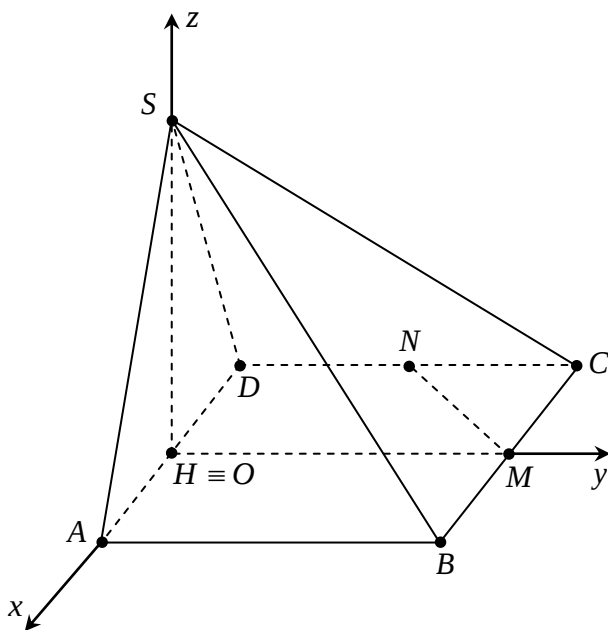
Chú ý. Thông thường các bài mà không có 3 đường vuông góc thì ta sẽ phải tự dựng thêm để gắn tọa độ và những bài liên quan tới hình lập phương, hình hộp chữ nhật, chóp có 3 đường vuông góc, lăng trụ đứng thì khi áp dụng phương pháp này sẽ giải rất nhanh !

II. CÁC BÀI TOÁN.

Câu 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

Lời giải



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ và xét $a = 1$.

Khi đó $H \equiv O$, $M(0; 1; 0)$, $C(-\frac{1}{2}; 1; 0)$, $N(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$, $S(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.CMN$ có dạng

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0).$$

$$S, C, M, N \in (S) \text{ nên ta có hệ phương trình: } \begin{cases} -2b + d = -1 \\ a - 2b + d = -\frac{5}{4} \\ a - b + d = -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{3}c + d = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{5\sqrt{3}}{12} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

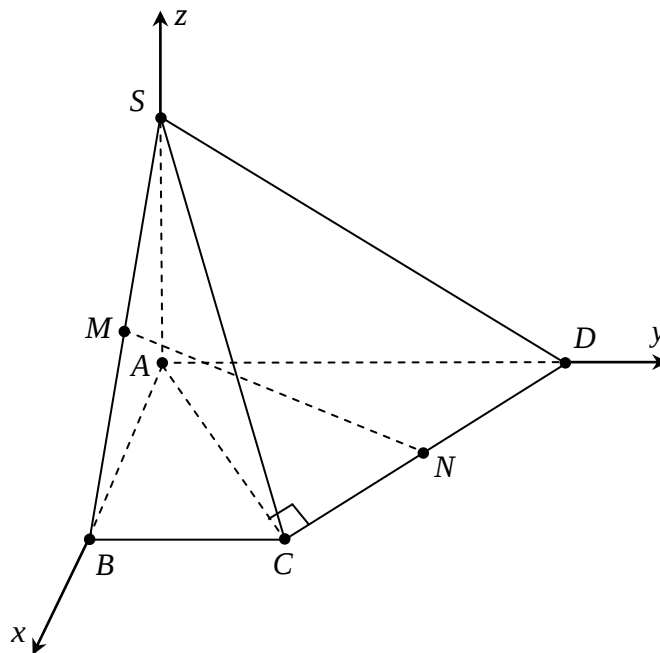
$$\text{Ta có } a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{31}{48} \text{ hay } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{93}}{12}.$$

$$\text{Vậy } R = \frac{a\sqrt{93}}{12}.$$

Câu 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , thỏa mãn điều kiện $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB , CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .

Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ, chọn đơn vị là a .

$$\text{Có } A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1); M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right); N\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right).$$

$$\text{Vec tơ chỉ phương của } MN \text{ là } \overrightarrow{MN} = 2\left(0;\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right) = (0;3;-1).$$

$$\text{Vec tơ pháp tuyến của } (SAC) \text{ là } \vec{n} = [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AS}] = (1;-1;0).$$

$$\text{Vậy } \sin(MN; (SAC)) = \frac{|3|}{\sqrt{9+1}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{Suy ra } \cos(MN; (SAC)) = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10}$$

Câu 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa MN và (SAC) , biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

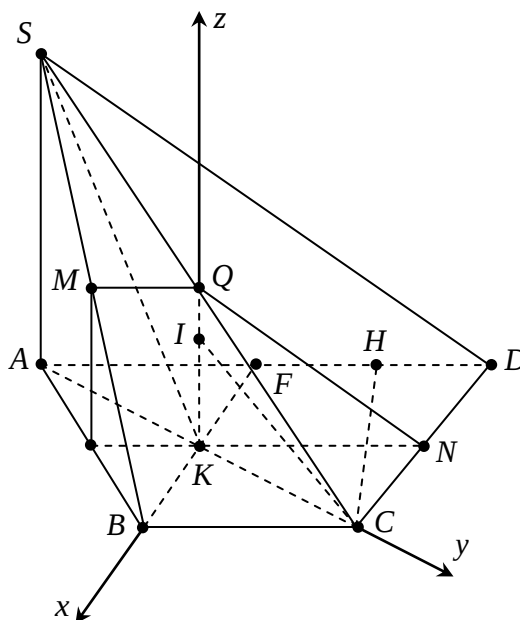
Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thang cân có $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$

$$\Rightarrow AD = 2a; AB = BC = CD = a \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Nên } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = a$$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ



$$\text{Ta có } K(0;0;0), B\left(\frac{a}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),$$

$$N\left(\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right), M\left(\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{2}\right)$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{MN} = \left(\frac{-3a}{4}; \frac{3a\sqrt{3}}{4}; \frac{-a}{2}\right). \text{ Chọn } \vec{u}_1 = (-3; 3\sqrt{3}; -2) \text{ cùng phương với } \overrightarrow{MN}$$

$$\text{Nhận xét } \begin{cases} BK \perp SA \\ BK \perp AC \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC)$$

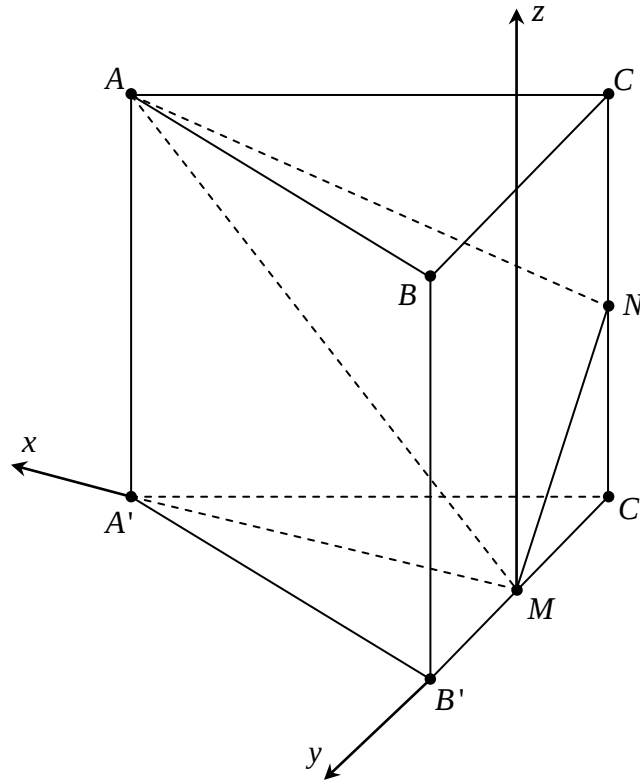
$$\bullet \quad \overrightarrow{BK} = \left(\frac{a}{2}; 0; 0\right) \text{ là vtpt của } (SAC). \text{ Chọn } \vec{n}_1 = (1; 0; 0) \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BK}$$

Gọi α là góc giữa MN và (SAC) . Ta có $\sin \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{3\sqrt{10}}{20} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{310}}{20}$.

Câu 4

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$, $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

Lời giải



Thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ trong không gian như hình vẽ, gốc tọa độ O trùng M .

Dễ dàng tính được $MB' = MC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MA' = \frac{a}{2}$.

+ $M(0;0;0), N \in (Oyz) \Rightarrow N\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$

+ $A \in (Oxz) \Rightarrow A\left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$. $M_p(ABC) // (A'B'C'); (A'B'C') \equiv (Oxy)$

$\Rightarrow (ABC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$

Ta có $\vec{MA}\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$ cùng phương $\vec{u}_1(1;0;2)$

$\vec{MN}\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$ cùng phương $\vec{u}_2(0;-\sqrt{3};1)$

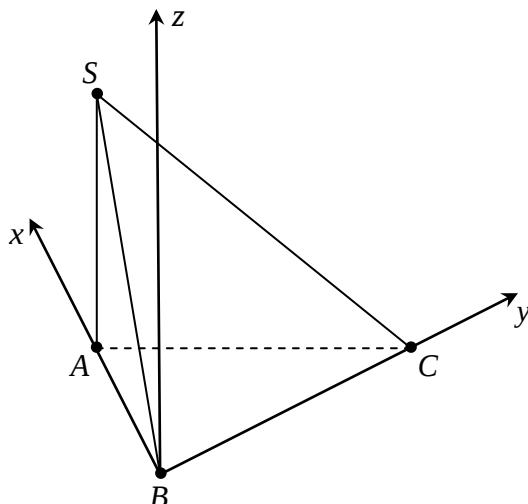
$\Rightarrow (AMN)$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \cos((AMN), (ABC)) = |\cos(\vec{k}, \vec{n})| = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Câu 5

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$, M là trung điểm AC , tính góc cotang của (SBM) và (SAB)

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $B(0;0;0)$; $A(a;0;0)$; $C(0;a;0)$; $S(a;0,a\sqrt{3})$; $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

$$\vec{n}_{(SAB)} = (0;1;0); \vec{n}_{(SBM)} = [\vec{SB}, \vec{MB}] = (a(1;0,\sqrt{3})) \wedge \left(\frac{a}{2}(1;1;0)\right) = \frac{a^2}{2}(-\sqrt{3};\sqrt{3};1)$$

Đặt góc (SBM) và (SAB) là α , ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} |\cos \alpha| = \frac{|\vec{n}_{(SAB)} \cdot \vec{n}_{(SBM)}|}{|\vec{n}_{(SAB)}| |\vec{n}_{(SBM)}|} = \frac{\sqrt{21}}{7} \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

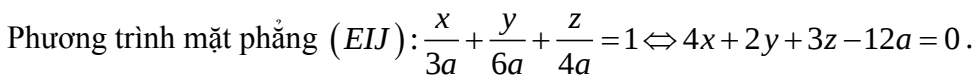
Câu 6

Cho hình tứ diện $EFGH$ có EF vuông góc với EG , EG vuông góc với EH , EH vuông góc với EF ; biết $EF = 6a$, $EG = 8a$, $EH = 12a$, với $a > 0, a \in \mathbb{R}$. Gọi I , J tương ứng là trung điểm của hai cạnh FG , FH . Tính khoảng cách d từ điểm F đến mặt phẳng (EIJ) theo a .

Lời giải

Vì EF vuông góc với EG , EG vuông góc với EH nên $EG \perp (EFH)$. Gọi K là trung điểm của EF suy ra $IK \perp (EFH)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có:

$$K(0;0;0), I(0;0;4a), E(3a;0;0), J(0;6a;0).$$



Tinh hoa của toán học nằm ở tự do của nó - Georg Cantor

Ta có $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}] = (ah\sqrt{3}; 0; -3a^2) \Rightarrow \vec{n}_1 = (h; 0; -\sqrt{3}a)$ là VTPT của $(AB'C)$.

Theo giả thiết góc giữa $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60°

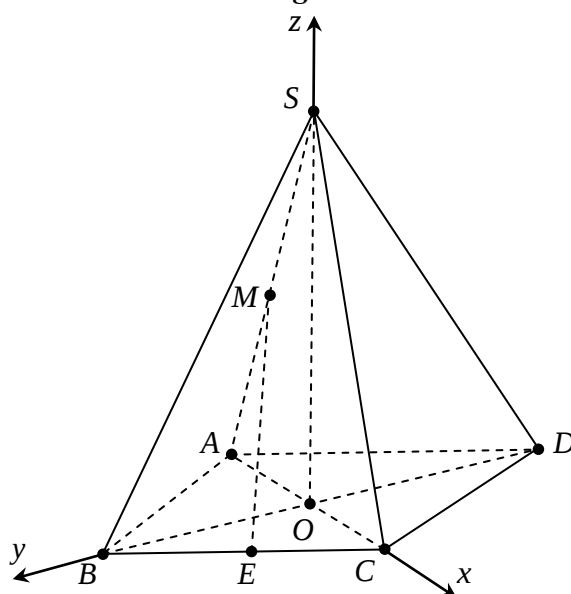
$$\Rightarrow \cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}_1) \right| \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|h|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h^2 + 3a^2}} \Rightarrow h = \sqrt{3}a$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA , α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Tính $\tan \alpha$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $Ox \equiv OC$, $Oy \equiv OB$, $Oz \equiv OS$. Chọn $OA = 1$

Ta có $C(1; 0; 0)$, $A(-1; 0; 0) \Rightarrow (SBD)$ nhận $\overrightarrow{AC} = (2; 0; 0)$ là một vector pháp tuyến.

Từ $SA = AB = OA\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(0; 0; 1) \\ A(-1; 0; 0) \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

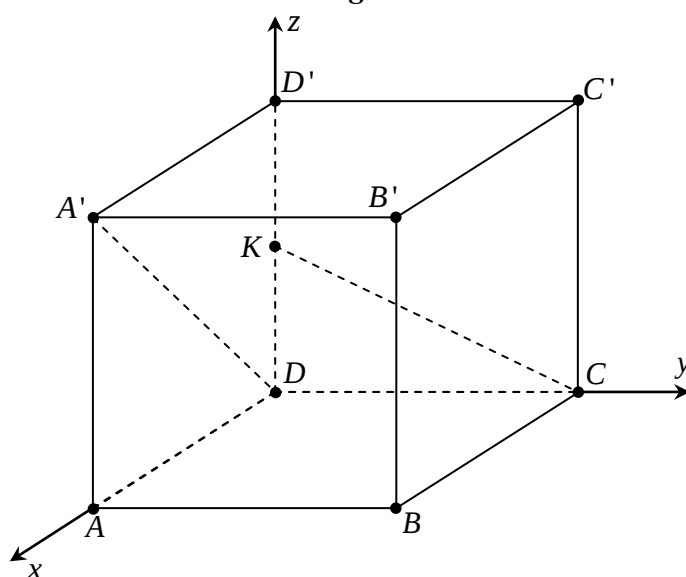
Ta có $\begin{cases} C(1; 0; 0) \\ B(0; 1; 0) \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow EM$ nhận $\overrightarrow{ME} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ là một vectơ chỉ phương.

$$\Rightarrow \sin(EM; (SBD)) = \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{AC}|}{ME \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}$$

Câu 9

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng

Lời giải

Chọn $a = 1$ ta có hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $D(0;0;0)$, $A'(1;0;1)$, $K\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ và $C(0;1;0)$

Ta có $\overrightarrow{DA'} = (1;0;1)$; $\overrightarrow{CK} = \left(0;-1;\frac{1}{2}\right)$ và $\overrightarrow{DK} = \left(0;0;\frac{1}{2}\right)$

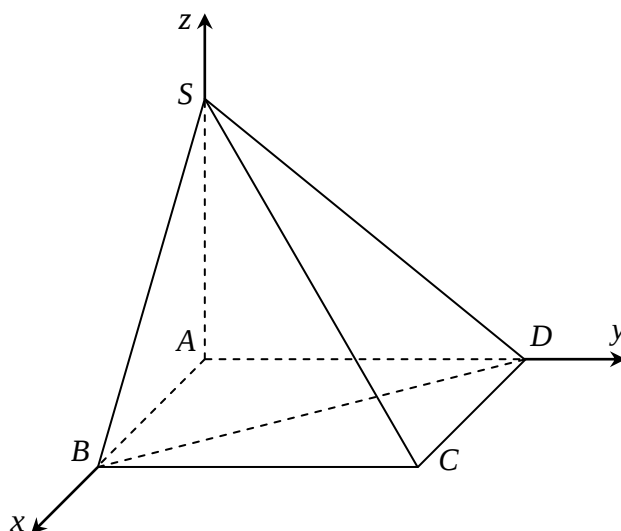
Ta có $[\overrightarrow{DA'}; \overrightarrow{CK}] = \left(1; -\frac{1}{2}; -1\right)$, $[\overrightarrow{DA'}; \overrightarrow{CK}] \cdot \overrightarrow{DK} = -\frac{1}{2}$

$$\text{Do đó } d_{(A'D;CK)} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } d_{(A'D;CK)} = \frac{a}{3}.$$

Câu 10

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;0;a)$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a; a\sqrt{3}; 0) = a(-1; \sqrt{3}; 0)$, nên đường thẳng BD có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; \sqrt{3}; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a)$, $\overrightarrow{BC} = (0; a\sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (a^2\sqrt{3}; 0; a^2\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}(1; 0; 1)$.

Như vậy, mặt phẳng (SBC) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

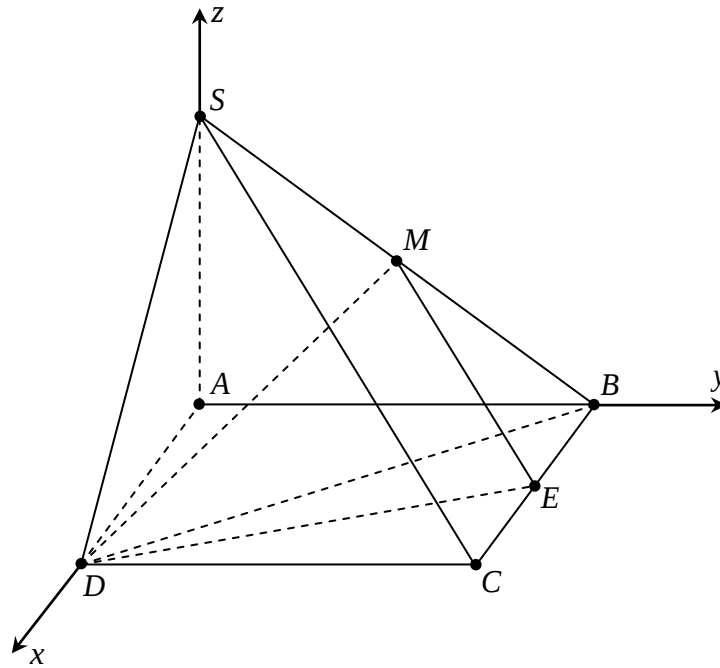
Câu 11

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Gọi E là trung điểm BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC .

Lời giải

Ta có thể đưa ra các cách giải như sau:

Do SAC là tam giác vuông có góc $SCA = 45^\circ$ nên $SA = AC = a\sqrt{2}$, $SC = 2a$, $SB = SD = a\sqrt{3}$.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox , Oy , Oz lần lượt trùng với các tia AB , AD , AS . Khi đó tọa độ điểm các điểm là $D(0; a; 0)$, $E\left(a; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C(a; a; 0)$, $S(0; 0; a\sqrt{2})$

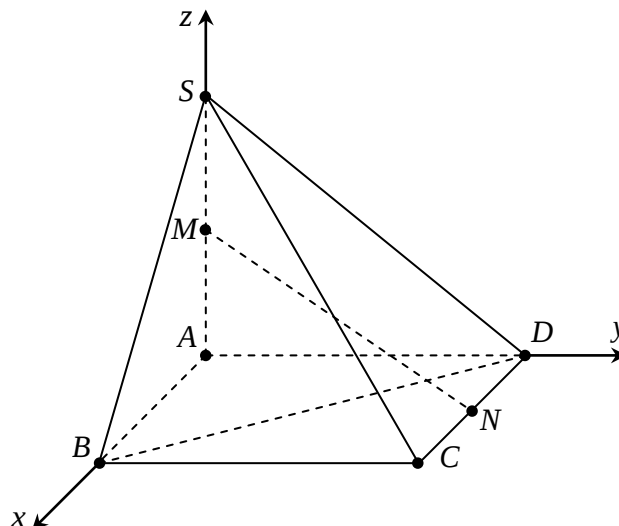
$$\overrightarrow{DE} = \left(a; -\frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{SC} = (-a; -a; a\sqrt{2}), \overrightarrow{DC} = (a; 0; 0)$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{SC}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; -a^2\sqrt{2}; -\frac{3a^2}{2}\right) \Rightarrow d(DE; SC) = \frac{|[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{DC}|}{|[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{SC}]|} = \frac{a\sqrt{38}}{19}$$

Câu 12

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính khoảng cách d giữa BD và MN .

Lời giải



Xét tam giác vuông SAC có : $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{500 - 200} = 10\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có $A(0;0;0)$, $M(0;0;5\sqrt{3})$, $B(10;0;0)$, $D(0;10;0)$, $C(10;0;0)$, $N(5;10;0)$

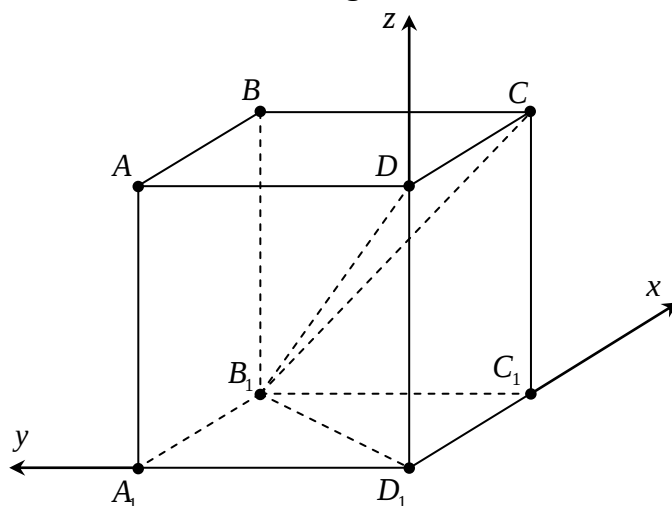
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (5;10;-5\sqrt{3}) \Rightarrow \vec{u}_1 = (1;2;-\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{BD} = (-10;10;0) \Rightarrow \vec{u}_2 = (-1;1;0) \end{cases} \Rightarrow d(MN, BD) = \frac{|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \cdot \overrightarrow{ND}|}{\left| \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \right|} = \sqrt{5}$$

$$\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] = (\sqrt{3}; \sqrt{3}; 3), \overrightarrow{ND} = (-5;0;0)$$

Câu 13

Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x . Tìm x để góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv D_1$, C_1 thuộc tia Ox , A_1 thuộc tia Oy , D thuộc tia Oz (như hình vẽ).

Khi đó $D_1(0;0;0)$, $B_1(1;1;0)$, $D(0;0;x)$, $C(1;0;x)$.

Mặt phẳng (B_1D_1C) nhận vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{D_1C}] = (x; -x; -1)$ là vectơ pháp tuyến

Đường thẳng B_1D nhận vectơ $\vec{u} = (1; 1; -x)$ là vectơ chỉ phương.

Gọi φ là góc giữa B_1D và (B_1D_1C) , suy ra:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{|x - x + x|}{\sqrt{x^2 + (-x)^2 + 1} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(2x^2 + 1)(x^2 + 2)}} \quad (\text{Do } x > 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{2}{x}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5}} \leq \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} + 5}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Góc φ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin \varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = 1$.

Vậy góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất khi $x=1$.

Câu 14

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A'(0;0;0); D'(a;0;0); A(0;0;a) \Rightarrow C(a;a;a); K(a;0;\frac{a}{2})$

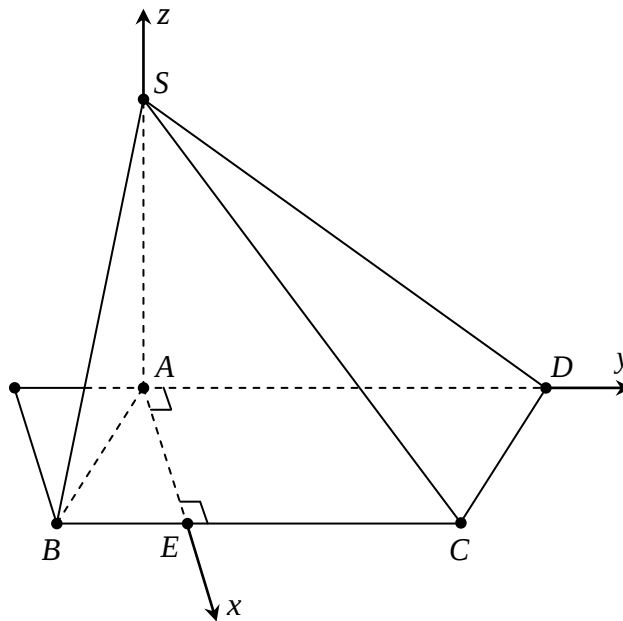
Khi đó: $\overrightarrow{A'D}(a;0;a); \overrightarrow{CK}(0;-a;-\frac{a}{2}), \overrightarrow{A'C}(a;a;a)$.

Ta có: $d(CK, A'D) = \frac{|\overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{CK}|}{|\overrightarrow{A'D} \times \overrightarrow{CK}|} = \frac{a}{3}$.

Câu 15

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=3a, AD=4a, BAD=120^\circ$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD)

Lời giải



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như sau: $Oz \equiv \overrightarrow{AS}; Oy \equiv \overrightarrow{AD}; Ox \equiv \overrightarrow{AE}$ (E là hình chiếu của A lên cạnh BC)

Khi đó: $A(0;0;0); B\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}; -\frac{3a}{2}; 0\right); C\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}; \frac{5a}{2}; 0\right); D(0;4a;0); S(0;0;2\sqrt{3}a)$

Do đó: $\overrightarrow{SB}\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}; -\frac{3a}{2}; -2\sqrt{3}a\right); \overrightarrow{SC}\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}; \frac{5a}{2}; -2\sqrt{3}a\right); \overrightarrow{SD}(0;4a;-2\sqrt{3}a); \overrightarrow{S}(0;0;2\sqrt{3}a)$

Ta tính được 1 vectơ pháp tuyến của (SBC) là $\vec{n}=(4;0;3)$ và (SCD) là $\vec{n}'=(1;\sqrt{3};2)$

Vậy $\cos(\vec{n}; \vec{n}') = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy góc giữa (SBC) và (SCD) là 45° .

Câu 16

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc O , $B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b), (a > 0, b > 0)$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' .

a) Tính thể tích khối tứ diện $BDA'M$

b) Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để mặt phẳng $(A'BD) \perp (MBD)$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $C(a; a; 0), C'(a; a; b) \Rightarrow M\left(a; a; \frac{b}{2}\right)$

Nên $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0), \overrightarrow{BM} = \left(0; a; \frac{b}{2}\right), \overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b) \Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

Do đó $V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] \cdot \overrightarrow{BA'}| = \frac{a^2b}{4}$

Mặt phẳng (BDM) có vecto pháp tuyến là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

Mặt phẳng $(A'BD)$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (ab; ab; a^2)$

Do đó $(BDM) \perp (A'BD) \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$

Câu 17

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện cũng đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh đó. Gọi A' là trọng tâm tam giác BCD . Chứng minh rằng $\frac{GA}{GA'} = 3$

Lời giải

Ta giải bằng phương pháp tọa độ. Trong không gian tọa độ $Oxyz$.

Giả sử $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3), D(x_4; y_4; z_4)$ thì trọng tâm A' của tam giác BCD ,

trọng tâm tứ diện G có tọa độ $\begin{cases} A'\left(\frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}; \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}; \frac{z_2 + z_3 + z_4}{3}\right) \\ G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}; \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}; \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right) \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} \overrightarrow{GA} = \left(\frac{3x_1 - x_2 - x_3 - x_4}{4}; \frac{3y_1 - y_2 - y_3 - y_4}{4}; \frac{3z_1 - z_2 - z_3 - z_4}{4}\right) \\ \overrightarrow{GA'} = \left(\frac{-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{12}; \frac{3y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{12}; \frac{3z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{12}\right) \end{cases}$

Suy ra: $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'} \Rightarrow G, A, A'$ thẳng hàng và $\frac{GA}{GA'} = 3$

Tương tự thì có đpcm

Điều ta biết là giọt nước, điều ta chưa biết là đại dương - Newton

Tạp chí và tư liệu toán học | 14

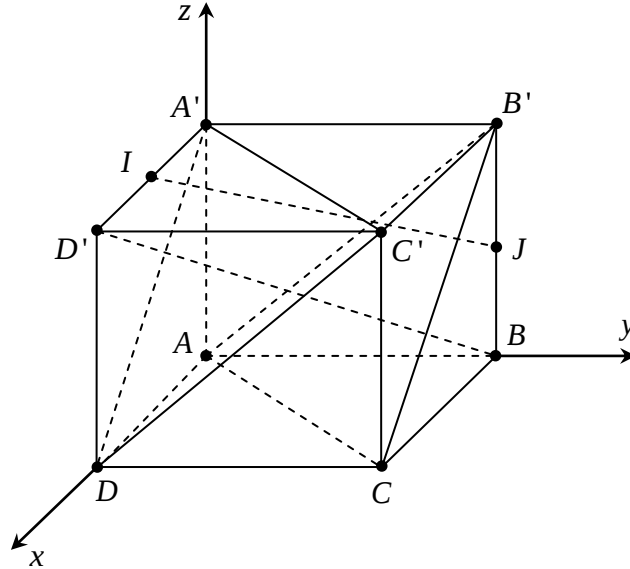
Câu 18

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $B'B$.

a) Chứng minh rằng $IJ \perp AC'$. Tính độ dài đoạn IJ

b) Chứng minh rằng $D'B \perp mp(A'C'D), mp(ACB')$. Tính góc giữa hai đường thẳng $IJ, A'D$

Lời giải



a) Chọn hệ tọa độ Oxyz sao cho $A(0;0;0), D(a;0;0), B(0;a;0), A'(0;0;a)$

Ta có $C'(a;a;a), B'(0;a;0), D'(a;0;a)$ nên $I\left(\frac{a}{2};0;a\right); J\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \left(0 - \frac{a}{2}; a - 0; \frac{a}{2} - a\right) = \left(-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC'} = (a - 0; a - 0; a - 0) = (a; a; a)$.

Nên $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AC'} = -\frac{a}{2} \cdot a + a \cdot a - \frac{a}{2} \cdot a = -a^2 + a^2 = 0$

Vậy $IJ \perp AC'$. Đoạn $IJ = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

b) Để chứng minh $D'B \perp mp(A'C'D)$, ta chứng minh

$$\overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'D} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'B} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0, \overrightarrow{D'B} \cdot \overrightarrow{A'D} = 0$$

Ta có $\overrightarrow{D'B} = (-a; a; -a), \overrightarrow{A'C'} = (a; a; 0), \overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$

Do đó $\overrightarrow{D'B} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0, \overrightarrow{D'B} \cdot \overrightarrow{A'D} = 0$. Tương tự $\overrightarrow{D'B} \perp mp(ACB')$

$\overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng IJ và $A'D$ thì:

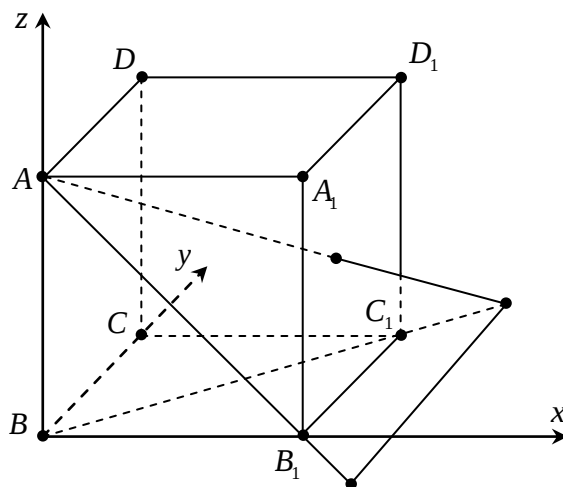
$$\cos \varphi = \left| \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{A'D}) \right| = \frac{|\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{A'D}|}{|\overrightarrow{IJ}| \cdot |\overrightarrow{A'D}|} = \frac{\left| -\frac{a}{2} \cdot a + a \cdot 0 - \frac{a}{2} \cdot (-a) \right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = 0$$

Vậy $\varphi = 90^\circ$

Câu 19

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a , trên BC_1 lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng. Tính diện tích S của ΔMAB_1

Lời giải



Chọn hệ $Oxyz$ sao cho

$$B = 0, B_1(a; 0; 0), C_1(a; a; 0), C(0; a; 0), A(0; 0; a), A_1(a; 0; a), D_1(a; a; a), D(0; a; a)$$

Vì $M \in BC_1$ nên gọi $M(x; x; 0)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{D_1M} = (x-a; x-a; -a), \overrightarrow{DA_1} = (-a; a; 0), \overrightarrow{AB_1} = (a; 0; -a)$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1} \text{ đồng phẳng nên } [\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}] \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$$

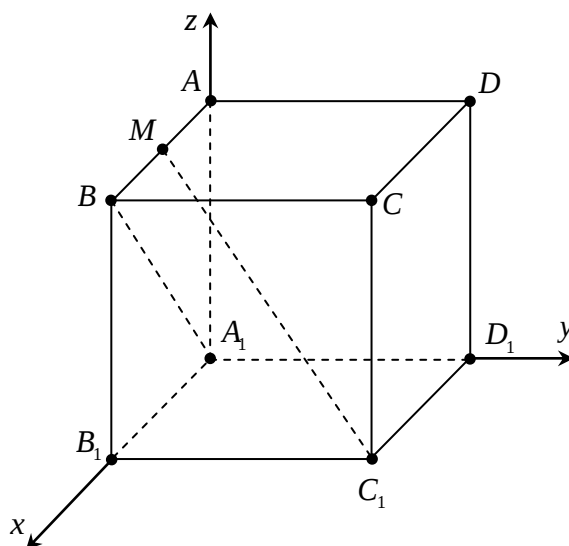
$$\text{Nên } \overrightarrow{MA} = \left(-\frac{3a}{2}; -\frac{3a}{2}; a\right); \overrightarrow{MB_1} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{3a}{2}; 0\right)$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} \left\| [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB_1}] \right\| = \frac{a^2 \sqrt{19}}{4}$$

Câu 20

Lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có chiều cao bằng nửa cạnh đáy. Điểm M thay đổi trên cạnh AB . Tìm giá trị lớn nhất của góc A_1MC_1

Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ (A_1xyz)

Đặt $AM = x, 0 \leq x \leq 2$

Ta có: $M(x; 0; a), A_1(0; 0; 0), C_1(2; 2; 2)$

Nên $\overrightarrow{MA_1} = (-x; 0; -1), \overrightarrow{MC_1} = (2-x; 2; -1)$

$$\text{Đặt } \alpha = \angle A_1MC_1 \text{ thì } \cos \alpha = \cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}) = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{(2-x)^2 + 5}} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{(2-x)^2 + 5}} \geq 0$$

Do đó $\alpha \leq 90^\circ$. Vậy góc $\alpha = \angle A_1MC_1$ lớn nhất khi $x = 1$ tức M trung điểm AB

Câu 20

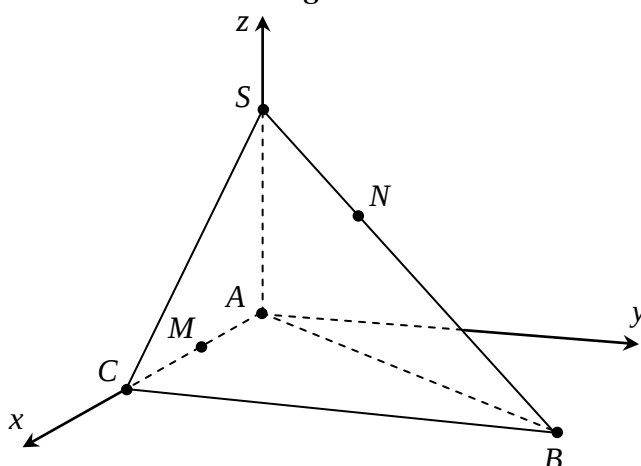
Cho hình chóp S.ABC có đường cao $SA = h$, đáy là tam giác ABC vuông tại C. $AC = b, BC = a$.

Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB

Lời giải



Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox trùng với tia AC, tia Oz trùng với tia AS sao cho điểm B nằm trong góc xOy.

Khi đó $A(0;0;0), C(b;0;0), B(b;a;0), S(0;0;h), M\left(\frac{b}{2};0;0\right), \overrightarrow{SB} = (b;a;-h)$

Gọi $N(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{SN} = (x;y;z-h)$

Từ điều kiện $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ nên $x = \frac{b}{3}; y = \frac{a}{3}; z-h = \frac{-h}{3} \Rightarrow z = \frac{2h}{3} \Rightarrow N\left(\frac{b}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$

a) Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right) = \left(-\frac{b}{6}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$

Nên $MN = \sqrt{\frac{b^2}{36} + \frac{a^2}{9} + \frac{4h^2}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$

b) MN vuông góc với SB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow \frac{-b^2}{6} + \frac{a^2}{3} + \frac{-2h^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2$

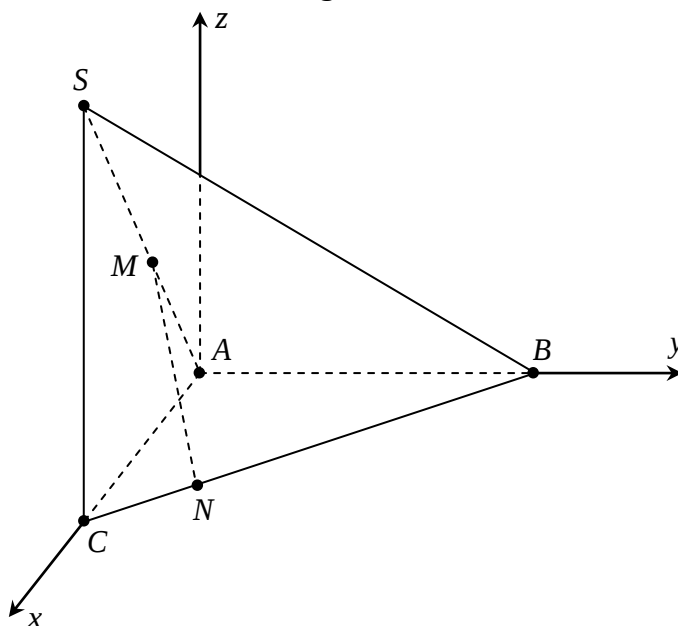
Câu 22

Cho tứ diện S.ABC có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}, SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Các điểm $M \in SA, N \in BC$ sao cho $AM = CN = t (0 < t < 2a)$

a) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị t để MN ngắn nhất

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA

Lời giải



a) Ta chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc tọa độ $O \equiv A$. Trục Ox chứa AC, trục Oy chứa AB và trục $Oz \perp (ABC)$. Khi đó cạnh SC song song với trục Oz và ta có:

$$A(0;0;0), B(0;a\sqrt{2};0), C(a\sqrt{2};0;0), S(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2})$$

Ta có $M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{t\sqrt{2}}{2}\right); N\left(a\sqrt{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2}; \frac{t\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{2(a^2 - 2at + t^2) + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2} = \sqrt{3\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{3}} \geq \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t = \frac{2a}{3}$

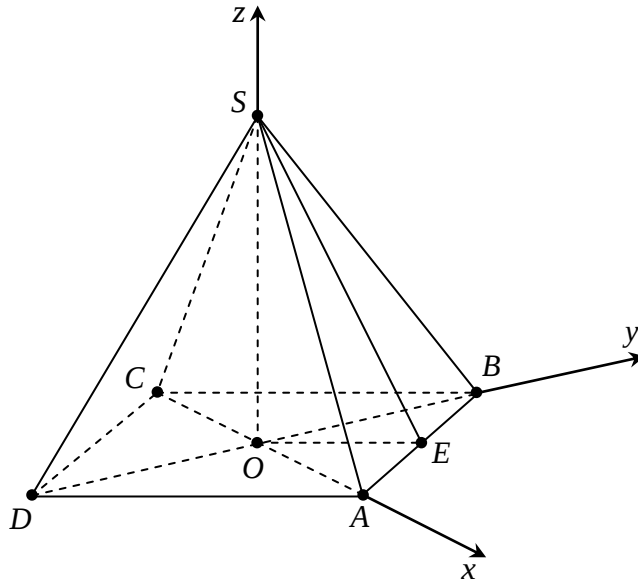
b) Khi MN ngắn nhất thì: $M\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; 0; \frac{a\sqrt{2}}{3}\right), N\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; -\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$ - điều phải chứng minh!

Câu 22

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy a, mặt bên tạo với đáy góc α . Tìm $\tan \alpha$ để SA vuông góc SC

Lời giải



Chọn hệ trục Oxyz có O là tâm đáy ABCD, tia Ox chứa A, tia Oy chứa B, tia Oz chứa S. Ta có:

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{a}{2} \tan \alpha\right)$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{SA} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{a}{2} \tan \alpha\right), \overrightarrow{SB} = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a}{2} \tan \alpha\right)$$

$$\overrightarrow{SC} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{a}{2} \tan \alpha\right), \overrightarrow{SD} = \left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a}{2} \tan \alpha\right)$$

Ta có $SA \perp SC$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \tan^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \tan^2 \alpha - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 2 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}$$

Câu 23

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm chia đoạn thẳng $AB, D'D$ và $B'C'$ theo cùng tỉ số $k \neq 0, 1$. Chứng minh rằng $mp(MNP)$ luôn luôn song song với $mp(AB'D')$

Lời giải

Đặt $A'B' = a, A'D' = b, AA' = c$. Ta dùng phương pháp tọa độ bằng cách chọn hệ trục tọa độ với gốc là $A'(0; 0; 0)$ sao cho $B'(a; 0; 0), D'(0; b; 0), A(0; 0; c)$

Ta có $C'(a; b; 0), B(a; 0; c), D(0; b; c), C(a; b; c)$. Các điểm M, N, P chia các đoạn thẳng $AB, D'D, B'C'$ theo cùng tỉ số k nên

$$M\left(-\frac{ka}{1-k}; 0; c\right), N\left(0; b; \frac{-kc}{1-k}\right), P\left(a; \frac{-kb}{1-k}; 0\right)$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{ka}{1-k}; b; -\frac{1}{c-k}c\right), \overrightarrow{NP} = \left(a; \frac{-1}{a-k}b; \frac{kc}{1-k}\right)$$

$$\text{Ta có } [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}] = \left(\frac{-k^2 + k - 1}{(1-k)^2}bc; \frac{k^2 + k - 1}{(1-k)^2}ca; \frac{-k^2 + k - 1}{(1-k)^2}ab\right)$$

Nên $mp(MNP)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (bc; ca; ab)$

Mặt phẳng $(AB'D')$ có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$

Vì $\frac{bc}{\frac{1}{a}} = \frac{ca}{\frac{1}{b}} = \frac{ab}{\frac{1}{c}} = abc$ và $M, N, P \in (AB'D')$ do $k \neq$ nên: $mp(MNP) \parallel mp(AB'D')$

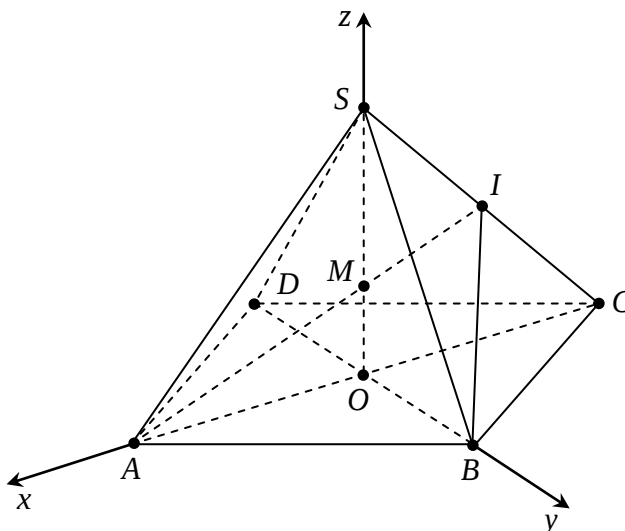
Câu 24

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Gọi I là trung điểm cạnh bên SC . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AIB)

Lời giải

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ là tâm O của đáy, trục Ox chứa OA , trục Oy chứa OB , trục Oz chứa SO . Khi đó

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S(0; 0; h)$$



Ta có giao điểm M của SO và AI là trọng tâm tam giác SAC nên $M\left(0;0;\frac{h}{3}\right)$. Mặt phẳng đi qua A,

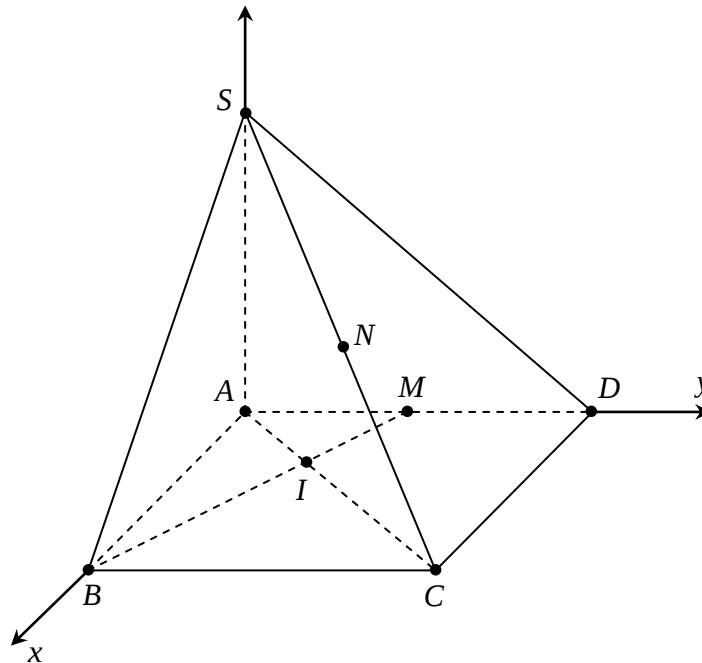
B, MI cũng chính là mặt phẳng (ABM) nên có phương trình là: $\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{h}{2}} = 1$

Do đó khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABM) là: $d = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{9}{h^2}}} = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}$

Câu 25

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{2}, SA=a$, SA vuông góc (ABCD). Gọi M, N là trung điểm AD, SC, gọi I là giao điểm BM và AC. Chứng minh $(SAC) \perp (SBM)$ và tính thể tích khối ANIB.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ $S(0;0;a), A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a\sqrt{2};0)$

Thì $D(0;a\sqrt{2};0), M\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), N\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right)$

Vì $\frac{IA}{IC} = \frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IA = \frac{1}{3}AC \Rightarrow I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right), \overrightarrow{BM}\left(-a;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), \overrightarrow{BS}(-a;0;a)$

Mặt phẳng (SMB) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

Mặt phẳng (SCA) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = (-a^2\sqrt{2}; a^2; 0)$

Vì $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ nên 2 mặt phẳng (SAC), (SMB) vuông góc

$$\text{Ta có } [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}] = \left(-\frac{a^2}{3\sqrt{2}}; \frac{a^2}{6}; 0 \right), \overrightarrow{AB} = (a; 0; 0), V_{ANIB} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}] \cdot \overrightarrow{AB}| = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36} (\text{dvtt})$$

Câu 25

Cho tứ diện đều (T) có các đỉnh có tọa độ $(x_i; y_i; z_i)$ với $1 \leq i \leq 4$, nội tiếp trong một mặt cầu đơn vị. Chứng minh: $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=1}^4 y_i^2 = \sum_{i=1}^4 z_i^2 = \frac{4}{3}$ và $\sum_{i=1}^4 x_i y_i = \sum_{i=1}^4 y_i z_i = \sum_{i=1}^4 z_i x_i = 0$

Lời giải

Ta kiểm tra được rằng kết luận đúng cho trường hợp tứ diện $A_0 B_0 C_0 D_0$ có 4 đỉnh là

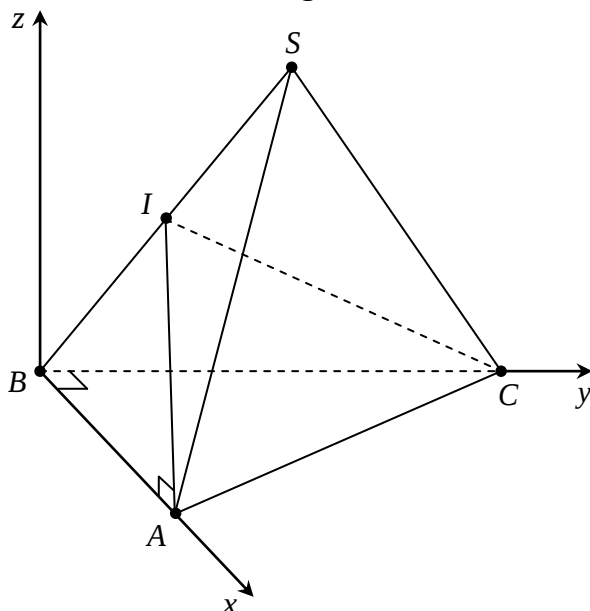
$$A_0(0; 0; 1), B_0\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right), C_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{1}{3}\right), D_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Bây giờ ta chứng minh khẳng định đúng cho một tứ diện ABCD có các đỉnh $(x_i; y_i; z_i)$ bất kỳ. Đầu tiên, ta quay (T) quanh trục z cho đến khi một đỉnh của nó nằm trong mặt phẳng (Oyz) . Tiếp theo, ta quay nó quanh trục Ox cho đến khi đỉnh này trùng với điểm $A_0(0; 0; 1)$. Sau đó, lại quay quanh trục Oz cho đến khi (T) trùng với tứ diện $A_0 B_0 C_0 D_0$ đã nói ở trên có điều phải chứng minh!

Câu 26

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a; BC = 2a$. SA vuông góc với AB , SC vuông góc với BC và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$$B(0; 0; 0), A(a; 0; 0), C(0; 2a; 0), S(x; y; z), \text{ với } x, y, z \geq 0. (ABC) \equiv (Oxy): z = 0$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{SA} = (a - x; -y; -z), \overrightarrow{AB} = (-a; 0; 0).$$

$$\overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -a(a - x) = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Ta có $\overrightarrow{SC} = (-x; 2a - y; -z)$, $\overrightarrow{BC} = (0; 2a; 0)$

$$\overrightarrow{SC} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 2a(2a - y) = 0 \Leftrightarrow y = 2a.$$

Suy ra $S(a; 2a; z)$.

Đường thẳng SC có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{CS} = (a; 0; z)$.

Mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Theo đề bài, góc giữa SC và $\text{mp}(ABC)$ là 60° nên

$$\sin 60 = \frac{|\overrightarrow{SC} \cdot \vec{k}|}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|z|}{\sqrt{a^2 + z^2}} \Leftrightarrow z^2 = 3a^2 \Rightarrow z = \sqrt{3}a \Rightarrow S(a; 2a; \sqrt{3}a)$$

Gọi I là trung điểm SB . Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

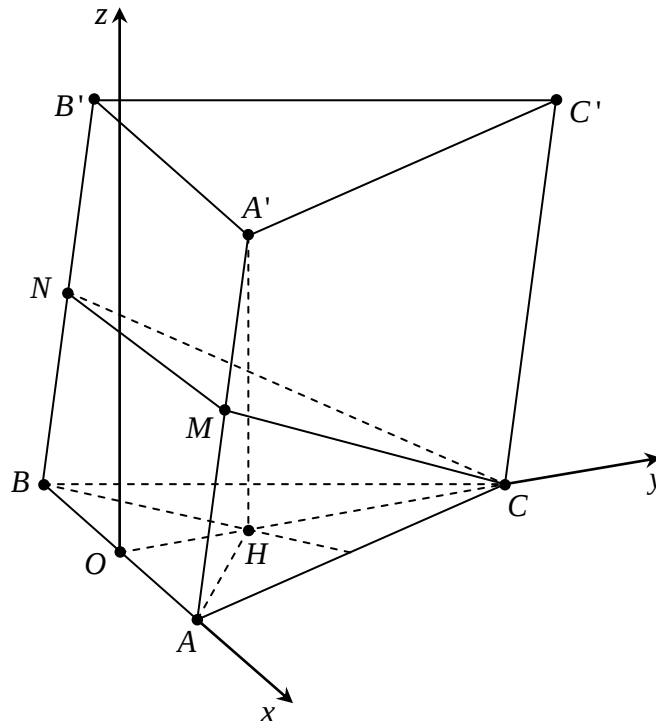
$$\text{Ta có } R = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2 + 3a^2} = \sqrt{2}a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

Câu 27

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) .

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AB . Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0; 0; 0)$,

$$A\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), H\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right), A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có $\overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow B' \left(-1; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$. Dễ thấy (ABC) có vtpt $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$.

Ta có M là trung điểm $AA' \Rightarrow M \left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$, N là trung điểm $BB' \Rightarrow N \left(\frac{-3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$

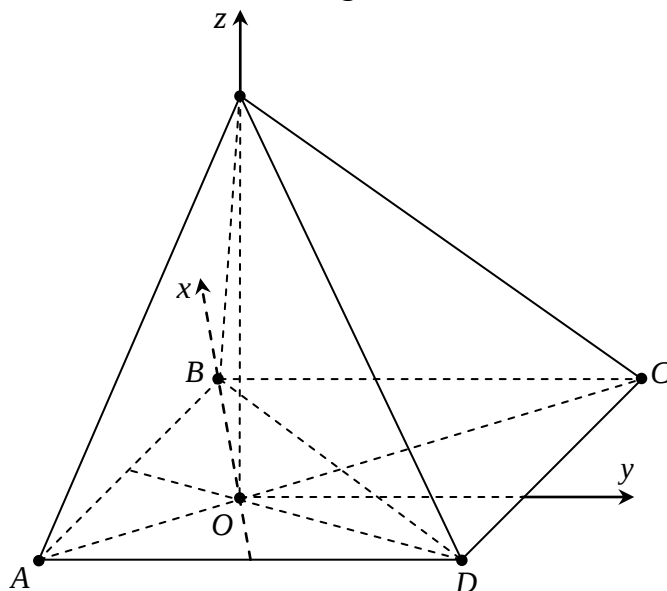
$\overline{MN} = (-1; 0; 0)$, $\overline{CM} = \left(\frac{1}{4}; \frac{-5\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \Rightarrow (CMN)$ có vtpt $\vec{n}_2 = \left(0; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{5\sqrt{3}}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{12} (0; 2\sqrt{2}; 5)$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Câu 28

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $BAD = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Tính $\sin \alpha$

Lời giải



Tam giác ABD đều do $AB = AD$ và $BAD = 60^\circ$.

Do $SA = SB = SD$ nên S nằm trên trục của ΔABD

Gọi O là tâm của tam giác đều ABD , khi đó $SO \perp (ABD)$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Gắn hệ tọa độ sao cho $O(0; 0; 0)$, $B \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0 \right)$, $S \left(0; 0; \frac{\sqrt{15}}{6} \right)$.

Suy ra $D \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; 0 \right)$, $C \left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0 \right)$.

Vậy $\overline{BC} = (1; 0; 0)$, $\overline{BS} = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{15}}{6} \right)$.

Vector pháp tuyến của (SBC) : $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = \left(0; -\frac{\sqrt{15}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

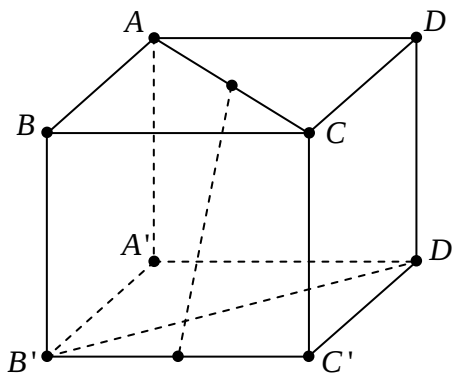
Chọn vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (0; -\sqrt{15}; 2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{SD} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{\sqrt{15}}{6}\right) = \frac{1}{6}(3; -\sqrt{3}; -\sqrt{15})$.

$$\Rightarrow \sin(SD, (SBC)) = \frac{|-3\sqrt{5} - 6\sqrt{5}|}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{27}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 29

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Đưa hình lập phương vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho

$$B'(0;0;0), C'(a;0;0), A'(0;a;0), D'(a;a;0), B(0;0;a), A(0;a;a), C(a;0;a).$$

Ta có

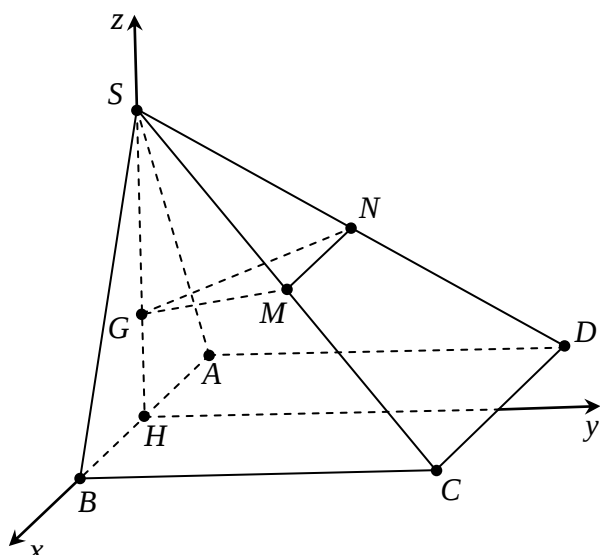
- $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a\right), N\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0; -\frac{a}{2}; -a\right) = \frac{-a}{2}(0; 1; 2) \Rightarrow \vec{u}_1(0; 1; 2)$ là VTCP của MN .
- $\overrightarrow{B'D'}(a; a; 0) = a(1; 1; 0) \Rightarrow \vec{u}_2$ là VTCP của $B'D'$.

$$\Rightarrow d(MN; B'D') = \frac{\left| \begin{bmatrix} \vec{u}_1; \vec{u}_2 \end{bmatrix} \overrightarrow{B'N} \right|}{\left| \begin{bmatrix} \vec{u}_1; \vec{u}_2 \end{bmatrix} \right|} = \frac{a}{3}.$$

Câu 30

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, xem a là 1 đơn vị.

$$\text{Ta có: } S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); G\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{6}\right); C\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right); D\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right) \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$\text{Và } \overrightarrow{GM} = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{12}\right); \overrightarrow{NM} = \left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \Rightarrow [\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{NM}] = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{24}; -\frac{1}{4}\right).$$

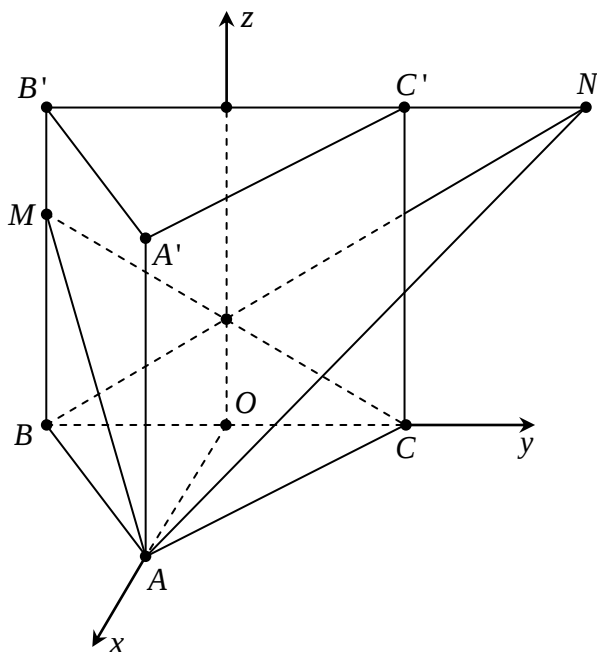
Khi đó: $\vec{n}_{(GMN)} = (0; \sqrt{3}; -6)$ và $\vec{n}_{(ABCD)} = \vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Ta có: } \cos((GMN), (ABCD)) = \frac{|\vec{n}_{(GMN)} \cdot \vec{n}_{(ABCD)}|}{|\vec{n}_{(GMN)}| \cdot |\vec{n}_{(ABCD)}|} = \frac{|-6|}{\sqrt{39} \cdot 1} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 31

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB'} = \vec{0}$; $\overrightarrow{NB'} = 3\overrightarrow{NC'}$. Biết rằng hai mặt phẳng (MCA) và (NAB) vuông góc với nhau. Tính thể tích hình lăng trụ.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của BC và $BB' = m$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ đơn vị a

$$\text{Ta có: } A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right); B\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right); C\left(0; \frac{1}{2}; 0\right); M\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{2m}{3}\right); N(0; 1; m)$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{CA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}; 0\right); \overrightarrow{MA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{2m}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{MA} = \left(\frac{m}{3}; \frac{\sqrt{3}m}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ là VTPT của } (MCA)$$

$$\text{Và } \overrightarrow{BA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right); \overrightarrow{NA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -1; -m\right) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{NA} = \left(\frac{-m}{2}; \frac{\sqrt{3}m}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ là VTPT của } (NAB)$$

$$\text{Theo bài ra: } (MCA) \perp (NAB) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(MCA)}} \cdot \overrightarrow{n_{(NAB)}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{m^2}{6} + \frac{m^2}{2} - \frac{9}{8} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Vậy } BB' = \frac{3\sqrt{6}}{4}a \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{4}a = \frac{9\sqrt{2}}{16}$$

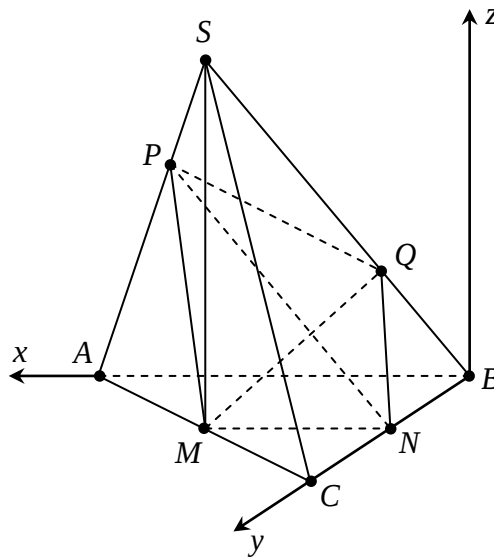
Câu 32

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 3$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên hai cạnh SA, SB lấy các điểm P, Q tương ứng sao cho $SP = 1, SQ = 2$. Tính thể tích V của tứ diện $MNPQ$.

Lời giải

Ta có $AB = BC = 2; SM = \sqrt{7}$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.



$$\text{Ta có } B(0; 0; 0), A(2; 0; 0), C(0; 2; 0), N(0; 1; 0), M(1; 1; 0), S(1; 1; \sqrt{7})$$

$$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} \Rightarrow P\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{7}}{3}\right); \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

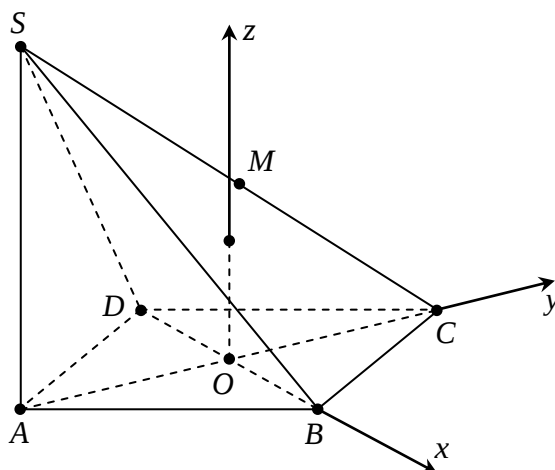
$$\text{Ta có } \overrightarrow{NM} = (1; 0; 0), \overrightarrow{NQ} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{7}}{3}\right), \overrightarrow{NP} = \left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{7}}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NQ}] = \left(0; -\frac{\sqrt{7}}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Suy ra } V_{MNPQ} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NQ}] \cdot \overrightarrow{NP} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \frac{\sqrt{7}}{9} - \frac{4\sqrt{7}}{9} \right| = \frac{\sqrt{7}}{18}$$

Câu 33

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với đáy. Tính độ dài cạnh SA để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) bằng 60° .

Lời giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, M là trung điểm của SC , đặt $SA = 2m$ ($m > 0$)

Khi đó $B\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right)$, $D\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $M\left(0; 0; m\right)$

Ta có $(SBC): \frac{x}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{z}{m} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{SBC} = \left(1; 1; \frac{a}{m\sqrt{2}}\right)$

Phương trình mặt phẳng $(SDC): \frac{x}{-\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{z}{m} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{SDC} = \left(-1; 1; \frac{a}{m\sqrt{2}}\right)$

Yêu cầu bài toán tương đương với $((SBC), (SDC)) = 60^\circ \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_{SBC}, \vec{n}_{SDC}) \right| = \frac{1}{2}$

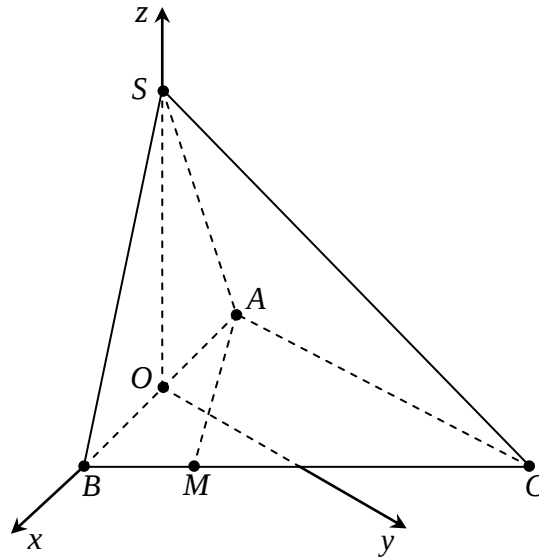
$$\Leftrightarrow \frac{\left| \left(\frac{a}{m\sqrt{2}} \right)^2 \right|}{1 + 1 + \left(\frac{a}{m\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{m\sqrt{2}} \right)^2 = 2 \Leftrightarrow 2m = a.$$

Câu 34

Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 2a$, $AC = 2a\sqrt{3}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi M là điểm trên đoạn $BC: BM = \frac{1}{4}BC$. Cosin góc tạo bởi (SAC) & (SAM) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ; không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$.



Khi đó $S(0;0;\sqrt{3}), A(-1;0;0), B(1;0;0), C(-1;2\sqrt{3};0), M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA}(-1;0;-\sqrt{3}); \overrightarrow{SM}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Chọn VTPT của (SAM) là $\vec{n}_1(\sqrt{3}; -3; -1)$.

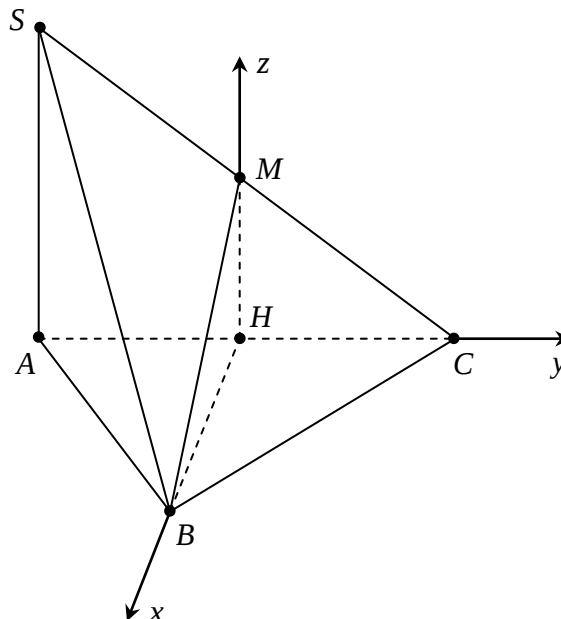
Ta có $\overrightarrow{SC}(-1;2\sqrt{3};-\sqrt{3}) \Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}] = (6;0;-2\sqrt{3})$, chọn VTPT của (SAC) là $\vec{n}_2(\sqrt{3};0;-1)$.

Vậy cosin góc φ giữa hai mp là $\cos \varphi = \frac{|3+0+1|}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Câu 35

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC . Tính cosin của góc φ giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AC khi đó $MH \parallel SA \Rightarrow MH \perp (ABC)$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $H(0;0;0), M(0;0;a), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; a\right), \overrightarrow{HM} = (0;0;a)$$

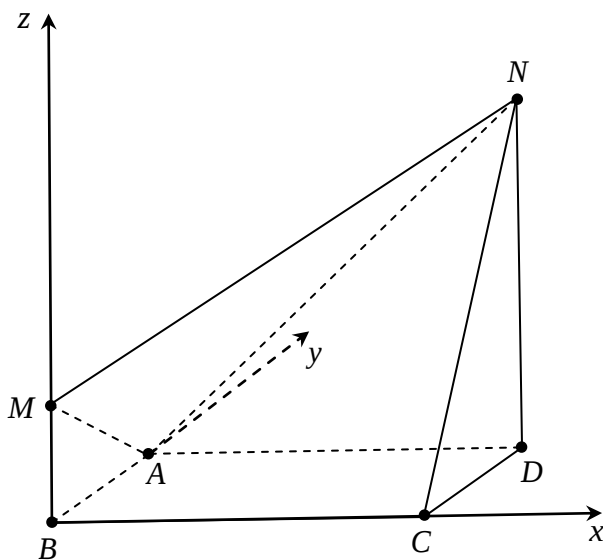
Giả sử góc giữa BM và mặt phẳng (ABC) là φ thì ta có: $\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{HM}|}{|\overrightarrow{BM}| \cdot |\overrightarrow{HM}|} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 36

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên hai tia Bx, Dy vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và cùng chiều lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $BM = \frac{a}{4}; DN = 2a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN) .

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $B(0;0;0), A(0;a;0), C(a;0;0), M\left(0;0;\frac{a}{4}\right), N(a;a;2a)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(0; -a; \frac{a}{4}\right), \overrightarrow{AN} = (0;0;2a)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(-2a^2; \frac{a^2}{4}; a^2\right)$ là vector pháp tuyến của mp (AMN) .

$\overrightarrow{CM} = \left(-a; 0; \frac{a}{4}\right), \overrightarrow{CN} = (0; a; 2a)$

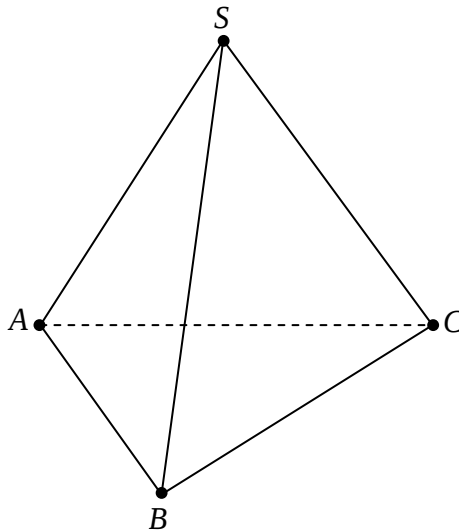
$\Rightarrow [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] = \left(\frac{-a^2}{4}; 2a^2; -a^2\right)$ là vector pháp tuyến của mp (CMN) .

$$\text{Do đó } \cos \varphi = \frac{\left| \frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{2} - a^4 \right|}{\sqrt{4a^4 + \frac{a^4}{16} + a^4} \cdot \sqrt{4a^4 + \frac{a^4}{16} + a^4}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

Câu 37

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, tam giác SAB và tam giác SCB lần lượt vuông tại A , C . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $B(0;0;0)$, $A(a\sqrt{2};0;0)$, $C(0;a\sqrt{2};0)$, $S(x;y;z)$.

Ta có $(ABC): z = 0$, $\overrightarrow{AS} = (x - a\sqrt{2}; y; z)$, $\overrightarrow{CS} = (x; y - a\sqrt{2}; z)$

Do $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (x - a\sqrt{2})a\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$, $d(S, (ABC)) = 2a \Rightarrow z = 2a$ ($z > 0$)

$\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow (y - a\sqrt{2})a\sqrt{2} = 0 \Rightarrow y = a\sqrt{2} \Rightarrow S(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; 2a)$

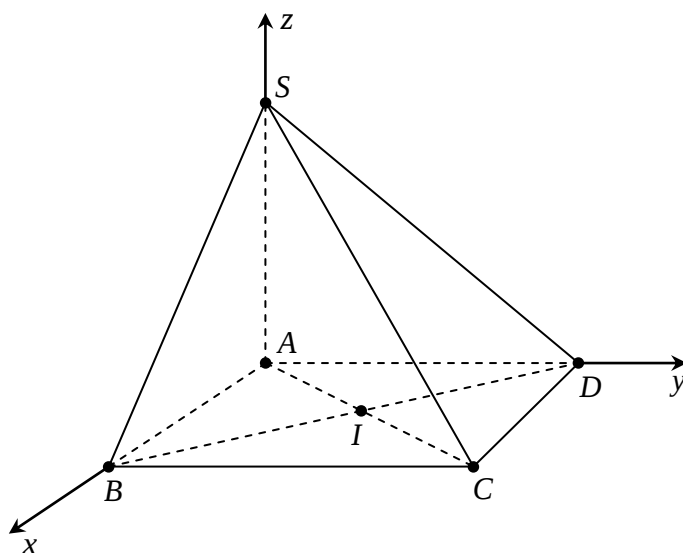
Ta có $\overrightarrow{AS} = (0; a\sqrt{2}; 2a)$, $\overrightarrow{CS} = (a\sqrt{2}; 0; 2a)$, $\overrightarrow{BS} = (a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; 2a)$.

(SBC) có 1 vtpt $\vec{n} = (-\sqrt{2}; 0; 1)$, (SAB) có 1 vtpt $\vec{m} = (0; \sqrt{2}; -1) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

Câu 38

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = (SI; AI) = SIA.$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \tan SIA = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = a.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Khi đó $\overrightarrow{SA} = (0;0;-a)$; $\overrightarrow{SC} = (a;a;-a)$; $\overrightarrow{SB} = (a;0;-a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (-1;1;0)$.

Mặt phẳng (SBC) có vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1;0;1)$.

$$\text{Suy ra } \cos((SAC); (SBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((SAC); (SBC)) = 60^\circ.$$

Câu 39

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đường thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng bao nhiêu?

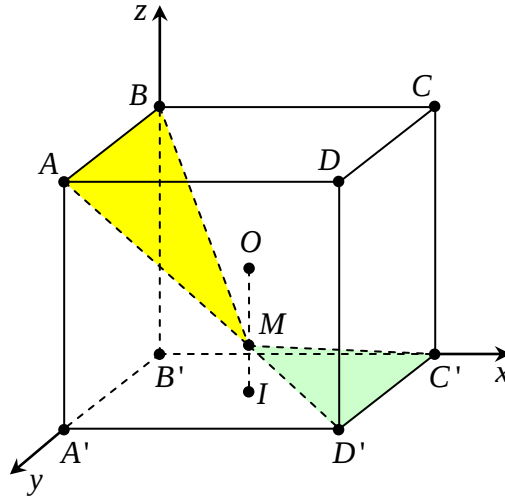
Lời giải

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử cạnh hình lập phương bằng 6.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B' .

Khi đó, $C'(6;0;0)$, $D'(6;6;0)$, $M(3;3;1)$, $A(0;6;6)$, $B(0;0;6)$.

$$\overrightarrow{MC'}(3;-3;-1), \overrightarrow{MD'}(3;3;-1)$$



Suy ra vector pháp tuyến của $(MC'D')$ là $\vec{n}_1 = [\vec{MC'}, \vec{MD'}] = (6; 0; 18) = 6(1; 0; 3)$.

$$\vec{MA}(-3; 3; 5), \vec{MB} = (-3; -3; 5)$$

Suy ra vector pháp tuyến của (MAB) là $\vec{n}_2 = [\vec{MA}, \vec{MB}] = (30; 0; 18) = 6(5; 0; 3)$.

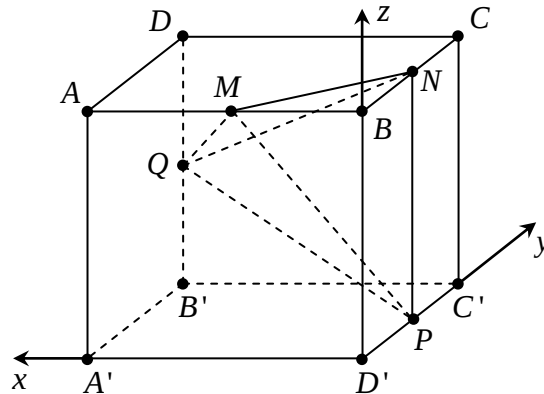
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) , ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{14}{\sqrt{340}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{6\sqrt{85}}{85}.$$

Câu 40

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:
$$\begin{cases} D' \equiv O \\ Ox \equiv D'A' \\ Oy \equiv D'C' \\ Oz \equiv D'D \end{cases}$$

Khi đó $A(1; 0; 1), B(1; 1; 1), C(0; 1; 1), D(0; 0; 1), A'(1; 0; 0), B'(1; 1; 0), C'(0; 1; 0)$

$$M\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right), P\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

Ta có: $\vec{MN}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), \vec{MP}\left(-1; \frac{1}{2}; -1\right), \vec{MQ}\left(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$$\left| [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ} \right| = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6} \cdot \left| [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ} \right| = \frac{1}{24}.$$

Câu 41

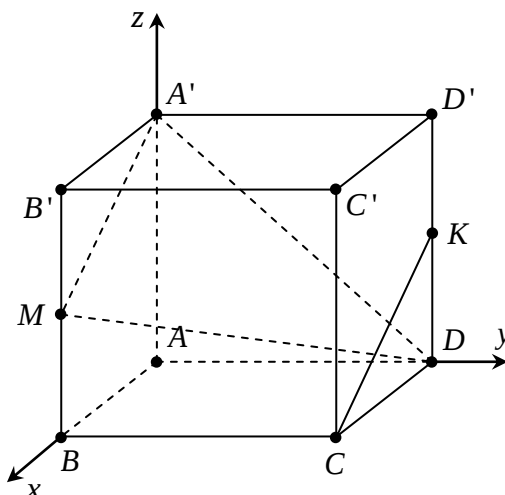
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm BB' . Ta có: $CK \parallel A'M \Rightarrow CK \parallel (A'MD)$.

Khi đó $d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD)) = d(C, (A'MD))$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), B'(a;0;a), C(a;a;0), M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{A'M} = \left(a;0;-\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{A'D} = (0;a;-a), [\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'D}] = \left(\frac{a^2}{2}; a^2; a^2\right).$$

Vậy mặt phẳng $(A'MD)$ nhận $\vec{n} = (1;2;2)$ làm vector pháp tuyến.

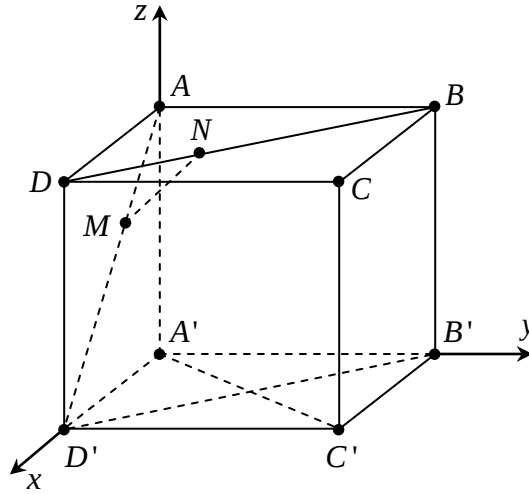
Phương trình $(A'MD)$ là $x + 2y + 2z - 2a = 0$.

$$\text{Do đó: } d(C, (A'MD)) = \frac{|a + 2a - 2a|}{3} = \frac{a}{3}.$$

Câu 42

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Lấy điểm M thuộc đoạn AD' , điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM = DN = x$, $\left(0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A'$, $A'D' \equiv Ox$, $A'B' \equiv Oy$, $A'A \equiv Oz$.

$A'(0;0;0)$, $D'(a;0;0)$, $B'(0;a;0)$, $A(0;0;a)$, $D(a;0;a)$, $B(0;a;a)$, $C'(a;a;0)$, $C(a;a;a)$.

$$M\left(\frac{x}{\sqrt{2}}; 0; \frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right), N\left(\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}; \frac{x}{\sqrt{2}}; a\right).$$

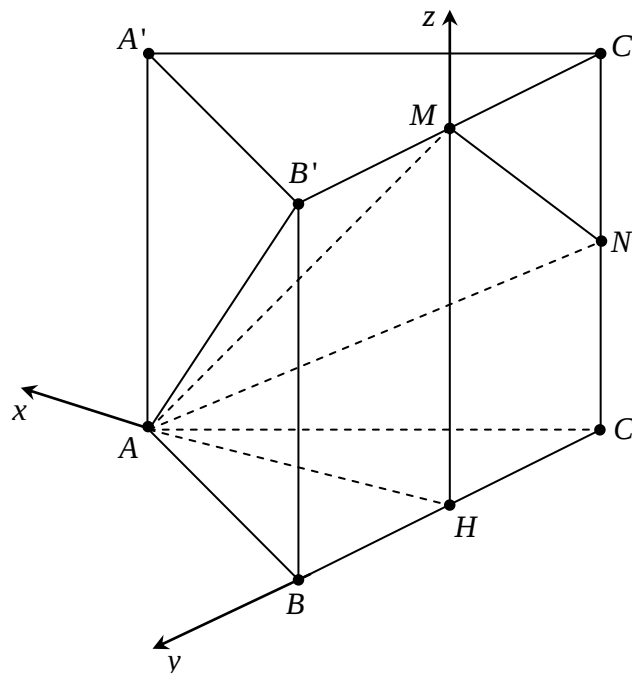
$$\Rightarrow MN^2 = (\sqrt{2}x - a)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 3x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = 3\left(x^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{3}ax + \frac{2a^2}{9}\right) + \frac{a^2}{3}.$$

$$\Rightarrow MN^2 = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}. \text{ Vậy } MN \text{ ngắn nhất } \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 43

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc $BAC = 120^\circ$, $AA' = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng bao nhiêu ?

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC , $BC = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$M(0;0;a)$, $N\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) .

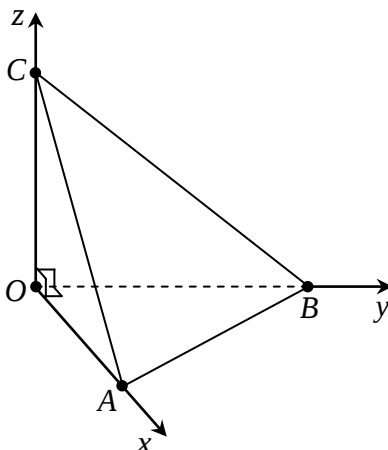
(AMN) có một vtpt $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

(ABC) có một vtpt $\overrightarrow{HM} = (0;0;1)$, từ đó $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{HM}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 44

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Lời giải



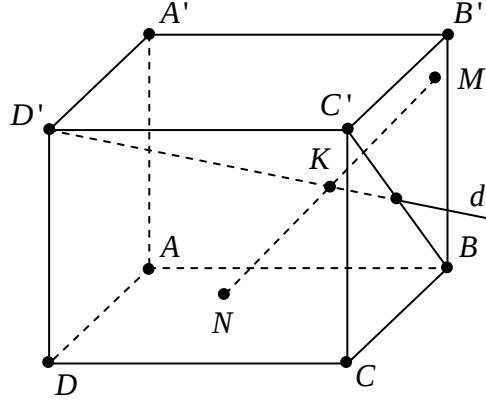
$$\text{Ta có } \frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(O, (ABC))} = \frac{3}{d(O, (ABC))}$$

$$\text{Mà } \frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{3}{2} \text{ nên } d(O, (ABC)) = 2.$$

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc mặt cầu tâm O , bán kính $R = 2$.

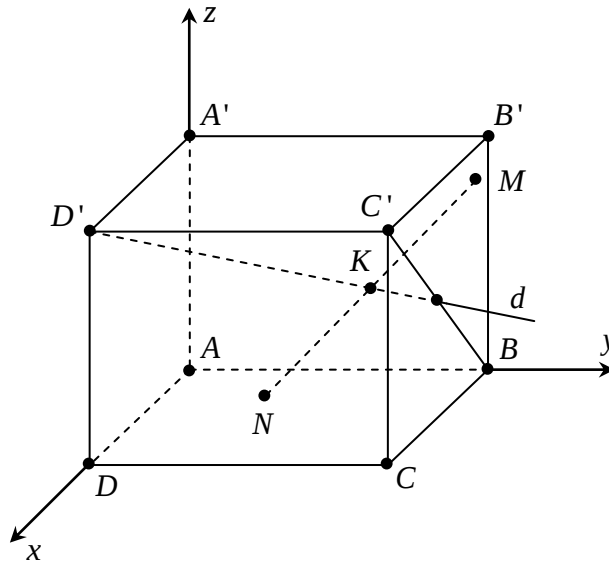
Câu 45

Cho hình lập phương $a=1$ có cạnh bằng $a=1$. Một đường thẳng d đi qua đỉnh D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt thuộc các mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABCD)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d (tham khảo hình vẽ). Giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN là ?

**Lời giải**

Cho $a=1$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.



$$A(0;0;0), D'(1;0;1), B(0;1;0), C'(1;1;1)$$

$$I \text{ là trung điểm } BC' \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{D'I} = \left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(1; -2; 1).$$

$$\text{Đường thẳng } D'I \text{ đi qua } D'(1;0;1), \text{ có một VTCP là } \vec{u} = (1; -2; 1) \text{ là: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{Mặt phẳng } (ABCD): z = 0$$

$$\text{Mặt phẳng } (BCC'B'): y = 1$$

$$\text{Ta có } M \in (BCC'B') \Rightarrow M(m; 1; n), K \in D'I \Rightarrow K(1+t; -2t; 1+t)$$

$$K \text{ là trung điểm } MN \Rightarrow N(2t-m+2; -4t-1; 2t-n+2).$$

$$N \in (ABCD) \Leftrightarrow z_N = 0 \Leftrightarrow 2t - n + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{n-2}{2} \Rightarrow N(n-m; 3-2n; 0).$$

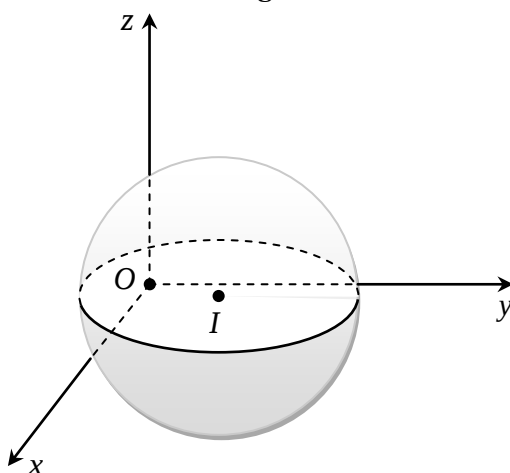
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= (n-2m; 2-2n; -n) \Rightarrow MN^2 = (n-2m)^2 + (2-2n)^2 + n^2 = (n-2m)^2 + 5n^2 - 8n + 4 \\ &= (n-2m)^2 + 5\left(n - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5} \Rightarrow MN \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $b = \frac{4}{5}$ và $a = \frac{2}{5}$.

Câu 46

Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà đó. Biết rằng trên bề mặt của quả bóng đều tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng 1; 2; 4. Tổng độ dài đường kính của hai quả bóng đó bằng bao nhiêu?

Lời giải



Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ. Mỗi quả bóng xem là mặt cầu tâm $I(a; b; c)$.

Vì mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà nên chúng tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ $\Leftrightarrow d(I, (xOy)) = d(I, (yOz)) = d(I, (zOx)) = R \Leftrightarrow a = b = c > 0 \Rightarrow I(a; a; a)$.

Gọi $M(x; y; z)$ là điểm nằm trên quả bóng có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng 1; 2; 4 $\Rightarrow M(1; 2; 4)$.

M nằm trên quả bóng khi $IM = d(I, (xOy)) = a$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-2)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 14a + 21 = 0 \quad (*).$$

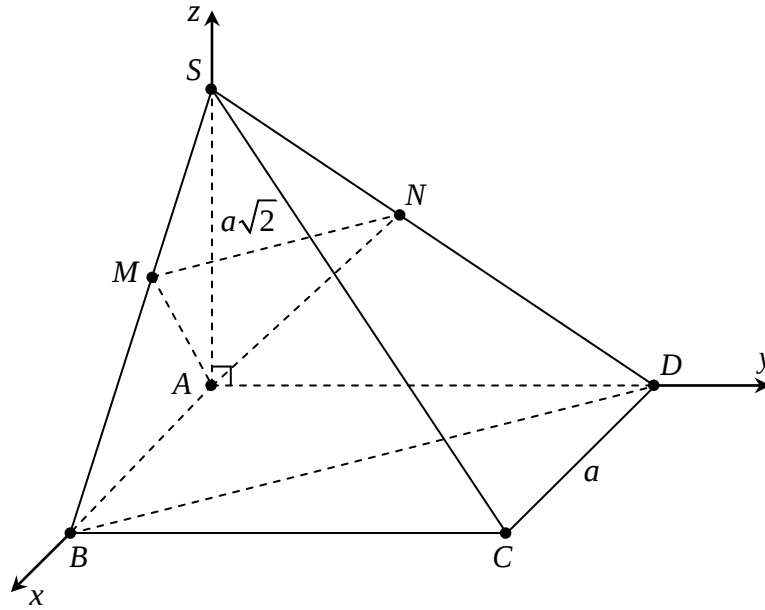
Vì $(*)$ có biệt thức $\Delta' = 7 > 0$ nên nó có hai nghiệm phân biệt a_1, a_2 và $a_1 + a_2 = 7$.

Khi đó tổng đường kính của hai quả bóng là $2(a_1 + a_2) = 14$.

Câu 47

Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD . Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$. Tương tự ta cũng có $AN \perp SC \Rightarrow (AMN) \perp SC$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và (AMN) .

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;\sqrt{2})$, $C(1;1;0)$, $\overrightarrow{SC} = (1;1;-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (0;1;-\sqrt{2})$. Do $(AMN) \perp SC$ nên (AMN) có vtpt $\overrightarrow{SC}$

$$\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC}|}{|\overrightarrow{SB}| |\overrightarrow{SC}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 48

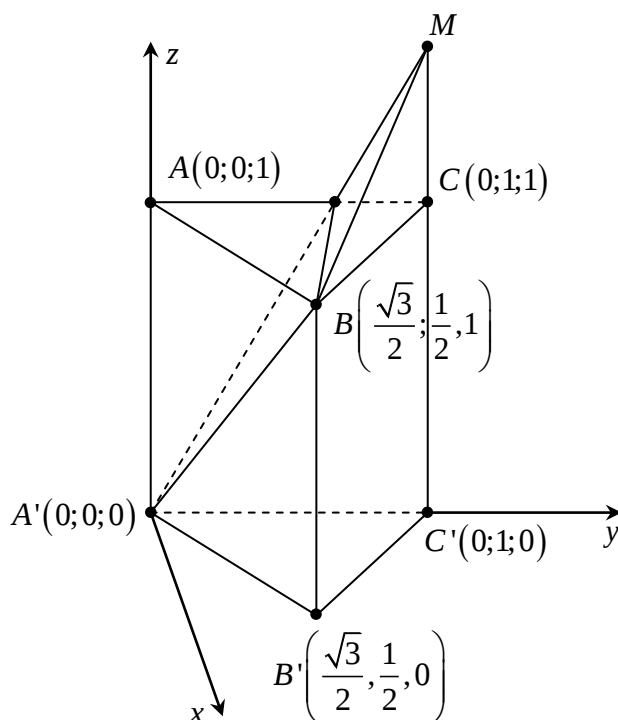
Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . M là một điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xét hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gắn hệ trục như hình vẽ quy ước $a=1$ (đơn vị). Gọi D là giao điểm của $A'M$ và AC .

Vì tam giác $A'B'C'$ là tam giác cân cạnh bằng a nên ta suy ra độ dài các đường trung tuyến là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra tọa độ các điểm như hình vẽ.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ vậy $\Rightarrow \triangle ADA' \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{AD}{CD} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{DC}$



Vậy tọa độ của điểm D là: $D\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$

Ta có mặt phẳng ABC có phương trình $z = 1 \Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = (0; 0; 1)$

Mặt khác mặt phẳng $(A'MB)$ là mặt phẳng đi qua ba điểm A' , D và B .

Ta có: $\overrightarrow{A'D} = \left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$ và $\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow \vec{n}_{(A'BM)} = [\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{A'B}] = \left(\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Vậy cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) là:

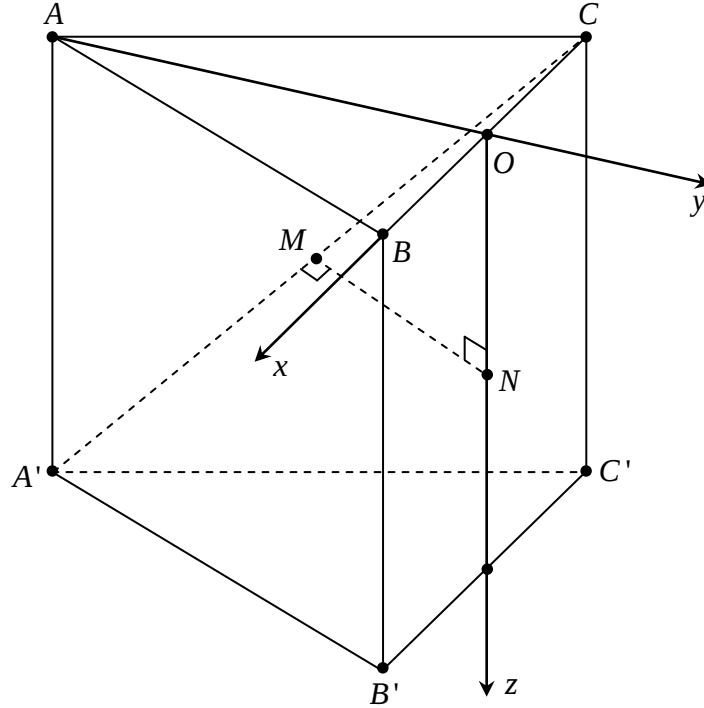
$$\cos((A'BM), (ABC)) = \left| \cos(\vec{n}_{(A'BM)}, \vec{n}_{(ABC)}) \right| = \frac{\left| \frac{-\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Câu 49

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN ($M \in A'C$; $N \in BC'$) là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' . Tỷ số $\frac{NB}{NC'}$ bằng

Lời giải

Kết quả bài toán sẽ không thay đổi nếu ta xét lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng 2.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (O là trung điểm của BC). Ta có: $A'(0; -\sqrt{3}; 2)$, $B(1; 0; 0)$, $C(-1; 0; 0)$, $C'(-1; 0; 2)$, $\overrightarrow{CA'} = (1; -\sqrt{3}; 2)$, $\overrightarrow{BC'} = (-2; 0; 2)$.

$$\text{Do } \begin{cases} \overrightarrow{CM} = m\overrightarrow{CA'} \\ \overrightarrow{BN} = n\overrightarrow{BC'} \end{cases} \text{ nên ta có } M(-1+m; -\sqrt{3}m; 2m), N(1-2n; 0; 2n)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-m-2n+2; \sqrt{3}m; 2n-2m).$$

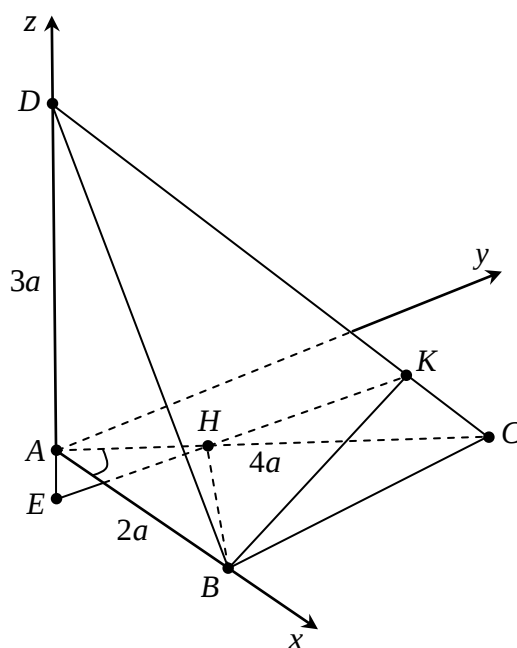
Đường thẳng MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA'} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m+2n=-1 \\ -m+4n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{2}{5} \\ n=\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{BN}{BC'} = n = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{NB}{NC'} = \frac{3}{2}.$$

Câu 50

Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AD = 3a$, $AB = 2a$, $AC = 4a$, $BAC = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC và CD . Đường thẳng HK cắt đường thẳng AD tại E . Chứng minh rằng BE vuông góc với CD và tính thể tích khối tứ diện $BCDE$ theo a .

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với A trùng gốc tọa độ O.

$$A(0;0;0), B(2a;0;0), C(2a;2a\sqrt{3};0), D(0;0;3a), AH = AB \cdot \cos 60^\circ = a.$$

Suy ra tọa độ của $H\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

$\overrightarrow{DC}(2a;2a\sqrt{3};-3a)$ suy ra $\vec{u}(2;2\sqrt{3};-3)$ là một vectơ chỉ phương của DC nên phương trình đường thẳng DC là:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2\sqrt{3}t \\ z = 3a - 3t \end{cases}$$
 Vì K thuộc DC nên $K(2t;2\sqrt{3}t;3a-3t)$

Ta có $\overrightarrow{BK}(2t-2a;2\sqrt{3}t;3a-3t), \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{13a}{25}$. Vậy $K\left(\frac{26a}{25}; \frac{26a\sqrt{3}}{25}; \frac{36a}{25}\right)$

Vì E thuộc trục Az nên $E(0;0;z), \overrightarrow{EH}\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -z\right); \overrightarrow{HK}\left(\frac{27a}{50}; \frac{27a\sqrt{3}}{50}; \frac{36a}{25}\right)$

Vì E, H, K thẳng hàng nên $\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{HK}$ cùng phương, do đó suy ra $z = -\frac{4a}{3}$. Vậy $E\left(0;0;-\frac{4a}{3}\right)$

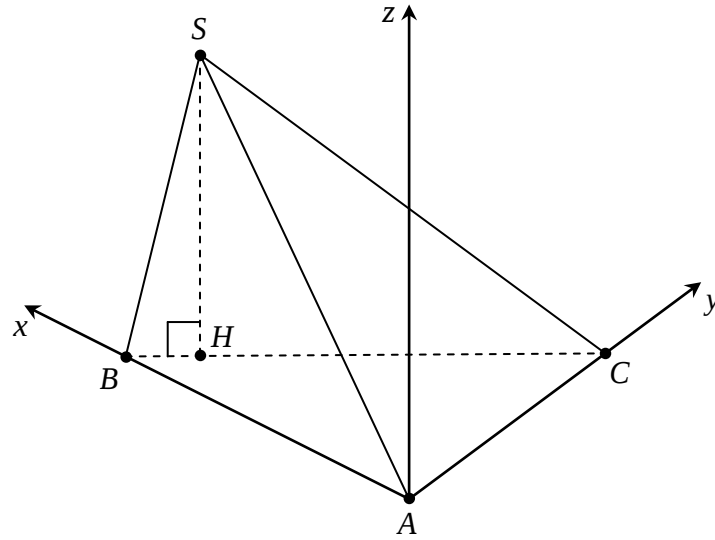
Ta có $\overrightarrow{EB} = \left(2a;0;\frac{4a}{3}\right)$ và $\overrightarrow{DC}(2a;2a\sqrt{3};-3a)$ nên $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a \cdot 2a + 0 \cdot 2a\sqrt{3} + \frac{4a}{3}(-3a) = 0$

Vậy BE vuông góc với CD

Câu 51

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = a$ và $\angle ABC = 30^\circ$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với đáy một góc 60° . Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) thuộc cạnh BC. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với A trùng gốc tọa độ O.

$A(0;0;0), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a}{2};0\right), S(x;y;z)$ với $x > 0; y > 0; z > 0, H(x;y;0)$ với H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC)

$\vec{n}_1 = (0;0;1)$ là vecto pháp tuyến của (ABC) và $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}] = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}z; \frac{a\sqrt{3}}{2}y\right)$ là vecto pháp

tuyến của (SAB). $\vec{n}_3 = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}] = \left(\frac{a}{2}x; 0; -\frac{a}{2}z\right)$ là vecto pháp tuyến của (SAC)

$$\cos((SAB), (ABC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}} \Leftrightarrow z^2 = 3y^2 \quad (1)$$

$$\cos((SAC), (ABC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_3|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{z^2 + x^2}} \Leftrightarrow z^2 = 3x^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $x = y$. Nên $H(x; x; 0)$, vì H thuộc BC nên $\overrightarrow{BC} \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{CH} \left(x; x - \frac{a}{2}; 0\right)$

cùng phương, suy ra $\frac{x}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}$ thay vào (1), ta được $z = \frac{3a}{2(1+\sqrt{3})}$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \frac{3a}{2(1+\sqrt{3})} \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{(3-\sqrt{3})a^3}{32}$$

Câu 52

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. có độ dài cạnh $AB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Tính theo a diện tích của tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Gọi O là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABC, ta có

$$OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OB + OC = \frac{a}{2}, OG = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Đặt $SG = z > 0$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho tia Ox chứa A, tia Oy chứa B và tia Oz nằm trên đường thẳng qua O và song song với SG (xem hình vẽ), khi đó:

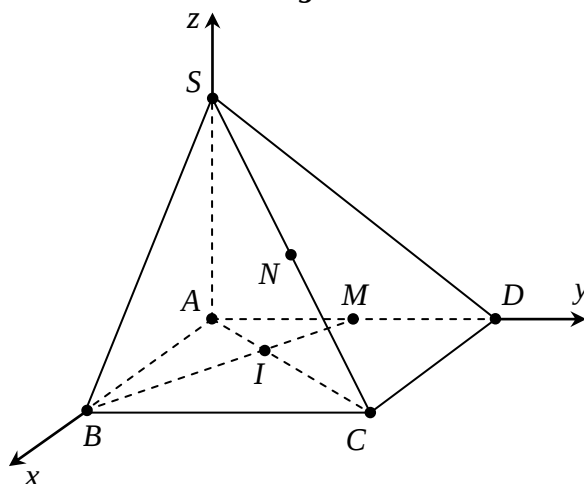
$$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; z\right), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; z\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4}; z\right).$$

Tính được $z = \frac{a\sqrt{15}}{6}$. Suy ra $S_{AMN} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Câu 53

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC , I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB) . Tính thể tích khối tứ diện $ANIB$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $O \equiv A$, Ox chứa B, tia Oy chứa D và tia Oz chứa S. Khi đó:

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a\sqrt{2}; 0), D(0; a\sqrt{2}; 0), S(0; 0; a), M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{AS}(0; 0; a), \overrightarrow{AC}(a; a\sqrt{2}; 0), \overrightarrow{SM}\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -a\right), \overrightarrow{SB}(a; 0; -a)$$

Vecto pháp tuyến của (SAC) là $[\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AC}] = (-a^2\sqrt{2}; a^2; 0)$

Vecto pháp tuyến của (SMB) là $[\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SB}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; -a^2; 0\right)$

Vì $[\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AC}][\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SB}] = a^4 - a^4 = 0$ nên $(SAC) \perp (SMB)$

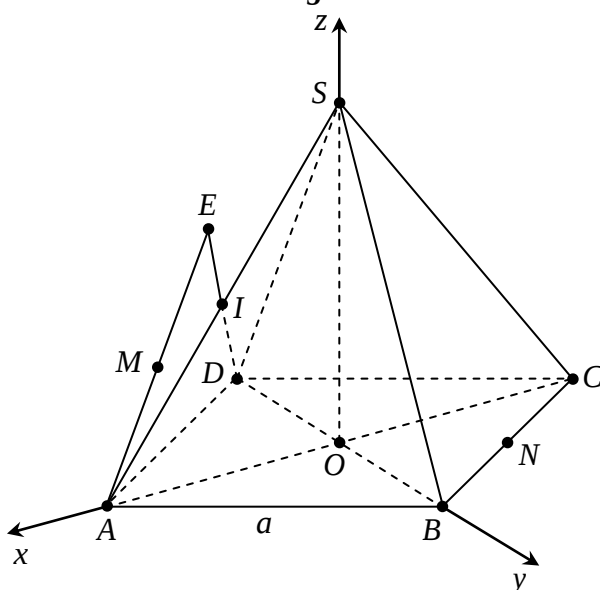
Ta có $\frac{IC}{IA} = \frac{BC}{AM} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IA}$. Từ đây tìm được $I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right)$

thể tích khối tứ diện $ANIB$ là $V_{ANIB} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AI}] \cdot \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{6} \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

Câu 54

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA , M là trung điểm của AE , N là trung điểm của BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD , Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox chứa A , tia Oy chứa B và tia Oz chứa S (xem hình vẽ). Đặt $SO = z$, khi đó

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S(0; 0; z),$$

$$N\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right), M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{z}{2}\right), I\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{z}{2}\right) E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; z\right)$$

$$\text{Có } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{z}{4}\right), \overrightarrow{BD} = \left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$$

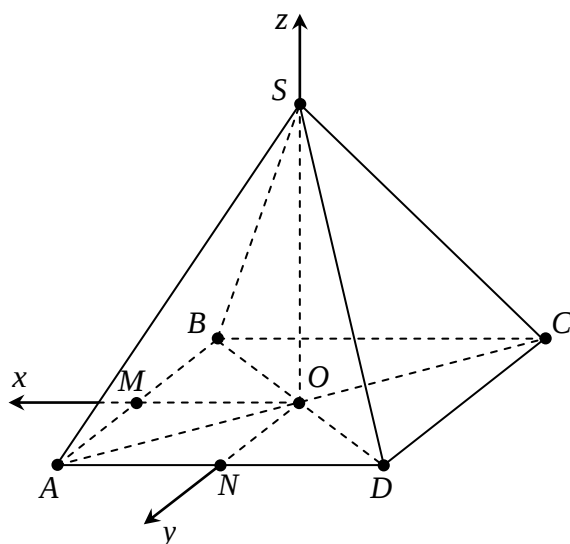
Ta thấy $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$

Góc giữa hai đường thẳng MN và AC là $d(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 55

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là bình hành, $AD = 4a$, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $6a$. Tìm cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) khi thể tích của khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD , M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD , từ giả thiết suy ra $\left. \begin{matrix} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{matrix} \right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ và $OA = OB = OC = OD = \sqrt{6a^2 - SO^2}$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật

Đặt $ON = x > 0$. Khi đó $\begin{cases} OA = \sqrt{x^2 + 4a^2} \\ SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2a^2 - x^2} \end{cases}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} AB \cdot AD \cdot SO = \frac{8}{3} ax \sqrt{2a^2 - x^2}$ với $x \in (0; a\sqrt{2})$ hoặc áp

dụng bất đẳng thức Cauchy ta suy ra $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = a$. Suy ra $SO = a$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

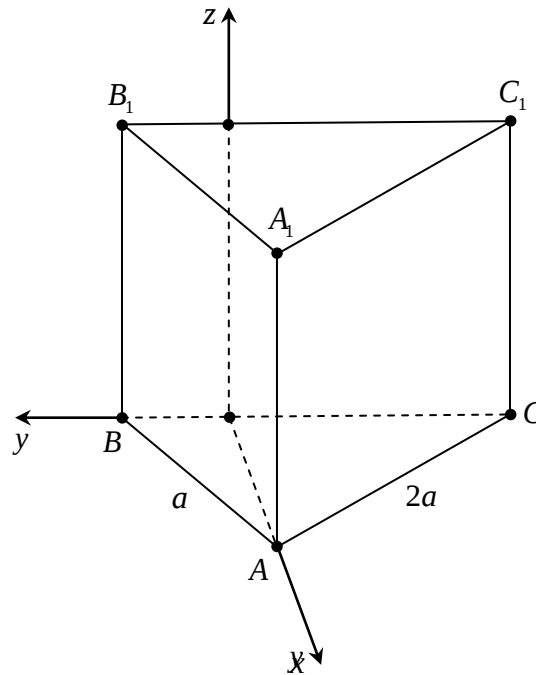
$$B\left(2a; -\frac{a}{2}; 0\right), C\left(-2a; -\frac{a}{2}; 0\right), D\left(-2a; \frac{a}{2}; 0\right), S(0; 0; a).$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) thì $\cos \varphi = \frac{2}{5}$

Câu 56

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a, AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $BAC = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1 . Chứng minh $MB \perp MA_1$ và tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BM)

Lời giải



Kẻ $AO \perp BC$. Ta có

$$BC = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{7}$$

$$AO \cdot BC = AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow AO = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ}{BC} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{21a^2}{49}} = \frac{2\sqrt{7}a}{7}$$

$$OC = BC - OB = \frac{5\sqrt{7}a}{7}$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó:

$$A\left(\frac{a\sqrt{21}}{7}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{2\sqrt{7}}{7}; 0\right), M\left(0; -\frac{5\sqrt{7}}{7}; a\sqrt{5}\right), A_1\left(\frac{a\sqrt{21}}{7}; 0; 2a\sqrt{5}\right)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA_1} = \left(\frac{a\sqrt{21}}{7}; \frac{5a\sqrt{7}}{7}; a\sqrt{5}\right), \overrightarrow{MB} = (0; -a\sqrt{7}; a\sqrt{5})$$

$$\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{MB} = 5a^2 - 5a^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA_1} \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow MA_1 \perp MB$$

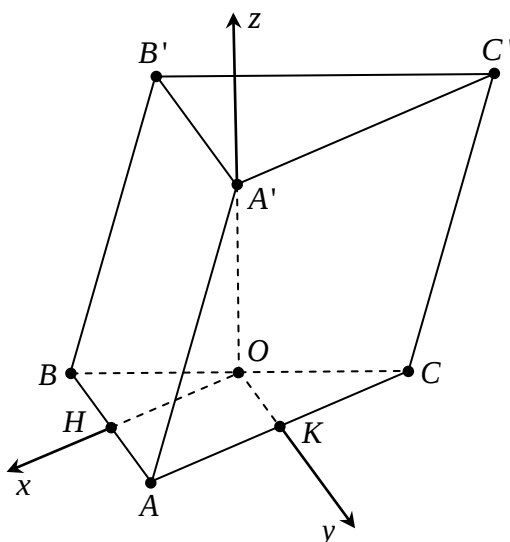
$$\text{Phương trình mặt phẳng } (A_1BM) \text{ là: } 12\sqrt{5}x - \sqrt{15}\left(y - \frac{2a\sqrt{7}}{7}\right) - \sqrt{21}z = 0$$

$$\text{Khoảng cách từ } A \text{ đến } (A_1BM) \text{ là: } d(A; (A_1BM)) = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

Câu 57

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$ đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của BC , H là trung điểm của AB , K là trung điểm AC thì $OHAK$ là hình chữ nhật. Ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a, OA = \frac{BC}{2} = a,$$

$$OA' = \sqrt{AA'^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho tia Ox chứa H , tia Oy chứa K và tia Oz chứa A' (xem hình vẽ).

Khi đó $A'(0;0;a\sqrt{3}), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$.

Thể tích khối chóp $A'.ABC$ là $V_{A'.ABC} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{A'B}] \overrightarrow{A'C}| = \frac{1}{6} \left| -\frac{3a^3}{2} - \frac{3a^3}{2} \right| = \frac{a^3}{2}$

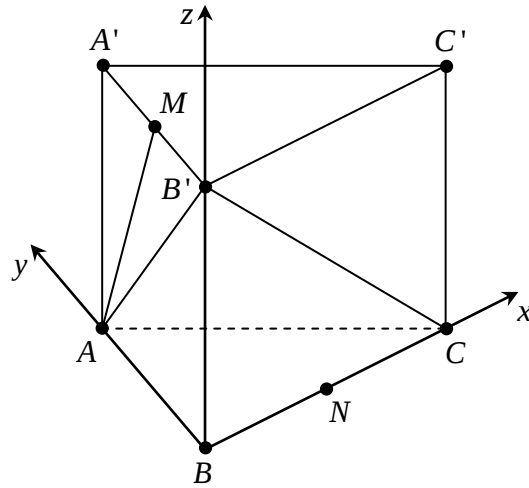
$\overrightarrow{BC} = (-a\sqrt{3}; a; 0)$. Gọi φ là góc giữa AA' và $B'C'$. Khi đó:

$$\cos \varphi = \left| \cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AA'}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{4}.$$

Câu 58

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BC = 2AB, AB \perp BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $MABC$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $B'ANC$ theo a

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng điểm B

Đặt $AB = x (x > 0)$ thì $BC = 2x$

Ta có $B(0;0;0), C(2x;0;0), A(0;x;0), N(x;0;0)$

$$A'(0;x;y) (y > 0), B'(0;0;y), C'(2x;0;y), M\left(0; \frac{x}{2}; y\right).$$

$$\overrightarrow{AM} = \left(0; -\frac{x}{2}; y\right), \overrightarrow{B'C} = (2x; 0; -y) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{B'C}] = \left(\frac{xy}{2}; 2xy; x^2\right)$$

Ta có $\overrightarrow{AC} = (2x; -x; 0)$

$$d(AM, B'C) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{B'C}]|}{|[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{B'C}]|} \Leftrightarrow \frac{|-x^2y|}{\sqrt{\frac{x^2y^2}{4} + 4x^2y^2 + x^4}} = \frac{2a}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{xy}{\sqrt{4x^2 + 17y^2}} = \frac{a}{\sqrt{7}} \quad (1)$$

$\overrightarrow{AB'} = (0; -x; y)$ và $\overrightarrow{AC} = (2x; -x; 0)$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'} = (xy; 2xy; 2x^2)$ nên $(AB'C)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (y; 2y; 2x)$ (vì $\vec{n}$ cùng phương với $[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB'}]$) và $(BCC'B')$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

$$\cos((AB'C), (BCC'A')) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{j}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{j}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2y}{\sqrt{5y^2 + 4x^2}} \Leftrightarrow 5y^2 + 4x^2 = 16y^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}}{2}y \quad (2)$$

Thế (2) vào (1), giải phương trình ta được kết quả $y = \frac{4a}{\sqrt{11}}$ và $x = 2a$

$$\text{Vậy } V_{MABC} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a \right) \cdot \frac{4a}{\sqrt{11}} = \frac{16\sqrt{11}a^3}{33}$$

Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $B'ANC$ theo a

Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp $B'ANC$ có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2by + 2cz + d = 0 \text{ với tâm } T(-a_1; -b; -c), R = \sqrt{a_1^2 + b^2 + c^2 - d}$$

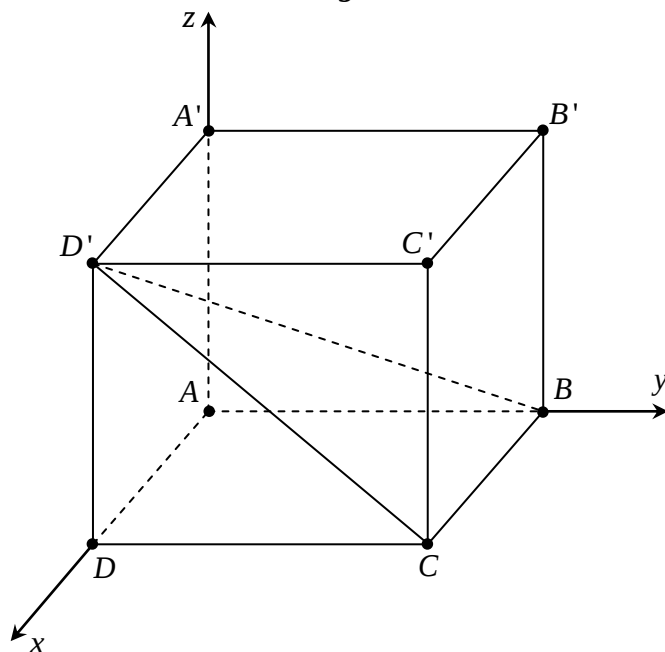
Vì B', A, N, C thuộc mặt cầu (S) nên tọa độ chúng thỏa mãn phương trình mặt cầu, ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{16}{11}a^2 + \frac{8\sqrt{11}}{11}ac + d = 0 \\ 4a^2 + 4ab + d = 0 \\ 4a^2 + 4a_1a + d = 0 \\ 16a^2 + 8a_1a + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -3a \\ b = -3a \\ c = -\frac{13a}{\sqrt{11}} \\ d = 8a^2 \end{cases} \Rightarrow R = 3a\sqrt{\frac{31}{11}}$$

Câu 59

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a .

Lời giải



Từ giả thiết ta tính được $AC = AA' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ và $AB = \frac{a}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng điểm A

Ta có: $A(0;0;0), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), D\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$

$$\bullet \quad A'\left(0;0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right), B'\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right), C'\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right), D'\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{AB} = \left(0; \frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{AB'} = \left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \overrightarrow{AC'} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\bullet \quad [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}] = \left(\frac{a^2}{2\sqrt{2}}; 0; 0\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}] \cdot \overrightarrow{AC'} = \frac{a^3}{4\sqrt{2}} \Rightarrow V_{ABB'C'} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}] \cdot \overrightarrow{AC'}| = \frac{\sqrt{2}a^3}{48}.$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{CB} = \left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right), \overrightarrow{CD'} = \left(0; -\frac{a}{2}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD'}] = \left(0; \frac{a^2}{2\sqrt{2}}; \frac{a^2}{4}\right)$$

$\Rightarrow \vec{n} = (0; \sqrt{2}; 1)$ là VTPT của mặt phẳng (BCD') nên

$$(BCD') : \sqrt{2}y + z - \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow d(A, (BCD')) = \frac{\left| \sqrt{2} \cdot 0 + 0 - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$