



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1.HÀM SỐ

2.LIÊN HỢP

3.ĐẶT ẨN PHỤ

4.ĐÁNH GIÁ



Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>

CÁC EM HỌC TOÁN KHÔNG THẤY TIẾN BỘ , THẦY QUANG SẼ GIÚP CÁC EM THAY ĐỔI



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

GIẢI HPT – PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Bài 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^{10} + 2x^6 = y^5 + 2x^4 y \\ \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{2y + 1} = 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

Điều kiện: $2y + 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{1}{2}$

- Xét $x=0$, từ pt đầu suy ra $y=0$, thay $x=y=0$ vào pt thứ hai không thỏa mãn (loại)

- Xét $x \neq 0$, chia 2 vế của pt đầu cho $x^5 \neq 0$, ta được $x^5 + 2x = \left(\frac{y}{x}\right)^5 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^5 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 5t^4 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t) = t^5 + 2t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow x = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = x^2$. Thay vào pt thứ

2 của hệ ta được: $\sqrt{y+5} + \sqrt{2y+1} = 6$ (2)

Xét hàm số $g(y) = \sqrt{y+5} + \sqrt{2y+1}, \forall y \geq -\frac{1}{2}$.

Ta có $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+5}} + \frac{1}{\sqrt{2y+1}} > 0, \forall y > -\frac{1}{2}$. Vậy $g(y)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Mà $g(4)=6$ nên (2) $\Leftrightarrow y = 4$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Suy ra } y = x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y(1) \\ 3y(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4y + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0(2) \end{cases}$$

Bài giải:

$$\text{Biến đổi PT (1)} \Leftrightarrow (x - y)(x^2 - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

$x = y$ thế vào PT (2) ta được:

$$\begin{aligned} & 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (2x + 1)\left(\sqrt{(2x + 1)^2 + 3} + 2\right) = (-3x)\left(2 + \sqrt{(-3x)^2 + 3}\right) \\ & \Leftrightarrow f(2x + 1) = f(-3x) \end{aligned}$$

Xét $f(t) = t(\sqrt{t^2 + 3} + 2)$ có $f'(t) > 0, \forall t$.

f là hàm số đồng biến nên: $2x + 1 = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{1}{5}$

- $y = x^2 + 1$ thế vào

$$(2) 3(x^2 + 1)(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x^2 + 1 + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Vế trái luôn dương, PT vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Bài 3: Giải hệ phương trình sau .
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 3(x+y) = 6y(y-2) + 14(1) \\ 27x^3 + 27x^2 + 20x + 4 = 4\sqrt[3]{y+2x-1}(2) \end{cases}$$

Bài giải:

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3 + 3x = -y^3 + 6y^2 - 15y + 14$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x = (2-y)^3 + 3(2-y)$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ với $(\forall t \in \mathbb{R}) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$pt : f(x) = f(2-y) \Leftrightarrow x = 2-y \Leftrightarrow y = 2-x$$

Thế $y = 2-x$ vào phương trình (2) ta được.

$$27x^3 + 2x^2 + 20x + 4 = 4\sqrt[3]{1+x} \Leftrightarrow (3x+1)^3 + 4(3x+1) = x+1 + 4\sqrt[3]{x+1}$$

Xét hàm số: $g(t) = t^3 + 4t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(t) = 3t^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } g(3x+1) = g(\sqrt[3]{x+1}) \Leftrightarrow 3x+1 = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = x+1$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ 27x^2 + 27x + 8 = 0 (vn) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (0; 2)$

Bài 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} + x + 5 = 2y + \sqrt{y-2} \\ \frac{(x-8)(y+1)}{x^2 - 4x + 7} = (y-2)(\sqrt{x+1} - 3) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 2 \end{cases}$

Xét phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} + x + 5 = 2y + \sqrt{y-2}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ b = \sqrt{y-2} \geq 0 \end{cases}$ ta được phương trình: $a + ab + x + 1 = 2y - 4 + b$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2b^2 + ab + a - b = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + ab - b^2 + a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) + b(a-b) + (a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+2b+1) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Từ phương trình (1) ta có $\sqrt{x+1} = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow y = x + 3$ thay vào phương trình (2) ta



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

được

$$\frac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7} = (x+1)(\sqrt{x+1}-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7} = \frac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ \frac{x+4}{x^2-4x+7} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}+3} \end{array} \right.$$

Tiếp tục giải phương trình

$$\frac{x+4}{x^2-4x+7} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(\sqrt{x+1}+3) = (x+1)(x^2-4x+7)$$

$$\Leftrightarrow ((x+1)+3)(\sqrt{x+1}+3) = ((x-2)+3)(x^2-4x+4+3)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}^2+3)(\sqrt{x+1}+3) = ((x-2)^2+3)((x-2)+3)$$

Xét hàm số $f(t) = (t^2+3)(t+3) = t^3 + 3t^2 + 3t + 9, t \geq 0$

$$f'(t) = 3t^2 + 3t + 3 > 0, t \geq 0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Cho đồ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

$$\text{Từ } f(\sqrt{x+1}) = f((x-2)) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-2$$

Giải phương trình

$$\sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

+) Với $x = 8 \Rightarrow y = 11$

+) Với $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{11 + \sqrt{13}}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là:

$$(8; 11), \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{11 + \sqrt{13}}{2} \right)$$

Bài 5 : Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2(1) \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1}(2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài giải:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{(-2y)^2 + 4} + (-2y) (*)$.

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = \sqrt{t^2 + 4} + t \Rightarrow f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} + 1 = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{\sqrt{t^2 + 4}} > \frac{t + |t|}{\sqrt{t^2 + 4}} \geq 0$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ $(*)$ suy ra: $f(x) = f(-2y) \Rightarrow x = -2y$.

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$3x^2 + 5x + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1) = (x^3 + 1) + 2\sqrt[3]{x^3 + 1} \quad (**)$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + 2t$ ta thấy $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên từ $(**)$ suy ra

$$x+1 = \sqrt[3]{x^3 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}. \text{ Vậy hệ có hai nghiệm là } (-1; \frac{1}{2}); (0; 0).$$

Bài 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (y+1)^2 + y\sqrt{y^2 + 1} = x + \frac{3}{2}(1) \\ x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2\sqrt{2x - 4y + 2}(2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

Đk: $2x - 4y + 2 \geq 0$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2x - 4y + 2 = (\sqrt{y^2 + 1} + y)^2$ thế vào PT (2) ta được

$$(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = 2\sqrt{(\sqrt{y^2 + 1} + y)^2}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} + 1 = y + \sqrt{y^2+1} \quad (*) \quad (\text{vì } \sqrt{y^2+1} + y > |y| + y \geq 0)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$

$$f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1} + t}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \text{ do } \sqrt{t^2+1} + t > |t| + t \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}, \text{ theo } (*) \text{ ta có } f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(y)$$

$$\Rightarrow x = 2y + 1$$

Với $x = 2y + 1$ thay vào (1) ta có:

$$\left(\sqrt{y^2+1} + y\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} + y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} = 2 - y \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

Bài 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y} + 2\sqrt{(y+8)x} = y + 4x \\ xy + 2x - 11 + \sqrt{12-x+y} + \sqrt{7-3x} = 0 \end{cases}$$

Bài giải:

Điều kiện $2 \leq x \leq \frac{7}{3}, y \geq 0$

Ta có

$$2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{4(x-2)} \sqrt{y} \leq \frac{4x-8+y}{2}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } y=4x-8$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$2\sqrt{(y+8)x} = \sqrt{(y+8)4x} \leq \frac{4x+y+8}{2}. \quad \text{Dấu “=” xảy ra khi } y=4x-8$$

Suy ra $2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y} + 2\sqrt{(y+8)x} \leq y+4x$. Dấu “=” xảy ra khi $y=4x-8$

Như vậy, $pt(1) \Leftrightarrow y = 4x - 8$. Thế vào $pt(2)$ ta có:

$$4x^2 - 6x - 11 + \sqrt{4+3x} + \sqrt{7-3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 3) + (\sqrt{4+3x} - x - 1) + (\sqrt{7-3x} - x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 3) - \frac{(x^2 - x - 3)}{\sqrt{4+3x} + x + 1} - \frac{(x^2 - x - 3)}{\sqrt{7-3x} + x - 2} = 0 \quad \left(\text{do } x \in \left[2; \frac{7}{3} \right] \right)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 3) \left[4 - \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 & (*) \\ \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} = 4 & (3) \end{cases}$$

$$+ pt(*) \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện ta có } x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Hệ có nghiệm } \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 2\sqrt{13}-6 \right)$$

+ Xét $pt(3)$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\forall x \in \left[2; \frac{7}{3}\right] \Rightarrow \sqrt{4+3x} + x + 1 \geq 3 + \sqrt{10} > 6 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} < \frac{1}{6}$$

Xét hàm số $\forall x \in \left[2; \frac{7}{3}\right]: g(x) = \sqrt{7-3x} + x - 2$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{7-3x}} + 1 = \frac{2\sqrt{7-3x} - 3}{2\sqrt{7-3x}} < 0$$

$$\Rightarrow g(x) \geq g\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} \leq 3. \text{ Do đó,}$$

$$\forall x \in \left[2; \frac{7}{3}\right]: \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} \leq \frac{1}{6} + 3 < 4 \text{ hay pt(3) vô nghiệm}$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 2\sqrt{13}-6\right)$

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x}\sqrt{3-2y} + 1 & (2) \end{cases}$
--

Bài giải:

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được

$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (3-2y)\sqrt{3-2y} + \sqrt{3-2y} \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$(*) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = \sqrt{3-2y} \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{15-x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 3 + 2 - \sqrt[3]{15-x} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-7) \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+(\sqrt[3]{x+15})^2}}_{>0} \right) = 0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(7; \frac{111}{98} \right)$.

Bài 9: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y+6} = 1-y & (1) \\ 9\sqrt{1+x} + xy\sqrt{9+y^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

$$\text{Đk: } \begin{cases} x+y+6 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

+) Nếu $y \geq 0$, để hệ có nghiệm thì $1 \geq y \geq 0$.

$$\left. \begin{aligned} VT(1) &= 2\sqrt{x+y+6} \geq 2\sqrt{5} \\ VP(1) &= 1-y \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow VT(1) > VP(1) \text{ hệ vô nghiệm.}$$

+) Nếu $y < 0$, từ (2) suy ra $x > 0$

$$9\sqrt{1+x} + xy\sqrt{9+y^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{x}} \right) \sqrt{9 + \left(\frac{3}{\sqrt{x}} \right)^2} = (-y)\sqrt{9+(-y)^2} \quad (3)$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{9+t^2}, t > 0; f'(t) = \frac{9+2t^2}{\sqrt{9+t^2}} > 0 \forall t > 0$

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = f(-y) \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}} = -y \Leftrightarrow x = \frac{9}{y^2}$$

Thế vào pt(1) ta có phương trình $2\sqrt{\frac{9}{y^2} + y + 6} = 1 - y$ (4). Hàm số $g(y) = 2\sqrt{\frac{9}{y^2} + y + 6}$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$; hàm số $h(y) = 1 - y$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và phương trình có nghiệm $y = -3$ nên pt(4) có nghiệm duy nhất $y = -3$. Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $(1; -3)$.

Bài 10: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{y-1} + 2y^2 + 1 = \sqrt{x} + x^2 + xy + 3y & (1) \\ \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{3} = \sqrt{y^2 - 3x} + \sqrt{7} & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

Đk: $y \geq 1, x \geq 0, y^2 \geq 3x$

Từ pt (2) ta có : $(y-x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}} + 2y-1+x\right) = 0$

Suy ra, $y = x + 1$

Thay vào pt (1) ta được $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$

Chứng minh hàm số đồng biến

Ta có nghiệm duy nhất $x = 2$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Vậy nghiệm của hệ là (2;3)

Bài 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{xy+x+3y+3} + x+1 = 2y + \sqrt{y+1} & (1) \\ (x-3)(y+1) = (y-1)(x^2-2x+3)(\sqrt{x+1}-2) & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

$$\text{Pt(1)} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)(y+1)} + x - 2y + 1 = \sqrt{y+1}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+3} \\ b = \sqrt{y+1} \end{cases} (a, b \geq 0)$, (1) trở thành: $a^2 - 2b^2 + ab + a - b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + 2b + 1 = 0 \end{cases}$

+ $a + 2b + 1 = 0$ vô nghiệm do $a, b \geq 0$

+ Xét $a = b \Rightarrow y = x + 2$ thay vào (2) ta được:

$$(x-3)(x+3) = (x+1)(x^2-2x+3)(\sqrt{x+1}-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) = (x+1)(x^2-2x+3) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 5(tm) \\ (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = (x+1)(x^2-2x+3) (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \left[(\sqrt{x+1})^2 + 2 \right] (\sqrt{x+1} + 2) = [(x-1) + 2] [(x-1)^2 + 2]$$

Xét hàm số $f(t) = (t+2)(t^2+2)$, $t \geq 0$ có $f'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ đồng biến mà $f(\sqrt{x+1}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5$$

Vậy hpt có nghiệm: (3;5)

Bài 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8\sqrt{2x-1}(2x-\sqrt{2x-1}) = y(y^2-2y+4) & (1) \\ 4xy + 2\sqrt{(y+2)(y+2x)} = 5y + 12x - 6 & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

ĐK: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (y+2)(y+2x) \geq 0 \end{cases}$. Từ pt (1) $\Rightarrow$ để pt có nghiệm thì $y \geq 0$

PT (1) $\Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1})^3 - 2(2\sqrt{2x-1})^2 + 4(2\sqrt{2x-1}) = y^3 - 2y^2 + 4y$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 4t$ ($t \geq 0$) có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 4 = 2t^2 + (t-2)^2 > 0 \quad \forall t \geq 0$ nên $f(t)$ luôn đồng biến

Từ pt (*) $\Rightarrow f(2\sqrt{2x-1}) = f(y) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = y$

Thay vào pt (2) ta được pt $y^3 + 2(y+2)\sqrt{y+2} = 3y(y+2)$

Đặt $z = \sqrt{y+2}$ ta được pt $y^3 + 2z^3 = 3yz^2 \Leftrightarrow (y-z)(y^2 + yz - 2z^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z & (\text{loại}) \\ y = z & (t/m) \end{cases}$

Với $y = z$ ta được $y = \sqrt{y+2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$ (t/m)



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 13: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x^2 - y^2) + x^2 = 2\sqrt{(x - y^2)^3} \\ \sqrt{x + \frac{y^2 + 1}{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2(x - y^2)} + x^2 + y^2 + 2}{2x + 1} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

ĐK: $x \geq y^2 \geq 0$

Từ PT(1) tìm được $x = \sqrt{x - y^2} \Rightarrow x^2 = x - y^2$

Thế vào (2) đưa về pt chỉ có ẩn x

Đưa được về hàm $\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)^3 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{2}{x} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}$

Xét hàm $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ từ đó được pt $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}$ giải được

$x = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} (L), x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (N)$

Nghiệm $\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}\right)$

Bài 14: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 + 1} - 3x^2y + 2)(\sqrt{4y^2 + 1} + 1) = 8x^2y^3 & (1) \\ x^2y - x + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

+) Với $y \leq 0$ thì $VT(1) > 0, VP(1) \leq 0 \Rightarrow$ Hệ phương trình chỉ có nghiệm $(x; y)$ với $y > 0$

+) vì $y > 0$ nên từ phương trình (2) của hệ suy ra $x > 2$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 3x^2y + 2 = 2x^2y(\sqrt{4y^2+1} - 1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + 2 = 2x^2y\sqrt{4y^2+1} + x^2y \quad (3)$$

Thay $2 = x - x^2y$ vào phương trình (3) ta được:

$$\sqrt{x^2+1} + x = 2x^2y\sqrt{4y^2+1} + 2x^2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = 2y\sqrt{4y^2+1} + 2y$$

+) xét hàm số: $f(t) = t\sqrt{1+t^2} + t$ với $t > 0$

$$f'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + 1 > 0 \text{ với mọi } t > 0$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mà $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2y \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$

+) Thay $xy = \frac{1}{2}$ vào phương trình (2) của hệ ta có: $x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{8}$

Thử lại thấy $\begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{8} \end{cases}$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(4; \frac{1}{8}\right)$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 15:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} & (1) \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq 1/2 (*)$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) nhân với 2 ta được:

$$\begin{aligned} y^3 + 3y^2 + y + 3 &= (2x+1)\sqrt{2x-1} - 4y \Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 + 2y + 2 &= (2x-1+2)\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow (y+1)^3 + 2(y+1) &= (\sqrt{2x-1})^3 + 2\sqrt{2x-1} \quad (3) \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 2t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có: $f(t) = 3t^2 + 2 > 0$ với $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó: $(3) \Rightarrow f(y+1) = f(\sqrt{2x-1}) \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-1} - 1$

Thay vào (2) ta được: $2x^2 - 11x + 9 = 2\sqrt{2x-1} - 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = 2x^2 - 11x + 11$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 11x + 11 \geq 0 & (**) \\ 4(2x-1) = (2x^2 - 11x + 11)^2 & (4) \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow 8x - 4 = 4x^4 + 121x^2 + 121 - 44x^3 + 44x^2 - 242x$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 44x^3 + 165x^2 - 250x + 125 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^3 - 40x^2 + 125x - 125) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)(4x^2 - 20x + 25) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (tm(*), (**)) \\ x=5 & (tm(*), (**)) \\ x=5/2 & (ktm(*), (**)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=5 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x, y) \in \{(1; 0), (5; 2)\}$

Bài 16: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 - y^2 = y^3 + x^2 y + x^2 \\ 2y^3 - \sqrt{5 - 2x^2} - 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

Điều kiện: $|x| \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x^2 - 1 - y)(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ hoặc $x^2 = y + 1$

Trường hợp $x = y = 0$ thế vào (2) không thỏa mãn.

Trường hợp $x^2 = y + 1$ thế vào (2): $2y^3 - \sqrt{3 - 2y} - 1 = 0$ (3)

Xét hàm $f(t) = 2t^3 - \sqrt{3 - 2t} - 1; t \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$; mà $f(1) = 0$

Suy ra phương trình (3) có nghiệm duy nhất: $y = 1$. Với $y = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(\sqrt{2}; 1); (-\sqrt{2}; 1)$

Bài 17: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1} \\ x^2 + 2y^2 - 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài giải:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Điều kiện: $x \geq -2, y \geq -\frac{1}{2}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $x^2 = -2y + 2x - y + 2$

Thế vào phương trình thứ nhất, ta được

$$x^2 + (-2y^2 + 2x - y + 2) + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 + \sqrt{x+2} = 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1) + \sqrt{(x+1)+1} = (2y)^2 + 2y + \sqrt{2y+1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}$ với $t \geq -1$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 2t + 1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}}; f''(t) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{(t+1)^3}}; f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4}$$

Suy ra $f'(t) \geq f'\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0$ với mọi $t \in (-1; +\infty)$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $[-1; +\infty)$.

Suy ra phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(2y) \Leftrightarrow x+1 = 2y \Leftrightarrow x = 2y-1$.

Thế vào pt thứ hai của hệ, ta

$$\text{được } (2y-1)^2 + 2y^2 - 2(2y-1) + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Suy ra nghiệm $(x;y)$ của hệ là $(1;1), \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$.



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 18: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2^3 \sqrt{x^3 + 1} \end{cases}$$

Bài giải:

Phương trình đầu tiên của hệ tương đương với:

$$x + \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{(-2y)^2 + 4} + (-2y)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(-2y) \text{ với } y = f(t) = \sqrt{t^2 + 4} + t$$

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{\sqrt{t^2 + 4} + t}{\sqrt{t^2 + 4}} > \frac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 4}} \geq 0, \forall t \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Từ đó } f(x) = f(-2y) \Leftrightarrow x = -2y$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Thế $x = -2y$ vào phương trình sau của hệ phương trình đã cho ta được:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + 2 &= 2^3 \sqrt{x^3 + 1} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1) &= (x^3 + 1) + 2^3 \sqrt{x^3 + 1} \text{ với } y = g(t) = t^3 + 2t \\ g(x+1) &= g\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right) \end{aligned}$$

Ta có $g'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \Rightarrow g(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó:

$$\begin{aligned} g(x+1) &= g\left(\sqrt[3]{x^3 + 1}\right) \\ \Leftrightarrow x+1 &= \sqrt[3]{x^3 + 1} \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(-1; 2), (0; 0)$

Bài 19: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x+2)\sqrt{2x-1} = y^3 + 3y & (1) \\ y^2 - xy + 5 = 5x - 6y & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

- Đk $x \geq \frac{1}{2}, (1) \Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x-1} = y^3 + 3y \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1})^3 + 3\sqrt{2x-1} = y^3 + 3y; x$
ét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$, có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t \Rightarrow f(t)$ đồng
biến trên $\mathbb{R}$, pt(1) trở thành $f(y) = f(\sqrt{2x-1}) \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-1}$;
- Pt(2) $\Leftrightarrow (y+5)(y-x+1) = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = x-1;$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

- Với $y = -5 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = -5$, vô nghiệm

$$\text{Với } y = x-1 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x-1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$$

$$\text{Với } x = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{2}. \text{ nghiệm của hệ là } (x; y) = (2 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$$

Bài 20: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+5} - \sqrt{3-x-y} = x^3 - 3x^2 - 10y + 6 \\ x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + y + 10 \end{cases}$$

Bài giải:

Phương trình thứ 2 của hệ được biến đổi thành:

$$(x-2)^3 + (x-2) = y^3 + y (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta suy ra $(*) \Leftrightarrow y = x - 2$

Thế vào phương trình đầu của hệ: $\sqrt{3x+3} - \sqrt{5-2x} = x^3 - 3x^3 - 10x + 26$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+3} - 3) + (1 - \sqrt{5-2x}) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2(x-2)}{1+\sqrt{5-2x}} = (x-2)(x^2-x-12) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{5-2x}} = x^2-x-12(1) \end{cases}$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì với $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ thì $x^2 - x - 12 < 0$.

Từ đó suy ra hệ có nghiệm duy nhất $x = 2, y = 0$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 21: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 2x^2y - 2y^3 + x - 2y = 0(1) \\ \sqrt[3]{6y+5} = x^3 + 3x^2 + 2y - 3(2) \end{cases}$$

Bài giải:

$$(1) \Leftrightarrow (x^3 - 2x^2y) + (xy^2 - 2y^3) + (x - 2y) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2y) + y^2(x - 2y) + (x - 2y) = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow 2y = x \text{ (Vì } x^2 + y^2 + 1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{)}.$$

$$\text{Thay vào (2), ta có: } \sqrt[3]{3x+5} = x^3 + 3x^2 + 2y - 3 \Leftrightarrow 3x + 5 + \sqrt[3]{3x+5} = (x+1)^3 + (x+1) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{3x+5}) = f(x+1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+5} = x+1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ x = -2 \Rightarrow y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\left(1; \frac{1}{2}\right); (-2; -1)$.

Bài 22: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3y\sqrt{2+x} + 8\sqrt{2+x} = 10y - 3xy + 12(1) \\ 5y^3\sqrt{2-x} - 8 = 6y^2 + xy^3\sqrt{2-x}(2) \end{cases}$$

Bài giải:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\begin{cases} 3y\sqrt{2+x} + 8\sqrt{2-x} = 10y - 3xy + 12 & (1) \\ 5y^3\sqrt{2-x} - 8 = 6y^2 + xy^3\sqrt{2-x} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \in [-2; 2]$

Nhận xét $y = 0$ không thỏa mãn phương trình (2)

$$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{2-x})^3 + 3\sqrt{2-x} = \left(\frac{2}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{y}\right) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{2-x}) = f\left(\frac{2}{y}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \frac{2}{y} \text{ thế vào (1)}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 3y\sqrt{2+x} + 8\sqrt{2-x} = 10y - 3xy + 12 \Leftrightarrow 3\sqrt{2+x} + 4\sqrt{2+x}\sqrt{2-x} = 10y - 3x + 6\sqrt{2-x} \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} + 3x - 10 = 0 \quad (**) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} = t \Rightarrow t^2 = 10 - 3x - 4\sqrt{4-x^2}$$

$$\text{Phương trình (**) trở thành } 3t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{- với } t = 0: x = \frac{6}{5}; y = \sqrt{5}$$

$$\text{- với } t = 3: \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} = 3 \text{ phương trình vô nghiệm, vì vế trái } \leq 2.$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 23: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4^{xy} + (xy - 2)2^{xy} + xy - 3 = 0 \\ \log_2^2(x - y) + \log_2 x \cdot \log_2 y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

Điều kiện: $x > y > 0$

Đặt $t = xy > 0$, phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$4^t + (t - 2)2^t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow (2^t + 1)(2^t + t - 3) = 0 \Leftrightarrow 2^t + t - 3 = 0, \text{ vì } 2^t + 1 > 0$$

Vì hàm $f(t) = 2^t + t - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà $f(1) = 0$ nên $2^t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Khi đó ta có

$$xy = 1, \text{ hay } y = \frac{1}{x}.$$

Thế vào pt thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{aligned} \log_2^2\left(x - \frac{1}{x}\right) + \log_2 \frac{1}{x} &= 0 \Leftrightarrow \log_2^2 \frac{x^2 - 1}{x} = \log_2^2 x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{x^2 - 1}{x} = \log_2 x \\ \log_2 \frac{x^2 - 1}{x} = -\log_2 x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} = x \\ \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x^2 \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Suy ra hệ của nghiệm là $x = \sqrt{2}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 24:

Giải hệ phương trình Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0 \\ 8\sqrt{1 - 2x} + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài giải:

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0 & (1) \\ 8\sqrt{1-2x} + y^2 - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$. Đặt $t = 2x + y$, phương trình (1) trở thành:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Nếu $t = 1$ thì $2x + y = 1 \Leftrightarrow 1 - 2x = y \geq 0$. Thế vào phương trình (2) ta được phương trình $8\sqrt{y} + y^2 - 9 = 0$

Đặt $u = \sqrt{y} \geq 0$, phương trình trở thành:

$$u^4 + 8u - 9 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(u^3 + u^2 + u + 9) = 0 \Leftrightarrow u = 1. \text{ Khi đó hệ có nghiệm } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Nếu $t = -2$ thì $2x + y = -2 \Leftrightarrow 1 - 2x = y + 3 \geq 0$. Thế vào phương trình (2) ta được phương trình

$$8\sqrt{y+3} + y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 8\sqrt{y+3} + (y-3)(y+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ 8 + (y-3)\sqrt{y+3} = 0 \end{cases}$$

Với $y = -3$ thì hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases}$

Xét phương trình $8 + (y-3)\sqrt{y+3} = 0$ (3)

Đặt $v = \sqrt{y+3} \geq 0$, phương trình (3) trở thành: $v^3 - 6v + 8 = 0$

Xét hàm số $f(v) = v^3 - 6v + 8$, ta có:

$$f'(v) = 3v^2 - 6 \text{ và } f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \pm\sqrt{2}$$

Hàm số $f(v)$ đạt cực đại tại $(-\sqrt{2}; 8 + 4\sqrt{2})$, đạt cực tiểu tại $(\sqrt{2}; 8 - 4\sqrt{2})$

Vì $f(0) = 8 > 0$ và $8 - 4\sqrt{2} > 0$ nên $f(v) = 0$ không có nghiệm $v \geq 0$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-3 \end{cases}$

Bài 25: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^4 - (x-2)y^2 - x - 4 = 0 \\ x^3 + 3x^2 + 4x = 2(4y^3 + y - 1) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài giải:

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $(x+1)^3 + x + 1 = (2y)^3 + 2y$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + t, f'(t) > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(2y) \Leftrightarrow x+1 = 2y \Leftrightarrow x = 2y-1$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$y^4 - 2y^3 + 3y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - y)^2 + 2(y^2 - y) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y = 1 \\ y^2 - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Suy ra nghiệm $(x; y)$ của hệ là $\left(-\sqrt{5}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(\sqrt{5}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 26: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(4y^2+1) + x\sqrt{2y} = 3 & (1) \\ 2y + \sqrt{4y^2+1} = x + \sqrt{x^2+1} & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

Điều kiện: $y \geq 0$

$$PT(1) \Leftrightarrow x[x^2(4y^2+1) + \sqrt{2y}] = 3 \Rightarrow x > 0$$

$$\text{Khi đó, } PT(2) \Leftrightarrow 2y + \sqrt{4y^2+1} = x + \sqrt{x^2+1} \quad (3)$$

Xét hàm $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}$ trên $[0; +\infty)$

$$\text{Có } f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} > 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Khi đó, } PT(3) \Leftrightarrow f(2y) = f(x) \Leftrightarrow 2y = x$$

Thay vào phương trình (1) ta được phương trình: $x^5 + x^3 + x\sqrt{x} = 3$

Đặt $t = \sqrt{x} > 0$ có hàm số $g(t) = t^{10} + t^6 + t^3$ có $g'(t) = 10t^9 + 6t^5 + 3t^2 > 0$ do $t > 0$

$$\text{Mà } g(1) = 3 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}. \text{ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất } (x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$$

Bài 27: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 5x^2 - 2y^2 + 10x - 3y + 6 = 0 & (1) \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{4-y} = x^3 + y^2 - 4x - 2y & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Điều kiện $x \geq -2; y \leq 4$

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 10x + 6 = y^3 + 2y^2 + 3y$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) = y^3 + 2y^2 + 3y$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t$, $f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x+1) = f(y) \Rightarrow y = x+1$ thay vào pt (2) ta được

$$\text{Phương trình } \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}) - 3 = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{(x+2)(3-x)} - 2)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3} = (x+1)(x^2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2[(x+2)(3-x) - 4]}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3)(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2)} = (x+2)(x^2 - x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2 + x + 2)}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3)(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2)} - (x+2)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left[x + 2 + \frac{2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3)(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2)} \right] = 0$$

> 0 (vì $x \geq -2$)

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (2; 3), (x; y) = (-1; 0)$

Bài 28:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Giải hệ phương trình Giải hệ PT
$$\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4y+2)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

ĐKXD $\forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \Leftrightarrow x^3 - x^2y + y^2 - xy + x - y = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

Với $y = x^2 + 1$ thay vào PT thứ 2 ta được

$$3(x^2+1)(2+\sqrt{9x^2+3}) + (4x^2+6)(\sqrt{1+x+x^2}+1) = 0. \text{ Dễ thấy PT vô nghiệm.}$$

Với $y = x$ thay vào PT thứ 2 ta được $3x(2+\sqrt{9x^2+3}) + (4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = -(2x+1)(\sqrt{3+(2x+1)^2}+2)$$

$$\Leftrightarrow 3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = (-2x+1)(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2)$$

Xét hàm số $f(t) = t(\sqrt{t^2+2}+2)$ ta có $f'(t) = \sqrt{t^2+2} + 2 + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0$ suy ra hàm số

đồng biến

Từ đó suy ra $3x = -2x-1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$. Vậy HPT có nghiệm $(x, y) = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right)$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 29: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} + x + 5 = 2y + \sqrt{y-2} \\ \frac{(x-8)(y+1)}{x^2 - 4x + 7} = (y-2)(\sqrt{x+1} - 3) \end{cases}$$

Bài giải:

Điều kiện $x \geq -1; y \geq 2$

Đặt $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{y-2} = b (a, b \geq 2)$, từ (1) ta có:

$$a + ab + a^2 - 1 + 5 = 2(b^2 + 2) + b \Leftrightarrow a - b + ab - b^2 + a^2 - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(1+2a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ (do } a, b \geq 0 \Rightarrow 1+2a+b > 0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow y = x+3$$

Thế vào (2) ta được:

$$\frac{(x-8)(x+4)}{x^2 - 4x + 7} = (x+1)(\sqrt{x+1} - 3) \Leftrightarrow \frac{(x-8)(x+4)}{x^2 - 4x + 7} = \frac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1} + 3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ \frac{x+4}{x^2 - 4x + 7} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1} + 3} (*) \end{cases}$$

$$+ x = 8 \Rightarrow y = 11;$$

$$+ (*) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 3)(x+4) = (x+1)(x^2 - 4x + 7)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 3) \left[(\sqrt{x+1})^2 + 3 \right] = [(x-2) + 3] \cdot [(x-2)^2 + 3] (**)$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Xét hàm số $f(t) = (t+3)(t^2+3)$ với $t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3(t+1)^2 \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (**) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(x-2) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} (T/M)$$

$$x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{11+\sqrt{13}}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm (x,y) là $(8;11)$ và $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

Bài 30: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8x^3 + \sqrt{y-2} = y\sqrt{y-2} - 2x \\ (\sqrt{y-2} - 1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 13(y-2) + 82x - 29 \end{cases}$$

Bài giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ y-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ y \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } 8x^3 + \sqrt{y-2} = y\sqrt{y-2} - 2x \Leftrightarrow (2x)^3 + (2x) = (\sqrt{y-2})^3 + \sqrt{y-2}$$

$$\text{Xét hàm đặc trưng: } f(t) = t^3 + t, f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t$$

$$\text{Hàm số } f(t) \text{ liên tục và đồng biến trên } \mathbb{R}. \text{ Suy ra: } 2x = \sqrt{y-2}$$

Thế $2x = \sqrt{y-2}$ vào phương trình thứ hai ta được:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$(2x-1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 52x^2 + 82x - 29$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x+1} = (2x-1)(4x^2 - 24x + 29)$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(\sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(\sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=3 \\ \sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình: $\sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29 = 0$

Đặt $t = \sqrt{2x+1}, t \geq 0 \Rightarrow 2x = t^2 - 1$

Ta được phương trình: $t - (t^2 - 1)^2 + 12(t^2 - 1) - 29 = 0 \Leftrightarrow t^4 - 14t^2 - t + 42 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+3)(t^2 - t - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3(\text{loại}) \\ t=\frac{1-\sqrt{29}}{2}(\text{loại}) \\ t=\frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

Với $t=2 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=11$

Với $t=\frac{1+\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x=\frac{13+\sqrt{29}}{4} \Rightarrow y=\frac{103+13\sqrt{29}}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 cặp nghiệm: $\left(\frac{1}{2}; 3\right); \left(\frac{3}{2}; 11\right); \left(\frac{13+\sqrt{29}}{4}; \frac{103+13\sqrt{29}}{2}\right)$

Bài 31: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x}\sqrt{3-2y} + 1 & (2) \end{cases}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài giải:

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được

$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (3-2y)\sqrt{3-2y} + \sqrt{3-2y} \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = \sqrt{3-2y} \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{15-x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 3 + 2 - \sqrt[3]{15-x} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-7) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+(\sqrt[3]{x+15})^2} \right)}_{>0} = 0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(7; \frac{111}{98}\right)$

Bài 32: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\sqrt{y+2} + \sqrt[3]{y-2} = \sqrt{x^3+4} + x \\ \sqrt{(y+4)(2x+12)} - 8 = x^2 + y - \sqrt{(x^2+2)(x^2-y)} \end{cases}$$

Bài giải:

$$+ \text{Đk: } \begin{cases} y \geq -2 \\ x^2 \geq y \end{cases}$$

+ Từ pt thứ 2 ta có:

$$\sqrt{(y+4)(2y+12)} - 8 = x^2 + y - \sqrt{(x^2+2)(x^2-y)}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 + 8 + y - \sqrt{(y+4)(2y+12)} - \sqrt{(x^2+2)(x^2-y)} = 0 \\ &\Rightarrow 2(x^2 + 8 + y) - 2\sqrt{(y+4)(2y+12)} - 2\sqrt{(x^2+2)(x^2-y)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2y+8} - \sqrt{y+6})^2 + (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-y})^2 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2y+8} = \sqrt{y+6} \\ \sqrt{x^2+2} = \sqrt{x^2-y} \end{cases} \Leftrightarrow y = -2 \\ &\Rightarrow \sqrt{y+2} = 0 \end{aligned}$$

+ Thay vào pt 1 ta được:

$$\begin{aligned} &2\sqrt{y+2} + \sqrt[3]{y-2} = \sqrt{x^3+4} + x \\ &\Rightarrow \sqrt{y+2} + \sqrt[3]{y-2} = \sqrt{x^3+4} + x \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt[3]{y-2})^3 + 4} + \sqrt[3]{y-2} = \sqrt{x^3+4} + x \end{aligned}$$

+ Xét hàm số: $f_{(t)} = t + \sqrt{t^3+4}$ $t \in R$. Ta có:

$$f'_{(t)} = 1 + \frac{3t^2}{2\sqrt{t^3+4}} > 0, (\forall t \in R) \Rightarrow f_{(\sqrt[3]{y-2})} = f(x) \Rightarrow \sqrt[3]{y-2} = x$$

+ Vậy ta sẽ có: $\begin{cases} \sqrt{y+2} = 0 \\ \sqrt[3]{y-2} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{4} \\ y = -2 \end{cases} (TM)$

Kl: Nghiệm duy nhất của hệ là: $(x : y) = (-\sqrt[3]{4}; -2)$

Bài 33:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Giải hệ phương trình Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2 - 8x - 3 = 4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} x > -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3 + x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}$. Thay vào (2) ta được

$$3x^2 - 8x - 3 = 4x\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x+2\sqrt{x+1})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = x-1 \\ 2\sqrt{x+1} = 1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 10x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ x = \frac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{cases}$$

Ta có: $y = \frac{x^2}{x+1} - 1$

Với $x = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x = \frac{5-2\sqrt{13}}{9} \Rightarrow y = -\frac{41+7\sqrt{13}}{72}$

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện.

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

KL: Hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = \left(3 + 2\sqrt{3}; \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} \right)$
& $(x; y) = \left(\frac{5 - 2\sqrt{13}}{9}; -\frac{41 + 7\sqrt{13}}{72} \right)$

Bài 34: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y - 1 = \ln \frac{y^2 + 4y + 5}{x^2 + 2x + 2} \\ 6\sqrt[3]{y} + 2(y + 1)\sqrt{x + 2} = 2x^2 - y + 7 \end{cases}$$

Bài giải:

Xét hệ
$$\begin{cases} x - y - 1 = \ln \frac{y^2 + 4y + 5}{x^2 + 2x + 2} & (Đ/K: x \geq -2) \\ 6\sqrt[3]{y} + 2(y + 1)\sqrt{x + 2} = 2x^2 - y + 7 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x + 1 + \ln(x^2 + 2x + 2) = y + 2 + \ln(y^2 + 4y + 5)$
 $\Leftrightarrow x + 1 + \ln((x + 1)^2 + 1) = y + 2 + \ln((y + 2)^2 + 1) \quad (*)$

Xét hàm $f(t) = t + \ln(t^2 + 1), t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 1 + \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{(1 + t)^2}{1 + t^2} \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = -1$

Nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ theo $(*)$ suy ra $f(x + 1) = f(y + 2) \Leftrightarrow x + 1 = y + 2$
 $\Leftrightarrow x = y + 1$

Thay vào (2) ta được $6\sqrt[3]{x - 1} + 2x\sqrt{x + 2} = 2x^2 - x + 8 \quad (3)$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Xét $x \leq 1 \Rightarrow 6\sqrt[3]{x-1} + 2x\sqrt{x+2} \leq 2\sqrt{3} < 7 < 2x^2 - x + 8$ nên (3) không có nghiệm trên $(-\infty; 1]$

Xét $x > 1$, khi đó $6\sqrt[3]{x-1} + 2x\sqrt{x+2} \leq 2((x-1)+1+1) + x \frac{4+(x+2)}{2} = \frac{x^2 + 10x + 4}{2}$

Mà $\frac{x^2 + 10x + 4}{2} \leq 2x^2 - x + 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-2)^2 \geq 0$. Do đó (3) xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Do đó hệ có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 35: Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} x + 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x(x^2-3x+3)} - \sqrt{x^2-6x+6} = 2\sqrt[3]{y+2} + \sqrt{y+3} + 2 & (1) \\ 3\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-6x+6} = \sqrt[3]{y+2} + 1 & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

Thế $-\sqrt{x^2-6x+6} = \sqrt[3]{y+2} + 1 - 3\sqrt{x-1}$ vào PT(1) ta được :

$$(x-1) + \sqrt{(x-1)^3+1} = \sqrt[3]{y+2} + \sqrt{y+2} + 1$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^3+1} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}} > 0$ suy ra hàm số đồng biến

Mà $f(x-1) = f(\sqrt[3]{y+2}) \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{y+2}$. Thế vào PT(2) ta được :

$$3\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-6x+6} = x$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = x + \sqrt{x^2 - 6x + 6}$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1) = 2x^2 - 6x + 6 + 2x\sqrt{x^2 - 6x + 6}$$

$$\Leftrightarrow (15x - 15 - 2x^2)^2 = 4x^2(x^2 - 6x + 6)$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-1)(4x-5) = 0$$

Đổi chiều điều kiện $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{-127}{64} \\ x = 5 \Rightarrow y = 62 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left(\frac{5}{4}; -\frac{127}{64}\right)$ và $(5; 62)$

Bài 36: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (y+1)^2 + y\sqrt{y^2+1} = x + \frac{3}{2} \\ x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2\sqrt{2x - 4y + 2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

ĐK: $x - 2y + 1 \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow 2y^2 + 4y + 2 + 2y\sqrt{y^2+1} = 2x + 3 \Leftrightarrow y^2 + 2y\sqrt{y^2+1} + y^2 + 1 = 2x - 4y + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(y + \sqrt{y^2+1}\right)^2 = 2x - 4y + 2$$

$$(2) \text{ ta có: } \sqrt{2x - 4y + 2} = \frac{(x-1) + \sqrt{x^2 - 2x + 5}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)^2} = \frac{(x-1) + \sqrt{x^2 - 2x + 5}}{2} \Rightarrow \sqrt{\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)^2} = \frac{x-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}$$

Ta có: $\sqrt{y^2+1} + y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1} - y}$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\sqrt{y^2+1}-y>0 \Rightarrow \sqrt{y^2+1}+y>0 \Rightarrow y+\sqrt{y^2+1}=\frac{x-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}$$

Xét hàm $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$

$$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0 \forall t$$

$$f(y)=f\left(\frac{x-1}{2}\right) \Leftrightarrow 2y=x-1 \text{ thay vào (2) ta có:}$$

$$x+\sqrt{(x-1)^2+4}=1+2\sqrt{2x-2x+2+2} \Leftrightarrow x+\sqrt{(x-1)^2+4}=5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+4}+(x-1)-4=0$$

Đặt $x-1=t$ ta có: $\sqrt{t^2+4}=4-t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-t \geq 0 \\ t^2+4=t^2-8t+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 8t=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ t=\frac{3}{2} (TM) \end{cases}$$

Với $t=\frac{3}{2} \Rightarrow x-1=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{4}$

Vậy $(x; y)=\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{4}\right)$

Bài 37: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2} \\ \frac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)(\sqrt{x+1}-3) \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Bài giải:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Đkxd: } \begin{cases} y \geq 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} = 2(y-2) - (x-1) + \sqrt{y-2}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x+1} = a \\ \sqrt{y-2} = b \end{cases} \quad a, b \geq 0$$

$$a + ab = 2b^2 - a^2 + b \Leftrightarrow (1+b) = (b-a)(b+a) + b(1+b)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(1+b+b+1) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+2b+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + 2b + 1 = 0 \end{cases} \quad \langle \text{do } a, b \geq 0 \Rightarrow a + 2b + 1 > 0 \rangle$$

$$\text{Với } a = b \text{ ta có: } x+1 = y-2 \Leftrightarrow y = x+3$$

Thay vào (2) ta có:

$$\frac{(x-8)(x+1+3)}{x^2-4x+7} = (x+1)(\sqrt{x+1}-3) \Leftrightarrow (x-8)(x+4) = (x+1)(\sqrt{x+1}-3)[x^2-4x+7]$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x+4) = \frac{(x+1)(x-8)(x^2-4x+7)}{\sqrt{x+1}+3} \Leftrightarrow (x-8) \left[x+4 - \frac{(x+1)[(x-2)^2+3]}{\sqrt{x+1}+3} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ (x+4)(\sqrt{x+1}+3) = (x+1)[(x-2)^2+3] \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x+1} = a \\ x-2 = b \end{cases} \quad a \geq 0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ta có: $(a^2 + 3)(a + 3) = (b + 3)(b^2 + 3)$

Xét hàm $f(t) = (t^2 + 3)(t + 3) \quad \forall t \geq 0$

$$f(t) = 2t(t + 3) + t^2 + 3 = 2t^2 + 6t + t^2 + 3 = 3t^2 + 6t + 3$$

$$= 3t^2 + 6t + 3 = 3(t + 1)^2 > 0 \quad \forall t \geq 0$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến $\Rightarrow f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow x+1 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \text{ (TM)} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy với $x = 8 \Rightarrow y = 11$

$$\text{Với } x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{11 + \sqrt{13}}{2}$$

Kết luận: $(x; y) = (8; 11); \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{11 + \sqrt{13}}{2} \right)$

Bài 38: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3 = y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2} = 2x^2 + 6y^2 - 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Bài giải:

Điều kiện: $x \leq 1; y \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right]$. Ta có

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, ta có

$f'(t) = 6t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy

$$(1) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$$

Thế vào (2) ta được: $\sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1$

$$PT \Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5} = 4x^2 - 12x - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{4x+5} + 1)^2 = (2x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+5} = 2x-3 \text{ (vn)} \\ \sqrt{4x+5} = 1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Với $x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt[4]{2} \\ y = -\sqrt[4]{2} \end{cases}$. Vậy hệ có 2 nghiệm

Bài 39: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 y + y^5 = x^{10} + x^6 \\ 4\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} - 3x = 1 + \sqrt{1-y} \end{cases}$$

Bài giải:

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1, y \leq 1$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Nếu $x = 0$ thay vào hệ phương trình ta được $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

$$\text{Nếu } x \neq 0, \text{ từ } x^4 y + y^5 = x^{10} + x^6 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^5 + \frac{y}{x} = x^5 + x$$

Xét $f(t) = t^5 + t, t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \text{ Suy ra } \frac{y}{x} = x \Leftrightarrow y = x^2$$

Thay $y = x^2$ vào phương trình thứ hai ta được $4\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} - 3x = 1 + \sqrt{1-x^2}$ (*)

$$\text{Đặt } u = \sqrt{1+x} \geq 0, v = \sqrt{1-x} \geq 0. \text{ Ta có } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (*) trở thành } 4u - 2v - \frac{3}{2}(u^2 - v^2) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + uv$$

$$\Leftrightarrow 2u^2 + (v-4)u - v^2 + 2v = 0 \Leftrightarrow (2u-v)(u+v-2) = 0$$

$$\text{Nếu } v = 2u \text{ thì } \sqrt{1-x} = 2\sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{25}$$

$$\text{Nếu } v = 2 - u \text{ thì } \sqrt{1-x} = 2 - \sqrt{1+x} \Rightarrow \text{pt vô nghiệm}$$

$$\text{Tóm lại phương trình có các nghiệm là } (x; y) = (0; 0); \left(-\frac{3}{5}; \frac{9}{25}\right)$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 40: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4y(x-5) - 1 = 4y^2 - x + 2\sqrt{2y} \\ 4y(x-4) + x = 2\sqrt{x-1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Với điều kiện đó

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 4xy - 20y - 1 = 4y^2 - x + 2\sqrt{2y}$$

$$(2) \Leftrightarrow 4xy = 16xy + 2\sqrt{x-1} - x. \text{ Thay vào (1) ta có}$$

$$x^2 + 2\sqrt{x-1} = (2y+1)^2 + 2\sqrt{(2y+1)-1}$$

Xét hàm số $u = g(t) = t^2 + 2\sqrt{t-1}$ với $t \in [1; +\infty)$. Hàm số này luôn đồng biến.

$$\text{Vì thế } x^2 + 2\sqrt{x-1} = (2y+1)^2 + 2\sqrt{(2y+1)-1} \Leftrightarrow x = 2y+1 \Leftrightarrow x-1 = 2y$$

Thay vào (2) ta được

$$2x^2 - 9x + 8 = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2(x-2)^2 = (\sqrt{x-1} + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{x-1} = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - (9 + 2\sqrt{2})x + 10 + 4\sqrt{2} = 0 \\ \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 1 > 0 \end{cases}$$

Phương trình bậc hai $2x^2 - (9 + 2\sqrt{2})x + 10 + 4\sqrt{2} = 0$ có $\Delta = (2\sqrt{2} + 1)^2$ nên có hai nghiệm

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

là $x_1 = \frac{5+2\sqrt{2}}{2}$ và $x_2 = 2$. Nghiệm x_2 bị loại vì $\sqrt{2}x_2 - 2\sqrt{2} - 1 < 0$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sqrt{x-1} = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{5-2\sqrt{2}}{2}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $\left(\frac{5-2\sqrt{2}}{2}; \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)$ và $\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2}; \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)$

Bài 41: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4(2x\sqrt{2x-1} - y^3 - 3y^2) = 15y + 7 + \sqrt{2x+1} \\ \sqrt{\frac{y(y+2)}{2}} + \sqrt{6-x} = 2x^2 + 2y^2 - 15x + 4y + 12 \end{cases}$$

Bài giải:

Điều kiện: $1 \leq x \leq 6$ (1) $\Leftrightarrow f(y+1) = f(\sqrt{2x-1})$ với $f(t) = 4t^3 + 3t$. Vì $f(t)$ đồng biến nên

$y+1 = \sqrt{2x-1} \Rightarrow y^2 + 2y = 2x - 2$. Thế vào (2):

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} = 2x^2 - 11x + 8 \Rightarrow (\sqrt{x-1} - 2) + (\sqrt{6-x} - 1) = 2x^2 - 11x + 5 \Leftrightarrow \frac{x-5}{2+\sqrt{x-1}} + \frac{5-x}{1+\sqrt{6-x}} = (x-5)(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-5)A = 0 \text{ với } A = 2x+1 + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} - \frac{1}{2+\sqrt{x-1}} > 0 \text{ (do } x \geq 1) \rightarrow x = 5, y = 2.$$

Bài 42: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(4y^2+1) + x\sqrt{2y} = 3 & (1) \\ 2y + \sqrt{4y^2+1} = x + \sqrt{x^2+1} & (2) \end{cases}$$

Bài giải:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Điều kiện: $y \geq 0$

$$PT(1) \Leftrightarrow x \left[x^2 (4y^2 + 1) + \sqrt{2y} \right] = 3 \Rightarrow x > 0$$

$$\text{Khi đó, } PT(2) \Leftrightarrow 2y + \sqrt{4y^2 + 1} = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (3)$$

Xét hàm $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ trên $[0; +\infty)$

$$\text{Có } f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Khi đó, } PT(3) \Leftrightarrow f(2y) = f(x) \Leftrightarrow 2y = x$$

Thay vào phương trình (1) ta được phương trình: $x^5 + x^3 + x\sqrt{x} = 3$

Đặt $t = \sqrt{x} > 0$ có hàm số $g(t) = t^{10} + t^6 + t^3$ có $g'(t) = 10t^9 + 6t^5 + 3t^2 > 0 \quad \forall t > 0$

$$\text{Mà } g(1) = 3 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 43: Giải hệ PT
$$\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4y+2)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài giải:

ĐKXD $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \Leftrightarrow x^3 - x^2y + y^2 - xy + x - y = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

Với $y = x^2 + 1$ thay vào PT thứ 2 ta được

$$3(x^2 + 1)(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x^2 + 6)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0. \text{ Dễ thấy PT vô nghiệm.}$$

Với $y = x$ thay vào PT thứ 2 ta được $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x+2)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = -(2x+1)(\sqrt{3+(2x+1)^2} + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = (-2x-1)(\sqrt{3+(-2x-1)^2} + 2)$$

Xét hàm số $f(t) = t(\sqrt{t^2 + 2} + 2)$ ta có $f'(t) = \sqrt{t^2 + 2} + 2 + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0$ suy ra hàm số đồng biến.

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Từ đó suy ra $3x = -2x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$. Vậy HPT có nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Bài 44: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 32x^5 - 5\sqrt{y-2} = y(y-4)\sqrt{y-2} - 2x \\ (\sqrt{y-2} - 1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 13(y-2) + 82x - 29 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài giải:

Đặt đk $x \geq -\frac{1}{2}, y \geq 2$

$$+) (1) \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = (y^2 - 4y)\sqrt{y-2} + 5\sqrt{y-2} \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = (\sqrt{y-2})^5 + \sqrt{y-2} (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t, f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (3)

$$\text{ta có } f(2x) = f(\sqrt{y-2}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{y-2}$$

Thay $2x = \sqrt{y-2} (x \geq 0)$ vào (2) được

$$(2x-1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 52x^2 + 82x - 29$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x+1} = (2x-1)(4x^2 - 24x + 29)$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(\sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29 = 0 \end{cases} (4)$$

Với $x = 1/2$. Ta có $y = 3$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$(4) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}-2)-(4x^2-24x+27)=0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2}-(2x-3)(2x-9)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}+2}(2x-9)=0(5) \end{cases}$$

Với $x=3/2$. Ta có $y=11$

Xét (5). Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0 \Rightarrow 2x = t^2 - 1$. Thay vào (5) được

$$t^3 + 2t - 10 - 21 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t^2 - t - 7) = 0. \text{ Tìm được } t = \frac{1+\sqrt{29}}{2}. \text{ Từ đó tìm được}$$

$$x = \frac{13+\sqrt{29}}{4}, y = \frac{103+13\sqrt{29}}{2}$$

Bài 45: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 5x^2 - 2y^2 + 10x - 3y + 6 = 0 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{4-y} = x^3 + y^2 - 4x - 2y \end{cases}$$

Bài giải:



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Điều kiện $x \geq -2; y \leq 4$

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 10x + 6 = y^3 + 2y^2 + 3y$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) = y^3 + 2y^2 + 3y$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t$, $f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 > 0 \quad \forall t \in R$

Suy ra $f(x+1) = f(y) \Rightarrow y = x+1$ thay vào pt (2) ta được

$$\text{Phương trình: } \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}) - 3 = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{(x+2)(3-x)} - 2)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3} = (x+1)(x^2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2[(x+2)(3-x) - 4]}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3)(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2)} = (x+2)(x^2 - x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2 + x + 2)}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3)(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2)} - (x+2)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left[x + 2 + \frac{2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3)(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2)} \right] = 0$$

$> 0 \quad (\text{vì } x \geq -2)$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ pt có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$, $(x; y) = (-1; 0)$

Bài 46: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2} = 2x^2 + 6y^2 - 7 \end{cases}$$

Facebook cá nhân: <https://www.facebook.com/quang.manhngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài giải:

ĐK: $x \leq 1$, ta có:

$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ 2y^3 + y = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x}$$

Vì h/s $f(t) = 2t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Thế vào pt kia ta được pt:

$$2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 4x + 5 + 2\sqrt{4x+5} + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x-2)^2 = (\sqrt{4x+5} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x = \sqrt{4x+5} + 1 \text{ vì } x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \text{ tmđk.}$$

Bài 47: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (xy-3)\sqrt{y+2} + \sqrt{x} = \sqrt{x^5} + (y-3x)\sqrt{y+2} \\ \sqrt{9x^2+16} - 2\sqrt{2y+8} = 4\sqrt{2-x} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài giải:

Đk: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases} (*)$. Với đk(*) ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x-1) \left[(y+3)\sqrt{y+2} - (x+1)\sqrt{x} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (y+3)\sqrt{y+2} = (x+1)\sqrt{x} \end{cases} \quad (3)$$

Nội dung

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Với $x = 1$ thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2y+8} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{31}{8}$ (loại)

Ta có: (3) $\Leftrightarrow (\sqrt{y+2})^3 + \sqrt{y+2} = (\sqrt{x})^3 + \sqrt{x}$ (4). Xét hàm số

$f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0; \forall t \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ là hs đồng biến, do đó:

(4) $\Leftrightarrow f(\sqrt{y+2}) = f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = x - 2$ thay vào pt(2) ta được:

$$4\sqrt{2-x} + 2\sqrt{2x+4} = \sqrt{9x^2+16}$$

$$\Leftrightarrow 32 - 8x + 16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2 \Leftrightarrow 8(4-x^2) + 16\sqrt{2(4-x^2)} - (x^2+8x) = 0$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{2(4-x^2)} \quad (t \geq 0); \text{ PT trở thành: } 4t^2 + 16t - (x^2 + 8x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ t = -\frac{x}{2} - 4 < 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Hay } \sqrt{2(4-x^2)} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 = \frac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}-6}{3}$$

Vậy hệ pt có nghiệm $(x; y)$ là: $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}-6}{3} \right)$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP

Bài 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} & (1) \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq y \geq 0 \\ x \geq 2y; 4x - 5y - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow (1-y)(\sqrt{x-y}) + (x-y-1) + (y-1) - (x-y-1)\sqrt{y} = 0 \\ &\Rightarrow (1-y)(\sqrt{x-y}-1) + (x-y-1)(1-\sqrt{y}) = 0 \\ &\Rightarrow (1-y)(x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{\sqrt{y}+1}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=y+1 \end{cases} \end{aligned}$$

* Với $y=1$

$$(2) \Rightarrow 9-3x = 2\sqrt{x-2} - \sqrt{4x-8} \Rightarrow 9-3x=0 \Rightarrow x=3$$

* Với $x=y+1$

$$(2) \Rightarrow 2y^2 + 3y - 2 = 2\sqrt{1-y} - \sqrt{1-y} \Rightarrow 2y^2 + 3y - 2 = \sqrt{1-y} \quad (3)$$

Điều kiện: $y \leq 1$

Cách 1: Phân tích thành nhân tử

$$(3) \Rightarrow 2(1-y) - 2y\sqrt{1-y} + (2y+1)\sqrt{1-y} - y(2x+1) = 0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2\sqrt{1-y}(\sqrt{1-y}-y) + (2y+1)(\sqrt{1-y}-y) = 0 \\ &\Rightarrow (2\sqrt{1-y} + 2y + 1)(\sqrt{1-y} - y) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{1-y} + 2y + 1 = 0 \text{ (VN)} \\ \sqrt{1-y} = y \end{cases} \Rightarrow 1-y = y^2 \\ &\Rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ (vì } y \geq 0) \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Cách 2: Khảo sát hàm số

$$(3) \Leftrightarrow 2y^2 + y = 2(\sqrt{1-y})^2 + \sqrt{1-y}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + t$ ($t \geq 0$) có $f'(t) = 4t + 1 \geq \forall t > 0$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

$$\text{Mà } f(y) = f(\sqrt{1-y}) \text{ nên } y = \sqrt{1-y} \Rightarrow y^2 = 1-y \Rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ (vì } y \geq 0) \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sau khi thử lại, ta thấy tất cả các nghiệm của phương trình đều thỏa mãn.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x)(1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0(2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Phương trình (2) tương đương với:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$(2) \Leftrightarrow (y - 5x - 5)(y + x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x + 4 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

* $y = 5x + 4$

$$(1) \Leftrightarrow (5x + 4)^2 + (5x + 4)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow 6x(5x + 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

* $y = 4 - x; (1) \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (5x + 4)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 4) = 0$

* $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}; \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = 0 \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x - 2 = 0(1) \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0(2) \end{cases}$

Bài giải chi tiết

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$(2) \Leftrightarrow x^2(2x - y + 1) + y(y - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y)(2x - y + 1) = 0$$

Bài 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4y + 1 = 0 (1) \\ y[7 - (x - y)^2] = 2(x^2 + 1)(2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Phương trình (2) tương đương với:

$$(2) \Leftrightarrow y[7 - (x - y)^2] + 2(y^2 - xy + 4y) = 0 \Leftrightarrow y[15 - 2(x - y) - (x - y)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x - y - 3)(x - y + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = x - 3 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

* $y = 0; (1) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ (vô lý)

* $y = x - 3; (1) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -2 \Rightarrow y = -5 \end{cases}$

* $y = x + 5; (1) \Leftrightarrow x^2 + 9x + 46 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x + y) = 0 (1) \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x + y)^2 (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương trình (2) tương đương với:

$$(2) \Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) + 2 = (x^2 + y^2) + 2x \Leftrightarrow (xy - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

* Với $xy = 1$; (1) $\Leftrightarrow 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2xy(x + y) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 = 0 \Leftrightarrow 3y(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ (loại vì } xy=1) \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1$$

* Với $x^2 + y^2 = 2$; (1) $\Leftrightarrow 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - (x^2 + y^2)(x + y) = 0$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 4x^2y - 5xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} \\ y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} \\ y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}, \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 6. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y-1} - \sqrt{x+2y-2} + x - y + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 3y = 0 & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x-y+1}{\sqrt{2x+y-1} + \sqrt{x+2y-2}} + (x-y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1) \left(\frac{1}{\sqrt{2x+y-1} + \sqrt{x+2y-2}} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow y = x+1$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1) - 4x - 4(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Bài 7. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - y} = \frac{y}{\sqrt[3]{x-y}} & (1) \\ 2(x^2 + y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11 & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \neq y \\ x^2 - x - y \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nếu $y < 0 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt[3]{x-y}} < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - y} < 0$ (vô lý). Nên $y \geq 0$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Với } x^2 - x - y = 0; (1) \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ (không thỏa mãn (2))} \\ x = 1 \end{cases}$$

Với $x^2 - x - y > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y} = \frac{y}{\sqrt{x^2-x-y}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y} - 1 = \frac{y}{\sqrt{x^2-x-y}} - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{(x+y)(x-y-1)}{\sqrt{x^2-x-y} + 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y-1) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y} + 1} \right) = 0 \end{aligned}$$

Bài 8. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\sqrt{2x^2 - 3xy + 2y^2} = x + y + 2xy & (1) \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 3x - 4y + 4 & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq y \\ x \geq -y \end{cases}$

Phương trình (1) tương đương với:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x-y)^2 + 2\sqrt{2x^2 - 3xy + 2y^2} - (x+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 + \frac{4(2x^2 - 3xy + 2y^2) - (x+y)^2}{2\sqrt{2x^2 - 3xy + 2y^2} + x + y} = 0 \end{aligned}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + \frac{7(x-y)^2}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}+x+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \left(1 + \frac{7}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}+x+y} \right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2x} = 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 2x = x^2 - 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 2y(1) \\ \sqrt{x} + y\sqrt{5} = 3(2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x \geq y \geq 0$

Với $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình

Với $y > 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{3y}{2} \right) + \left(\sqrt{x^2-y^2} - \frac{y}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - \frac{5}{4}y^2}{\sqrt{x^2+y^2} + \frac{3}{2}y} + \frac{x^2 - \frac{5}{4}y^2}{\sqrt{x^2-y^2} + \frac{y}{2}} = 0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{4}y^2 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{3}{2}y} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2} + \frac{y}{2}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{4}y^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}y$$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4x^2 - 12x + 9 \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x-y} + \sqrt{y-2} + 4x-3y = 0 & (1) \\ \sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy} = \frac{y^2}{\sqrt{x+xy+1}} & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - y > 0 \\ x + xy + 1 > 0 \\ y \geq 2 \end{cases}$

Phương trình (2) tương đương với:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + y^2 + xy} - y = \frac{y^2}{\sqrt{x + xy + 1}} - y$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 + xy + y^2)(x - y + 1)}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + y^2 + xy)^2} + y\sqrt[3]{x^3 + x^2 + y^2 + xy} + y^2} = \frac{y(y+1)(y-x+1)}{\sqrt{x + xy + 1}}$$

$$\Leftrightarrow (x - y + 1) \left[\frac{(x^2 + xy + y^2)}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + y^2 + xy)^2} + y\sqrt[3]{x^3 + x^2 + y^2 + xy} + y^2} + \frac{y(y+1)}{\sqrt{x + xy + 1}} \right] = 0$$

Do $\frac{(x^2 + xy + y^2)}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + y^2 + xy)^2} + y\sqrt[3]{x^3 + x^2 + y^2 + xy} + y^2} + \frac{y(y+1)}{\sqrt{x + xy + 1}} > 0 \Rightarrow y = x + 1$

Thay vào phương trình (1), ta được:

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1} + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}(\sqrt{x-1}-1) + (\sqrt{x-1}-1) + (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

Sau khi thử lại ta thấy nghiệm này thỏa mãn đề bài

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 11. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} - y & (1) \\ \sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y = 2\sqrt{xy} & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 5 \end{cases}$$

Phương trình (2) tương đương với:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 16(y-x)} - y = 2(\sqrt{xy} - y) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 16(y-x) - y^2}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y} = \frac{2y(x-y)}{\sqrt{xy} + y}$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y} - \frac{2y}{\sqrt{xy} + y} \right] = 0$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} - y$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-5} - \frac{3}{2} \right)^2 + x - 3\sqrt{x+3} + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x+3} + \frac{11}{4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{4} \right)^2 \leq 9(x+3) \Leftrightarrow -3 \leq x \leq \frac{7+6\sqrt{10}}{4} < 16$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Do đó $\frac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)+y}} - \frac{2y}{\sqrt{xy+y}} < 0 \Rightarrow x = y$

Thế vào (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2x = 3(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-5}) \Leftrightarrow 4x^2 = 9(2x-2+2\sqrt{x^2-2x-15})$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x^2-2x-15} = 2x^2 - 9x + 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x + 9 \geq 0 \\ 81(x^2 - 2x - 15) = (2x^2 - 9x + 9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow y = 6$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}$

Bài 12. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)} = 2 + \sqrt{y+4} \\ \sqrt{1-y} + \sqrt{x+2} = x^2(y-1) + 4x-3 \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy(x-y) \geq 0 \\ x \geq -2 \\ -4 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Từ (2) ta có: $4x-3 = x^2(1-y) + \sqrt{1-y} + \sqrt{x+2} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{x+2} \geq 0$

Phương trình (1) tương đương với: $\sqrt{x+2} - \sqrt{y+4} + \sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)-(y+4)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y+4}} + \frac{x^2+y^2-xy(x-y)-4}{\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}+2} = 0$$

Facebook cá nhân: <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+4}} + \frac{(x-y-2)(x-y-xy+2)}{\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)+2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2) \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+4}} + \frac{x-y-xy+2}{\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)+2}} \right) = 0 \quad (3)$$

Ta có: $x-y-xy+2 = x(1-y) + (1-y) + 1 = (x+1)(1-y) + 1 > 0$ do $x \geq \frac{3}{4}, y \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+4}} + \frac{x-y-xy+2}{\sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)+2}} > 0$$

Nên (3) $\Rightarrow x-y-2=0$. Thay vào (2) ta được:

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = x^2(x-3) + 4x - 3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4x - 3 - \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 0 \quad (4)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 3 - \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}$ với $x \in \left[\frac{3}{4}; 3\right]$

$$\text{Có } f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 3(x-1)^2 + 1 + \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}} > 0$$

$$\text{Do } (x+2) - (3-x) = 2x-1 > 0 \forall x \in \left(\frac{3}{4}; 3\right) \Rightarrow x+2 = 3-x \Rightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{3-x}$$

Bài 13. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 3y - 1 + \sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 2\sqrt{x-y} & (1) \\ ((y+1)^2 + 3)\sqrt{x^2+3} = 32x^2 - 24 & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$

* Nếu $x = 1$ thì từ (2) suy ra $y = 0$ thỏa mãn hệ.

* Nếu $x > 1$ ta có (1) $\Leftrightarrow 3x - 3y - 3 + 2 - 2\sqrt{x-y} + \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x-y-1) + \frac{2(1-x+y)}{1+\sqrt{x-y}} + \frac{x-1-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1) \left(3 - \frac{2}{1+\sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y-1=0 \quad (\text{Do } 3 - \frac{2}{1+\sqrt{x-y}} \geq 3-2=1)$$

Thay vào (2) ta được $(x^2+3)\sqrt{x^2+3} = 32x^2 - 24$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \frac{32}{x} - \frac{24}{x^3} \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}}{3} - 8 = 8 \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3-4x^2+3)(x^2+3+2x\sqrt{x^2+3}+4x^2)}{x^3(\sqrt{x^2+3}+2x)} = -\frac{8(x^3-4x^2+3)}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow (x^3-4x^2+3) \left[\frac{(\sqrt{x^2+3}+x)^2+3x^2}{x^3(\sqrt{x^2+3}+2x)} + \frac{8}{x^3} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+3=0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

(Do $x > 1$) suy ra $y = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$

Kết luận: hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (1; 0), \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}; \frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right)$

Bài 14. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+1)\sqrt{y^2+y+2} + (y-1)\sqrt{x^2+x+1} = x+y & (1) \\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2+x+y+1 & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x - y + 3 \geq 0$

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + x)(\sqrt{x - y + 3} - 2) + x - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1) \left(\frac{x^2 + x}{\sqrt{x - y + 3} + 2} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$$

Thay vào (1) ta được: $(x+1)\sqrt{x^2-x+2} + (x-2)\sqrt{x^2+x+1} = 2x-1$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2-x+2} \\ v = \sqrt{x^2+x+1} \end{cases} (u, v > 0)$ ta được $\left(\frac{v^2-u^2+1}{2}+1\right)u + \left(\frac{v^2-u^2+1}{2}-2\right)v = v^2-u^2$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow (v-u)(u+v+1)(u+v-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u+v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=-1 \\ x=\frac{7}{8} \end{cases}$$

Từ đó ta được các nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), (-1; -2), \left(\frac{7}{8}; \frac{-1}{8}\right)$

Bài 15. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{4x-1} + \sqrt{4y-1} + 6 - \frac{8}{2x+1} = 8x(1) \\ 2y+1 + \sqrt{x^2+2y+1} = x + 2\sqrt{y^2+2x+1}(2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x, y \geq \frac{1}{4}$

$$(2) \Leftrightarrow 2(y+1) - 2\sqrt{y^2+2x+1} + \sqrt{x^2+2y+1} - (x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(y-x)}{y+1+\sqrt{y^2+2x+1}} + \frac{2(y-x)}{\sqrt{x^2+2y+1}+x+1} = 0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow (y-x) \left[\frac{4}{y+1+\sqrt{y^2+2x+1}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2y+1+x+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Thay vào (1) ta có:

$$2\sqrt{4x-1}+6=8x+\frac{8}{2x+1}$$

Dò nghiệm ta được $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm kép, ta tìm cách đánh giá như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy: khi thay $x = \frac{1}{2}$ vào $\sqrt{4x-1} = 1$, nên ta áp dụng

$$2\sqrt{4x-1} \cdot 1 \leq 4x-1+1=4x \Rightarrow VT \leq 4x+6$$

Ta thay $x = \frac{1}{2}$ vào $\frac{8}{2x+1} = 4$. nên ta áp dụng $2(2x+1) + \frac{8}{2x+1} \geq 2\sqrt{2(2x+1)\frac{8}{2x+1}} = 8$

$$VP = (4x-2) + \left[2(2x+1) + \frac{8}{2x+1} \right] \geq (4x-2) + 2\sqrt{2(2x+1)\frac{8}{2x+1}} = 4x-2+8=4x+6 \geq VT \text{ Dấu}$$

"=" xảy ra khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Bài 16. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{xy-1} + \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{\frac{y+2}{y}} & (1) \\ \sqrt{2y} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} = \frac{2}{y} + \frac{1}{3x} & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Facebook cá nhân: <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} y > 0 \\ xy \geq 1 \\ 1 - \frac{3}{x} \geq 0 \Rightarrow x > 0 \\ x \neq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{xy-1} - 1 + \sqrt{x+1} - \sqrt{1+\frac{2}{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-2}{\sqrt{xy-1}+1} + \frac{x-\frac{2}{y}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1+\frac{2}{y}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy-2) \left(\frac{1}{\sqrt{xy-1}+1} + \frac{1}{y\sqrt{x+1}+y\sqrt{1+\frac{2}{y}}} \right) = 0 \Leftrightarrow xy-2=0 \Leftrightarrow xy=2$$

$$\text{Thay vào (2) ta được: } \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} = x + \frac{1}{3x}$$

Áp dụng BĐT Bunhiaiscopki ta có

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \right)^2 = \left(1\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{x}} \right)^2 \leq 4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} \right) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số thực dương ta có: $x + \frac{1}{3x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{3x}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Nên $x + \frac{1}{3x} \geq \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = \frac{1}{3x} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \end{cases}$ vô nghiệm.

Kết luận: Vậy hệ đã cho vô nghiệm

Bài 17. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (2y - \sqrt{2y - 2x})\sqrt{4xy - 2x - 4} + 8\sqrt{x^3 - 4} = 3x^3 & (1) \\ y + \sqrt{x^2 + 2y} = x + \sqrt{y^2 + 2x + 2} & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} 4xy - 2x - 4 \geq 0 \\ y \geq x \geq \sqrt[3]{4} \\ x^2 + 2y \geq 0 \\ y^2 + 2x + 2 \geq 0 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow (y+1) - \sqrt{y^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 2y} - (x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2y - 2x - 1}{(y+1) + \sqrt{y^2 + 2x + 2}} + \frac{2y - 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2y} + x + 1} = 0$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow (2y - 2x - 1) \left(\frac{1}{(y+1) + \sqrt{y^2 + 2x + 2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2y + x + 1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y - 2x - 1 = 0 \text{ (Do } y \geq x \geq \sqrt[3]{4} \text{)}$$

Thay vào (2) ta được $2x\sqrt{2x^2 - 4} + 8\sqrt{x^3 - 4} = 3x^3$

Áp dụng BĐT Côsi cho các số dương ta có:

$$3x^3 = 2 \left[4 + (x^3 - 4) \right] + x \left[2 + (x^2 - 2) \right] \geq 8\sqrt{x^3 - 4} + 2x\sqrt{2x^2 - 4}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} 4 = x^3 - 4 \\ 2 = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$$

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(2; \frac{5}{2} \right)$

Bài 18. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{y-2} + \sqrt{3x^3 - 5y^2 + 5y - 2} = \frac{x^2 + x + 2y - 2}{2} & (1) \\ 3x = y + \sqrt[3]{x^2y - xy^2 + y^3} + \sqrt[3]{x^2y} & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

$$(2) \Leftrightarrow (x - y) + \left(x - \sqrt[3]{x^2y} \right) + \left(x - \sqrt[3]{x^2y - xy^2 + y^3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y) + \frac{x^2(x - y)}{x^2 + x\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \frac{(x - y)(x^2 + y^2)}{x^2 + x\sqrt[3]{x^2y - xy^2 + y^3} + \left(\sqrt[3]{x^2y - xy^2 + y^3} \right)^2} = 0$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[1 + \frac{x^2}{\left(x + \frac{\sqrt[3]{x^2y}}{2}\right) + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4y^2}} + \frac{x^2+y^2}{\left(x + \frac{\sqrt[3]{x^2y-xy^2+y^3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x^2y-xy^2+y^3}\right)^2} \right] = 0$$

$x = y$. Thay vào (2) ta được: $\sqrt{x-2} + \sqrt{3x^3-5x^2+5x-2} = \frac{x^2+3x-2}{2}$ (3)

Nhắm $x = 3$ là nghiệm kép, ta thay $x = 3$ vào :

$$\sqrt{x-2} = 1; \sqrt{3x^3-5x^2+5x-2} = \sqrt{(3x-2)(x^2-x+1)} = \sqrt{(7)(7)}$$

Áp dụng BĐT Cosi ta có: $\sqrt{x-2} = \sqrt{1(x-2)} \leq \frac{x-1}{2}$ (*)

Và: $\sqrt{3x^3-5x^2+5x-2} = \sqrt{(3x-2)(x^2-x+1)} \leq \frac{x^2+2x-1}{2}$ (**)

Cộng vế theo vế (*) và (**) ta có: $\sqrt{x-2} + \sqrt{3x^3-5x^2+5x-2} \leq \frac{x^2+3x-2}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 1 = x-2 \\ 3x-2 = x^2-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Nên (3) $\Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow y = 3$

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất (3;3)

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 19. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = \sqrt{2x-y} + \frac{2y-x}{\sqrt{2x}} & (1) \\ 3x^2 - 2y + 2 = 2\sqrt{x} + 4y\sqrt{2x-1} & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x+y \geq 0 \\ 2x-y \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+y} - \sqrt{2x-y} = \frac{2y-x}{\sqrt{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y-x}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2x-y}} = \frac{2y-x}{\sqrt{2x}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-x=0 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{2x-y} = \sqrt{2x} \end{cases}$$

* Nếu $\sqrt{x+y} + \sqrt{2x-y} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow x + 2\sqrt{(x+y)(2x-y)} = 0$ vô nghiệm do $x > 0$.

* Nếu $2y = x$ thay vào (2) ta được: $3x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x} + 2x\sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow x(2x - 2\sqrt{2x-1}) + x^2 - 2x + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{2x-1} - 1)^2 + (x-1)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \quad (3)$$

Ta có:
$$\begin{cases} x(\sqrt{2x-1} - 1)^2 \geq 0 \\ (x-1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Với } x \geq \frac{1}{2} \text{ nên (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{2x-1} = 1 \\ x = 1 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(1; \frac{1}{2}\right)$

Bài 20. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{xy - \frac{3}{4}} = \frac{2 + \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \\ \sqrt{x^3(y^3 + 8)} + 3\sqrt{8x + 1} = 4 + 2x^2(y + 1)^2 \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x \geq 0, y > 0, xy \geq \frac{3}{4}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{xy - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{xy - 1}{\sqrt{y}(\sqrt{xy} + 1)} + \frac{xy - 1}{\sqrt{xy - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{y}(\sqrt{xy} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{xy - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}} \right) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$$

Thay vào (2) được: $\sqrt{8x^3 + 1} + 3\sqrt{8x + 1} = 4 + 2(x + 1)^2$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$2\sqrt{8x^3+1} = 2\sqrt{(2x+1)(4x^2-2x+1)} \leq 2x+1+4x^2-2x+1 = 4x^2+2$$

$$6\sqrt{8x+1} = 2.3.\sqrt{8x+1} \leq 9+8x+1 = 8x+10$$

Suy ra $2\sqrt{8x^3+1} + 6\sqrt{8x+1} \leq 4x^2+2+8x+10 = 8+4(x+1)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{8x^3+1} + 3\sqrt{8x+1} \leq 4+2(x+1)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=1 \Rightarrow y=1$ thử lại thấy thỏa mãn

Kết luận: Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (1;1)

Bài 21. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x} + \sqrt{y-2} & (1) \\ \sqrt{(x-2)(9-y)} + \sqrt{y(4-y)} = 3(x-y) & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq 4 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2+4} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-4} - \sqrt{y-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-y^2+4)-4x}{\sqrt{x^2-y^2+4}+2\sqrt{x}} + \frac{(x-4)-(y-2)}{\sqrt{x-4}+\sqrt{y-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y-2)(x+y-2)}{\sqrt{x^2-y^2+4}+2\sqrt{x}} + \frac{x-y-2}{\sqrt{x-4}+\sqrt{y-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2) \left(\frac{x+y-2}{\sqrt{x^2-y^2+4}+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-4}+\sqrt{y-2}} \right) = 0 \Leftrightarrow x-y-2=0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Thay vào (2) ta được $\sqrt{y(9-y)} + \sqrt{y(4-y)} = 6$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$\left(\sqrt{y} \cdot \sqrt{9-y} + \sqrt{4-y} \cdot \sqrt{y}\right)^2 \leq (y+4-y)(9-y+y) = 36 \Rightarrow \sqrt{y(9-y)} + \sqrt{y(4-y)} \leq 6$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{y}{9-y} = \frac{4-y}{y} \Leftrightarrow y = \frac{36}{13} \Rightarrow x = \frac{62}{13}$ (thỏa mãn)

Kết luận: Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{62}{13}; \frac{36}{13}\right)$

Bài 22. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y-1} + \sqrt{y} = x + \sqrt{1-x} & (1) \\ \sqrt{y^2+x} + \frac{1}{y+1} = \frac{x+2y+4}{4} & (2) \end{cases} \quad \text{với } x \geq 0$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện:
$$\begin{cases} x^2+x+y-1 \geq 0 \\ x+y^2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+y-1} - x + \sqrt{y} - \sqrt{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y-1}{\sqrt{x^2+x+y-1}+x} + \frac{y+x-1}{\sqrt{y}+\sqrt{1-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+y-1}+x} + \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{1-x}} \right) = 0 \Leftrightarrow x+y-1=0 \quad (\text{Do } x \geq 0)$$

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{y^2-y-1} + \frac{1}{y+1} = \frac{y+5}{4}$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ta có: $\sqrt{y^2 - y - 1} \geq \frac{y+1}{2}$ với $y \geq 0$

Thật vậy: $(y^2 - y - 1)^2 - \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}(y-1)^2(5y^2 - 2y + 5) \geq 0$

Suy ra $\sqrt{y^2 - y + 1} \geq \frac{y+1}{2}$ (3)

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\frac{y+1}{4} + \frac{1}{y+1} \geq 1$ (4)

Cộng về tương ứng (3), (4) rồi rút gọn ta được: $\sqrt{y^2 - y + 1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{y+5}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $y = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(0;1)$

Bài 23. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + y + \sqrt{x-y} = x + xy + y^2 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{x+y} = x^2 - 1 \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $x - y - \sqrt{x-y} - 2x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y) - \sqrt{x-y} - (x-y)(2x+y) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x-y}} - 2x - y \right) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Do $1 - \frac{1}{\sqrt{x-y}} - 2x - y < 1 - 2x < 0$)

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Thay vào (2) ta được: $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x} = x^2 - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1) + (\sqrt{2x} - 2) = x^2 - 4$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x}+2} - (x+2) \right] = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$(\text{Do } \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x}+2} - (x+2) < 1+1-x-2 = -x < 0)$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 2$ (Thỏa mãn)

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 2)$

Bài 24. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{y+2x-1} + \sqrt{1-y} = y+2 \\ x\sqrt{x} = \sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y} \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} y+2x-1 \geq 0 \\ y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y(x-1) \geq 0 \\ x^2-y \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ tương đương với } \sqrt{xy-y} + \sqrt{x^2-y} = x\sqrt{x} \quad (3)$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{xy-y} - \sqrt{x^2-y} = \frac{xy-x^2}{\sqrt{xy-y} + \sqrt{x^2-y}} = \frac{xy-x^2}{x\sqrt{x}} = \frac{y-x}{\sqrt{x}} \quad (4)$$

$$\text{Cộng vế (3) với (4) ta được: } 2\sqrt{xy-y} = x\sqrt{x} + \frac{y-x}{\sqrt{x}} = \frac{x^2-x+y}{\sqrt{x}}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{y(x^2-x)} = x^2-x+y \Rightarrow 4y(x^2-x) = (x^2-x+y)^2 \Leftrightarrow (x^2-x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = x^2-x$$

Thay vào (1) ta được: $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} = x^2-x+2$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x-1} &\leq \frac{x^2+x-1+1}{2} = \frac{x^2+x}{2} \\ \sqrt{-x^2+x+1} &\leq \frac{-x^2+x+1+1}{2} = \frac{-x^2+x+2}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Cộng vế ta được: } x^2-x+2 \leq \frac{x^2+x}{2} + \frac{-x^2+x+2}{2} = x+1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow y=0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1; 0)$

Bài 25. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x\sqrt{x} + xy^2 + \sqrt{x^2-y} = 2\sqrt{x(y+1)} + y^2\sqrt{y+1} + 1 & (1) \\ \sqrt{2y-x+5} + y+1 = x + \sqrt{21x-17} & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ 2y-x+5 \geq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-\sqrt{y+1})(2\sqrt{x}+y^2) + (\sqrt{x^2-y}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2\sqrt{x}+y^2)(x^2-y-1)}{x+\sqrt{y+1}} + \frac{x^2-y-1}{\sqrt{x^2-y}+1} = 0 \Leftrightarrow (x^2-y-1) \left(\frac{2\sqrt{x}+y^2}{x+\sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-y}+1} \right) = 0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow x^2 = y + 1$$

Thay vào (2) ta được $\sqrt{2x^2 - x + 3} + x^2 - x - \sqrt{21x - 17} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - x + 3} - (x + 1) + x^2 - 3x + 2 + (3x - 1) - \sqrt{21x - 17} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 3} + x + 1} + \frac{9}{3x - 1 + \sqrt{21x - 17}} \right) = 0$$

$$\text{Do } x \geq \frac{17}{21} \Rightarrow x > \frac{1}{3} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 3} + x + 1} + \frac{9}{3x - 1 + \sqrt{21x - 17}} > 0$$

Suy ra phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Kết luận: Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x, y) = (1; 0), (2; 3)$

Bài 26. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + 8y^2 - 10x + 9y = y\sqrt{6(x+1)} - 5 & (1) \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{1}{y}\sqrt{x(y^2+1)} + \sqrt{-\frac{x(1+y)}{y}} & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$

Phương trình (2) tương đương với:
$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = -\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}} + \sqrt{-\frac{1+y}{y}}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \sqrt{-\frac{1+y}{y}} \right) - \left(\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}} + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{x+y}{xy}}{\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{-\frac{1+y}{y}}} - \frac{\frac{(x-y)(x+y)}{x^2 y^2}}{\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}} + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{-\frac{1+y}{y}}} + \frac{x-y}{\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}} + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} \right) = 0 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$$

Thay vào (2) ta được: $12x^2 - 19x + 5 = -x\sqrt{6(x+1)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x(12x^2 - 19x + 5) \geq 0 \\ (12x^2 - 19x + 5)^2 = x^2(6x+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x(12x^2 - 19x + 5) \geq 0 \\ (2x-1)(3x-5)(24x^2 - 25x + 5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{25 + \sqrt{145}}{48} \Rightarrow y = -\frac{25 + \sqrt{145}}{48} \end{cases}$$

Kết luận: Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x, y) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{25 + \sqrt{145}}{48}; -\frac{25 + \sqrt{145}}{48}\right)$

Bài 27. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} & (1) \\ (x+1)[y + \sqrt{xy} + x(1-x)] = 4 & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện: $x, y \geq 0$

Facebook cá nhân: <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Nhận thấy $x = y = 0$ không thỏa mãn (2) nên ta có $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$

Phương trình (1) tương đương với $\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + \sqrt{x} - y - \sqrt{y} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2) - y^2}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} + \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)(\sqrt{xy} - 2 + y)}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} + \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{\sqrt{xy} - 2 + y}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] = 0 \quad (3)$$

Ta có phương trình (2) tương đương với $y + \sqrt{xy} = \frac{4}{x+1} + x^2 - x$

$$\text{Ta có: } \frac{4}{x+1} + x^2 - x - 2 = \frac{4 + (x+1)(x^2 - x - 2)}{x+1} = \frac{(x+2)(x-1)^2}{x+1} \geq 0 \text{ với } x \geq 0$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{xy} - 2 + y \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{xy} - 2 + y}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0$$

$$\text{Nên (3)} \Leftrightarrow x = y \text{ thay vào (2) ta được } (x+1)(3x - x^2) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Kết luận: Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x, y) = (1, 1), \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}, \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right)$

Bài 28: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - y} \cdot \sqrt{x - y} = y \\ \sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{y-1} + \sqrt[4]{3-y} + 6(y+1)\sqrt{3x} = x^3 + 30 \end{cases}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài giải chi tiết

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - x - y \geq 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương với: $(\sqrt{x^2 - x - y} \cdot \sqrt[3]{x - y} - \sqrt{x^2 - x - y}) + (\sqrt{x^2 - x - y} - y) = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x - y} (\sqrt[3]{x - y} - 1) + (\sqrt{x^2 - x - y} - y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - x - y} (x - y - 1)}{\sqrt[3]{(x - y)^2} + \sqrt[3]{x - y} + 1} + \frac{(x - y - 1)(x + y)}{\sqrt{x^2 - x - y} + y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1) \left[\frac{\sqrt{x^2 - x - y}}{\left(\sqrt[3]{x - y} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - x - y} + y} \right] = 0 \Leftrightarrow x = y + 1$$

Thay vào (2) ta được: $\sqrt[4]{(x - 2)(4 - x)} + \sqrt[4]{x - 2} + \sqrt[4]{4 - x} + 6x\sqrt{3x} = x^3 + 30$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy ta có: } \begin{cases} \sqrt[4]{(x - 2)(4 - x)} \leq \sqrt{\frac{x - 2 + 4 - x}{2}} = 1 \\ 6x\sqrt{3x} = 2\sqrt{27x^3} \leq x^3 + 27 \\ \sqrt[4]{x - 2} = 1.1.1.\sqrt[4]{x - 2} \leq \frac{1 + 1 + 1 + x - 2}{4} = \frac{x + 1}{4} \\ \sqrt[4]{4 - x} = 1.1.1.\sqrt[4]{4 - x} \leq \frac{1 + 1 + 1 + 4 - x}{4} = \frac{7 - x}{4} \end{cases}$$

Từ các BĐT trên ta được: $\sqrt[4]{(x - 2)(4 - x)} + \sqrt[4]{x - 2} + \sqrt[4]{4 - x} + 6x\sqrt{3x} \leq x^3 + 30$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 3 \Rightarrow y = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (3; 2)$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 29: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)(\sqrt{2y+3}+1)+\sqrt{x+y+4}+1=0 \\ 2x^3+5x^2+4x+1=x(x+y+4)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện:
$$\begin{cases} y \geq -\frac{3}{2} \\ x+y+4 \geq 0 \\ x^2+\frac{1}{x} \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương với: $x-y+1+\sqrt{x+y+4}+(x-y)\sqrt{2y+3}=0$

$$\Leftrightarrow x-y+1+\sqrt{x+y+4}-\sqrt{2y+3}+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1+\frac{x-y+1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+(x-y+1)\sqrt{2y+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+y+4}+\sqrt{2y+3}}+\sqrt{2y+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$$

Thay vào (2) ta được: $2x^3+5x^2+4x+1=x(2x+5)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\frac{1}{x}+5x+4=(2x+5)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x}-2x\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}+x^2-5\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}+5x+4=0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \right)^2 - 5 \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x = 1 \\ \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{-4 - 3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ x = \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Bài 30: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+2y)(x-y-1) + \sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} = 0 & (1) \\ 3\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{2x+y-2} = 5\sqrt{x+5y+2} - 3 & (2) \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 4y^2 \geq 0 \\ x \geq \frac{2}{3} \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương với:

$$\begin{aligned} & (x+2y)(x-y) + \sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} - (x+2y) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) + \frac{x(x-y)}{\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + x + 2y} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-y) \left(x+2y + \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + x + 2y} \right) = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) ta có: $5\sqrt[3]{x+5y+2} \geq 3 \Rightarrow \sqrt[3]{x+5y+2} \geq \frac{3}{5} \Rightarrow x+5y+2 > 0$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Mà } 2x + y \geq 2 \Rightarrow (x + 5y + 2) + (2x + y) > 2 \Rightarrow 3(x + 2y) > 0 \Rightarrow x + 2y > 0$$

$$\text{Nên } (3) \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ thay vào (2) ta được: } 7\sqrt{3x-2} = 5\sqrt[3]{6x+2} - 3$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt[3]{6x+2}, b = \sqrt{3x-2} \ (a, b \geq 0) \text{ ta được:}$$

$$\begin{cases} 7b = 5a - 3 \\ a^3 - 2b^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5a-3}{7} \\ a^3 - 2\left(\frac{5a-3}{7}\right)^2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$

Bài 31: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\sqrt{2x^3 + 4x^2 + x^2y^2 + 2xy^2} + \sqrt{2x^2 + xy^2} = (2x + 4 + \sqrt{x+2})y \\ \frac{x-2}{y} + \sqrt{x-2} = \sqrt{8 - \frac{35}{y} + \frac{38}{y^2}} + \sqrt{8y-19} \end{cases}$$

Bài giải chi tiết

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq \frac{19}{8} \end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương với:

$$\begin{aligned} & 2\left[\sqrt{2x^3 + 4x^2 + x^2y^2 + 2xy^2} - (xy + 2y)\right] + \left(\sqrt{2x^2 + xy^2} - y\sqrt{x+2}\right) = 0 \\ & \frac{-4(y-x)(x+y)(x+2)}{\sqrt{2x^3 + 4x^2 + x^2y^2 + 2xy^2} + xy + 2y} + \frac{-2(y-x)(y+x)}{\sqrt{2x^2 + xy^2} + y\sqrt{x+2}} = 0 \end{aligned}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) \left[\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x^3+4x^2+x^2y^2+2xy^2+xy+2y}} + \frac{2}{\sqrt{2x^2+xy^2+y\sqrt{x+2}}} \right] = 0 \Leftrightarrow x=y$$

Thay vào (2) ta được: $\frac{x-2}{2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{8-\frac{35}{x}+\frac{38}{x^2}} + \sqrt{8x-19}$

$$\Leftrightarrow x-2+x\sqrt{x-2} = \sqrt{8x^2-35x+38} + x\sqrt{8x-19}$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{8x-19}-\sqrt{x-2}) + \sqrt{8x^2-35x+38} - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(7x-17)}{\sqrt{8x-19}+\sqrt{x-2}} + \frac{(x-2)(7x-17)}{\sqrt{8x^2-35x+38}+x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x-17) \left(\frac{x}{\sqrt{8x-19}+\sqrt{x-2}} + \frac{x-2}{\sqrt{8x^2-35x+38}+x-2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{17}{7} \text{ (do } x \geq 2) \Rightarrow y = \frac{17}{7}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{17}{7}; \frac{17}{7} \right)$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Câu 1: Giải HPT :
$$\begin{cases} (x^2 + 1)y^4 + 1 = 2xy^2(y^3 - 1) \\ xy^2(3xy^4 - 2) = xy^4(x + 2y) + 1 \end{cases}$$

Thế $1 = xy^2(3xy^4 - 2) - xy^4(x + 2y)$ vào PT (2) ta được

$$: y^4(1 + 3x^2y^2 - 4xy) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ xy = 1 \\ xy = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Thấy $y = 0$ không phải nghiệm của hệ

với $xy = 1 \Rightarrow y^2 + y^4 + 1 = 2y^4 - 2y \Leftrightarrow (y^2 - y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \\ y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{1 - \sqrt{5}} \end{cases}$$

với $xy = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y^2}{9} + y^4 + 1 = \frac{2y^4}{3} - \frac{2y}{3} \Leftrightarrow \frac{y^4}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{2y}{3} + 1 > 0 \forall y$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 2: Giải HPT :
$$\begin{cases} x + y^3 = 2xy^2 & (1) \\ x^3 + y^9 = 2xy^4 & (2) \end{cases}$$

$$PT(2) \Leftrightarrow (x + y^3)(x^2 - xy^3 + y^3) = 2xy^4$$

$$\Leftrightarrow 2xy^2(x^2 - xy^3 + y^3) = 2xy^4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x^2 - xy^3 + y^6 - y^2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow (x + y^3)^2 - 3xy^3 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4xy^4 - 3xy^3 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ xy = 1 \\ xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Với } xy=1 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$(1) \Leftrightarrow y^4 - 2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Với } xy = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4y}$$

$$(1) \Leftrightarrow 4y^4 + 2y^2 - 1 = 0$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2} \Rightarrow x = \mp \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5}-1}}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = (0;0), (\pm 1; \pm 1), \left(\mp \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5}-1}}; \pm \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2} \right)$

Câu 3. Giải HPT :
$$\begin{cases} 6x^4 - (x^3 - x)y^2 - (y+12)x^2 + 6 = 0 \\ 5x^4 - (x^2 - 1)^2 y^2 - 11x^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x^2 - 1)^2 = xy^2(x^2 - 1) + x^2 y \\ 5(x^2 - 1)^2 = x^2 + (x^2 - 1)^2 y^2 \end{cases}$$

Dễ thấy $x=y=0$ không phải là nghiệm của hệ.

Ta có:
$$\begin{cases} 6 \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 y^2} = \frac{x^2 - 1}{x} + \frac{1}{y} \\ 5 \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 y^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} \end{cases} \quad (*)$$

Đặt
$$\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \end{cases} \quad (a, b \neq 0)$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} 6a^2b^2 = a + b \\ 5a^2b^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 36a^4b^4 = 2ab + 5a^2b^2 \Leftrightarrow ab = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } ab = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{xy} = \frac{1}{2}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{y}{2} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; 1 \right), \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 2 \right)$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 4: Giải HPT:
$$\begin{cases} (4x^2 - 4xy + 4y^2 - 51)(x - y)^2 + 3 = 0 \\ (2x - 7)(x - y) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [3(x - y)^2 + (x + y)^2 - 51](x - y)^2 + 3 = 0 \\ [(x + y) + (x - y) - 7](x - y) + 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b^4 + a^2b^2 - 51b^2 + 3 = 0 \\ (a + b - 7) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-b^2 + 7b - 1}{b} \\ (b^2 - 4b + 1)(2b^2 - b + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} b = 2 + \sqrt{3} \\ a = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 2 - \sqrt{3} \\ a = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Câu 5: Giải HPT:
$$\begin{cases} 3x^3 + 5y^3 - 2xy = 6 \\ 2x^3 + 3y^3 + 3xy = 8 \end{cases}$$

Rút lần lượt x^3, y^3 theo xy ta được:

$$\begin{cases} x^3 = 22 - 21xy \\ y^3 = 13xy - 12 \end{cases} \Rightarrow x^3y^3 = (22 - 21xy)(13xy - 12) \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^3 + 5y^3 = 8 \\ 2x^3 + 3y^3 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y = 1$$

Đoạn giải PT bậc 3 ẩn xy có 2 nghiệm rất lẻ không biết có phải do đề không ạ...

Facebook cá nhân: <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 6: Giải HPT:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2(x^2 + y^2) & (1) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = y^2 - x^2 & (2) \end{cases}$$

ĐK: $x, y \neq 0$

$$(1) - (2) \Rightarrow y^3 + 3x^2y = 1$$

$$(1) + (2) \Rightarrow x^3 + 3xy^2 = 2$$

Ta có hệ mới:
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 2 \\ y^3 + 3x^2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = 3 \\ (x-y)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt[3]{3} \\ x-y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{2} \\ y = \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2} \end{cases}$$

Câu 7: Giải HPT:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = (x-y)^4 \\ x^2 - xy + y^2 = x-y \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = b^4 \\ \frac{a^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = b \end{cases}$$

$$\text{Thế ta được: } b^4 - \frac{b^2}{4} - 3b + \frac{9b^2}{4} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 2b^2 - 3b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 8: Giải HPT :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{3}{2y} - \frac{1}{x} \\ (x + y)^3 = 5 \end{cases} \quad (1)$$

ĐK: $x, y \neq 0$

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = \frac{x - y}{xy} + \frac{1}{2y}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Đặt } \begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = b - a \\ xy = \frac{b^2 - a^2}{4} \end{cases}$$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} ab = \frac{4a}{b^2 - a^2} + \frac{1}{b - a} \\ b^3 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 a - a^3 b = 5a + b \\ b^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a^3 b + b = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[3]{5} \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{2} \\ y = \frac{\sqrt[3]{5} + 1}{2} \end{cases}$$

Câu 10: Giải HPT :

$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 3} = 3 \\ 2x + y + \frac{1}{y} = 8 \end{cases}$$

ĐK: $x + \frac{1}{y} \geq 0$, $x + y \geq 3$, $y \neq 0$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} = a \\ \sqrt{x + y - 3} = b \end{cases} \quad a, b \geq 0$$

$$\text{Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} a + b = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \sqrt{10} \\ y = 3 + \sqrt{10} \\ x = 4 + \sqrt{10} \\ y = 3 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Câu 11: Giải HPT

$$\begin{cases} \frac{x}{x^2 - y} + \frac{5y}{x + y^2} = 4 & (1) \\ 5x + y + \frac{x^2 - 5y^2}{xy} = 5 & (2) \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{ĐK: } x^2 - y \neq 0, x + y^2 \neq 0, xy \neq 0$$

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow x^2 - 5y^2 + xy^2 + 5x^2y = 4(x^2 - y)(x + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} - \frac{5y}{x} + y + 5x = 4\left(x - \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y} + y\right)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} y + \frac{x}{y} = a \\ x - \frac{y}{x} = b \end{cases} \quad \text{Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} a + 5b = 5 \\ a + 5b = 4ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \frac{x}{y} = \frac{5}{2} \\ x - \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 2x = 5y \\ 2x^2 - 2y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3(x - y) - 2(x - y)(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{3}{2} \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \quad (*) \quad (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 12 : Giải HPT :
$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}$$

Đặt
$$\begin{cases} a = \sqrt{2x+y} \\ b = \sqrt{7x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = b^2 - a^2 \\ 5y = 7a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

Ta có hệ mới :

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 5a + b^2 - a^2 - (7a^2 - 2b^2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 3(5-a)^2 - 8a^2 + 5a = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 5 - a \\ a = \frac{-5 + \sqrt{77}}{2} \\ b = 5 - a \\ a = \frac{-5 - \sqrt{77}}{2} \end{cases} \quad (\text{Bài này không hiểu sao ra lẻ vậy})$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 13:
$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ (1-x)(1+y) = 2 \end{cases}$$

ĐK: $\sqrt{1-x^2} \geq 0, \sqrt{1-y^2} \geq 0$

PT(1): $\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \leq \sqrt{(x^2+1-x^2)(1-y^2+y^2)} = 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x^2}{1-y^2} = \frac{y^2}{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Với $x = y$ thay vào PT(2) không thỏa mãn.

Với $x^2 + y^2 = 1$

PT(2) $\Leftrightarrow x - y + xy + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2y^2 + 2xy + 1 = 1 - 2xy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ xy = -4 \end{cases}$ Ta giải được $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ thỏa mãn hệ.

Câu 13:
$$\begin{cases} \sqrt{3x-2y} + 3\sqrt{8+x-y} = 10 \\ \sqrt{8+x-y} - 2\sqrt{4-2x+y} = 1 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x-2y} = a \\ \sqrt{8+x-y} = b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{4-2x+y} = \sqrt{b^2 - a^2 - 4}$. Ta có hệ mới :



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\begin{cases} a + 3b = 10 \\ b - 2\sqrt{b^2 - a^2 - 4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 - 3b \\ b - 1 = 2\sqrt{b^2 - (10 - 3b)^2 - 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 - 3b \\ b = \frac{121 + 4\sqrt{55}}{33} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 10 - 3b \\ b = \frac{121 - 4\sqrt{55}}{33} \end{cases}$$

(Lại một bài lẻ khủng khiếp...)

Câu 14: Giải HPT:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 6} = y + 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

PT(1) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 6 = y^2 + 2y + 1$ (3)

Lấy (3) - (2) $= 2y^2 + (x + 2)y - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(2y + x + 6) = 0$

Với $y = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

Với $x = -2y - 6 \Rightarrow (2y + 6)^2 - (2y + 6)y + y^2 = 7 \Leftrightarrow 3y^2 + 18y + 29 > 0 \forall y$

Câu 15: Giải HPT
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(x + y) = 4y \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) = y \end{cases}$$

Thấy $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2+1}{y}\right) + x + y = 4 \\ \left(\frac{x^2+1}{y}\right)(x+y-2) = 1 \end{cases} \quad \text{Đặt} \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = a \\ x+y = b \end{cases}$$

$$\text{Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} a+b=4 \\ a(b-2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=-2 \\ y=5 \end{cases}$$

Câu 16: Giải HPT:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6} - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x - 2y + 5 = 0 \\ (x+y)^2 = 7 + xy \end{cases} \quad \text{Đặt} \begin{cases} x-y=a \\ x+y=b \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{b^2 - a^2}{4}$$

$$\text{Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} ab + 2a + 5 = 0 \\ 3b^2 + a^2 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{b+2} \\ 3b^2 + \frac{25}{b^2+4b+4} = 28 \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{b+2} \\ (b^2 - 2b - 3)(3b^2 + 18b + 29) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Câu 17: Giải HPT:
$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=a \\ y-1=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab(a+b)=6 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab(a+b)=6 \\ (a+b)^2-2ab=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36-2a^3b^3-5a^2b^2=0 \\ ab(a+b)=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=1 \\ b=1 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 18:
$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x-1 = a \\ y-1 = b \end{cases}$, hệ đã cho trở thành:
$$\begin{cases} ab(a+b) = 6 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = \frac{36}{a^2b^2} \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow ab = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 = 2 \\ y-1 = 1 \end{cases} \begin{cases} x-1 = -2 \\ y-1 = -1 \end{cases} \begin{cases} x-1 = 1 \\ y-1 = 2 \end{cases} \begin{cases} x-1 = -1 \\ y-1 = -2 \end{cases}$$

Câu 19 : Giải HPT :
$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 1 \\ \frac{9x^2}{2(1-x)^4} = 1 + \frac{3xy}{2(1-x)^2} \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ không phải nghiệm của HPT $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1-2x^2}{x}$. Thế vào PT2 ta

được :

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\frac{9x^2}{2(1-x)^4} = 1 + \frac{3(1-2x^2)}{2(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 = 2(1-x)^4 + 3(1-2x^2)(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 4x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow y = 2 \\ x = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Câu 20 : Giải HPT :
$$\begin{cases} x^3y + x^3 + xy + x = 1 \\ 4x^3y^2 + 4x^3 - 8xy - 17x = -8 \end{cases}$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy + x)(x^2 + 1) = 1 \\ 4x(xy + x)^2 - 8xy(x^2 + 1) - 17x = -8 \end{cases}$$

$$\text{Đặt} \begin{cases} xy + x = a \Rightarrow xy = a - x \\ x^2 + 1 = b \end{cases}$$

$$\text{Hệ trở thành : } \begin{cases} ab = 1 \\ 4a^2 + 8b - 17 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2a-1)(2a^2+2-8) = 0. \text{ Do } 0 < a = \frac{1}{b} \leq 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Rightarrow \begin{cases} xy + x = \frac{1}{2} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{-1}{2} \\ x = -1 \\ y = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Câu 21 : Giải HPT :
$$\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy - 3x = 0 \\ (x^2 + y)^2 + x^2y - 5x^2 = 0 \end{cases}$$

Thế $x^2 + y = 3x - xy$ vào PT2 ta được

$$9x^2 + x^2y^2 - 6x^2y + x^2y - 5x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2 - 5y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = 4 \Rightarrow x^2 + x + 4 = 0(L) \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 22 : Giải HPT :
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 - \frac{2x}{y} = 4 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = a \\ \frac{x}{y} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1 \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow$ giải PT bậc nhất cơ bản

Câu 23 : Giải HPT :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{3}{2y} - \frac{1}{x} \\ (x + y)^3 = 5 \end{cases}$$

PT(1) $\Leftrightarrow (x + y)(x - y) = \frac{3x - 2y}{2xy}$. Thế PT(2) vào PT(1) ta được :

$$\frac{5(x - y)}{(x + y)^2} = \frac{6x - 4y}{4xy} = \frac{5(x - y) - (6x - 4y)}{(x + y)^2 - 4xy} = \frac{-(x + y)}{(x - y)^2}$$

$$\Rightarrow 5(x - y)^3 = -(x + y)^3 = -5 \Rightarrow x - y = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = \sqrt[3]{5} \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 24 : Giải HPT :
$$\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases}$$

Đặt : $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$. Đặt kì diệu :

$$c^3 = 3 \Rightarrow a^3 b^3 = 3 = c^3 \Rightarrow ab = c \text{ . Khi đó :}$$

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = ab \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right]$$

$$= 2x - y = a + b - \frac{a-b}{2} = \frac{a+3b}{2} = \frac{a+c^3b}{2}$$

$$\Rightarrow PT(1) \Leftrightarrow ab \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right) = \frac{a+c^3b}{2} \Leftrightarrow c(a^2 + b^2) = a + c^3b$$

Ta có hệ mới :
$$\begin{cases} c(a^2 + b^2) = a + c^3b \\ ab = c \Rightarrow b = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c \left(a^2 + \frac{c^2}{a^2} \right) = a + \frac{c^4}{a} \Leftrightarrow (ac - 1) \left(a - \frac{c^3}{a^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ac = 1 \\ a = c \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{với } a = c : \Rightarrow \begin{cases} a = c = \sqrt[3]{3} \\ ab = c \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[3]{3} \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{với } ac = 1 : \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ b = c^2 = \sqrt[3]{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ x - y = \sqrt[3]{9} \end{cases}$$

Câu 25 : Giải HPT :

$$\begin{cases} \frac{2xy + y\sqrt{x^2 - y^2}}{14} = \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3} = 9 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} = a \\ \sqrt{\frac{x-y}{2}} = b \end{cases} \quad (a^3 + b^3 = 9 \Rightarrow a + b > 0; a, b \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = x \\ a^2 - b^2 = y \end{cases}$. Khi đó

hệ trở thành :

$$\begin{cases} \frac{2(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)2ab}{14} = a + b \\ a^3 + b^3 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)[2(a^3 - b^3) - 14] = 0 \\ a^3 + b^3 = 9 \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 7 \\ a^3 + b^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 8 \\ b^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Câu 26 : Giải HPT :
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 2 \\ \frac{72xy}{x-y} + 29\sqrt[3]{x^2 - y^2} = 4 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$. Hệ trở thành :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{a+b}{2} + 1} + \sqrt{\frac{a-b}{2} + 1} = 2 \\ \frac{18(a^2 - b^2)}{b} + 29\sqrt[3]{ab} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a+2)^2 - b^2} = 2 - a \\ \frac{18(a^2 - b^2)}{b} + 29\sqrt[3]{ab} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = b^2 \\ 9b^3 - 112b - 128 = 0 \\ a \leq 2 \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ b = \frac{-4}{3} \Rightarrow a = \dots \Rightarrow x = \dots; y = \dots \\ b = \frac{-8}{3} \end{cases}$$

Câu 26 : Giải HPT :
$$\begin{cases} x^2 y^2 + 2y^2 + 4 = 7xy \\ x^2 + 2y^2 + 6y = 3xy^2 \end{cases}$$

Để thấy $y = 0$ không phải nghiệm của hệ . Khi đó hệ tương đương :

$$\begin{cases} x^2 - \frac{7x}{y} + 2 + \frac{4}{y^2} = 0 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 + 3\left(\frac{2}{y} - x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{y} - x\right)^2 - \frac{3x}{y} + 2 = 0 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 + 3\left(\frac{2}{y} - x\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{2}{y} - x = a \\ \frac{x}{y} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 3b + 2 = 0 \\ b^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(a-b-3) = 0$$

$$\text{Với } a+b=0 \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = 1 \\ a = -2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } a-b=3 \Rightarrow a^2 - 3a + 11 = 0 \text{ (Loại)}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 27 : Giải HPT :
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3y - 1 \\ x^3 + x^2y = x^2 - x + 1 \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ không phải nghiệm của hệ .

$$\Rightarrow x \cdot (1) - (2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy^2 - 3xy + 1 = 0 \quad (3)$$

Lấy (3) - (1) ta được : $xy^2 - y^2 - 4xy + 3y = 0$

Xét thấy $x = 1$ không phải nghiệm của hệ $\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{4x-3}{x-1} \end{cases}$

Với $y = 0$ thay vào không thỏa mãn hệ .

Với $y = \frac{4x-3}{x-1}$ thay vào (2) ta được :

$$(x^2 + x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow y = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow y = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Câu 28 : Giải HPT :
$$\begin{cases} (x+y+3)\sqrt{x-y} + 2y+4=0 \\ (x-y)(x^2+4)=y^2+1 \end{cases}$$

$$PT(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-y}+1)(x+y+4-\sqrt{x-y})=0 \Rightarrow \sqrt{x-y}=x+y+4$$

Thế $4 = \sqrt{x-y} - x - y$ vào PT(2) ta được :

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2 + \sqrt{x-y} - x - y) &= y^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2(x-y-1) + (\sqrt{x-y})^3 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y-1)\left(x^2 + \frac{x-y+\sqrt{x-y}+1}{\sqrt{x-y}+1}\right) &= 0\end{aligned}$$

Ta được hệ mới:
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=\sqrt{x-y}-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Câu 29: Giải HPT:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y = 0 \\ x^3 + 3xy + 2\sqrt{y+1}(x + \sqrt{x^2y+2}) = 4 \end{cases}$$

Thế $x^2 + y = -2xy$ vào PT(2) ta được:

$$\begin{aligned}-2x^2y - x^2 - y + 2x\sqrt{y+1} + 2\sqrt{y+1}\sqrt{x^2y+2} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x\sqrt{y+1} - 1)^2 + (\sqrt{x^2y+2} - \sqrt{y+1})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{y+1} = 1 \\ \sqrt{x^2y+2} = \sqrt{y+1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(y+1) = 1 \\ x^2y + 2 = y + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y + 2 = 3 - x^2 \\ x^2y + 2 = y + 1 \end{cases} \\ \Rightarrow x^2 + y = 2 \Rightarrow xy = -1 \end{aligned}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dễ thấy $x = 0$ không phải nghiệm của hệ $\Rightarrow y = \frac{-1}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{x} = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow y = \frac{-2}{\sqrt{5}+1} \\ x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow y = \frac{2}{1-\sqrt{5}} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện $\Rightarrow (x; y) = (-1; 1); (\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{-2}{\sqrt{5}+1})$

Câu 30 : Giải HPT :
$$\begin{cases} (2x-1)\sqrt{x+y} = (6-x-y)\sqrt{2-x} \\ 3x^2 - 4xy - 7y^2 = -72 \end{cases}$$

Xét thấy $x = 2 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = 0 \Rightarrow y = -2$ không thỏa PT(2)

$$\Rightarrow \sqrt{x+y}, \sqrt{2-x} > 0$$

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow \frac{6-(x+y)}{\sqrt{x+y}} = \frac{6-(8-4x)}{\sqrt{8-4x}}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{6-t^2}{t} \Rightarrow f'(t) = \frac{-6}{t^2} - 1 < 0$ suy ra hàm số nghịch biến

$$\text{Mà } f(\sqrt{x+y}) = f(\sqrt{8-4x}) \Leftrightarrow x+y = 8-4x \Leftrightarrow y = 8-5x$$

Thế vào PT(2) giải PT bậc 2 cơ bản.

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 31 : Giải HPT :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ 2(x^3 + y^3) + 6x^2 = 3(x^2 + y^2) + 5 \end{cases}$$

Ta có $2x(1) - (2) = 2y^3 - 2xy^2 + 2x^2 = 3(x^2 + y^2) + 5 - 6x$

$$\Leftrightarrow y^2(2y - 2x - 3) = (x - 1)(x - 5)$$

Mà

$$y^2 = 3 - x^2 - 2x = (1 - x)(3 + x) \Rightarrow (x - 1)(x + 3)(2y - 2x - 3) = (x - 1)(5 - x)$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 0$

với $(x + 3)(2y - 2x - 3) = (5 - x) \Rightarrow y = \frac{5 - x}{2(x + 3)} + x + \frac{3}{2} = \frac{x^2 + 4x + 7}{x + 3}$

Thế vào PT(1) ta được :

$$x^2 + 2x + \left(\frac{x^2 + 4x + 7}{x + 3} \right)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x)(x + 3)^2 + (x^2 + 4x + 7)^2 = 3(x + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x^2 + 6x + 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$

Câu 32 : Giải HPT :
$$\begin{cases} x^2 + xy + x + 3 = 0 \\ y(x + 3) + x + 1 = 2\sqrt{x^2 y + 2y} \end{cases}$$

Lấy $(1) - (2) = x^2 + 2 - 3y + 2\sqrt{x^2 y + 2y} = 0$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{y})(\sqrt{x^2 + 2} + 3\sqrt{y}) = 0$$

$$\Rightarrow y = x^2 + 2$$

Thế vào PT(1) ta được : $x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 3$

Câu 33 : Giải HPT :
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(1 + \frac{1}{x^2 y^2}) = 5 \\ (xy - 1)^2 = x^2 - y^2 + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + \frac{1}{x})^2 + (y - \frac{1}{y})^2 = 5 \\ (x^2 + 1)(y^2 - 1) = 2xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + \frac{1}{x})^2 + (y - \frac{1}{y})^2 = 5 \\ (x + \frac{1}{x})(y - \frac{1}{y}) = 2 \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = a \\ y - \frac{1}{y} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ ab = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \\ b = -2 \\ a = -1 \\ b = 1 \\ a = 2 \\ b = -1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Xét từng TH giải x, y đơn giản.

Câu 34: Giải HPT:
$$\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 + 9xy = 0 \\ (x^2+1)(y^2+1) + 10xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2+\frac{1}{x})(y+2+\frac{1}{y}) = -9 \\ (x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}) = -10 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = a \\ y + \frac{1}{y} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+2)(b+2) = -9 \\ ab = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -3 \\ ab = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -5 \\ b = -5 \\ a = 2 \end{cases}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Do vai trò của x, y là như nhau nên ta xét 1 TH của cặp a, b rồi hoán đổi lại.

Câu 35 : Giải HPT :
$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{x^2+7} + y\sqrt{2y^2+1} = xy + 2y^2 \\ 2x\sqrt{x^2+7} + (x+y)\sqrt{2y^2+1} = 3xy - x^2 \end{cases}$$

Ta thấy $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ thỏa mãn là một cặp nghiệm của hệ

Xét $x^2 + y^2 > 0$

Dùng định thức ta có :

$$\begin{cases} D = x^2 + y^2 \\ D_x = 2y(x^2 + y^2) \\ D_y = -x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = 2y \\ y = \frac{D_y}{D} = -x \end{cases} \Leftrightarrow x = -2x \Rightarrow x = y = 0 \text{ (Loại)}$$

Kết hợp $\Rightarrow (x; y) = (0; 0)$ là nghiệm duy nhất

Câu 36 : Giải HPT :
$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{2xy+5} = 4xy - 3y + 1 \\ (x+2y)\sqrt{2xy+5} = 6xy + x - 7y - 6 \end{cases}$$

Xét hệ mới :
$$\begin{cases} 2.(1) - (2) \\ 3.(1) - 2.(2) \end{cases}$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\begin{cases} x - y - 3 = (2xy - 5) - x\sqrt{2xy + 5} \\ (x - y)\sqrt{2xy + 5} = 5y - 2x + 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = (2xy - 5) - x\sqrt{2xy + 5} \\ (x - y - 3)(\sqrt{2xy + 5} + 5) = 3(x - \sqrt{2xy + 5}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2xy + 5 - x\sqrt{2xy + 5})(\sqrt{2xy + 5} + 5) = 3(x - \sqrt{2xy + 5})$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2xy + 5})(2xy + 5 + 5\sqrt{2xy + 5} + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2xy + 5} \\ 2xy + 5 + 5\sqrt{2xy + 5} + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Có } 2xy + 5 + 5\sqrt{2xy + 5} + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2xy + 5} \Rightarrow xy = \frac{x^2 - 5}{2} \text{ .Thế vào PT(1) ta được}$$

$$x^2 + \frac{x^2 - 5}{2} = 2(x^2 - 5) - \frac{3(x^2 - 5)}{2x} + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3(L) \\ x = 5 \Rightarrow y = 2 \\ x = 1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Câu 37 : Giải HPT :
$$\begin{cases} y^2 + x + xy - 6y + 1 = 0 \\ xy^3 + x^2y + x - 8y^2 = 0 \end{cases}$$



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Lấy } (1) - (2) = xy(y^2 + x - 1) = (3y - 1)^2$$

Lại có $xy + (x + y^2 - 1) = 2(3y - 1) \Rightarrow xy, (y^2 + x - 1)$ là 2 nghiệm của PT

$$X^2 - 2(3y - 1)X + (3y - 1)^2 = 0 \Rightarrow X = 3y - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 3y - 1 \\ x + y^2 - 1 = 3y - 1 \end{cases}$$

Thấy $y = 0$ không phải nghiệm của hệ.

Thế $x = \frac{3y - 1}{y}$ vào PT(2) ta được :

$$\frac{3y - 1}{y} + y^2 = 3y \Leftrightarrow y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 4$$

Câu 38 : Giải HPT :
$$\begin{cases} 3x - y + \frac{3x + y}{x^2 - y^2} = 8 \\ 3x + y + \frac{3x - y}{x^2 - y^2} = 7 \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b^2a + a^2b + 2a + b = 8ab \\ 2a^2b + ab^2 + 2b + a = 7ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(b^2 + 1) + b(a^2 + 1) = 8ab \\ 2b(a^2 + 1) + a(b^2 + 1) = 7ab \end{cases}$$

($ab \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{2a(b^2 + 1) + b(a^2 + 1)}{2b(a^2 + 1) + a(b^2 + 1)} = \frac{8}{7} \Rightarrow 2a(b^2 + 1) = 3b(a^2 + 1)$$

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\text{Mà có } 3a(b^2 + 1) + 3b(a^2 + 1) = 15ab$$

$$\Rightarrow 5a(b^2 + 1) = 15ab \Rightarrow b^2 - 3b + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ b = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{với } b = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a^2 + 1 = 2a \cdot \frac{b^2 + 1}{3b} = 2a \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{với } b = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a^2 + 1 = 2a \cdot \frac{b^2 + 1}{3b} = 2a \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH , PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM KÉP
ĐÁNH GIÁ PHẦN SAU BẰNG CASIO

THẦY QUANG BABY

Bài 1 : $2x^2 - 3x - 2 = x\sqrt{2x-5} + 2(x-2)\sqrt{2x-2}$

Bài 2 : $x\sqrt{2x-5} + 2(x-2)\sqrt{2x-2} = x^3 - 7x^2 + 24x - 29$

Bài 3 : $5x\sqrt{2x+5} - (x-1)\sqrt{3x^2-3} \geq 32x^2 + 114x + 99(1)$

BÀI 2 : $2x^2 + \sqrt{5x+6} + \sqrt{7x+11} \geq 4x+9$, Điều kiện : $x \geq -\frac{6}{5}$

Bước 1 , dò nghiệm ta được 2 nghiệm : $x = 2$, $x = -1$.

$$2x^2 + \sqrt{5x+6} + \sqrt{7x+11} \geq 4x+9$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x - 2) - \left[x+2 - \sqrt{5x+6} \right] - \left[x+3 - \sqrt{7x+11} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left[2 - \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}} - \frac{1}{x+3+\sqrt{7x+11}} \right] \geq 0$$

Bước 2 , ta chứng minh biểu thức trong ngoặc luôn dương

Ta đặt : $f(x) = \left[2 - \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}} - \frac{1}{x+3+\sqrt{7x+11}} \right]$

Chứng minh $f(x) \geq 0$, bằng việc sử dụng casio , chức năng Table như sau :

Nhập mode , 7 , $g(x) = \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}$, start -6/5 , end 5 , step 0,2 thấy g(x) lớn hơn 1,25 , vậy ta tách

biểu thức $\frac{5}{4} - \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}} > 0$, còn lại ta có $\frac{3}{4} - \frac{1}{x+3+\sqrt{7x+11}}$

Việc còn lại các em biến đổi tương đương thôi .

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bước 3 : Kết luận : $(x^2 - x - 2) \left[2 - \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}} - \frac{1}{x+3+\sqrt{11x+7}} \right] \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$

Nghiệm : $-1.25 \leq x \leq -1$ hoặc $x > 2$

Video hướng dẫn : <https://www.youtube.com/watch?v=fGcVf77I-9g>

Giải bài 3 : Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 1 \\ -2.5 \leq x \leq -1 \end{cases}$

CHÚNG TA GIẢI MỘT BPT CŨNG GIỐNG NHƯ GIẢI MỘT PHƯƠNG TRÌNH , GỒM CÁC BƯỚC SAU :

Bước 1 : Casio ta tìm được nghiệm kép , các em bấm Shift + Cal thì sẽ thấy Error , nhưng thực tế không phải là vô nghiệm , các em thử nhét : Mode , 7 , $f(x) = VT - VP$, Start -2,5 , end -1 , step 0,2 . Các em sẽ thấy $x = -2$ thì $f(x) = 0$ và không đổi dấu , vậy ta sẽ có $f(x) = 0$ có nghiệm kép

BƯỚC 1: DÒ NGHIỆM : Dùng casio phát hiện ra nghiệm kép (qua chức năng Table) : $x = -2$

Tiếp đến chúng ta tạo liên hợp cho các căn : $\sqrt{2x+5} = ax + b$: sử dụng điều kiện để 2 đường tiếp xúc :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ xét tại điểm có } x = -2 \text{ ta có hệ : } \begin{cases} -2a + b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Vậy ta có được liên hợp : $\sqrt{2x+5} - (x+3)$, làm hoàn toàn tương tự ta sẽ có : $\sqrt{3x^2-3} + (2x+1)$

$$(1) \Leftrightarrow 5x(\sqrt{2x+5} - x - 3) - (x-1)(\sqrt{3x^2-3} + 2x+1) \geq 25(x^2 + 4x + 4)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) \left[\frac{5x}{\sqrt{2x+5} + x + 3} - \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-3} - 2x - 1} + 25 \right] \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \cdot f(x) \leq 0$$

$$f(x) = \frac{5x}{\sqrt{2x+5} + x + 3} - \frac{5x}{\sqrt{3x^2-3} - 2x - 1} + 25$$

BƯỚC 2 : XỬ LÝ BIỂU THỨC TRONG NGOẶC :

Facebook cá nhân : <https://www.facebook.com/quang.manngoc>



TUYỂN CHỌN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Xét : $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{2x+5} + x + 3} - \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-3} - 2x-1} + 25$, ta chứng minh nó luôn dương với mọi x thuộc tập

xác định

+) Đầu tiên ta khẳng định rằng : $x \geq 1$ thì $f(x) \geq 0$, chỗ này em cứ dùng table, mode 7, star 1, end 100, step 10 xem, sẽ thấy

+) Xét $-2.5 \leq x \leq -1$, dùng chức năng table ta thấy

$$f(x) = \frac{5x}{\sqrt{2x+5} + x + 3} - \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-3} - 2x-1} + 25 > 0 \text{ (bấm mode 7, nhập f(x), start -2,5, end -2, step$$

0,2)

Chọn riêng hàm $g(x) = -\frac{x-1}{\sqrt{3x^2-3} - 2x-1}$ (bấm mode 7, nhập f(x), start -2,5, end -2, step 0,2) thì ta

thấy $g(x) \geq -25$, vậy ta sẽ có $\frac{5x}{\sqrt{2x+5} + x + 3} + 25 > 0$, cái này các em dễ chứng minh bằng biến đổi

tương đương.

Vậy trên tập xác định thì $f(x) \geq 0$, vậy $(1) \Leftrightarrow (x+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -2$

Đáp số : $x = -2$