TÍCH PHÂN HÀM ẨN

MỤC LỤC

BÀI TẬP

DẠNG 1: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=1$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=\ln 4035$. **D.** $S=4$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ và $f(0)=1$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $3+\ln 15$. **C.** $2+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 5$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=2x+1$ và $f(1)=5$. Phương trình $f(x)=5$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tổng $S=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=4$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$; $f(-3)=0$; $f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

A. $P=3+\ln\frac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\frac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\frac{5}{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$; $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$. **B.** $1+\ln 80$. **C.** $1+\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}$. **D.** $1+\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$; $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $P=2+\ln\frac{3}{5}$. **B.** $P=1+\ln\frac{3}{5}$. **C.** $P=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **D.** $P=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Giá trị $T=f(-2)+f(0)+f(4)$ bằng:

A. $T=2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}$. **B.** $T=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **C.** $T=3+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **D.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2)=\dfrac{1}{15}$ và $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\dfrac{7}{15}$. **B.** $\dfrac{11}{15}$. **C.** $\dfrac{11}{30}$. **D.** $\dfrac{7}{30}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x)=12x+13$ và $f(0)=2$. Khi đó phương trình $f(x)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\dfrac{1}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng

A. $S=\dfrac{31}{2}$. **B.** $S=\dfrac{9}{2}$. **C.** $S=\dfrac{5}{2}$. **D.** $f(0).f(2)=1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\dfrac{5}{2}$, $M=3$.

C. $m=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m>e$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $0<m<e$. **D.** $1<m<e$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)\ne 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\dfrac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N})$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-1$. **B.** $a\in(-2017;2017)$. **C.** $\dfrac{a}{b}<-1$. **D.** $b-a=4035$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)\ne 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\dfrac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$.

C. $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$, $\forall x\ge 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f''(x).f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0 \\ f'(0)=0;\ f(0)=1 \end{cases}$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Câu 18: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+1}$. Khi đó hiệu $T=f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

Câu 19: Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}dt=\int\limits_0^1 f(x)dx$. Vậy $\int\limits_0^1 f(x)dx=6$.Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\frac{2}{3}$ và $\left[f'(x)\right]^2=(x+1).f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2613<f^2(8)<2614$. **B.** $2614<f^2(8)<2615$.

C. $2618<f^2(8)<2619$. **D.** $2616<f^2(8)<2617$.

Câu 20: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<f(5)<5$. **B.** $2<f(5)<3$.

C. $3<f(5)<4$. **D.** $1<f(5)<2$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

DẠNG 2: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, GIẢI HỆ TÍCH PHÂN

Câu 23: Cho $\int\limits_2^5 f(x)dx=10$. Kết quả $\int\limits_5^2\left[2-4f(x)\right]dx$ bằng:

A. 34. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 32.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int\limits_0^9 f(x)dx=9$ và $F(0)=3$. Tính $F(9)$.

A. $F(9)=-6$. **B.** $F(9)=6$. **C.** $F(9)=12$. **D.** $F(9)=-12$.

Câu 25: Cho $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$. Khi đó $J=\int\limits_0^2\left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 26: Cho $\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=10$ và $\int\limits_2^4 g(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_2^4\left[3f(x)-5g(x)\right]\mathrm{d}x$

A. $I=5$. **B.** $I=15$. **C.** $I=-5$. **D.** $I=10$.

Câu 27: Giả sử $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=37$ và $\int\limits_9^0 g(x)\mathrm{d}x=16$. Khi đó, $I=\int\limits_0^9\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=26$. **B.** $I=58$. **C.** $I=143$. **D.** $I=122$.

Câu 28: Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x=-1$ thì $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 29: Cho $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x=-2$. Giá trị của $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int\limits_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $P=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_6^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P=7$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=4$. **D.** $P=10$.

Câu 31: Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=4$, khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=$?

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$; $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=8$. **B.** $I=12$. **C.** $I=36$. **D.** $I=4$.

Câu 33: Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int\limits_{-1}^2\left[x+2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{11}{2}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{17}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

Câu 34: Biết $\int\limits_1^8 f(x)\mathrm{d}x=-2$; $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=3$; $\int\limits_1^4 g(x)\mathrm{d}x=7$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_4^8 f(x)\mathrm{d}x=1$. **B.** $\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=10$.

C. $\int\limits_4^8 f(x)\mathrm{d}x=-5$. **D.** $\int\limits_1^4\left[4f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x=-2$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$, $f(-1)=3$ và $\int\limits_{-1}^3 f'(x)\mathrm{d}x=10$ giá trị của $f(3)$ bằng

A. -13. **B.** -7. **C.** 13. **D.** 7.

Câu 36: Cho $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int_0^2 \left(f(x)+1\right)\mathrm{d}x$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 37: Cho $y = f(x)$, $y = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và $\int_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int_0^2 g'(x).f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \left[f(x).g(x)\right]'\mathrm{d}x$.

A. $I = -1$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 1$.

Câu 38: Cho hai tích phân $\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_5^{-2} g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int_{-2}^{5}\left[f(x) - 4g(x) - 1\right]\mathrm{d}x$.

A. $I = -11$. **B.** $I = 13$. **C.** $I = 27$. **D.** $I = 3$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** -2.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0; 6] thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_2^4 f(x)dx = 6$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$.

A. $P = 4$.` **B.** $P = 16$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 10$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0; 1] và có $\int_0^1 \left[3 - 2f(x)\right]dx = 5$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 42: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn [0; 1], có $\int_0^1 f(x)dx = 4$ và $\int_0^1 g(x)dx = -2$. Tính tích phân $I = \int\left[f(x) - 3g(x)\right]dx$.

A. -10. **B.** 10. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f'(x)dx$.

A. $I = \ln\sqrt{2}$. **B.** $I = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **C.** $I = \ln 2$ **D.** $I = 2\ln 2$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1; ln3] và thỏa mãn $f(1) = e^2$, $\int_1^{\ln 3} f'(x)dx = 9 - e^2$. Tính $I = f(\ln 3)$.

A. $I = 9 - 2e^2$. **B.** $I = 9$. **C.** $I = -9$. **D.** $I = 2e^2 - 9$.

Câu 45: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [0; 1] và thỏa mãn $\int_0^1 f'(x).g(x)dx = 1$, $\int_0^1 f(x).g'(x)dx = -1$. Tính $I = \int_0^1\left[f(x).g(x)\right]' dx$.

A. $I = -2$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 2$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t)dt = x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=123$. **B.** $f(4)=\frac{2}{3}$. **C.** $f(4)=\frac{3}{4}$. **D.** $f(4)=\frac{1}{4}$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{f(x)} t^2.dt = x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=2\sqrt{3}$. **B.** $f(4)=-1$. **C.** $f(4)=\frac{1}{2}$. **D.** $f(4)=\sqrt[3]{12}$.

Câu 48: Cho hàm số $G(x)=\int_0^x t.\cos(x-t).dt$. Tính $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. **B.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **C.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. **D.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Câu 49: Cho hàm số $G(x)=\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}.dt$ $(x>0)$. Tính $G'(x)$.

A. $G'(x)=x^2.\cos x$. **B.** $G'(x)=2x.\cos x$. **C.** $G'(x)=\cos x$. **D.** $G'(x)=\cos x-1$.

Câu 50: Cho hàm số $G(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^2}dt$. Tính $G'(x)$.

A. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **B.** $\sqrt{1+x^2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **D.** $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$.

Câu 51: Cho hàm số $F(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\sin t^2.dt$ $(x>0)$. Tính $F'(x)$.

A. $\sin x$. **B.** $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. **C.** $\frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$. **D.** $\sin\sqrt{x}$.

Câu 52: Tính đạo hàm của $f(x)$, biết $f(x)$ thỏa $\int_0^x t.e^{f(t)}dt = e^{f(x)}$.

A. $f'(x)=x$. **B.** $f'(x)=x^2+1$. **C.** $f'(x)=\frac{1}{x}$. **D.** $f'(x)=\frac{1}{1-x}$.

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x.\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$

A. $f(\pi)=\frac{\pi-1}{4}$. **B.** $f(\pi)=\frac{\pi}{2}$. **C.** $f(\pi)=\frac{\pi}{4}$. **D.** $f(\pi)=\frac{1}{2}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I=\int_{-1}^{2}[f(x)+2x]\mathrm{d}x$, biết $F(-1)=1$ và $F(2)=4$.

A. $I=6$. **B.** $I=10$. **C.** $I=3$. **D.** $I=9$.

Câu 55: Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int_{-1}^{2}[x+2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{11}{2}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{17}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Câu 56: Cho $\int_1^2[3f(x)+2g(x)]\mathrm{d}x=1$, $\int_1^2[2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=-3$. Khi đó, $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{11}{7}$. **B.** $-\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{16}{7}$.

Câu 57: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)dx=5;\int_0^1 g(x)dx=7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int_{-1}^1 f(x)dx=10$. **B.** $\int_{-1}^1[f(x)+g(x)]dx=10$.

C. $\int_{-1}^1[f(x)-g(x)]dx=10$. **D.** $\int_{-1}^1 g(x)dx=14$.

Câu 58: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)dx=5$; $\int_0^1 g(x)dx=7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int_{-1}^1 f(x)dx=10$. **B.** $\int_{-1}^1[f(x)+g(x)]dx=10$.

C. $\int_{-1}^1[f(x)-g(x)]dx=10$. **D.** $\int_{-1}^1 g(x)dx=14$.

Câu 59: Nếu $\int_0^{10} f(z)dz=17$ và $\int_0^8 f(t)dt=12$ thì $\int_8^{10} -3f(x)dx$ bằng

A. -15. **B.** 29. **C.** 15. **D.** 5.

Câu 60: Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx=2$, $\int_{-1}^7 f(t)dt=9$. Giá trị của $\int_2^7 f(z)dz$ là

A. 11. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 61: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I=\int_0^3 f(x)dx=4$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\int_0^3\left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)dx$ là:

A. $4+12e$. **B.** $12+4e$. **C.** $3e+14$. **D.** $14+3e$.

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\begin{cases} f(0)=f'(0)=1; \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

Tính $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ là hàm bậc nhất thỏa mãn $\int_0^1(x+1)f'(x)dx=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=8$. **C.** $I=-12$. **D.** $I=-8$.

Câu 64: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{1}{x^3+x^5}$, $f\left(1\right)=a$ và $f\left(-2\right)=b$. Tính $f\left(-1\right)+f\left(2\right)$.

A. $f\left(-1\right)+f\left(2\right)=-a-b$. **B.** $f\left(-1\right)+f\left(2\right)=a-b$.
C. $f\left(-1\right)+f\left(2\right)=a+b$. **D.** $f\left(-1\right)+f\left(2\right)=b-a$.

Câu 65: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{1}{x^2+x^4}$, $f\left(1\right)=a$, $f\left(-2\right)=b$. Giá trị của biểu thức $f\left(-1\right)-f\left(2\right)$ bằng

A. $b-a$. **B.** $a+b$. **C.** $a-b$. **D.** $-a-b$.

Câu 66: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f\left(x\right)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'\left(x\right)=-e^x.f^2\left(x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f\left(\ln 2\right)$.

A. $f\left(\ln 2\right)=\frac{2}{9}$. **B.** $f\left(\ln 2\right)=-\frac{2}{9}$. **C.** $f\left(\ln 2\right)=\frac{2}{3}$. **D.** $f\left(\ln 2\right)=\frac{1}{3}$.

Câu 67: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f\left(x\right)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'\left(x\right)=\left(x.f\left(x\right)\right)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị $\left(C\right)$ là.

A. $y=6x+30$. **B.** $y=-6x+30$. **C.** $y=36x-30$. **D.** $y=-36x+42$.

Câu 68: Cho hàm số $y=f\left(x\right)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn: $g\left(x\right)=1+2018\int\limits_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$, $g\left(x\right)=f^2\left(x\right)$. Tính $\int\limits_0^1\sqrt{g\left(x\right)}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1011}{2}$. **B.** $\frac{1009}{2}$. **C.** $\frac{2019}{2}$. **D.** 505.

Câu 69: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $\left[-1;1\right]$, thỏa mãn $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)+2f\left(x\right)=0$. Biết $f\left(1\right)=1$, tính $f\left(-1\right)$.

A. $f\left(-1\right)=e^{-2}$. **B.** $f\left(-1\right)=e^3$. **C.** $f\left(-1\right)=e^4$. **D.** $f\left(-1\right)=3$.

Câu 70: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ đồng thời thỏa mãn $f'\left(0\right)=9$ và $9f''\left(x\right)+\left[f'\left(x\right)-x\right]^2=9$. Tính $T=f\left(1\right)-f\left(0\right)$.

A. $T=2+9\ln 2$. **B.** $T=9$. **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$. **D.** $T=2-9\ln 2$.

Câu 71: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right).f\left(x\right)=x^4+x^2$. Biết $f\left(0\right)=2$. Tính $f^2\left(2\right)$.

A. $f^2\left(2\right)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2\left(2\right)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2\left(2\right)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2\left(2\right)=\frac{323}{15}$.

Câu 72: Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $\left[1;4\right]$ thỏa mãn $x+2xf\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2,\forall x\in\left[1;4\right]$, $f\left(1\right)=\frac{3}{2}$. Giá trị $f\left(4\right)$ bằng:

A. $\frac{391}{18}$ **B.** $\frac{361}{18}$ **C.** $\frac{381}{18}$ **D.** $\frac{371}{18}$

Câu 73: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$ thỏa mãn $3f\left(x\right)+f'\left(x\right)=\sqrt{1+3.\mathrm{e}^{-2x}}$. Khi đó:

A. $e^3 f(1)-f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{e^2+3}}-\dfrac{1}{2}$. **B.** $e^3 f(1)-f(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^2+3}}-\dfrac{1}{4}$.

C. $e^3 f(1)-f(0)=\dfrac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$. **D.** $e^3 f(1)-f(0)=(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8$.

Câu 74: Cho hàm số f liên tục, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 75: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z},\, b\in\mathbb{N}^*)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Câu 76: Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn: $2f^2(x)=[F(x)-1]f'(x)$.

Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1,\, b=4$. **B.** $a=1,\, b=-1$. **C.** $a=1,\, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$. **D.** $a\in\mathbb{R},\, b\in\mathbb{R}$.

Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính $f(2)$

A. 5. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Câu 78: Cho $f(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $a\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a=3$. Tính $F(a)-10a^2+3a$.

A. $-\dfrac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\dfrac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

Câu 79: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-e^x.f^2(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0=\ln 2$ là

A. $2x+9y-2\ln 2-3=0$. **B.** $2x-9y-2\ln 2+3=0$.

C. $2x-9y+2\ln 2-3=0$. **D.** $2x+9y+2\ln 2-3=0$.

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]dx=2\int_0^1\sqrt{f'(x).f(x)}dx$. Tính $\int_0^1[f(x)]^3dx$.

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Câu 81: Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0)=0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[1;3]$ là

A. 22 **B.** $4\sqrt{11}+\sqrt{3}$ **C.** $20+\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{11}+\sqrt{3}$

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $(f'(x))^2=e^x f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e-1$. **C.** e^2-2. **D.** e^2-1.

Câu 83: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $-\frac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\frac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\frac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}-\frac{\ln 2}{2}$.

Câu 84: Cho hàm số $y=f(x)$. Có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=\mathrm{e}$ và $(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+4$. **B.** $4\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+1$. **C.** $2\mathrm{e}^3-2\mathrm{e}+2$. **D.** $4\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-4$.

Câu 85: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. **B.** $\frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{6}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Câu 86: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Câu 87: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1, 2] và thỏa mãn $f(x)>0$ khi $x\in[1,2]$. Biết $\int\limits_1^2 f'(x)dx=10$ và $\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=-10$. **B.** $f(2)=20$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=-20$.

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0)\neq 0$ với $\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\int\limits_4^8\frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}dx=1$ và $f(4)=\frac{1}{4}, f(8)=\frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1$ và $[f'(x)]^2=f''(x)$. Đặt $T=f(1)-f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2\le T<-1$. **B.** $-1\le T<0$. **C.** $0\le T<1$. **D.** $1\le T<2$.

Câu 90: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả $\begin{cases} f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}, \\ f(0)=f'(0)=1, \\ xy^2+y'^2=yy'', \forall x\in\mathbb{R}. \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2}<\ln f(1)<1$. **B.** $0<\ln f(1)<\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}<\ln f(1)<2$. **D.** $1<\ln f(1)<\frac{3}{2}$.

Câu 91: Cho f,g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 92: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, nếu $\int_a^d f(x)\mathrm{d}x=5$ và $\int_b^d f(x)\mathrm{d}x=2$ (với $a<d<b$) thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ bằng.

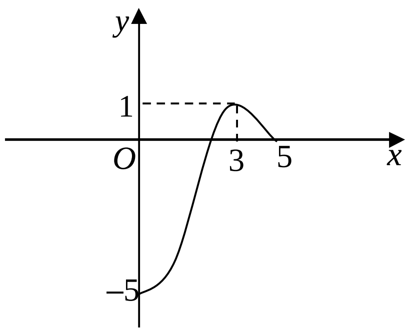
A. 3. **B.** 7. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 10.

Câu 93: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1;3]$, thỏa mãn:

$\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=10$ và $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_1^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$

A. $I=8$. **B.** $I=9$. **C.** $I=6$. **D.** $I=7$.

Câu 94: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0)=f(5)<f(3)$. **B.** $f(3)<f(0)=f(5)$.

C. $f(3)<f(0)<f(5)$. **D.** $f(3)<f(5)<f(0)$.

Câu 95: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x\in(0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện:

$f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x=-4$. Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(12;13)$. **D.** $(11;12)$.

Câu 96: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 97: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)e^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=e+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=e+2$.

Câu 98: Suy ra $4\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 99: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x\ \forall x>0$ và $f(1)=-1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

B. Phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

$$f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x=\frac{x^6-2x^3+2}{x^2}=\frac{\left(x^3-1\right)^2+1}{x^2}>0,\ \forall x>0.$$

$\Rightarrow y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$ (1).

Mặt khác ta có:

$$f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x>0,\ \forall x>0\Rightarrow\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x\ge\int\limits_1^2\left(x^4+\frac{2}{x^2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow f(2)-f(1)\ge\frac{21}{5}\Rightarrow f(2)\ge\frac{17}{5}.$$

Kết hợp giả thiết ta có $y=f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $f(2).f(1)<0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(1;2)$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)\in[-1;1]$ với $\forall x\in(0;2)$. Biết $f(0)=f(2)=1$. Đặt $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, phát biểu nào dưới đây đúng?

A. $I\in(-\infty;0]$. **B.** $I\in(0;1]$. **C.** $I\in[1;+\infty)$. **D.** $I\in(0;1)$.

Câu 101: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;\,1\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x = 0$ và $\max\limits_{[0;\,1]}\left|f\left(x\right)\right| = 1$. Tích phân $I = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty;\,-\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};\,\mathrm{e}-1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\,\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\mathrm{e}-1;\,+\infty\right)$.

Câu 102: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(0\right)=1$ và $3\int\limits_0^1\left[f'(x)\left[f\left(x\right)\right]^2+\frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x \le 2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)\right]^3\mathrm{d}x$:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Câu 103: Cho hai hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ có đạo hàm trên đoạn $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f\left(1\right)+g\left(1\right)=4 \\ g\left(x\right)=-x.f'\left(x\right);\quad f\left(x\right)=-x.g'\left(x\right)\end{cases}$. Tính $I=\int\limits_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=1$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=\ln 4035$. **D.** $S=4$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln(|x-1|)+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2017$, $f(2)=2018$ nên $\begin{cases} f(x)=\ln(|x-1|)+2017 & \text{khi } x<1 \\ f(x)=\ln(|x-1|)+2018 & \text{khi } x>1 \end{cases}$.

Do đó $S=f(3)-f(-1)=\ln 2+2018-\ln 2-2017=1$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=\displaystyle\int_{-1}^{0} f'(x)dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{dx}{x-1}=\ln|x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{2} \quad (1) \\ f(3)-f(2)=\displaystyle\int_{2}^{3} f'(x)dx=\int_{2}^{3}\dfrac{dx}{x-1}=\ln|x-1|\Big|_{2}^{3}=\ln 2 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (1)+(2), ta được $f(3)-f(2)+f(0)-f(-1)=0\Rightarrow S=1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$ và $f(0)=1$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $3+\ln 15$. **C.** $2+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{2}{2x-1}dx=\int\dfrac{2.\frac{1}{2}d(2x-1)}{2x-1}=\ln|2x-1|+c$.

$f(0)=1\Leftrightarrow c=1 \Leftrightarrow f(x)=\ln|2x-1|+1$.

$\begin{cases} f(-1)=\ln 3+1 \\ f(3)=\ln 5+1 \end{cases}\Leftrightarrow f(-1)+f(3)=2+\ln 15$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 5$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Cách 1: • Trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$: $f(x)=\int\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln(2x-1)+C_1$.

Lại có $f(1)=2\Rightarrow C_1=2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$: $f(x)=\int\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln(1-2x)+C_2$.

Lại có $f(0)=1 \Rightarrow C_2=1$.

Vậy $f(x)=\begin{cases} \ln(2x-1)+2 \; khi \; x>\dfrac{1}{2} \\ \ln(1-2x)+1 \; khi \; x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\,|_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{3} \quad (1) \\ f(3)-f(1)=\int\limits_{1}^{3} f'(x)dx=\int\limits_{1}^{3}\dfrac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\,|_{1}^{3}=\ln 5 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3)-f(1)-f(0)+f(-1)=\ln 15 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=2x+1$ và $f(1)=5$. Phương trình $f(x)=5$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tổng $S=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x=x^2+x+C$.

Mà $f(1)=5 \Leftrightarrow 1+1+C=5 \Leftrightarrow C=3 \Rightarrow f(x)=x^2+x+3$.

Xét phương trình: $f(x)=5 \Leftrightarrow x^2+x+3=5 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

$S=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|=\log_2|1|+\log_2|-2|=1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$ và $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Từ $f'(x)=\dfrac{3}{3x-1} \Rightarrow f(x)=\int\dfrac{3}{3x-1}\mathrm{dx}=\begin{cases} \ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right) \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0+C_1=1 \\ 0+C_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \ln|3x-1|+1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+2 \text{ khi } x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right) \end{cases}$.

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 4+1+\ln 8+2=3+\ln 32=3+5\ln 2$.

Cách 2: Ta có $\begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)\Big|_{-1}^{0}=\int\limits_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{dx}=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{3}{3x-1}\mathrm{dx}=\ln|3x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{4} \quad (1) \\ f(3)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=f(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3} f'(x)\mathrm{dx}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}\dfrac{3}{3x-1}\mathrm{dx}=\ln|3x-1|\Big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\ln 8 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 32 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+5\ln 2$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$; $f(-3)=0$; $f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

A. $P=3+\ln\frac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\frac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\frac{5}{3}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Từ $f'(x)=\frac{4}{x^2-4} \Rightarrow f(x)=\int\frac{4dx}{x^2-4}=\int\frac{4dx}{(x-2)(x+2)}=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C_1\ khi\ x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C_2\ khi\ x\in(-2;2)\\ \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C_3\ khi\ x\in(2;+\infty)\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}f(-3)=0\\ f(0)=1\\ f(2)=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ln 5+C_1=0\\ 0+C_2=1\\ \ln\frac{1}{5}+C_3=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_1=-\ln 5\\ C_2=1\\ C_3=2+\ln 5\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\text{-ln5} & khi\ x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+1 & khi\ x\in(-2;2)\\ \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+2+\ln 5 & khi\ x\in(2;+\infty)\end{cases}$.

Khi đó $P=f(-4)+f(-1)+f(4)=\ln 3-\ln 5+\ln 3+1+\ln\frac{1}{3}+2+\ln 5=3+\ln 3$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$; $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$. **B.** $1+\ln 80$. **C.** $1+\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}$. **D.** $1+\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

$f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2} \Rightarrow f(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)}=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1 & khi & x\in(-\infty;-2)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_2 & khi & x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_3 & khi & x\in(1;+\infty)\end{cases}$

Do đó $f(-3)-f(3)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\ln 4+C_1-\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}-C_3 \Rightarrow C_3=C_1+\frac{1}{3}\ln 10$.

Và $f(0)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_2=\frac{1}{3}\Rightarrow C_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$.

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1 & khi\quad x\in(-\infty;-2)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2 & khi\quad x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1+\frac{1}{3}\ln 10 & khi\quad x\in(1;+\infty)\end{cases}.$$

Khi đó:

$$f(-4)+f(-1)-f(4)=\left(\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1\right)+\left(\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_1+\frac{1}{3}\ln 10\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2.$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$; $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $P=2+\ln\frac{3}{5}$. **B.** $P=1+\ln\frac{3}{5}$. **C.** $P=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **D.** $P=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

$$f'(x)=\frac{1}{x^2-1}\Rightarrow\int\frac{dx}{x^2-1}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & khi\quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & khi\quad x\in(-1;1)\end{cases}.$$

Ta có $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 2+C_1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_1=0\Rightarrow C_1=0$.

Và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 3+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_2=2\Rightarrow C_2=1$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| & khi\quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1 & khi\quad x\in(-1;1)\end{cases}$.

Vậy $P=f(0)+f(4)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Giá trị $T=f(-2)+f(0)+f(4)$ bằng:

A. $T=2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}$. **B.** $T=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **C.** $T=3+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **D.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+C_1 \text{ khi } x<-1, x>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+C_2 \text{ khi } -1<x<1\end{cases}$.

Do $f(-3)+f(3)=0$ nên $C_1=0$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ nên $C_2=1$.

Nên $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1} \quad \text{khi } x<-1, x>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+1 \text{ khi } -1<x<1\end{cases}$. $T=f(-2)+f(0)+f(4)=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2)=\dfrac{1}{15}$ và $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\dfrac{7}{15}$. **B.** $\dfrac{11}{15}$. **C.** $\dfrac{11}{30}$. **D.** $\dfrac{7}{30}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Vì $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$ và $f(x)>0$, với mọi $x\in(0;+\infty)$ nên ta có $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+4$.

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)}=x^2+4x+C$. Mặt khác $f(2)=\dfrac{1}{15}$ nên $C=3$ hay $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{7}{30}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x)=12x+13$ và $f(0)=2$. Khi đó phương trình $f(x)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Từ $f^6(x).f'(x)=12x+13 \Rightarrow \int f^6(x).f'(x)dx=\int(12x+13)dx \Leftrightarrow \int f^6(x)df(x)=6x^2+13x+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{f^7(x)}{7}=6x^2+13x+C \xrightarrow{f(0)=2} C=\dfrac{2}{7}$.

Suy ra: $f^7(x)=42x^2+91x+2$.

Từ $f(x)=3 \Leftrightarrow f^7(x)=2187 \Rightarrow 42x^2+91x+2=2187 \Leftrightarrow 42x^2+91x-2185=0\,(*)$.

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu do $ac<0$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\dfrac{1}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng

A. $S=\dfrac{31}{2}$. **B.** $S=\dfrac{9}{2}$. **C.** $S=\dfrac{5}{2}$. **D.** $f(0).f(2)=1$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}=\dfrac{\left|e^x-1\right|}{\sqrt{e^x}}=\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}} & \text{khi} \quad x\geq 0 \\ e^{-\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}} & \text{khi} \quad x<0 \end{cases}$.

Do đó $f(x)=\begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}}+2e^{-\frac{x}{2}}+C_1 & \text{khi} \quad x\geq 0 \\ -2e^{-\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+C_2 & \text{khi} \quad x<0 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có $f(0)=5$ nên $2e^0+2e^0+C_1=5 \Leftrightarrow C_1=1$.

$\Rightarrow f(\ln 4)=2e^{\frac{\ln 4}{2}}+2e^{-\frac{\ln 4}{2}}+1=6$

Tương tự $f\left(\ln\dfrac{1}{4}\right)=0$ nên $-2e^{-\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}-2e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}+C_2=0 \Leftrightarrow C_2=5$.

$\Rightarrow f(-\ln 16)=-2e^{-\frac{(-\ln 16)}{2}}-2e^{\frac{(-\ln 16)}{2}}+5=-\dfrac{7}{2}$.

Vậy $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)=\dfrac{5}{2}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\dfrac{5}{2}$, $M=3$.

C. $m=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Từ giả thiết $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x \Rightarrow \int\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\sin x+C$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow t^2=1+f^2(x) \Rightarrow tdt=f(x)f'(x)dx$.

Thay vào ta được $\int dt=\sin x+C \Rightarrow t=\sin x+C \Rightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Do $f(0)=\sqrt{3} \Rightarrow C=2$.

Vậy $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+2 \Rightarrow f^2(x)=\sin^2 x+4\sin x+3$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\dfrac{\pi}{6}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\leq \sin x\leq 1$, xét hàm số $g(t)=t^2+4t+3$ có hoành độ đỉnh $t=-2$ loại.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g(1)=8$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{21}{4}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m > e$. **B.** $0 < m \le 1$. **C.** $0 < m < e$. **D.** $1 < m < e$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \int (2 - 2x) \mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = A.e^{2x - x^2}$. Mà $f(0) = 1$ suy ra $f(x) = e^{2x - x^2}$.

Ta có $2x - x^2 = 1 - \left(x^2 - 2x + 1\right) = 1 - (x - 1)^2 \le 1$. Suy ra $0 < e^{2x - x^2} \le e$ và ứng với một giá trị thực $t < 1$ thì phương trình $2x - x^2 = t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0 < m < e^1 = e$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) \ne 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = (2x + 1) f^2(x)$ và $f(1) = -0,5$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2017) = \frac{a}{b}$; $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = -1$. **B.** $a \in (-2017; 2017)$. **C.** $\frac{a}{b} < -1$. **D.** $b - a = 4035$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = (2x + 1) f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (2x + 1) \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} \mathrm{d}x = \int (2x + 1) \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C$

Mà $f(1) = -\frac{1}{2}$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x}$.

Mặt khác $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2017) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2017}\right)$

$\Leftrightarrow f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2017) = -1 + \frac{1}{2018} = \frac{-2017}{2018} \Rightarrow a = -2017;\ b = 2018$.

Khi đó $b - a = 4035$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) \ne 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3).f^2(x)$ và $f(0) = \frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1) + f(2) + ... + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$. **B.** $\frac{a}{b} > 1$.

C. $a + b = 1010$. **D.** $b - a = 3029$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Biến đổi $f'(x)=(2x+3).f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3 \Leftrightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+3)dx$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=x^2+3x+C \Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2+3x+C}$. Mà $f(0)=\dfrac{-1}{2}$ nên $=2$.

Do đó $f(x)=-\dfrac{1}{x^2+3x+2}=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Khi đó $\dfrac{a}{b}=f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=-\left(\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+.....+\dfrac{1}{2018.2019}+\dfrac{1}{2019.2020}\right)$

$=-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+.....+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2020}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2020}\right)=\dfrac{-1009}{2020}$.

Với điều kiện a,b thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases} a=-1009 \\ b=2020 \end{cases} \Rightarrow b-a=3029$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$, $\forall x\ge 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f''(x).f(x)-2[f'(x)]^2+xf^3(x)=0 \\ f'(0)=0;\ f(0)=1 \end{cases}$. Tính $f(1)$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{6}{7}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có: $f''(x).f(x)-2[f'(x)]^2+xf^3(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f''(x).f(x)-2[f'(x)]^2}{f^3(x)}=-x$

$\Rightarrow \left[\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right]'=-x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{x^2}{2}+C \Rightarrow \dfrac{f'(0)}{f^2(0)}=-\dfrac{0^2}{2}+C \Rightarrow C=0$.

Do đó $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \int_0^1 \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=-\int_0^1 \dfrac{x^2}{2}dx \Rightarrow -\dfrac{1}{f(x)}\Big|_0^1=\left(-\dfrac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1 \Rightarrow -\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(0)}=-\dfrac{1}{6} \Rightarrow f(1)=\dfrac{6}{7}$.

Câu 18: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$. Khi đó hiệu $T=f(2\sqrt{2})-2f(1)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int \dfrac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$.

Vậy $\ln(f(x))=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$, mà $f(0)=1 \Leftrightarrow C=0$. Do đó $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Nên $f(2\sqrt{2})=3;\ 2f(1)=2\sqrt{2} \Rightarrow f(2\sqrt{2})-2f(1)=3-2\sqrt{2}\in(0;1)$.

Câu 19: Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}dt = \int_0^1 f(x)dx$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx = 6$ .Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{2}{3}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1).f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2613 < f^2(8) < 2614$. **B.** $2614 < f^2(8) < 2615$.
C. $2618 < f^2(8) < 2619$. **D.** $2616 < f^2(8) < 2617$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên suy ra $f'(x) \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Mặt khác $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ nên

$[f'(x)]^2 = (x+1)f(x) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)}$, $\forall x \in (0;+\infty)$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{(x+1)}$, $\forall x \in (0;+\infty)$;

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int \sqrt{(x+1)}dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$;

Từ $f(3) = \frac{3}{2}$ suy ra $C = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}$

Như vậy $f(x) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}\right)^2$

Bởi thế:

$$f(8) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{(8+1)^3} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}\right)^2 = \left(9 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}\right)^2 \Rightarrow f^2(8) = \left(9 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}\right)^4 \approx 2613,26.$$

Câu 20: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4 < f(5) < 5$. **B.** $2 < f(5) < 3$.
C. $3 < f(5) < 4$. **D.** $1 < f(5) < 2$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Cách 1:

Với điều kiện bài toán ta có

$$f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(f'(x))}{f(x)} = \frac{1}{3}\int (3x+1)^{-\frac{1}{2}} d(3x+1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}.$$

Khi đó $f(1) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}+C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3;4)$.

Vậy $3 < f(5) < 4$.

***Chú ý*:** Các bạn có thể tính $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng cách đặt $t=\sqrt{3x+1}$.

Cách 2:

Với điều kiện bài toán ta có

$$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_1^5=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln\frac{f(5)}{f(1)}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5)=f(1).\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx 3,79\in(3;4).$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 8.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left[f'(x).f(x)\right]'=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+C_1$

Do $f(0)=f'(0)=1$ nên ta có $C_1=1$. Do đó: $f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=3x^5+6x^2+1 \Leftrightarrow f^2(x)=x^6+4x^3+2x+C_2$.

Mà $f(0)=1$ nên ta có $C_2=1$. Do đó $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1$.

Vậy $f^2(1)=8$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Theo đề ra ta có:

$$\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C \Leftrightarrow 2\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2+4}+C.$$

Hay $2\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{2(t+3)}{t^2+4}+C \Rightarrow \int f(t)\mathrm{d}t=\frac{t+3}{t^2+4}+C'$.

Suy ra $\int f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+3}{(2x)^2+4}+C_1\right)=\frac{2x+3}{8x^2+8}+C$

DẠNG 2: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, GIẢI HỆ TÍCH PHÂN

Câu 23: Cho $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 10$. Kết quả $\int_5^2 \left[2-4f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 34. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 32.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Tacó $\int_5^2 \left[2-4f(x)\right]\mathrm{d}x = 2\int_5^2 \mathrm{d}x - 4\int_5^2 f(x)\mathrm{d}x = -2x\Big|_2^5 + 4\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = -2.(5-2)+4.10 = 34$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = 9$ và $F(0)=3$. Tính $F(9)$.

A. $F(9)=-6$. **B.** $F(9)=6$. **C.** $F(9)=12$. **D.** $F(9)=-12$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^9 = F(9)-F(0) = 9 \Leftrightarrow F(9)=12$.

Câu 25: Cho $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $J = \int_0^2 \left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có $J = \int_0^2 \left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x = 4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_0^2 \mathrm{d}x = 4.3 - 3x\Big|_0^2 = 6$.

Câu 26: Cho $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 10$ và $\int_2^4 g(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int_2^4 \left[3f(x)-5g(x)\right]\mathrm{d}x$

A. $I=5$. **B.** $I=15$. **C.** $I=-5$. **D.** $I=10$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Có: $I = \int_2^4 \left[3f(x)-5g(x)\right]\mathrm{d}x = 3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x - 5\int_2^4 g(x)\mathrm{d}x = 5$.

Câu 27: Giả sử $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = 37$ và $\int_9^0 g(x)\mathrm{d}x = 16$. Khi đó, $I = \int_0^9 \left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=26$. **B.** $I=58$. **C.** $I=143$. **D.** $I=122$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Ta có: $I = \int_0^9 \left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^9 2f(x)\mathrm{d}x + \int_0^9 3g(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_9^0 g(x)\mathrm{d}x = 26$.

Câu 28: Nếu $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = 3-1 = 2$.

Câu 29: Cho $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$ và $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -2$. Giá trị của $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

$\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -1$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int\limits_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7$ và $\int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính

$P = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P = 7$. **B.** $P = -4$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 10$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7 - 3 = 4$.

Vậy $P = 4$.

Câu 31: Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$, khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = ?$

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

$\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 6$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$; $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 36$. **D.** $I = 4$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

$I = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2 + 6 = 8$.

Câu 33: Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^2 \left[x + 2f(x) + 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \frac{11}{2}$. **B.** $I = \frac{7}{2}$. **C.** $I = \frac{17}{2}$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Ta có: $I = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2} + 2\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$.

Câu 34: Biết $\int\limits_1^8 f(x)\mathrm{d}x = -2$; $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 3$; $\int\limits_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 7$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int_4^8 f(x)\,dx = 1$. **B.** $\int_1^4 [f(x)+g(x)]\,dx = 10$.

C. $\int_4^8 f(x)\,dx = -5$. **D.** $\int_1^4 [4f(x)-2g(x)]\,dx = -2$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int_4^8 f(x)\,dx = \int_1^8 f(x)\,dx - \int_1^4 f(x)\,dx = -2-3=-5$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$, $f(-1)=3$ và $\int_{-1}^{3} f'(x)\,dx = 10$ giá trị của $f(3)$ bằng

A. -13. **B.** -7. **C.** 13. **D.** 7.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_{-1}^{3} f'(x)\,dx = 10 \Rightarrow f(x)\Big|_{-1}^{3} = 10 \Leftrightarrow f(3)-f(-1)=10 \Leftrightarrow f(3)=f(-1)+10=13$.

Câu 36: Cho $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$. Tính $\int_0^2 (f(x)+1)\,dx$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 1.

Hươngd dẫn giải.

Chọn B

Ta có $\int_0^2 (f(x)+1)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_0^2 dx = 3+2=5$.

Câu 37: Cho $y=f(x)$, $y=g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và $\int_0^2 g(x).f'(x)\,dx = 2$, $\int_0^2 g'(x).f(x)\,dx = 3$. Tính tích phân $I=\int_0^2 [f(x).g(x)]'\,dx$.

A. $I=-1$. **B.** $I=6$. **C.** $I=5$. **D.** $I=1$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Xét tích phân $I=\int_0^2 [f(x).g(x)]'\,dx = \int_0^2 [f'(x).g(x)+f(x).g'(x)]\,dx$

$=\int_0^2 g'(x).f(x)\,dx + \int_0^2 g(x).f'(x)\,dx = 5$.

Câu 38: Cho hai tích phân $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 8$ và $\int_{5}^{-2} g(x)\,dx = 3$. Tính $I=\int_{-2}^{5} [f(x)-4g(x)-1]\,dx$.

A. $I=-11$. **B.** $I=13$. **C.** $I=27$. **D.** $I=3$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có: $I=\int_{-2}^{5} [f(x)-4g(x)-1]\,dx = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx + 4\int_{5}^{-2} g(x)\,dx - x\Big|_{-2}^{5} = 8+4.3-(5+2)=13$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^3+2x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^2(x).f'(x)\,dx$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** -2.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x).\mathrm{d}\left[f(x)\right]=\left.\frac{f^3(x)}{3}\right|_0^1=\frac{f^3(1)-f^3(0)}{3}=-\frac{2}{3}$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0; 6] thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx=10$ và $\int_2^4 f(x)dx=6$. Tính giá trị của biểu thức $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$.

A. $P=4$.\` **B.** $P=16$. **C.** $P=8$. **D.** $P=10$.

Hươngd dẫn giải:

Ta có: $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx=\left(\int_0^6 f(x)dx+\int_6^2 f(x)dx\right)+\int_4^6 f(x)dx$

$=\int_0^6 f(x)dx+\left(\int_6^4 f(x)dx+\int_4^2 f(x)dx\right)+\int_4^6 f(x)dx=\int_0^6 f(x)dx+\int_4^2 f(x)dx=10-6=4$

Chọn A

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [0; 1] và có $\int_0^1\left[3-2f(x)\right]dx=5$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Hươngd dẫn giải:

Ta có: $\int_0^1\left[3-2f(x)\right]dx=5\Leftrightarrow\int_0^1 3dx-2\int_0^1 f(x)dx=5\Leftrightarrow 3x\big|_0^1-2\int_0^1 f(x)dx=5$

$\Leftrightarrow -2\int_0^1 f(x)dx=5-3=2\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=-1$

Chọn A

Câu 42: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn [0; 1], có $\int_0^1 f(x)dx=4$ và $\int_0^1 g(x)dx=-2$. Tính tích phân $I=\int\left[f(x)-3g(x)\right]dx$.

A. -10. **B.** 10. **C.** 2. **D.** -2.

Hươngd dẫn giải:

$I=\int_0^1\left[f(x)-3g(x)\right]dx=\int_0^1 f(x)dx-3\int_0^1 g(x)dx=4-3(-2)=10$

Chọn B

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f'(x)dx$.

A. $I=\ln\sqrt{2}$. **B.** $I=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **C.** $I=\ln 2$ **D.** $I=2\ln 2$

Hươngd dẫn giải:

Ta có: $I=\int_0^1 f'(x)dx=f(x)\big|_0^1=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Chọn B

Câu 44: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1; ln3] và thỏa mãn $f\left(1\right)=e^{2}$,
$\int\limits_{1}^{\ln 3} f'\left(x\right)dx=9-e^{2}$. Tính $I=f\left(\ln 3\right)$.

A. $I=9-2e^{2}$. **B.** $I=9$. **C.** $I=-9$. **D.** $I=2e^{2}-9$.

Hương dẫn giải:

Ta có: $\int\limits_{1}^{\ln 3} f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)\Big|_{1}^{\ln 3}=f\left(\ln 3\right)-f\left(1\right)=9-e^{2}$ (gt)

$\Rightarrow f\left(\ln 3\right)-e^{2}=9-e^{2}\Rightarrow f\left(\ln 3\right)=9$

Chọn B

Câu 45: Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [0; 1] và thỏa mãn
$\int\limits_{0}^{1} f'\left(x\right).g\left(x\right)dx=1$, $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right).g'\left(x\right)dx=-1$. Tính $I=\int\limits_{0}^{1}\left[f\left(x\right).g\left(x\right)\right]' dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=0$. **C.** $I=3$. **D.** $I=2$.

Hương dẫn giải:

$I=\int\limits_{0}^{1}\left[f\left(x\right).g\left(x\right)\right]' dx=\int\limits_{0}^{1}\left[f\left(x\right).g'\left(x\right)+f'\left(x\right).g\left(x\right)\right]dx$

$=\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right).g'\left(x\right)dx+\int\limits_{0}^{1} f'\left(x\right).g\left(x\right)dx=1-1=0$

Chọn B

Câu 46: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa $\int\limits_{0}^{x^{2}} f\left(t\right)dt=x.\cos\pi x$. Tính $f\left(4\right)$.

A. $f\left(4\right)=123$. **B.** $f\left(4\right)=\frac{2}{3}$. **C.** $f\left(4\right)=\frac{3}{4}$. **D.** $f\left(4\right)=\frac{1}{4}$.

Hương dẫn giải:

Ta có: $F\left(t\right)=\int f\left(t\right)dt\Rightarrow F'\left(t\right)=f\left(t\right)$

Đặt $G\left(x\right)=\int\limits_{0}^{x^{2}} f\left(t\right)dt=F\left(x^{2}\right)-F\left(0\right)$

$\Rightarrow G'\left(x\right)=\left[F\left(x^{2}\right)\right]'=2x.f\left(x^{2}\right)$ (Tính chất đạo hàm hợp: $f'\left[u\left(x\right)\right]=f'\left(u\right).u'\left(x\right)$)

Mặt khác, từ gt: $G\left(x\right)=\int\limits_{0}^{x^{2}} f\left(t\right)dt=x.\cos\pi x$

$\Rightarrow G'\left(x\right)=\left(x.\cos\pi x\right)'=-x\pi\sin\pi x+\cos\pi x$

$\Rightarrow 2x.f\left(x^{2}\right)=-x\pi\sin\pi x+\cos\pi x$ (1)

Tính $f\left(4\right)\Rightarrow$ ứng với $x=2$

Thay $x=2$ vào (1) $\Rightarrow 4.f\left(4\right)=-2\pi\sin 2\pi+\cos 2\pi=1\Rightarrow f\left(4\right)=\frac{1}{4}$

Chọn D

Câu 47: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{f(x)} t^{2}.dt=x.\cos\pi x$. Tính $f\left(4\right)$.

A. $f\left(4\right)=2\sqrt{3}$. **B.** $f\left(4\right)=-1$. **C.** $f\left(4\right)=\frac{1}{2}$. **D.** $f\left(4\right)=\sqrt[3]{12}$.

Hương dẫn giải:

$$\int\limits_0^{f(x)} t^2dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{f(x)} = \frac{\left[f(x)\right]^3}{3} = x\cos\pi x \Rightarrow \left[f(x)\right]^3 = 3x.\cos\pi x$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3x\cos\pi x} \Rightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}$$

Chọn D

Câu 48: Cho hàm số $G(x) = \int\limits_0^x t.\cos(x-t).dt$. Tính $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. **B.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **C.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. **D.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Hương dẫn giải:

Cách 1: Ta có: $F(t) = \int t.\cos(x-t)dt \Rightarrow F'(x) = t.\cos(x-t)$

Đặt $G(x) = \int\limits_0^x t.\cos(x-t)dt = F(x) - F(0)$

$$\Rightarrow G'(x) = \left[F(x) - F(0)\right]' = F'(x) - F'(0) = \left[x\cos(x-x) - 0\right]' = x' = 1 \Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Chọn B

Cách 2: Ta có $G(x) = \int\limits_0^x t.\cos(x-t)dt$. Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$, $dv = \cos(x-t)dx$ chọn $v = -\sin(x-t)$

$$\Rightarrow G(x) = -t.\sin(x-t)\Big|_0^x + \int\limits_0^x \sin(x-t)dt = \int\limits_0^x \sin(x-t)dt = \cos(x-t)\Big|_0^x = \cos 0 - \cos x = 1 - \cos x$$

$$\Rightarrow G'(x) = \sin x \Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Chọn B

Câu 49: Cho hàm số $G(x) = \int\limits_0^{x^2} \cos\sqrt{t}.dt$ $(x > 0)$. Tính $G'(x)$.

A. $G'(x) = x^2.\cos x$. **B.** $G'(x) = 2x.\cos x$. **C.** $G'(x) = \cos x$. **D.** $G'(x) = \cos x - 1$.

Hương dẫn giải:

Ta có $F(t) = \int \cos\sqrt{t}dt \Rightarrow F'(t) = \cos\sqrt{t} \Rightarrow G(x) = \int\limits_0^{x^2} \cos\sqrt{t}dt = F(x^2) - F(0)$

$$\Rightarrow G'(x) = \left[F(x^2) - F(0)\right]' = \left[F(x^2)\right]' - \left[F(0)\right]' = \left[F(x^2)\right]' = 2x.F'(x^2)$$

$= 2x.\cos\sqrt{x^2} = 2x.\cos x$

Chọn B

Câu 50: Cho hàm số $G(x) = \int\limits_1^x \sqrt{1+t^2}dt$. Tính $G'(x)$.

A. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **B.** $\sqrt{1+x^2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **D.** $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$.

Hương dẫn giải:

Đặt $F(t) = \int \sqrt{1+t^2}dt \Rightarrow F'(t) = \sqrt{1+t^2}$

$$G(x) = \int\limits_1^x \sqrt{1+t^2}dt = F(x) - F(1) \Rightarrow G'(x) = F'(x) - F'(1) = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Chọn A

Câu 51: Cho hàm số $F(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\sin t^2.dt$ $(x>0)$. Tính $F'(x)$.

A. $\sin x$. **B.** $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. **C.** $\frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$. **D.** $\sin\sqrt{x}$.

Hươngd dẫn giải:

Đặt $F(t)=\int\sin t^2dt$, $G(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\sin t^2dt=F(\sqrt{x})-F(1)$

$\Rightarrow G'(x)=F'(\sqrt{x})-F'(1)=F'(\sqrt{x})=(\sqrt{x})'.\sin(\sqrt{x})^2=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$

Chọn B

Câu 52: Tính đạo hàm của $f(x)$, biết $f(x)$ thỏa $\int_0^x t.e^{f(t)}dt=e^{f(x)}$.

A. $f'(x)=x$. **B.** $f'(x)=x^2+1$. **C.** $f'(x)=\frac{1}{x}$. **D.** $f'(x)=\frac{1}{1-x}$.

Hươngd dẫn giải:

Đặt $F(t)=\int t.e^{f(t)}dt\Rightarrow F'(t)=t.e^{f(t)}$ $\Rightarrow G(x)=\int_0^x t.e^{f(t)}dt=F(x)-F(0)$

$\Rightarrow G'(x)=F'(x)=e^{f(x)}$ (gt) $\Leftrightarrow x.e^{f(x)}=e^{f(x)}$ $\Rightarrow\left[x.e^{f(x)}\right]'=\left[e^{f(x)}\right]$

$\Rightarrow e^{f(x)}+x.f'(x).e^{f(x)}=f'(x).e^{f(x)}$ $\Rightarrow 1+x.f'(x)=f'(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1-x}$

Chọn D

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t=x.\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$

A. $f(\pi)=\frac{\pi-1}{4}$. **B.** $f(\pi)=\frac{\pi}{2}$. **C.** $f(\pi)=\frac{\pi}{4}$. **D.** $f(\pi)=\frac{1}{2}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)\Rightarrow F'(t)=f(t)$

Khi đó $\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t=x.\sin(\pi x)\Leftrightarrow F(t)\Big|_0^{x^2}=x.\sin(\pi x)\Leftrightarrow F(x^2)-F(0)=x.\sin(\pi x)$

$\Rightarrow F'(x^2).2x=\sin(\pi x)+\pi x.\cos(\pi x)\Leftrightarrow f(x^2).2x=\sin(\pi x)+\pi x.\cos(\pi x)$

$\Rightarrow f(4)=\frac{\pi}{2}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I=\int_{-1}^{2}\left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x$, biết $F(-1)=1$ và $F(2)=4$.

A. $I=6$. **B.** $I=10$. **C.** $I=3$. **D.** $I=9$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

$I=\int_{-1}^{2}\left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-1}^{2}+x^2\Big|_{-1}^{2}=F(2)-F(-1)+(4-1)=4-1+3=6$.

Câu 55: Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2}\left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$

A. $I = \dfrac{11}{2}$. **B.** $I = \dfrac{7}{2}$. **C.** $I = \dfrac{17}{2}$. **D.** $I = \dfrac{5}{2}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I = \int\limits_{-1}^{2}\left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} x\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^{2} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x - 3\int\limits_{-1}^{2} \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2} + 4 + 3 = \dfrac{17}{2}$.

Câu 56: Cho $\int\limits_{1}^{2}\left[3f(x) + 2g(x)\right]\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_{1}^{2}\left[2f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = -3$. Khi đó, $\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{11}{7}$. **B.** $-\dfrac{5}{7}$. **C.** $\dfrac{6}{7}$. **D.** $\dfrac{16}{7}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Đặt $a = \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, $b = \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ 2a - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{7} \\ b = \dfrac{11}{7} \end{cases}$

Vậy $\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{5}{7}$.

Câu 57: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 5; \int\limits_{0}^{1} g(x)\mathrm{d}x = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 10$. **B.** $\int\limits_{-1}^{1}\left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$.

C. $\int\limits_{-1}^{1}\left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$. **D.** $\int\limits_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = 14$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2.5 = 10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int\limits_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = 0$.

$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1}\left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_{-1}^{1}\left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$.

Vậy đáp án D sai.

Câu 58: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 5$; $\int\limits_{0}^{1} g(x)\mathrm{d}x = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 10$. **B.** $\int\limits_{-1}^{1}\left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$.

C. $\int_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=10$. **D.** $\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x=14$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=2.5=10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow\int_{-1}^{1}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ và $\int_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=10$.

Câu 59: Nếu $\int_{0}^{10}f(z)\mathrm{d}z=17$ và $\int_{0}^{8}f(t)\mathrm{d}t=12$ thì $\int_{8}^{10}-3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -15. **B.** 29. **C.** 15. **D.** 5.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

$$I=-3\int_{8}^{10}f(x)\mathrm{d}x=-3\left(\int_{8}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{10}f(x)\mathrm{d}x\right)=-3(-12+17)=-15.$$

Câu 60: Cho $\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=2$, $\int_{-1}^{7}f(t)\mathrm{d}t=9$. Giá trị của $\int_{2}^{7}f(z)\mathrm{d}z$ là

A. 11. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_{-1}^{7}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{7}f(x)\mathrm{d}x$ và $\int_{2}^{7}f(z)\mathrm{d}z=\int_{2}^{7}f(x)\mathrm{d}x$ nên $\int_{-1}^{7}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{7}f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $\int_{2}^{7}f(z)\mathrm{d}z=7$.

Câu 61: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I=\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=4$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\int_{0}^{3}\left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)\mathrm{d}x$ là:

A. $4+12\mathrm{e}$. **B.** $12+4\mathrm{e}$. **C.** $3\mathrm{e}+14$. **D.** $14+3\mathrm{e}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có $K=\int_{0}^{3}\left(\mathrm{e}^{1+\ln(f(x))}+4\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}\mathrm{e}^{1+\ln(f(x))}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}4\mathrm{d}x=\mathrm{e}.\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}4\mathrm{d}x=4\mathrm{e}+4x\Big|_{0}^{3}=4\mathrm{e}+12$.

Vậy $K=4\mathrm{e}+12$.

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\begin{cases}f(0)=f'(0)=1;\\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\end{cases}.$$

Tính $\int_{0}^{1}f(x-1)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$f'(x+y)=f'(y)+3x^2+6xy$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $y=0\Rightarrow f'(x)=f'(0)+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1+3x^2$

Vậy $f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$ suy ra $f(x)=x^3+x+1$.

$$\int_0^1 f(x-1)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_{-1}^0\left(x^3+x+1\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^0=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}.$$

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ là hàm bậc nhất thỏa mãn $\int_0^1(x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$.

Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=8$. **C.** $I=-12$. **D.** $I=-8$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Gọi $f(x)=ax+b$, $(a\neq 0)\Rightarrow f'(x)=a$.

Theo giả thiết ta có:

+) $\int_0^1(x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow a\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow \int_0^1(x+1)\mathrm{d}x=\frac{10}{a} \Leftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{10}{a}\Rightarrow a=\frac{20}{3}$.

+) $2f(1)-f(0)=2\Leftrightarrow 2.\left(\frac{20}{3}+b\right)-b=2 \Leftrightarrow b=-\frac{34}{3}$.

Do đó, $f(x)=\frac{20}{3}x-\frac{34}{3}$.

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{20}{3}x-\frac{34}{3}\right)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 64: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^3+x^5}$, $f(1)=a$ và $f(-2)=b$. Tính $f(-1)+f(2)$.

A. $f(-1)+f(2)=-a-b$. **B.** $f(-1)+f(2)=a-b$.

C. $f(-1)+f(2)=a+b$. **D.** $f(-1)+f(2)=b-a$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $f'(-x)=\frac{1}{(-x)^3+(-x)^5}=-\frac{1}{x^3+x^5}=-f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm lẻ.

Do đó $\int_{-2}^2 f'(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_{-2}^{-1}f'(x)\mathrm{d}x=-\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(-2)=-f(2)+f(1)\Rightarrow f(-1)+f(2)=f(-2)+f(1)=a+b$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x^4}$, $f(1)=a$, $f(-2)=b$. Giá trị của biểu thức $f(-1)-f(2)$ bằng

A. $b-a$. **B.** $a+b$. **C.** $a-b$. **D.** $-a-b$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Ta có $f'(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+(-x)^4}=\dfrac{1}{x^2+x^4}=f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm chẵn.

Do đó $\int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(2)=f(-1)-f(-2)+f(-2)-f(1)+f(1)-f(2)$

$=\int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x+b-a-\int\limits_{1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=b-a$.

Câu 66: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-e^x.f^2(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\dfrac{2}{9}$.　**B.** $f(\ln 2)=-\dfrac{2}{9}$.　**C.** $f(\ln 2)=\dfrac{2}{3}$.　**D.** $f(\ln 2)=\dfrac{1}{3}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

$f'(x)=-e^x.f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-e^x\Leftrightarrow\int\limits_0^{\ln 2}\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=-e^x\Big|_0^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}\Big|_0^{\ln 2}=-1\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(\ln 2)}-\dfrac{1}{f(0)}=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(\ln 2)}=3\Leftrightarrow f(\ln 2)=\dfrac{1}{3}$.

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x.f(x))^2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị (C) là.

A. $y=6x+30$.　**B.** $y=-6x+30$.　**C.** $y=36x-30$.　**D.** $y=-36x+42$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

$f'(x)=(x.f(x))^2\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^2\Leftrightarrow\int\limits_0^1\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(1)}-\dfrac{1}{f(0)}=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow f(1)=6$.

$f'(1)=(1.f(1))^2=36$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần lập là $y=36x-30$.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn:

$g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $g(x)=f^2(x)$. Tính $\int\limits_0^1\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1011}{2}$.　**B.** $\dfrac{1009}{2}$.　**C.** $\dfrac{2019}{2}$.　**D.** 505.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Ta có $g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow g'(x)=2018f(x)=2018\sqrt{g(x)}$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x = 2018\int_0^t \mathrm{d}x \Rightarrow 2\left(\sqrt{g(x)}\right)\Big|_0^t = 2018x\big|_0^t$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{g(t)} - 1\right) = 2018t \ \ (\text{do } g(0) = 1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{g(t)} = 1009t + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t = \left(\frac{1009}{2}t^2 + t\right)\Big|_0^1 = \frac{1011}{2}.$$

Câu 69: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1) = e^{-2}$. **B.** $f(-1) = e^3$. **C.** $f(-1) = e^4$. **D.** $f(-1) = 3$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Biến đổi:

$$f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int_{-1}^{1} -2dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\frac{df(x)}{f(x)} = -4 \Leftrightarrow \ln f(x)\big|_{-1}^{1} = -4$$

$$\ln\frac{f(1)}{f(-1)} = -4 \Leftrightarrow \frac{f(1)}{f(-1)} = e^{-4} \Leftrightarrow f(-1) = f(1).e^4 = e^4.$$

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + \left[f'(x) - x\right]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

A. $T = 2 + 9\ln 2$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = \frac{1}{2} + 9\ln 2$. **D.** $T = 2 - 9\ln 2$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $9f''(x) + \left[f'(x) - x\right]^2 = 9 \Rightarrow 9\left(f''(x) - 1\right) = -\left[f'(x) - x\right]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x) - 1}{\left[f'(x) - x\right]^2} = \frac{1}{9}$.

Lấy nguyên hàm hai vế $-\int \frac{f''(x) - 1}{\left[f'(x) - x\right]^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{9}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{f'(x) - x} = \frac{x}{9} + C$.

Do $f'(0) = 9$ nên $C = \frac{1}{9}$ suy ra $f'(x) - x = \frac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{x+1} + x$

Vậy $T = f(1) - f(0) = \int_0^1 \left(\frac{9}{x+1} + x\right)\mathrm{d}x = \left(9\ln|x+1| + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 9\ln 2 + \frac{1}{2}$.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = \frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2) = \frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2) = \frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$f'(x).f(x) = x^4 + x^2 \Rightarrow \int_0^2 f'(x).f(x)dx = \int_0^2 \left(x^4 + x^2\right)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)df(x) = \frac{136}{15} \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^2 = \frac{136}{15}$$

$$\frac{f^2(2) - 4}{2} = \frac{136}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{332}{15}.$$

Câu 72: Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn

$x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2, \forall x\in[1;4], f(1)=\dfrac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng:

A. $\dfrac{391}{18}$ **B.** $\dfrac{361}{18}$ **C.** $\dfrac{381}{18}$ **D.** $\dfrac{371}{18}$

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Biến đổi:

$$x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow x\left(1+2f(x)\right)=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{\left[f'(x)\right]^2}{1+2f(x)}=x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}.$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int_1^4\sqrt{x}dx \Leftrightarrow \left.\sqrt{1+2f(x)}\right|_1^4=\frac{14}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(4)}-2=\frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4)=\frac{391}{18}.$$

Chọn A

Chú ý: *Nếu không nhìn được ra luôn* $I=\displaystyle\int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\left.\sqrt{1+2f(x)}\right|_1^4=\sqrt{1+2f(4)}-2$ *thì ta có thể sử dụng kỹ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một).*

+ Vi phân: $\displaystyle\int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int_1^4 \frac{df(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\frac{1}{2}\int_1^4\left(1+2f(x)\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1+2f(x)\right)=\left.\sqrt{1+2f(x)}\right|_1^4.$

+ Đổi biến: Đặt $t=\sqrt{1+2f(x)} \Rightarrow t^2=1+2f(x) \Leftrightarrow tdt=f'(x)dx$

với $x=1\Rightarrow t=\sqrt{1+2f(1)}=2; x=4\Rightarrow t=\sqrt{1+2f(4)}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_2^{\sqrt{1+2f(4)}}\frac{tdt}{t}=\int_2^{\sqrt{1+2f(4)}}dt=\left.t\right|_2^{\sqrt{1+2f(4)}}=\sqrt{1+2f(4)}-2.$

Câu 73: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.\mathrm{e}^{-2x}}$. Khi đó:

A. $\mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2+3}}-\dfrac{1}{2}$.

B. $\mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^2+3}}-\dfrac{1}{4}$.

C. $\mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\dfrac{\left(\mathrm{e}^2+3\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+3}-8}{3}$.

D. $\mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\left(\mathrm{e}^2+3\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+3}-8$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có: $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.\mathrm{e}^{-2x}}=\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}}{\mathrm{e}^x}\Rightarrow 3\mathrm{e}^{3x}f(x)+\mathrm{e}^{3x}f'(x)=\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}$.

$\Leftrightarrow\left[\mathrm{e}^{3x}f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}$.

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được $\displaystyle\int_0^1\left[\mathrm{e}^{3x}f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}\,\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\left.\left[\mathrm{e}^{3x}f(x)\right]\right|_0^1=\left.\frac{1}{3}\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}\right)^3\right|_0^1\Leftrightarrow \mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\frac{\left(\mathrm{e}^2+3\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+3}-8}{3}.$$

Câu 74: Cho hàm số f liên tục, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}-\sqrt{f(0)+1}=1\Leftrightarrow \sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}=2\Leftrightarrow f\left(\sqrt{3}\right)=3$.

Câu 75: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $\left(a\in\mathbb{Z},\, b\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$

$\Leftrightarrow \int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+3)\mathrm{d}x\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=x^2+3x+C$.

Vì $f(0)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1009}{2020}$.

Vậy $a=-1009$; $b=2020$. Do đó $b-a=3029$.

Câu 76: Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn: $2f^2(x)=\left[F(x)-1\right]f'(x)$.

Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1$, $b=4$. **B.** $a=1$, $b=-1$. **C.** $a=1$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$. **D.** $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $f(x)=F'(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$ và $f'(x)=\dfrac{2b-8a}{(x+4)^3}$.

Do đó: $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4}=\left(\dfrac{ax+b}{x+4}-1\right)\dfrac{2b-8a}{(x+4)^3}$

$\Leftrightarrow 4a-b=-(ax+b-x-4)\Leftrightarrow (x+4)(1-a)=0\Leftrightarrow a=1$ (do $x+4\neq 0$)

Với $a=1$ mà $4a-b\neq 0$ nên $b\neq 4$.
Vậy $a=1$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.
Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau:
+ Vì $4a-b\neq 0$ nên loại được ngay phương án A: $a=1$, $b=4$ và phương án D: $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$.
+ Để kiểm tra hai phương án còn lại, ta lấy $b=0$, $a=1$. Khi đó, ta có

$$F(x)=\frac{x}{x+4},\ f(x)=\frac{4}{(x+4)^2},\ f'(x)=-\frac{8}{(x+4)^3}.$$

Thay vào $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)$ thấy đúng nên

Chọn C

Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính $f(2)$

A. 5. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Do $x\in[1;2]$ nên $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=2x+3$

$\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}=x^2+3x+C$.

Do $f(1)=4$ nên $C=0\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2$.

Vậy $f(2)=20$.

Câu 78: Cho $f(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $a\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a=3$. Tính $F(a)-10a^2+3a$.

A. $-\dfrac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\dfrac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$

Ta lại có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\tan x)=x\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x=x\tan x-\int\dfrac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$=x\tan x+\int\dfrac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=x\tan x+\ln|\cos x|+C\Rightarrow F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|+C$

Lại có: $F(0)=0\Rightarrow C=0$, do đó: $F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|$.

$\Rightarrow F(a)=af(a)-a\tan a-\ln|\cos a|$

Khi đó $f(a)=\dfrac{a}{\cos^2 a}=a(1+\tan^2 a)=10a$ và $\dfrac{1}{\cos^2 a}=1+\tan^2 a=10\Leftrightarrow\cos^2 a=\dfrac{1}{10}$

$\Leftrightarrow|\cos a|=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F(a)-10a^2+3a=10a^2-3a-\ln\left|\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right|-10a^2+3a=\dfrac{1}{2}\ln 10$.

Câu 79: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f\left(x\right) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'\left(x\right) = -e^{x}.f^{2}\left(x\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(0\right) = \dfrac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = \ln 2$ là

A. $2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0$. **B.** $2x - 9y - 2\ln 2 + 3 = 0$.
C. $2x - 9y + 2\ln 2 - 3 = 0$. **D.** $2x + 9y + 2\ln 2 - 3 = 0$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right) = -e^{x}.f^{2}\left(x\right) \Leftrightarrow -\dfrac{f'\left(x\right)}{f^{2}\left(x\right)} = e^{x} \Rightarrow \int\limits_{0}^{\ln 2}\left[-\dfrac{f'\left(x\right)}{f^{2}\left(x\right)}\right]dx = \int\limits_{0}^{\ln 2} e^{x}dx \Rightarrow \left(\dfrac{1}{f\left(x\right)}\right)\Bigg|_{0}^{\ln 2} = \left(e^{x}\right)\Big|_{0}^{\ln 2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f\left(\ln 2\right)} - \dfrac{1}{f\left(0\right)} = 1 \Rightarrow f\left(\ln 2\right) = \dfrac{1}{3}$.

Từ đó ta có $f'\left(\ln 2\right) = -e^{\ln 2} f^{2}\left(\ln 2\right) = -2.\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2} = -\dfrac{2}{9}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -\dfrac{2}{9}\left(x - \ln 2\right) + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0$.

Câu 80: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, $f\left(x\right)$ và $f'\left(x\right)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(0\right) = 2$,
$\int\limits_{0}^{1}\left[f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^{2} + 1\right]dx = 2\int\limits_{0}^{1}\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)}dx$. Tính $\int\limits_{0}^{1}\left[f\left(x\right)\right]^{3}dx$.

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $\int\limits_{0}^{1}\left[f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^{2} + 1\right]dx = 2\int\limits_{0}^{1}\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)}dx$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1}\left[f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^{2} + 1\right]dx - 2\int\limits_{0}^{1}\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)}dx = 0$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1}\left[f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^{2} - 2\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)} + 1\right]dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1}\left[\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)} - 1\right]^{2}dx = 0$

$\Rightarrow \sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)} - 1 = 0 \Rightarrow f^{2}\left(x\right).f'\left(x\right) = 1 \Rightarrow \dfrac{f^{3}\left(x\right)}{3} = x + C$. Mà $f\left(0\right) = 2 \Rightarrow C = \dfrac{8}{3}$.

Vậy $f^{3}\left(x\right) = 3x + 8$.

Vậy $\int\limits_{0}^{1}\left[f\left(x\right)\right]^{3}dx = \int\limits_{0}^{1}\left(3x + 8\right)dx = \left(\dfrac{3x^{2}}{2} + 8x\right)\Bigg|_{0}^{1} = \dfrac{19}{2}$.

Câu 81: Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^{2}(x) + 1}$ và $f(0) = 0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\left[1;3\right]$ là

A. 22 **B.** $4\sqrt{11} + \sqrt{3}$ **C.** $20 + \sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{11} + \sqrt{3}$

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Biến đổi:

$f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=2x\Rightarrow\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int 2xdx\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)+1}=x^2+C$

Với $f(0)=0\Rightarrow C=1\Rightarrow\sqrt{f^2(x)+1}=x^2+1\Rightarrow f^2(x)=x^4+2x^2=g(x)$

Ta có: $g'(x)=4x^3+4x>0,\forall x\in[1;3]$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$

Suy ra: $g(1)\le g(x)=f^2(x)\le g(3)\Rightarrow 3\le f^2(x)\le 99\xrightarrow{f(x)\ge 0}\sqrt{3}\le f(x)\le 3\sqrt{11}$

$\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=\sqrt{3}\\ \underset{\sqrt{3}}{Max}\, f(x)=3\sqrt{11}\end{cases}$

Chú ý: *Nếu không tìm được ra luôn* $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\sqrt{f^2(x)+1}+C$ thì ta có thể sử dụng kĩ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một)

+) Vi phân: $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int\frac{f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}d\left(f(x)\right)=\frac{1}{2}\int\left(f^2(x)+1\right)^{\frac{-1}{2}}d\left(f^2(x)+1\right)=\sqrt{f^2(x)+1}+C$

+ Đổi biến: Đặt $t=\sqrt{f^2(x)+1}\Rightarrow t^2=f^2(x)+1\Rightarrow tdt=f(x)f'(x)dx$

Suy ra: $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx=\int\frac{tdt}{t}=\int dt=t+C=\sqrt{f^2(x)+1}+C$

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $\left(f'(x)\right)^2=e^x f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e-1$. **C.** e^2-2. **D.** e^2-1.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Biến đổi $\left(f'(x)\right)^2=e^x f(x)\Leftrightarrow\frac{\left(f'(x)\right)^2}{f(x)}=e^x\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{e^x}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int\sqrt{e^x}dx$

$\Leftrightarrow\int\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{2}}df(x)=\int e^{\frac{x}{2}}dx\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)}=2e^{\frac{x}{2}}+C$

Vì $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow\sqrt{f(x)}=e^{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow f(x)=e^x$

Suy ra $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 edx=e^x\Big|_0^1=e-1$

Câu 83: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $-\frac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\frac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\frac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}-\frac{\ln 2}{2}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Ta có $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1\Leftrightarrow\left(xf(x)+1\right)^2=f(x)+xf'(x)(*)$

Đặt $h(x)=f(x)+xf'(x)\Rightarrow h'(x)=f(x)+xf'(x)$, khi đó $(*)$ có dạng

$h^2(x)=h'(x) \Rightarrow \dfrac{h'(x)}{h^2(x)}=1 \Rightarrow \int \dfrac{h'(x)}{h^2(x)}dx=\int 1dx \Rightarrow \int \dfrac{dh(x)}{h^2(x)}=x+C \Leftrightarrow -\dfrac{1}{h(x)}=x+C$

$\Rightarrow h(x)=-\dfrac{1}{x+C} \Rightarrow xf(x)+1=-\dfrac{1}{x+C}$

Vì $f(1)=-2$ nên $-2+1=-\dfrac{1}{1+C} \Rightarrow C=0$

Khi đó $xf(x)+1=-\dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

Suy ra: $\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)\Bigg|_1^2=-\dfrac{1}{2}-\ln 2$

Câu 84: Cho hàm số $y=f(x)$. Có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=\mathrm{e}$ và $(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+4$. **B.** $4\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+1$. **C.** $2\mathrm{e}^3-2\mathrm{e}+2$. **D.** $4\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-4$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Ta có: $(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3 \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-(x+2)f(x)}{x^3}=1 \Leftrightarrow \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}\right]'=\mathrm{e}^{-x}$

Suy ra $\int\limits_1^2\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}\right]'\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{-2}f(2)}{2^2}-\dfrac{\mathrm{e}^{-1}f(1)}{1^2}=-\left[\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}\right]$

$\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{-2}f(2)}{4}-\dfrac{\mathrm{e}^{-1}f(1)}{1}=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$

$\Leftrightarrow f(2)=4\left[\mathrm{e}f(1)+\mathrm{e}-1\right]=4\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-4$.

Câu 85: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{\pi}$. **B.** $\dfrac{4}{\pi}$. **C.** $\dfrac{6}{\pi}$. **D.** $\dfrac{2}{\pi}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}(f(x))=\cos\dfrac{\pi x}{2}.f(x)\Bigg|_0^1+\int\limits_0^1\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^1\sin\dfrac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_0^1\sin\dfrac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}$

Mặt khác $\int\limits_0^1\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1(1-\cos\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 3\sin\dfrac{\pi x}{2}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left[3\sin\dfrac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x=0$.

hay $\int\limits_0^1 \left[f\left(x\right) - 3\sin\dfrac{\pi x}{2} \right]^2 \mathrm{d}x = 0$ suy ra $f\left(x\right) = 3\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 3\sin\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = -\dfrac{6}{\pi}\cos\dfrac{\pi x}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{6}{\pi}$.

Câu 86: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x = 1$ và $\int\limits_0^1 \left[f\left(x\right)\right]^2 \mathrm{d}x = 4$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left[f\left(x\right)\right]^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Xét $\int\limits_0^1 \left[f\left(x\right) + \left(ax+b\right)\right]^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[f\left(x\right)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 \left[f\left(x\right).\left(ax+b\right)\right]\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \left(ax+b\right)^2 \mathrm{d}x$

$= 4 + 2a\int\limits_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x + 2b\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \dfrac{1}{3a}\left(ax+b\right)^3\Big|_0^1 = 4 + 2\left(a+b\right) + \dfrac{a^2}{3} + ab + b^2$.

Cần xác định a, b để $\dfrac{a^2}{3} + \left(2+b\right)a + b^2 + 2b + 4 = 0$

Ta có: $\Delta = b^2 + 4b + 4 - \dfrac{4}{3}\left(b^2 + 2b + 4\right) = \dfrac{-\left(b-2\right)^2}{3} \le 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -6$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 \left[f\left(x\right) + \left(-6x+2\right)\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f\left(x\right) = 6x - 2$

Suy ra $\int\limits_0^1 \left[f\left(x\right)\right]^3 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(6x-2\right)^3 \mathrm{d}x = \dfrac{1}{24}\left(6x-2\right)^4\Big|_0^1 = 10$.

Câu 87: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1, 2] và thỏa mãn $f\left(x\right) > 0$ khi $x \in \left[1,2\right]$. Biết $\int\limits_1^2 f'\left(x\right)dx = 10$ và $\int\limits_1^2 \dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx = \ln 2$. Tính $f\left(2\right)$.

A. $f\left(2\right) = -10$. **B.** $f\left(2\right) = 20$. **C.** $f\left(2\right) = 10$. **D.** $f\left(2\right) = -20$.

Hươngd dẫn giải:

Ta có: $\int\limits_1^2 f'\left(x\right)dx = f\left(x\right)\Big|_1^2 = f\left(2\right) - f\left(1\right) = 10$ (gt)

$\int\limits_1^2 \dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx = \ln\left[f\left(x\right)\right]\Big|_1^2 = \ln\left[f\left(2\right)\right] - \ln\left[f\left(1\right)\right] = \ln\dfrac{f\left(2\right)}{f\left(1\right)} = \ln 2$ (gt)

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} f\left(2\right) - f\left(1\right) = 10 \\ \dfrac{f\left(2\right)}{f\left(1\right)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(2\right) = 20 \\ f\left(1\right) = 10 \end{cases}$

Chọn B

Câu 88: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $\left[4;8\right]$ và $f\left(0\right) \ne 0$ với $\forall x \in \left[4;8\right]$. Biết rằng $\int\limits_4^8 \dfrac{\left[f'\left(x\right)\right]^2}{\left[f\left(x\right)\right]^4}dx = 1$ và $f\left(4\right) = \dfrac{1}{4}, f\left(8\right) = \dfrac{1}{2}$. Tính $f\left(6\right)$.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Hương dẫn giải

Chọn D

+) Xét $\int\limits_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int\limits_4^8 \frac{df(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(x)}\Big|_4^8 = -\left(\frac{1}{f(8)} - \frac{1}{f(4)}\right) = -(2-4) = 2$.

+) Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int\limits_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right)^2 dx = 0$.

Ta có: $\int\limits_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right)^2 dx = \int\limits_4^8 \frac{\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4}dx + 2k\int\limits_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx + k^2\int\limits_4^8 dx = 1 + 4k + 4k^2 = (2k+1)^2$.

Suy ra: $k = -\frac{1}{2}$ thì $\int\limits_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int\limits_4^6 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \frac{1}{2}\int\limits_4^6 dx$

$\Leftrightarrow \int\limits_4^6 \frac{df(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_4^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{3}$.

Chú ý: $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$ không được phép suy ra $f(x) = 0$, nhưng $\int\limits_a^b f^{2k}(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$ và $\left[f'(x)\right]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2 \le T < -1$. **B.** $-1 \le T < 0$. **C.** $0 \le T < 1$. **D.** $1 \le T < 2$.

Hương dẫn giải

Chọn A

Ta có: $T = f(1) - f(0) = \int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$

Lại có: $\left[f'(x)\right]^2 = f''(x) \Leftrightarrow -1 = -\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \Leftrightarrow -1 = \left[\frac{1}{f'(x)}\right]'$

$\Leftrightarrow -x + c = \frac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{-x+c}$.

Mà $f'(0) = -1$ nên $c = -1$.

Vậy $T = \int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{-x-1}\mathrm{d}x = -\ln\left|-x-1\right|\Big|_0^1 = -\ln 2$.

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả $\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = f'(0) = 1, \\ xy^2 + y'^2 = yy'', \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2} < \ln f(1) < 1$. **B.** $0 < \ln f(1) < \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2} < \ln f(1) < 2$. **D.** $1 < \ln f(1) < \frac{3}{2}$.

Hương dẫn giải

Chọn D

Ta có $xy^2+y'^2=yy''\Leftrightarrow\frac{y''y-y'^2}{y^2}=x\Leftrightarrow\left(\frac{y'}{y}\right)'=x\Leftrightarrow\frac{y'}{y}=\frac{x^2}{2}+C$ hay $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+C$.

Lại có $f(0)=f'(0)=1\Rightarrow C=1$.

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+1\Leftrightarrow\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)\Big|_0^1=\frac{7}{6}\Leftrightarrow\ln f(1)=\frac{7}{6}$.

$\Rightarrow 1<\ln\left(f(1)\right)<\frac{3}{2}$.

Câu 91: Cho f,g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Hương dẫn giải

Chọn B

Đặt $a=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$. Khi đó $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow a+3b=10$,

$\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow 2a-b=6$.

Do đó: $\begin{cases}a+3b=10\\2a-b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$. Vậy $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=a+b=6$.

Câu 92: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, nếu $\int_a^d f(x)\mathrm{d}x=5$ và $\int_b^d f(x)\mathrm{d}x=2$ (với $a<d<b$) thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ bằng.

A. 3. **B.** 7. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 10.

Hương dẫn giải

Chọn A

$\begin{cases}\int_a^d f(x)\mathrm{d}x=5\\\int_b^d f(x)\mathrm{d}x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F(d)-F(a)=5\\F(d)-F(b)=2\end{cases}\Rightarrow F(b)-F(a)=3=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 93: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1;3]$, thỏa mãn:

$\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ và $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$

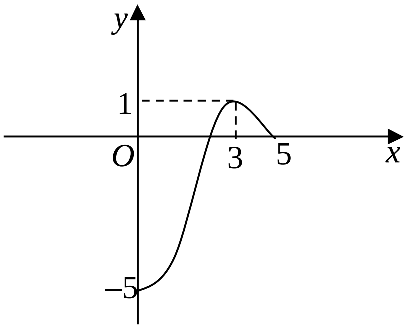
A. $I=8$. **B.** $I=9$. **C.** $I=6$. **D.** $I=7$.

Hương dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} \int\limits_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10 \\ \int\limits_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4 \\ \int\limits_1^3 g(x)\mathrm{d}x=2 \end{cases} \Rightarrow I=\int\limits_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=6$.

Câu 94: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0)=f(5)<f(3)$. **B.** $f(3)<f(0)=f(5)$.

C. $f(3)<f(0)<f(5)$. **D.** $f(3)<f(5)<f(0)$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_3^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(3)>0$, do đó $f(5)>f(3)$.

$\int\limits_0^3 f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(0)<0$, do đó $f(3)<f(0)$

$\int\limits_0^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(0)<0$, do đó $f(5)<f(0)$

Câu 95: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x\in(0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện:

$f(x)=x\left(\sin x+f'(x)\right)+\cos x$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x=-4$. Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(12;13)$. **D.** $(11;12)$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$f(x)=x\left(\sin x+f'(x)\right)+\cos x$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\cos x}{x^2} \Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(\dfrac{1}{x}\cos x\right)' \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x}\cos x+c$

$\Rightarrow f(x)=\cos x+cx$

Khi đó:

$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x=-4 \Leftrightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x+cx)\sin x\mathrm{d}x=-4$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \sin x \mathrm{d}x + c\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin x \mathrm{d}x = -4 \Leftrightarrow 0 + c(-2) = -4 \Leftrightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos x + 2x \Rightarrow f(\pi) = 2\pi - 1 \in (5;6).$$

Câu 96: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \mathrm{d}x = \frac{2-\pi}{2}.$$ Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$.   **B.** 0.   **C.** 1.   **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x)\mathrm{d}x$

$$= \left. \left(x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi - 2}{2}.$$

Do đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{2-\pi}{2} + \frac{\pi-2}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 \mathrm{d}x = 0$$

Suy ra $f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, hay $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Bởi vậy: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\cos\left.\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I = e + 4$.   **B.** $I = 8$.   **C.** $I = 2$.   **D.** $I = e + 2$.

Đề ban đầu bị sai vì khi thay $x = 0$ và $x = 2$ vào ta thấy mâu thuẫn nên tôi đã sửa lại đề

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Theo giả thuyết ta có $\int_0^2 \left[3f(x) + f(2-x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4\right]\mathrm{d}x$ (*).

Ta tính $\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x = -\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}(2-x) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Vì vậy $\int\limits_0^2 \left[3f(x)+f(2-x)\right]dx = 4\int\limits_0^2 f(x)dx$.

Hơn nữa $\int\limits_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1}dx = \int\limits_0^2 e^{x^2-2x+1}d\left(x^2-2x+1\right) = e^{x^2-2x+1}\Big|_0^2 = 0$ và $\int\limits_0^2 4dx = 8$.

Suy ra $4\int\limits_0^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)dx = 2$.

Câu 98: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{25}{4}$.   **B.** $\frac{9}{2}$.   **C.** $\frac{5}{2}$.   **D.** $\frac{13}{4}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Suy ra $\frac{x}{x+1}.f(x) = \int \frac{x}{x+1}dx$ hay $\frac{x}{x+1}.f(x) = x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\frac{x}{x+1}.f(x) = x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\frac{2}{3}.f(2)=1-\ln 3 \Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\frac{9}{2}$.

Câu 99: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x\ \forall x>0$ và $f(1)=-1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

B. Phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

$f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x=\frac{x^6-2x^3+2}{x^2}=\frac{\left(x^3-1\right)^2+1}{x^2}>0$, $\forall x>0$.

$\Rightarrow y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$ (1).

Mặt khác ta có:

$f'(x)\ge x^4+\frac{2}{x^2}-2x>0$, $\forall x>0 \Rightarrow \int\limits_1^2 f'(x)dx \ge \int\limits_1^2\left(x^4+\frac{2}{x^2}-2x\right)dx=\frac{21}{5}$

$\Rightarrow f(2)-f(1)\ge\frac{21}{5} \Rightarrow f(2)\ge\frac{17}{5}$.

Kết hợp giả thiết ta có $y=f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và $f(2).f(1)<0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(1;2)$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)\in[-1;1]$ với $\forall x\in(0;2)$. Biết $f(0)=f(2)=1$. Đặt $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, phát biểu nào dưới đây đúng?

A. $I\in(-\infty;0]$. **B.** $I\in(0;1]$. **C.** $I\in[1;+\infty)$. **D.** $I\in(0;1)$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Ta có $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

□ $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1(x-1)f'(x)\mathrm{d}x=1+\int\limits_0^1(1-x)f'(x)\mathrm{d}x\ge 1-\int\limits_0^1(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ (1).

□ $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2(x-1)f'(x)\mathrm{d}x=1-\int\limits_1^2(x-1)f'(x)\mathrm{d}x\ge 1-\int\limits_1^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Câu 101: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$ và $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};\mathrm{e}-1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(\mathrm{e}-1;+\infty)$.

Hươngd dẫn giải

Chọn C

Với mọi $a\in[0;1]$, ta có $0=\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=a\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 axf(x)\mathrm{d}x$

Kí hiệu $I(a)=\int\limits_0^1(\mathrm{e}^x-ax)\mathrm{d}x$.

Khi đó, với mọi $a\in[0;1]$ ta có $\left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 axf(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_0^1(\mathrm{e}^x-ax)f(x)\mathrm{d}x\right|$

$\le\int\limits_0^1|\mathrm{e}^x-ax|.|f(x)|\mathrm{d}x\le\int\limits_0^1|\mathrm{e}^x-ax|.\max\limits_{x\in[0;1]}|f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1|\mathrm{e}^x-ax|\mathrm{d}x=I(a)$.

Suy ra $\left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right|\le\min\limits_{a\in[0;1]}I(a)$

Mặt khác

Với mọi $a\in[0;1]$ ta có $I(a)=\int\limits_0^1|\mathrm{e}^x-ax|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(\mathrm{e}^x-ax)\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^x-\frac{a}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\mathrm{e}-\frac{a}{2}-1$

$\min\limits_{a\in[0;1]}I(a)=\mathrm{e}-\frac{3}{2}\Rightarrow\left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right|\le\mathrm{e}-\frac{3}{2}\approx 1,22$.

Vậy $I\in\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 102: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1\left[f'(x)[f(x)]^2+\frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x\le 2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Hươngd dẫn giải

Chọn D

Từ giả thiết suy ra:

$$\int_0^1\left[\left(3\sqrt{f'(x)}f(x)\right)^2-2.3\sqrt{f'(x)}f(x)+1\right]\mathrm{d}x\le 0\Leftrightarrow\int_0^1\left[3\sqrt{f'(x)}f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x\le 0.$$

Suy ra $3\sqrt{f'(x)}f(x)-1=0\Leftrightarrow\sqrt{f'(x)}f(x)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow f'(x).f^2(x)=\frac{1}{9}$.

Vì $\left[f^3(x)\right]'=3.f^2(x)f'(x)$ nên suy ra $\left[f^3(x)\right]'=\frac{1}{3}\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $f^3(0)=1\Rightarrow C=1$.

Vậy $\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+1$. Suy ra $\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$.

Câu 103: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\ g(x)=-x.f'(x);\quad f(x)=-x.g'(x)\end{cases}$. Tính $I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

A. $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

Hươngd dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right]\Leftrightarrow\frac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}=-\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow\int\frac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\ln|f(x)+g(x)|=-\ln|x|+C$

Theo giả thiết ta có $C-\ln|1|=\ln|f(1)+g(1)|\Rightarrow C=\ln 4$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}f(x)+g(x)=\frac{4}{x}\\ f(x)+g(x)=-\frac{4}{x}\end{array}\right.$, vì $f(1)+g(1)=4$ nên $f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$

$\Rightarrow I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Cách 2: Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right]$

$\Rightarrow\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=-\int x\left[f'(x)+g'(x)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=-x[f(x)+g(x)]+\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -x[f(x)+g(x)]=C\Rightarrow f(x)+g(x)=-\frac{C}{x}$. Vì $f(1)+g(1)=-C\Rightarrow C=-4$

Do đó $f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$. Vậy $I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

BÀI TẬP

Câu 188. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;2\right]$ và $f\left(2\right)=3$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_0^2 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. -3. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 6.

Câu 189. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)$ liên tục trên đoạn [0; 1] và $f\left(1\right)=2$. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-3$.

Câu 190. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 \left(x+1\right)f'\left(x\right)dx=10$ và $2f\left(1\right)-f\left(0\right)=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$.

A. $I=8$. **B.** $I=-8$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-4$.

Câu 191. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và thỏa mãn $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Câu 192. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-2\right)=1$, $\int\limits_1^2 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_{-2}^0 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=4$.

Câu 193. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_1^5 x.f'\left(x\right)dx$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** -1761.

Câu 194. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trong đoạn $\left[1;\mathrm{e}\right]$, biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=1$, $f\left(\mathrm{e}\right)=1$. Khi đó $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=0$.

Câu 195. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0)=f(1)=1$. Biết $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$. Tính biểu thức $Q=a^{2018}+b^{2018}$.

A. $Q=8$. **B.** $Q=6$. **C.** $Q=4$. **D.** $Q=2$.

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2019e^{2018}$. **B.** $f(1)=2018.e^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018.e^{2018}$. **D.** $f(1)=2017.e^{2018}$.

Câu 198. Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng: $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$ Tính $Q=a^{2017}+b^{2017}$.

A. $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

Câu 199. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;5]$ và $f(5)=10$, $\int_0^5 xf'(x)dx=30$. Tính $\int_0^5 f(x)dx$.

A. 20. **B.** -30. **C.** -20. **D.** 70.

Câu 200. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1$, $F(2)=4$, $G(1)=\frac{3}{2}$, $G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx=\frac{67}{12}$. Tính $\int_1^2 F(x)g(x)dx$

A. $\frac{11}{12}$. **B.** $-\frac{145}{12}$. **C.** $-\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{145}{12}$.

Câu 201. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x\left[f'(x)-2\right]dx=f(1)$. Giá trị của $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 202. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và $\int_1^2 (x-1)f'(x)dx=a$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$ theo a và $b=f(2)$.

A. $b-a$. **B.** $a-b$. **C.** $a+b$. **D.** $-a-b$.

Câu 203. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)dx=4$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)dx$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Câu 204. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt=3$, tính $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sin 2x.f'(\sin x)dx$.

A. $I=10$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Câu 205. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(0\right)=1$. Tính $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-1$.

Câu 206. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$?

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** $\frac{2}{2018}$. **C.** $\frac{2}{1009}$. **D.** $\frac{4}{2019}$.

Câu 207. Cho hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'\left(0\right).f'\left(2\right)\neq 0$ và $g\left(x\right)f'\left(x\right)=x\left(x-2\right)\mathrm{e}^{x}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right).g'\left(x\right)\mathrm{d}x$?

A. -4. **B.** $\mathrm{e}-2$. **C.** 4. **D.** $2-\mathrm{e}$.

Câu 208. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Câu 209. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_{0}^{4}xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

A. $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

Câu 210. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai $f''\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thoả mãn $f\left(1\right)=f\left(0\right)=1$, $f'\left(0\right)=2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_{0}^{1}f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=-2018$. **B.** $\int\limits_{0}^{1}f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=-1$.

C. $\int\limits_{0}^{1}f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=2018$. **D.** $\int\limits_{0}^{1}f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=1$.

Câu 211. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f'\left(x\right)\right]^{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. Tính $f\left(2018\pi\right)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 212. Cho hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(x\right).f\left(2-x\right)=\mathrm{e}^{2x^{2}-4x}$, với mọi $x\in\left[0;2\right]$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}\frac{\left(x^{3}-3x^{2}\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{16}{3}$. **B.** $I=-\frac{16}{5}$. **C.** $I=-\frac{14}{3}$. **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

Câu 213. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)dx = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 2-e$. **B.** $I = e-2$. **C.** $I = \frac{e}{2}$. **D.** $I = \frac{e-1}{2}$.

Câu 214. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$. **B.** $I = -\frac{7}{5}$. **C.** $I = -\frac{7}{20}$. **D.** $I = \frac{7}{20}$.

Câu 215. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Câu 216. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx = \frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)dx$

A. $I = 1$. **B.** $I = \frac{1}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{1}{4}$.

Câu 217. . Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)dx = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 218. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x)dx = \frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Câu 219. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$. Tính $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx$.

A. $J = 1+\ln 4$. **B.** $J = 4-\ln 2$. **C.** $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. **D.** $J = \frac{1}{2}+\ln 4$.

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)dx = \frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{e-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2}{4}$. **C.** $e-2$. **D.** $\frac{e}{2}$.

Câu 221. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 188. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;2\right]$ và $f\left(2\right)=3$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\text{d}x=3$.

Tính $\int\limits_0^2 x.f'\left(x\right)\text{d}x$.

A. -3. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^2 x.f'\left(x\right)\text{d}x=\int\limits_0^2 x\text{d}\left(f\left(x\right)\right)=x.f\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\text{d}x=2f\left(2\right)-3=3$.

Câu 189. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)$ liên tục trên đoạn [0; 1] và $f\left(1\right)=2$. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)dx$

Đặt $u=x\Rightarrow du=dx$, $dv=f'\left(x\right)dx$ chọn $v=\int f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)$

$\Rightarrow I=x.f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1.f\left(1\right)-0.f\left(0\right)-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2-1=1$

Chọn A

Câu 190. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left(x+1\right)f'\left(x\right)dx=10$ và $2f\left(1\right)-f\left(0\right)=2$. Tính

$I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$.

A. $I=8$. **B.** $I=-8$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-4$.

Hướng dẫn giải

$A=\int\limits_0^1\left(x+1\right)f'\left(x\right)dx$ Đặt $u=x+1\Rightarrow du=dx$, $dv=f'\left(x\right)dx$ chọn $v=f\left(x\right)$

$\Rightarrow A=\left(x+1\right).f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=10\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=-8$

Chọn B

Câu 191. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và thỏa mãn $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\text{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(2x\right)\text{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \text{d}v=f'\left(2x\right)\text{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{d}u=\text{d}x\\ v=\dfrac{f\left(2x\right)}{2}\end{cases}$.

Khi đó: $I=\left.\dfrac{x.f\left(2x\right)}{2}\right|_0^1-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{f\left(2\right)}{2}-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{16}{2}-\dfrac{1}{4}.4=7$.

Câu 192. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-2\right)=1$, $\int\limits_1^2 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_{-2}^0 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=2x-4\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$, đổi cận $x=1\Rightarrow t=-2$, $x=2\Rightarrow t=0$.

$1=\int\limits_1^2 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t\Rightarrow\int\limits_{-2}^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\Rightarrow\int\limits_{-2}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow v=f\left(x\right)$.

Vậy $\int\limits_{-2}^0 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\left.xf\left(x\right)\right|_{-2}^0-\int\limits_{-2}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2f\left(-2\right)-2=2.1-2=0$.

Câu 193. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_1^5 x.f'\left(x\right)dx$.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** -1761.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'\left(x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f\left(x\right)\end{cases}\Rightarrow I=\left.xf\left(x\right)\right|_1^5-\int\limits_1^5 f\left(x\right)dx$.

Từ $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2\Rightarrow\begin{cases}f\left(5\right)=5\ \left(x=1\right)\\ f\left(1\right)=2\ \left(x=0\right)\end{cases}$, suy ra $I=23-\int\limits_1^5 f\left(x\right)dx$.

Đặt $t=x^3+3x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(3x^2+3\right)dx\\ f\left(t\right)=3x+2\end{cases}$

Đổi cận: Với $t=1\Rightarrow1=x^3+3x+1\Leftrightarrow x=0$ và $t=5\Rightarrow x^3+3x+1=5\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=23-\int\limits_1^5 f\left(x\right)dx=23-\int\limits_0^1\left(3x+2\right)\left(3x^2+3\right)dx\overset{Casio}{=}\dfrac{33}{4}$

Chọn C

Câu 194. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trong đoạn $\left[1;\mathrm{e}\right]$, biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=1$, $f\left(\mathrm{e}\right)=1$. Khi đó $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x=\left.f\left(x\right).\ln x\right|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}} f\left(x\right).\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=f\left(\mathrm{e}\right)-1=1-1=0$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_1^e f'(x).\ln x dx = f(x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \dfrac{f(x)}{x} dx = f(e) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Câu 195. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx$ bằng

A. $-\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo giả thiết, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$ nên

$f(0) + f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\left[f(x)\right] = \left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

Suy ra: $I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Mặt khác, ta có:

$$f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos x dx = \dfrac{1}{2}$$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)dx = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \dfrac{1}{4}$

Vậy $I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = -\dfrac{1}{4}$.

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0) = f(1) = 1$. Biết $\int_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = ae + b$. Tính biểu thức $Q = a^{2018} + b^{2018}$.

A. $Q = 8$. **B.** $Q = 6$. **C.** $Q = 4$. **D.** $Q = 2$.

Hướng dẫn giải

$$A = \int_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = \underbrace{\int_0^1 e^x f(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \int_0^1 e^x f(x)dx$$

Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$, $dv = e^x dx$ chọn $v = e^x \Rightarrow A_1 = e^x.f(x)\Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$

Vậy $A = e^x f(x)\Big|_0^1 - A_2 + A_2 = e^x f(x)\Big|_0^1 = e.f(1) - f(0) = e - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a^{2018} + b^{2018} = 1 + 1 = 2$

Chọn D

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2019e^{2018}$. **B.** $f(1) = 2018.e^{-2018}$. **C.** $f(1) = 2018.e^{2018}$. **D.** $f(1) = 2017.e^{2018}$

.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) - 2018f(x) = 2018.x^{2017}.e^{2018x} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x) - 2018.f(x)}{e^{2018x}} = 2018.x^{2017}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \dfrac{f'(x) - 2018.f(x)}{e^{2018x}}dx = \int_0^1 2018.x^{2017}dx$ (1)

Xets $I = \int_0^1 \dfrac{f'(x) - 2018.f(x)}{e^{2018x}}dx = \int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx - \int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$

Xét $I_1 = \int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 2018.e^{-2018x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = -e^{-2018x} \end{cases}$.

Do đó $I_1 = f(x).\left(-e^{-2018x}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx \Rightarrow I = f(1).e^{-2018x} - 2018$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(1).e^{-2018x} - 2018 = x^{2018}\Big|_0^1 \Rightarrow f(1) = 2019.e^{2018}$.

Câu 198. Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng: $\int_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = ae + b$ Tính $Q = a^{2017} + b^{2017}$.

A. $Q = 2^{2017} + 1$. **B.** $Q = 2$. **C.** $Q = 0$. **D.** $Q = 2^{2017} - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = e^x \end{cases}$.

$\int_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = e^x f(x)\Big|_1^2 - \int_0^1 e^x f'(x)dx + \int_0^1 e^x f'(x)dx = ef(1) - f(0) = e - 1$.

Do đó $a = 1$, $b = -1$.

Suy ra $Q = a^{2017} + b^{2017} = 1^{2017} + (-1)^{2017} = 0$.

Vậy $Q = 0$.

Câu 199. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;5\right]$ và $f\left(5\right)=10$, $\int\limits_0^5 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=30$. Tính $\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 20. **B.** -30. **C.** -20. **D.** 70.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow v=f\left(x\right) \end{cases}$

$\int\limits_0^5 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x.f\left(x\right)\right)\Big|_0^5-\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 30=5f\left(5\right)-\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=5f\left(5\right)-30=20$.

Câu 200. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $\left[1;2\right]$. Biết rằng $F\left(1\right)=1$, $F\left(2\right)=4$, $G\left(1\right)=\frac{3}{2}$, $G\left(2\right)=2$ và $\int\limits_1^2 f\left(x\right)G\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{67}{12}$. Tính $\int\limits_1^2 F\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. $\frac{11}{12}$. **B.** $-\frac{145}{12}$. **C.** $-\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{145}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=F\left(x\right) \\ dv=g\left(x\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f\left(x\right)\mathrm{d}x \\ v=G\left(x\right) \end{cases}$

$\int\limits_1^2 F\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(F\left(x\right)G\left(x\right)\right)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f\left(x\right)G\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(2\right)G\left(2\right)-F\left(1\right)G\left(1\right)-\int\limits_1^2 f\left(x\right)G\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=4.2-1.\frac{3}{2}-\frac{67}{12}=\frac{11}{12}$.

Câu 201. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 x\left[f'\left(x\right)-2\right]\mathrm{d}x=f\left(1\right)$. Giá trị của $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1 x\left[f'\left(x\right)-2\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 2x\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^1 x\mathrm{d}\left[f\left(x\right)\right]-x^2\Big|_0^1=x.f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-1=f\left(1\right)-I-1$.

Theo đề bài $\int\limits_0^1 x\left[f'\left(x\right)-2\right]\mathrm{d}x=f\left(1\right)\Rightarrow I=-1$.

Câu 202. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$ và $\int\limits_1^2\left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=a$. Tính $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ theo a và $b=f\left(2\right)$.

A. $b-a$. **B.** $a-b$. **C.** $a+b$. **D.** $-a-b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $u=x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ chọn $v=f\left(x\right)$.

$$\int\limits_1^2\left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x-1\right)f\left(x\right)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(2\right)-\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=b-\int\limits_1^2 f\left(x\right).$$

Ta có $\int\limits_1^2\left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow b-\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=b-a$.

Câu 203. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(2x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}f\left(2x\right)\end{cases}$.

Khi đó, $I=x.\dfrac{1}{2}f\left(2x\right)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}f\left(2\right)-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=8-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2$.

Suy ra $I=8-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=8-1=7$.

Câu 204. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua điểm $M\left(-\dfrac{1}{2};4\right)$ và $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f\left(t\right)\mathrm{d}t=3$, tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0\sin 2x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0\sin 2x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0 2\sin x.f'\left(\sin x\right).\cos x\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$\Rightarrow I=2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0 t.f'\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Đặt: $\begin{cases} u = 2t \\ dv = f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = f(t) \end{cases}$.

$\Rightarrow I = 2t.f(t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} - 2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt = f\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$.

□ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$.

□ Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} f(t)dt = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 3$.

Vậy $I = 4 - 2.3 = -2$.

Câu 205. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx = f(0) = 1$. Tính $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx$.

A. $I = 1$.	**B.** $I = 0$.	**C.** $I = 2$.	**D.** $I = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx = (-\cos x.f(x))\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx$.

$\Rightarrow I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx + \cos x.f(x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 1 = 0$.

Câu 206. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x\sin x$. Tính $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$?

A. $\frac{2}{2019}$.	**B.** $\frac{2}{2018}$.	**C.** $\frac{2}{1009}$.	**D.** $\frac{4}{2019}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(f(-x) + 2018f(x)\right)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin xdx$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx + 2018\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin xdx \Leftrightarrow 2019\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin xdx$ (1)

+ Xét $P = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin xdx$

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$P = 2x.(-\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4$

Từ (1) suy ra $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \dfrac{4}{2019}$.

Câu 207. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2) \neq 0$ và $g(x)f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^2 f(x).g'(x)dx$?

A. -4. **B.** $e-2$. **C.** 4. **D.** $2-e$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $g(x)f'(x) = x(x-2)e^x \Rightarrow g(0) = g(2) = 0$ (vì $f'(0).f'(2) \neq 0$)

$I = \int\limits_0^2 f(x).g'(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dg(x) = \left(f(x).g(x)\right)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 g(x).f'(x)dx = -\int\limits_0^2 (x^2-2x)e^x dx = 4$.

Câu 208. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{f(x)}{\cos x}dx = 1$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin x.\tan x.f(x)\right]dx = 2$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)dx$ bằng:

A. 4. **B.** $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$I = \sin x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x.f(x)dx = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - I_1$.

$2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin x.\tan x.f(x)\right]dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin^2 x.\dfrac{f(x)}{\cos x}\right]dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1-\cos^2 x).\dfrac{f(x)}{\cos x}\right]dx$.

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\dfrac{f(x)}{\cos x}\right]dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x.f(x)dx = 1 - I_1$.

$\Rightarrow I_1 = -1 \Rightarrow I = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 1 = \dfrac{3\sqrt{2}+2}{2}$.

Câu 209. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int\limits_0^2 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int\limits_0^4 xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$

A. $I = 12$. **B.** $I = 112$. **C.** $I = 28$. **D.** $I = 144$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = 2f\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$.

Khi đó

$I = \int\limits_0^4 xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 2xf\left(\dfrac{x}{2}\right)\Big|_0^4 - 2\int\limits_0^4 f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 128 - 2I_1$ với $I_1 = \int\limits_0^4 f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \dfrac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}u$, khi đó $I_1 = \int\limits_0^4 f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(u)\mathrm{d}u = 2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 8$.

Vậy $I = 128 - 2I_1 = 128 - 16 = 112$.

Câu 210. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f(1) = f(0) = 1$, $f'(0) = 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x = -2018$. **B.** $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x = -1$.

C. $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x = 2018$. **D.** $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét $I = \int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1-x)\mathrm{d}\left(f'(x)\right)$

Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}\left(f'(x)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \\ v = f'(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow I = (1-x)f'(x)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \left[(1-1)f'(1) - f'(0)\right] + f(x)\Big|_0^1 = -f'(0) + \left[f(1) - f(0)\right]$

$= -2018 + (1-1) = -2018$.

Câu 211. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\, f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xf(x)\mathrm{d}x = \left[\sin xf(x)\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xf'(x)\mathrm{d}x$. Suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xf'(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \left[\dfrac{2x - \sin 2x}{4}\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \dfrac{\pi}{4}$.

Do đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)+\sin x\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Suy ra $f'(x)=-\sin x$. Do đó $f(x)=\cos x+C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ nên $C=0$.

Ta được $f(x)=\cos x \Rightarrow f(2018\pi)=\cos(2018\pi)=1$.

Câu 212. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{16}{3}$. **B.** $I=-\frac{16}{5}$. **C.** $I=-\frac{14}{3}$. **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$\ln\left[f(x).f(2-x)\right]=\ln\mathrm{e}^{2x^2+4x} \Leftrightarrow \ln f(x)+\ln f(2-x)=2x^2-4x$.

Mặt khác, với $x=0$, ta có $f(0).f(2)=1$ và $f(0)=1$ nên $f(2)=1$.

Xét $I=\int\limits_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, ta có $I=\int\limits_0^2\left(x^3-3x^2\right).\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=x^3-3x^2\\ \mathrm{d}v=\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=\left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x\\ v=\ln f(x)\end{cases}$

Suy ra $I=\left[\left(x^3-3x^2\right)\ln f(x)\right]\Big|_0^2-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x$ (1).

Đến đây, đổi biến $x=2-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0\to t=2$ và $x=2\to t=0$.

Ta có $I=-\int\limits_2^0\left(3t^2-6t\right).\ln f(2-t)(-\mathrm{d}t)=-\int\limits_0^2\left(3t^2-6t\right).\ln f(2-t)\mathrm{d}t$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I=-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right).\ln f(2-x)\mathrm{d}x$ (2).

Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được $2I=-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right).\left[\ln f(x)+\ln f(2-x)\right]\mathrm{d}x$

Hay $I=-\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right).\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=-\frac{16}{5}$.

Cách 2 (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-2x}$, khi đó:

$I=\int\limits_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right).\mathrm{e}^{x^2-2x}.(2x-2)}{\mathrm{e}^{x^2-2x}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^3-3x^2\right).(2x-2)\mathrm{d}x=\frac{-16}{5}$.

Câu 213. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2-\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}-2$. **C.** $I=\frac{\mathrm{e}}{2}$. **D.** $I=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $A=\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=x\mathrm{e}^x \end{cases}$

Suy ra $A=x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}$

Xét $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Ta có $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f'(x)+x\mathrm{e}^x=0\ \ \forall x\in[0;1]$ (do $\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\ge 0\ \ \forall x\in[0;1]$)

$\Rightarrow f'(x)=-x\mathrm{e}^x \Rightarrow f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x+C$

Do $f(1)=0$ nên $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-2$.

Câu 214. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=(x-1)^2\mathrm{d}x \Rightarrow v=\frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3}=\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{(x-1)^3}{3}.f(x)\Bigg|_1^2-\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3}f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x=1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x=-14$

Tính được $\int_1^2 49(x-1)^6\mathrm{d}x=7 \Rightarrow \int_1^2 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 49(x-1)^6\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow \int_1^2 \left[7(x-1)^3-f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=0 \Rightarrow f'(x)=7(x-1)^3 \Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}+C$.

Do $f(2)=0 \Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}$.

Vậy $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 \left[\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}\right]\mathrm{d}x=-\frac{7}{5}$.

Câu 215. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.   **B.** $\frac{5}{2}$.   **C.** $\frac{7}{4}$.   **D.** $\frac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9 \ (1)$

- Tính $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \left(\frac{x^4}{4}.f(x)\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4.f'(x)dx = -1 \Rightarrow 18\int_0^1 x^4.f'(x)dx = -18 \ (2)$$

- Lại có: $\int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81\int_0^1 x^8 dx = 9 \ (3)$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[[f'(x)]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8\right]dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)+9x^4\right]dx = 0 \Leftrightarrow \pi.\int_0^1 \left[f'(x)+9x^4\right]dx = 0$$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + 9x^4$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x)+9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x).dx = -\frac{9}{5}x^4 + C.$$

Lại do $f(1)=1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}\right)dx = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Câu 216. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx = \frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)dx$

A. $I=1$.   **B.** $I = \frac{1}{2}$.   **C.** $I=2$.   **D.** $I = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases}\sin 2x=u\\ f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cos 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ f(x)=v\end{cases}$, khi đó

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=\sin 2x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\sin\frac{\pi}{2}.f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin 0.f(0)-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$.

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f(x)-\cos 2x\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f^2(x)-2f(x).\cos 2x+\cos^2 2x\right]\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{8}-2\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=0$ nên $f(x)=\cos 2x$.

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{4}$.

Câu 217. . Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\cos(\pi x)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó: $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$=-(f(1)+f(0))+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Cách 1: Ta có

Tìm k sao cho $\int_0^1\left[f(x)-k\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x=0$

Ta có: $\int_0^1\left[f(x)-k\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x+k^2\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0\Leftrightarrow k=1.$

Do đó $\int_0^1\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$ (do $\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2\geq 0\quad\forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=k.g(x),\ \forall x\in[a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2\leq\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

suy ra $f(x)=k.\sin(\pi x),\ k\in\mathbb{R}$.

Mà $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$

Câu 218. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\end{cases}$

Do đó $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1-\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$

Lại có: $\int_0^1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I=\int_0^1\left(-\frac{2}{\pi}.f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8}-\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=0$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\geq 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$\int\limits_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi} f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Suy ra $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$ mà $f(1) = 0$ do đó $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

Câu 219. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f(2) = 4$. Tính $J = \int\limits_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $J = 1 + \ln 4$. **B.** $J = 4 - \ln 2$. **C.** $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. **D.** $J = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $J = \int\limits_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{x}\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$$J = \int\limits_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{x}.f(x)\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}f(2) - f(1) + \left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4.$$

Cách 2: $J = \int\limits_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \int\limits_1^2 \left(\frac{f(x)}{x}\right)'\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{f(x)}{x} + 2\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4.$$

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = ax + b$. Vì $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$, suy ra $f(x) = 3x - 2$.

Vậy $J = \int\limits_1^2 \left(\frac{5}{x} - \frac{3x-1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(2\ln|x| - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \ln 4 + \frac{1}{2}$.

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}$ và $f(1) = 0$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\mathrm{e} - 2$. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

- Tính: $I = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = J + K$.

Tính $K=\int_0^1 e^x f(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u=e^x f(x) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\left[e^x f(x)+e^x f'(x)\right]dx \\ v=x \end{cases}$

$\Rightarrow K=\left(xe^x f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left[xe^x f(x)+xe^x f'(x)\right]dx=-\int_0^1 xe^x f(x)dx-\int_0^1 xe^x f'(x)dx$ $\left(\text{do } f(1)=0\right)$

$\Rightarrow K=-J-\int_0^1 xe^x f'(x)dx \Rightarrow I=J+K=-\int_0^1 xe^x f'(x)dx$.

- Kết hợp giả thiết ta được:

$$\begin{cases} \int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\dfrac{e^2-1}{4} \\ -\int_0^1 xe^x f'(x)dx=\dfrac{e^2-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\dfrac{e^2-1}{4} & (1) \\ 2\int_0^1 xe^x f'(x)dx=-\dfrac{e^2-1}{2} & (2) \end{cases}$$

- Mặt khác, ta tính được: $\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\dfrac{e^2-1}{4}$ (3).

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\int_0^1\left(\left[f'(x)\right]^2+2xe^x f'(x)+x^2e^{2x}\right)dx=0 \Leftrightarrow \int_o^1\left(f'(x)+xe^x\right)^2dx=0 \Leftrightarrow \pi\int_o^1\left(f'(x)+xe^x\right)^2dx=0$$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)+xe^x$, trục Ox, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$\Rightarrow f'(x)+xe^x=0 \Leftrightarrow f'(x)=-xe^x$

$\Rightarrow f(x)=-\int xe^x dx=(1-x)e^x+C$.

- Lại do $f(1)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=(1-x)e^x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x)e^x dx=\left((1-x)e^x\right)\Big|_0^1+\int_0^1 e^x dx=-1+e^x\Big|_0^1=e-2$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=e-2$.

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Tính: $\int_0^1 x^2 f(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\dfrac{x^3}{3} \end{cases}$.

Ta có: $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\dfrac{x^3 f(x)}{3}\Bigg|_0^1-\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx$

$=\dfrac{1.f(1)-0.f(0)}{3}-\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow -\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1$.

Ta có $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ (1).

$\int\limits_0^1 x^6\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^7}{7}\right|_0^1=\dfrac{1}{7}\Rightarrow\int\limits_0^1 49x^6\mathrm{d}x=\dfrac{1}{7}.49=7$ (2).

$\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\int\limits_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-14$ (3).

Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 49x^6\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x=7+7-14=0$.

$\Rightarrow\int\limits_0^1\left\{\left[f'(x)\right]^2+14x^3f'(x)+49x^6\right\}\mathrm{d}x=0\Rightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Do $\left[f'(x)+7x^3\right]^2\ge 0\Rightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x\ge 0$. Mà $\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=-7x^3$.

$f(x)=-\dfrac{7x^4}{4}+C$. Mà $f(1)=0\Rightarrow -\dfrac{7}{4}+C=0\Rightarrow C=\dfrac{7}{4}$.

Do đó $f(x)=-\dfrac{7x^4}{4}+\dfrac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{7x^4}{4}+\dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\dfrac{7x^5}{20}+\dfrac{7}{4}x\right)\right|_0^1=\dfrac{7}{5}$.

Cách 2: Tương tự như trên ta có: $\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$7=7\left(\int\limits_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le 7\left(\int\limits_0^1\left(x^3\right)^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)=7\cdot\frac{1}{7}\cdot\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=ax^3$, với $a\in\mathbb{R}$.

Ta có $\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\int\limits_0^1 x^3.ax^3\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\left.\dfrac{ax^7}{7}\right|_0^1=-1\Rightarrow a=-7$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=-\dfrac{7x^4}{4}+C$, mà $f(1)=0$ nên $C=\dfrac{7}{4}$

Do đó $f(x)=\dfrac{7}{4}\left(1-x^4\right)\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{7x^4}{4}+\dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\dfrac{7x^5}{20}+\dfrac{7}{4}x\right)\right|_0^1=\dfrac{7}{5}$.

Chú ý: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Khi đó, ta có $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$.

Chứng minh:

Trước hết ta có tính chất:

Nếu hàm số $h(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x \ge 0$

Xét tam thức bậc hai $\left[\lambda f(x)+g(x)\right]^2 = \lambda^2 f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+g^2(x) \ge 0$, với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a;b]$ ta được

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \ge 0 \text{, với mọi } \lambda \in \mathbb{R}\ (*)$$

Coi $(*)$ là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta' \le 0$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) \text{ (đpcm)}$$

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

BÀI TẬP

Câu 188. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;2\right]$ và $f\left(2\right)=3$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_0^2 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. -3. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 6.

Câu 189. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)$ liên tục trên đoạn [0; 1] và $f\left(1\right)=2$. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-3$.

Câu 190. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 \left(x+1\right)f'\left(x\right)dx=10$ và $2f\left(1\right)-f\left(0\right)=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$.

A. $I=8$. **B.** $I=-8$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-4$.

Câu 191. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và thỏa mãn $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Câu 192. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-2\right)=1$, $\int\limits_1^2 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_{-2}^0 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=4$.

Câu 193. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_1^5 x.f'\left(x\right)dx$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** -1761.

Câu 194. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trong đoạn $\left[1;\mathrm{e}\right]$, biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=1$, $f\left(\mathrm{e}\right)=1$. Khi đó $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=0$.

Câu 195. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0)=f(1)=1$. Biết $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$. Tính biểu thức $Q=a^{2018}+b^{2018}$.

A. $Q=8$. **B.** $Q=6$. **C.** $Q=4$. **D.** $Q=2$.

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2019e^{2018}$. **B.** $f(1)=2018.e^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018.e^{2018}$. **D.** $f(1)=2017.e^{2018}$.

Câu 198. Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng: $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$ Tính $Q=a^{2017}+b^{2017}$.

A. $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

Câu 199. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;5]$ và $f(5)=10$, $\int_0^5 xf'(x)dx=30$. Tính $\int_0^5 f(x)dx$.

A. 20. **B.** -30. **C.** -20. **D.** 70.

Câu 200. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1$, $F(2)=4$, $G(1)=\frac{3}{2}$, $G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx=\frac{67}{12}$. Tính $\int_1^2 F(x)g(x)dx$

A. $\frac{11}{12}$. **B.** $-\frac{145}{12}$. **C.** $-\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{145}{12}$.

Câu 201. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x\left[f'(x)-2\right]dx=f(1)$. Giá trị của $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 202. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và $\int_1^2 (x-1)f'(x)dx=a$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$ theo a và $b=f(2)$.

A. $b-a$. **B.** $a-b$. **C.** $a+b$. **D.** $-a-b$.

Câu 203. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)dx=4$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)dx$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Câu 204. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt=3$, tính $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2x.f'(\sin x)dx$.

A. $I=10$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Câu 205. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(0\right)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-1$.

Câu 206. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$?

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** $\frac{2}{2018}$. **C.** $\frac{2}{1009}$. **D.** $\frac{4}{2019}$.

Câu 207. Cho hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'\left(0\right).f'\left(2\right)\neq 0$ và $g\left(x\right)f'\left(x\right)=x\left(x-2\right)\mathrm{e}^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2 f\left(x\right).g'\left(x\right)\mathrm{d}x$?

A. -4. **B.** $\mathrm{e}-2$. **C.** 4. **D.** $2-\mathrm{e}$.

Câu 208. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Câu 209. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

A. $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

Câu 210. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai $f''\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thoả mãn $f\left(1\right)=f\left(0\right)=1$, $f'\left(0\right)=2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_0^1 f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=-2018$. **B.** $\int\limits_0^1 f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=-1$.

C. $\int\limits_0^1 f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=2018$. **D.** $\int\limits_0^1 f''\left(x\right)\left(1-x\right)\mathrm{d}x=1$.

Câu 211. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\, f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. Tính $f\left(2018\pi\right)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 212. Cho hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(x\right).f\left(2-x\right)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in\left[0;2\right]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{16}{3}$. **B.** $I=-\frac{16}{5}$. **C.** $I=-\frac{14}{3}$. **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

Câu 213. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx=\int_0^1(x+1)e^x f(x)\,dx=\frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. $I=2-e$. **B.** $I=e-2$. **C.** $I=\frac{e}{2}$. **D.** $I=\frac{e-1}{2}$.

Câu 214. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2(x-1)^2 f(x)\,dx=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2[f'(x)]^2\,dx=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\,dx$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Câu 215. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx=9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Câu 216. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx=\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\,dx=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\,dx$

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

Câu 217. . Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,dx=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 218. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1(f'(x))^2\,dx=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Câu 219. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$. Tính $J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx$.

A. $J=1+\ln 4$. **B.** $J=4-\ln 2$. **C.** $J=\ln 2-\frac{1}{2}$. **D.** $J=\frac{1}{2}+\ln 4$.

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx=\int_0^1(x+1)e^x f(x)\,dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$

A. $\dfrac{e-1}{2}$. **B.** $\dfrac{e^2}{4}$. **C.** $e-2$. **D.** $\dfrac{e}{2}$.

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 188. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;2\right]$ và $f\left(2\right)=3$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_0^2 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. -3. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^2 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)=x.f\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2f\left(2\right)-3=3$.

Câu 189. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)$ liên tục trên đoạn [0; 1] và $f\left(1\right)=2$. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right)dx$

Đặt $u=x\Rightarrow du=dx$, $dv=f'\left(x\right)dx$ chọn $v=\int f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)$

$\Rightarrow I=x.f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1.f\left(1\right)-0.f\left(0\right)-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2-1=1$

Chọn A

Câu 190. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left(x+1\right)f'\left(x\right)dx=10$ và $2f\left(1\right)-f\left(0\right)=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$.

A. $I=8$. **B.** $I=-8$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-4$.

Hướng dẫn giải

$A=\int\limits_0^1\left(x+1\right)f'\left(x\right)dx$ Đặt $u=x+1\Rightarrow du=dx$, $dv=f'\left(x\right)dx$ chọn $v=f\left(x\right)$

$\Rightarrow A=\left(x+1\right).f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=10\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=-8$

Chọn B

Câu 191. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và thỏa mãn $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=7$. **C.** $I=13$. **D.** $I=20$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(2x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{f\left(2x\right)}{2}\end{cases}$.

Khi đó: $I=\left.\dfrac{x.f\left(2x\right)}{2}\right|_0^1-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{f\left(2\right)}{2}-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{16}{2}-\dfrac{1}{4}.4=7$.

Câu 192. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-2\right)=1$, $\int\limits_1^2 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_{-2}^0 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=2x-4\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$, đổi cận $x=1\Rightarrow t=-2$, $x=2\Rightarrow t=0$.

$1=\int\limits_1^2 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t\Rightarrow\int\limits_{-2}^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\Rightarrow\int\limits_{-2}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow v=f\left(x\right)$.

Vậy $\int\limits_{-2}^0 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\left.xf\left(x\right)\right|_{-2}^0-\int\limits_{-2}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2f\left(-2\right)-2=2.1-2=0$.

Câu 193. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_1^5 x.f'\left(x\right)dx$.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** -1761.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=f'\left(x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=f\left(x\right)\end{cases}\Rightarrow I=\left.xf\left(x\right)\right|_1^5-\int\limits_1^5 f\left(x\right)dx$.

Từ $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2\Rightarrow\begin{cases}f\left(5\right)=5\ \left(x=1\right)\\f\left(1\right)=2\ \left(x=0\right)\end{cases}$, suy ra $I=23-\int\limits_1^5 f\left(x\right)dx$.

Đặt $t=x^3+3x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(3x^2+3\right)dx\\f\left(t\right)=3x+2\end{cases}$

Đổi cận: Với $t=1\Rightarrow 1=x^3+3x+1\Leftrightarrow x=0$ và $t=5\Rightarrow x^3+3x+1=5\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=23-\int\limits_1^5 f\left(x\right)dx=23-\int\limits_0^1\left(3x+2\right)\left(3x^2+3\right)dx\overset{Casio}{=}\dfrac{33}{4}$

Chọn C

Câu 194. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trong đoạn $\left[1;\mathrm{e}\right]$, biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=1$, $f\left(\mathrm{e}\right)=1$. Khi đó $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x=\left.f\left(x\right).\ln x\right|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}} f\left(x\right).\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=f\left(\mathrm{e}\right)-1=1-1=0$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \to \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$.

Suy ra $I = \int\limits_1^e f'(x).\ln x dx = f(x)\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx = f(e) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Câu 195. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx$ bằng

A. $-\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo giả thiết, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$ nên

$f(0) + f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ta có:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xd\left[f(x)\right] = \left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

Suy ra: $I = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Mặt khác, ta có:

$$f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos x\,dx = \dfrac{1}{2}$$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)dx = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \dfrac{1}{4}$

Vậy $I = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = -\dfrac{1}{4}$.

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0) = f(1) = 1$. Biết $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = ae + b$. Tính biểu thức $Q = a^{2018} + b^{2018}$.

A. $Q = 8$. **B.** $Q = 6$. **C.** $Q = 4$. **D.** $Q = 2$.

Hướng dẫn giải

$$A = \int\limits_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = \underbrace{\int\limits_0^1 e^x f(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int\limits_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \int\limits_0^1 e^x f(x)dx$$

Đặt $u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx$, $dv=e^x dx$ chọn $v=e^x\Rightarrow A_1=e^x.f(x)\Big|_0^1-\underbrace{\int_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$

Vậy $A=e^x f(x)\Big|_0^1-A_2+A_2=e^x f(x)\Big|_0^1=e.f(1)-f(0)=e-1$

$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a^{2018}+b^{2018}=1+1=2$

Chọn D

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2019e^{2018}$. **B.** $f(1)=2018.e^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018.e^{2018}$. **D.** $f(1)=2017.e^{2018}$

.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}=2018.x^{2017}$

$\Leftrightarrow\int_0^1\dfrac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 2018.x^{2017}dx\ \ (1)$

Xets $I=\int_0^1\dfrac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx-\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$

Xét $I_1=\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=2018.e^{-2018x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=-e^{-2018x}\end{cases}$.

Do đó $I_1=f(x).\left(-e^{-2018x}\right)\Big|_0^1+\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx\Rightarrow I=f(1).e^{-2018x}-2018$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(1).e^{-2018x}-2018=x^{2018}\Big|_0^1\Rightarrow f(1)=2019.e^{2018}$.

Câu 198. Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng: $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$ Tính $Q=a^{2017}+b^{2017}$.

A. $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=e^x\end{cases}$.

$\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=e^x f(x)\Big|_1^2-\int_0^1 e^x f'(x)dx+\int_0^1 e^x f'(x)dx=ef(1)-f(0)=e-1$.

Do đó $a=1$, $b=-1$.

Suy ra $Q=a^{2017}+b^{2017}=1^{2017}+(-1)^{2017}=0$.

Vậy $Q=0$.

Câu 199. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;5\right]$ và $f\left(5\right)=10$, $\int\limits_{0}^{5}xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=30$. Tính $\int\limits_{0}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 20. **B.** -30. **C.** -20. **D.** 70.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow v=f\left(x\right)\end{cases}$

$\int\limits_{0}^{5}x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x.f\left(x\right)\right)\Big|_{0}^{5}-\int\limits_{0}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 30=5f\left(5\right)-\int\limits_{0}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x=5f\left(5\right)-30=20$.

Câu 200. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $\left[1;2\right]$. Biết rằng $F\left(1\right)=1$, $F\left(2\right)=4$, $G\left(1\right)=\frac{3}{2}$, $G\left(2\right)=2$ và $\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)G\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{67}{12}$. Tính $\int\limits_{1}^{2}F\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. $\frac{11}{12}$. **B.** $-\frac{145}{12}$. **C.** $-\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{145}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=F\left(x\right)\\ dv=g\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=G\left(x\right)\end{cases}$

$\int\limits_{1}^{2}F\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(F\left(x\right)G\left(x\right)\right)\Big|_{1}^{2}-\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)G\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(2\right)G\left(2\right)-F\left(1\right)G\left(1\right)-\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)G\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=4.2-1.\frac{3}{2}-\frac{67}{12}=\frac{11}{12}$.

Câu 201. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1}x\left[f'\left(x\right)-2\right]\mathrm{d}x=f\left(1\right)$. Giá trị của $I=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_{0}^{1}x\left[f'\left(x\right)-2\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1}2x\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{0}^{1}x\mathrm{d}\left[f\left(x\right)\right]-x^{2}\Big|_{0}^{1}=x.f\left(x\right)\Big|_{0}^{1}-\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-1=f\left(1\right)-I-1.$

Theo đề bài $\int\limits_{0}^{1}x\left[f'\left(x\right)-2\right]\mathrm{d}x=f\left(1\right)\Rightarrow I=-1$.

Câu 202. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$ và $\int\limits_1^2\left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=a$. Tính $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ theo a và $b=f\left(2\right)$.

A. $b-a$. **B.** $a-b$. **C.** $a+b$. **D.** $-a-b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $u=x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ chọn $v=f\left(x\right)$.

$$\int\limits_1^2\left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x-1\right)f\left(x\right)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(2\right)-\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=b-\int\limits_1^2 f\left(x\right).$$

Ta có $\int\limits_1^2\left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow b-\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=b-a$.

Câu 203. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(2x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}f\left(2x\right)\end{cases}$.

Khi đó, $I=x.\dfrac{1}{2}f\left(2x\right)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}f\left(2\right)-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=8-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2$.

Suy ra $I=8-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=8-1=7$.

Câu 204. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua điểm $M\left(-\dfrac{1}{2};4\right)$ và $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f\left(t\right)\mathrm{d}t=3$, tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0\sin 2x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0\sin 2x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0 2\sin x.f'\left(\sin x\right).\cos x\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$\Rightarrow I=2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0 t.f'\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Đặt: $\begin{cases} u = 2t \\ dv = f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = f(t) \end{cases}$.

$\Rightarrow I = 2t.f(t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} - 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt = f\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$.

□ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$.

□ Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(t)dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 3$.

Vậy $I = 4 - 2.3 = -2$.

Câu 205. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx = f(0) = 1$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx = \left(-\cos x.f(x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx$.

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx + \cos x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 1 = 0$.

Câu 206. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x\sin x$. Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$?

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** $\frac{2}{2018}$. **C.** $\frac{2}{1009}$. **D.** $\frac{4}{2019}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(f(-x) + 2018f(x)\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin xdx$

$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx + 2018\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin xdx \Leftrightarrow 2019\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin xdx$ (1)

+ Xét $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin xdx$

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$

$P = 2x.(-\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4$

Từ (1) suy ra $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{2019}$.

Câu 207. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2) \neq 0$ và $g(x)f'(x) = x(x-2)\mathrm{e}^x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x$?

A. -4. **B.** $\mathrm{e}-2$. **C.** 4. **D.** $2-\mathrm{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $g(x)f'(x) = x(x-2)\mathrm{e}^x \Rightarrow g(0) = g(2) = 0$ (vì $f'(0).f'(2) \neq 0$)

$I = \int\limits_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}g(x) = \left(f(x).g(x)\right)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^2 (x^2-2x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 4$.

Câu 208. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x}\mathrm{d}x = 1$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin x.\tan x.f(x)\right]\mathrm{d}x = 2$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

$I = \sin x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{2}}{2} - I_1$.

$2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin x.\tan x.f(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin^2 x.\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1-\cos^2 x).\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x$.

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x.f(x)\mathrm{d}x = 1 - I_1$.

$\Rightarrow I_1 = -1 \Rightarrow I = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{3\sqrt{2}+2}{2}$.

Câu 209. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

A. $I = 12$. **B.** $I = 112$. **C.** $I = 28$. **D.** $I = 144$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'\left(\dfrac{x}{2}\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2f\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$.

Khi đó

$I = \int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^4 - 2\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 128 - 2I_1$ với $I_1 = \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

Đặt $u = \frac{x}{2} \Rightarrow dx = 2du$, khi đó $I_1 = \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^2 f(u)du = 2\int_0^2 f(x)dx = 8$.

Vậy $I = 128 - 2I_1 = 128 - 16 = 112$.

Câu 210. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f(1) = f(0) = 1$, $f'(0) = 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = -2018$.
B. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = -1$.
C. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = 2018$.
D. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét $I = \int_0^1 f''(x)(1-x)dx = \int_0^1 (1-x)d\left(f'(x)\right)$

Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = d\left(f'(x)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = f'(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow I = (1-x)f'(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x)dx = \left[(1-1)f'(1) - f'(0)\right] + f(x)\Big|_0^1 = -f'(0) + \left[f(1) - f(0)\right]$

$= -2018 + (1-1) = -2018$.

Câu 211. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, f(x)dx = \frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

A. -1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos xf(x)dx = \left[\sin xf(x)\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin xf'(x)dx$. Suy ra $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin xf'(x)dx = -\frac{\pi}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 xdx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4}\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}$.

Do đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2 dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)+\sin x\right]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x) = -\sin x$. Do đó $f(x) = \cos x + C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = 0$.

Ta được $f(x) = \cos x \Rightarrow f(2018\pi) = \cos(2018\pi) = 1$.

Câu 212. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x) = e^{2x^2-4x}$, với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$.

A. $I = -\frac{16}{3}$. **B.** $I = -\frac{16}{5}$. **C.** $I = -\frac{14}{3}$. **D.** $I = -\frac{32}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$\ln\left[f(x).f(2-x)\right] = \ln e^{2x^2+4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x$.

Mặt khác, với $x=0$, ta có $f(0).f(2)=1$ và $f(0)=1$ nên $f(2)=1$.

Xét $I = \int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$, ta có $I = \int_0^2 (x^3-3x^2).\frac{f'(x)}{f(x)} dx$

Đặt $\begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2-6x) dx \\ v = \ln f(x) \end{cases}$

Suy ra $I = \left[(x^3-3x^2)\ln f(x)\right]\Big|_0^2 - \int_0^2 (3x^2-6x).\ln f(x) dx = -\int_0^2 (3x^2-6x).\ln f(x) dx$ (1).

Đến đây, đổi biến $x = 2-t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x=0 \to t=2$ và $x=2 \to t=0$.

Ta có $I = -\int_2^0 (3t^2-6t).\ln f(2-t)(-dt) = -\int_0^2 (3t^2-6t).\ln f(2-t) dt$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I = -\int_0^2 (3x^2-6x).\ln f(2-x) dx$ (2).

Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được $2I = -\int_0^2 (3x^2-6x).\left[\ln f(x) + \ln f(2-x)\right] dx$

Hay $I = -\frac{1}{2}\int_0^2 (3x^2-6x).(2x^2-4x) dx = -\frac{16}{5}$.

Cách 2 (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = e^{x^2-2x}$, khi đó:

$I = \int_0^2 \frac{(x^3-3x^2).e^{x^2-2x}.(2x-2)}{e^{x^2-2x}} dx = \int_0^2 (x^3-3x^2).(2x-2) dx = \frac{-16}{5}$.

Câu 213. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I=2-\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}-2$. **C.** $I=\frac{\mathrm{e}}{2}$. **D.** $I=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $A=\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=x\mathrm{e}^x \end{cases}$

Suy ra $A=x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}$

Xét $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Ta có $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_0^1\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f'(x)+x\mathrm{e}^x=0\quad \forall x\in[0;1]$ (do $\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\ge 0\quad \forall x\in[0;1]$)

$\Rightarrow f'(x)=-x\mathrm{e}^x \Rightarrow f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x+C$

Do $f(1)=0$ nên $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-2$.

Câu 214. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=(x-1)^2\mathrm{d}x\Rightarrow v=\frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3}=\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{(x-1)^3}{3}.f(x)\Big|_1^2-\int_1^2\frac{(x-1)^3}{3}f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x=1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x=-14$

Tính được $\int_1^2 49(x-1)^6\mathrm{d}x=7 \Rightarrow \int_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 49(x-1)^6\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow \int_1^2\left[7(x-1)^3-f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=0 \Rightarrow f'(x)=7(x-1)^3 \Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}+C$.

Do $f(2)=0\Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}$.

Vậy $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}\right]\mathrm{d}x=-\frac{7}{5}$.

Câu 215. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.　　**B.** $\frac{5}{2}$.　　**C.** $\frac{7}{4}$.　　**D.** $\frac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9 \ (1)$

- Tính $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \left(\frac{x^4}{4}.f(x)\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4.f'(x)dx = -1 \Rightarrow 18\int_0^1 x^4.f'(x)dx = -18 \ (2)$$

- Lại có: $\int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81\int_0^1 x^8 dx = 9 \ (3)$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[[f'(x)]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8\right]dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)+9x^4\right]dx = 0 \Leftrightarrow \pi.\int_0^1 \left[f'(x)+9x^4\right]dx = 0$$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)+9x^4$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x)+9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x).dx = -\frac{9}{5}x^4 + C.$$

Lại do $f(1)=1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}\right)dx = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Câu 216. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx = \frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)dx$

A. $I = 1$.　　**B.** $I = \frac{1}{2}$.　　**C.** $I = 2$.　　**D.** $I = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases}\sin 2x = u\\ f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\cos 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\\ f(x) = v\end{cases}$, khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = \sin 2x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x = \sin\frac{\pi}{2}.f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0.f(0) - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$$

$= -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$.

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(x) - \cos 2x\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f^2(x) - 2f(x).\cos 2x + \cos^2 2x\right]\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{8} - 2\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ nên $f(x) = \cos 2x$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}$.

Câu 217. . Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u = \cos(\pi x)\\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u = -\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x\\ v = f(x)\end{cases}$.

Khi đó: $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$= -\left(f(1) + f(0)\right) + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Cách 1: Ta có

Tìm k sao cho $\int_0^1 \left[f(x) - k\sin(\pi x)\right]^2 \mathrm{d}x = 0$

Ta có: $\int_0^1 \left[f(x) - k\sin(\pi x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x + k^2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0\Leftrightarrow k=1$.

Do đó $\int_0^1\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$ (do $\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2\geq 0\quad\forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=k.g(x)$, $\forall x\in[a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2\leq\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

suy ra $f(x)=k.\sin(\pi x)$, $k\in\mathbb{R}$.

Mà $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Câu 218. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\end{cases}$

Do đó $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1-\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$.

Lại có: $\int_0^1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I=\int_0^1\left(-\frac{2}{\pi}.f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8}-\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=0$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\geq 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$\int\limits_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi}f'(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Suy ra $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+C$ mà $f(1)=0$ do đó $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\frac{2}{\pi}$.

Câu 219. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$. Tính $J=\int\limits_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx$.

A. $J=1+\ln 4$. **B.** $J=4-\ln 2$. **C.** $J=\ln 2-\frac{1}{2}$. **D.** $J=\frac{1}{2}+\ln 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $J=\int\limits_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx=\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{x}dx-\int\limits_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx+\int\limits_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

Đặt $\begin{cases} u=\frac{1}{x} \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-\frac{1}{x^2}dx \\ v=f(x) \end{cases}$

$J=\int\limits_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{x}.f(x)\Big|_1^2+\int\limits_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx-\int\limits_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx+\int\limits_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}f(2)-f(1)+\left(2\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\ln 4$.

Cách 2: $J=\int\limits_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx=\int\limits_1^2\left(\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int\limits_1^2\left(\frac{f(x)}{x}\right)'dx+\int\limits_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{f(x)}{x}+2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\ln 4$.

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x)=ax+b$. Vì $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$, suy ra $f(x)=3x-2$.

Vậy $J=\int\limits_1^2\left(\frac{5}{x}-\frac{3x-1}{x^2}\right)dx=\left(2\ln|x|-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\ln 4+\frac{1}{2}$.

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1[f'(x)]^2dx=\int\limits_0^1(x+1)e^x f(x)dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{e-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2}{4}$. **C.** $e-2$. **D.** $\frac{e}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

- Tính: $I=\int\limits_0^1(x+1)e^x f(x)dx=\int\limits_0^1 xe^x f(x)dx+\int\limits_0^1 e^x f(x)dx=J+K$.

Tính $K=\int_0^1 e^x f(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u=e^x f(x) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\left[e^x f(x)+e^x f'(x)\right]dx \\ v=x \end{cases}$

$\Rightarrow K=\left(xe^x f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left[xe^x f(x)+xe^x f'(x)\right]dx=-\int_0^1 xe^x f(x)dx-\int_0^1 xe^x f'(x)dx \ \left(\text{do } f(1)=0\right)$

$\Rightarrow K=-J-\int_0^1 xe^x f'(x)dx \Rightarrow I=J+K=-\int_0^1 xe^x f'(x)dx$.

- Kết hợp giả thiết ta được:

$$\begin{cases} \int_0^1\left[f'(x)\right]^2 dx=\dfrac{e^2-1}{4} \\ -\int_0^1 xe^x f'(x)dx=\dfrac{e^2-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1\left[f'(x)\right]^2 dx=\dfrac{e^2-1}{4} & (1) \\ 2\int_0^1 xe^x f'(x)dx=-\dfrac{e^2-1}{2} & (2) \end{cases}$$

- Mặt khác, ta tính được: $\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\dfrac{e^2-1}{4}$ (3).

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$\int_0^1\left(\left[f'(x)\right]^2+2xe^x f'(x)+x^2e^{2x}\right)dx=0 \Leftrightarrow \int_o^1\left(f'(x)+xe^x\right)^2 dx=0 \Leftrightarrow \pi\int_o^1\left(f'(x)+xe^x\right)^2 dx=0$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)+xe^x$, trục Ox, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$\Rightarrow f'(x)+xe^x=0 \Leftrightarrow f'(x)=-xe^x$

$\Rightarrow f(x)=-\int xe^x dx=(1-x)e^x+C$.

- Lại do $f(1)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=(1-x)e^x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x)e^x dx=\left((1-x)e^x\right)\Big|_0^1+\int_0^1 e^x dx=-1+e^x\Big|_0^1=e-2$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=e-2$.

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2 dx=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Tính: $\int_0^1 x^2 f(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\dfrac{x^3}{3} \end{cases}$.

Ta có: $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\dfrac{x^3 f(x)}{3}\Big|_0^1-\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx$

$=\dfrac{1.f(1)-0.f(0)}{3}-\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow -\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1$.

Ta có $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ (1).

$\int\limits_0^1 x^6\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^7}{7}\right|_0^1=\dfrac{1}{7}\Rightarrow \int\limits_0^1 49x^6\mathrm{d}x=\dfrac{1}{7}.49=7$ (2).

$\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow \int\limits_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-14$ (3).

Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 49x^6\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x=7+7-14=0$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \left\{\left[f'(x)\right]^2+14x^3f'(x)+49x^6\right\}\mathrm{d}x=0\Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Do $\left[f'(x)+7x^3\right]^2\ge 0\Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x\ge 0$. Mà $\int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=-7x^3$.

$f(x)=-\dfrac{7x^4}{4}+C$. Mà $f(1)=0\Rightarrow -\dfrac{7}{4}+C=0\Rightarrow C=\dfrac{7}{4}$.

Do đó $f(x)=-\dfrac{7x^4}{4}+\dfrac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{7x^4}{4}+\dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\dfrac{7x^5}{20}+\dfrac{7}{4}x\right)\right|_0^1=\dfrac{7}{5}$.

Cách 2: Tương tự như trên ta có: $\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$7=7\left(\int\limits_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le 7\left(\int\limits_0^1\left(x^3\right)^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)=7\cdot\frac{1}{7}\cdot\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=ax^3$, với $a\in\mathbb{R}$.

Ta có $\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow \int\limits_0^1 x^3.ax^3\mathrm{d}x=-1\Rightarrow \left.\dfrac{ax^7}{7}\right|_0^1=-1\Rightarrow a=-7$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=-\dfrac{7x^4}{4}+C$, mà $f(1)=0$ nên $C=\dfrac{7}{4}$

Do đó $f(x)=\dfrac{7}{4}\left(1-x^4\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{7x^4}{4}+\dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\dfrac{7x^5}{20}+\dfrac{7}{4}x\right)\right|_0^1=\dfrac{7}{5}$.

Chú ý: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Khi đó, ta có $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$.

Chứng minh:
Trước hết ta có tính chất:

Nếu hàm số $h(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b h(x)\mathrm{d}x \ge 0$

Xét tam thức bậc hai $\left[\lambda f(x)+g(x)\right]^2 = \lambda^2 f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+g^2(x) \ge 0$, với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a;b]$ ta được

$$\lambda^2\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda\int\limits_a^b f(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \ge 0 \text{, với mọi } \lambda \in \mathbb{R} \ (*)$$

Coi $(*)$ là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta' \le 0$

$$\Leftrightarrow \left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) \text{ (đpcm)}$$